Invent. math. 84, 617–632 (1986)

Inventiones mathematicae

Espaces homogènes sphériques

M. Brion[1], D. Luna[1], and Th. Vust[2]

[1] Institut Fourier, Université de Grenoble, Domaine Universitaire, F-38402 St. Martin D'Hères, France

[2] Section de Mathématiques, Université de Genève, 2–4 rue du Lièvre, CH-1211 Genève 24, Switzerland

0.1. Soit G un groupe de Lie réel compact connexe, et soit H un sous-groupe fermé de G. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Dans toute représentation continue irréductible de G, l'ensemble des vecteurs invariants par H forme un espace vectoriel de dimension $\leqq 1$.
(2) La multiplicité dans $L^2(G/H)$ de toute représentation continue irréductible de G, est $\leqq 1$.
(3) Le crochet de Poisson de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ G-invariantes sur le fibré cotangent de G/H, est toujours nul.

Que (1)$\Leftrightarrow$(2) est généralement attribué à Frobenius; pour (2)$\Leftrightarrow$(3) voir V. Guillemin-S. Sternberg [7]. Si H vérifie les conditions (1), (2), (3) on dit que H est un sour-groupe sphérique de G, et aussi que l'espace homogène G/H est sphérique. Bien entendu, cette terminologie est inspirée du cas particulier $G = \mathrm{SO}(n+1, \mathbb{R})$ et $H = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. Il est bien connu que les espaces homogènes symétriques sont sphériques, mais il y en a d'autres: voir l'article [9] de M. Krämer, dans lequel sont classifiés les sour-groupes sphériques des groupes de Lie compacts simples.

0.2. Il est naturel de considérer la situation algébrique analogue, où G est un groupe algébrique réductif connexe et où H est un sous-groupe algébrique de G (le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle). Les conditions suivantes, toutes équivalentes, remplacent alors les conditions (1), (2), (3):

(1′) Quel que soit le G-fibré en droites L sur G/H, la multiplicité dans $H^0(G/H, L)$ (l'espace des sections globales de L) de toute représentation rationnelle irréductible de G, est $\leqq 1$.
(2′) Le groupe H a une orbite ouverte dans l'espace des drapeaux de G.
(3′) Le groupe H n'a qu'un nombre fini d'orbites dans l'espace des drapeaux de G.
(4′) Quelle que soit la G-variété algébrique Z et quel que soit $z \in {}^H Z$ (l'ensemble des points fixes de H dans Z), G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\overline{G \cdot z}$ (l'adhérence dans Z de l'orbite de G passant par z).

Pour (1')⇔(2') voir E.B. Vinberg-B.N. Kimel'feld [22]; pour (2')⇒(3') [4]; pour (2')⇒(4') F.J. Servedio [20] ou [12]; enfin pour (4')⇒(1') voir D. Ahiezer [1]. Si H vérifie les conditions (1'), (2'), (3'), (4') nous dirons que H est un sous-groupe sphérique de G, et que l'espace homogène G/H est sphérique. Les sous-groupes symétriques, c'est-à-dire les sous-groupes formés des points fixes d'un automorphisme involutif, sont sphériques (voir [23]). Les exemples de M. Krämer (loc. cit.) fournissent d'autres sous-groupes sphériques réductifs. Mais il y a aussi beaucoup de sous-groupes sphériques non réductifs, par exemple ceux qui contiennent un sous-groupe unipotent maximal de G.

0.3. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. Le §1 de notre article concerne la structure des G-variétés algébriques générales.

Soit Z une G-variété algébrique normale et soit $z \in Z$. Supposons que l'orbite $G \cdot z$ soit une variété projective, autrement dit, supposons que le groupe d'isotropie G_z soit un sous-groupe parabolique de G. Choisissons un sous-groupe parabolique P de G, opposé à G_z. Désignons par P^u le radical unipotent de P. Posons $L = G_z \cap P$: c'est un sous-groupe de Levi de P, c'est-à-dire L est réductif et $P = LP^u$. Le résultat principal du §1 est le suivant:

Théorème (1.4). *Il existe des sous-variétés (localement fermées) affines W de Z possédant les propriétés suivantes:*

1) *W contient z et est stable par L;*
2) *$P^u \cdot W$ est ouvert dans Z;*
3) *l'opération de P^u dans Z induit un isomorphisme de variétés algébriques $P^u \times W \xrightarrow{\sim} P^u \cdot W$.*

Le §1 se termine par deux applications de ce théorème (1.5 et 1.6).

0.4. Dans le reste de l'article, nous appliquons les résultats du §1 à l'étude des espaces homogènes sphériques.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et soit H un sous-groupe sphérique de G au sens de 0.2. Fixons un sous-groupe de Borel B de G tel que BH soit ouvert dans G. Désignons par P l'ensemble des $s \in G$ tels que $sBH = BH$: c'est un sous-groupe parabolique de G, qui contient B. Désignons par $\mathscr{P}_{++}$ l'ensemble des fonctions régulières f sur G telles que $f^{-1}(0) = G - BH$ (ensemblistement). Si $f \in \mathscr{P}_{++}$, notons $df(1)$ l'élément de la représentation coadjointe de G obtenu en évaluant la différentielle de f en l'élément neutre de G. Posons $L^f = G_{df(1)}$, et notons C^f le centre connexe de L^f. Les résultats principaux des §§ 2 et 3 sont les suivants:

Théorème (2.4, 3.4 et 3.5). *Quel que soit $f \in \mathscr{P}_{++}$, le groupe L^f est un sous-groupe de Levi de P, et possède les propriétés suivantes:*

1) *$L^f \cap H = P \cap H$, et ce groupe est réductif;*
2) *le groupe dérivé de L^f est contenu dans H;*
3) *quelle que soit la G-variété algébrique Z et quel que soit $z \in {}^H Z$, $P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$ contient un ouvert non vide de toute orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$.*

Disons deux mots sur la démonstration de ce théorème: l'idée consiste à «compactifier» G/H en le plongeant comme orbite dans un espace projectif judicieusement choisi, puis à utiliser les résultats du §1 pour un point d'une orbite fermée (donc projective) dans l'adhérence de G/H.

Dans le dernier §, nous apportons quelques compléments: nous considérons d'abord brièvement le cas des espaces homogènes symétriques (4.1); puis, revenant au cas général, nous montrons qu'un sous-groupe de P^u opère transitivement dans l'ensemble des sous-groupes de Levi de P qui possèdent les propriétés du théorème précédent (4.2).

Mentionnons enfin que les résultats des §§2–4 sont motivés par (et ont des applications dans) la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques, théorie esquissée dans [12], 8.10; nous espérons revenir là-dessus dans des articles ultérieurs.

Nous remercions H. Kraft et G. Menzel, qui ont contribué à améliorer les démonstrations du §1 (pour un état antérieur, voir [11]). Nous remercions également F. Pauer, dont les exemples ([14], [15]) nous ont été précieux.

1. Structure locale au voisinage d'une orbite complète

Nous suivons la terminologie et les notations de [3].

Soit G un groupe algébrique réductif connexe (le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle). On désigne par $\mathfrak{G}$ l'algébre de Lie de G.

1.1. Soit N un G-module rationnel de dimension finie. On note N' le G-module dual de N. Si E est un sous-espace de N', on désigne par $E^{\perp}$ le sous-espace de N orthogonal à E. Si $x \in N-\{0\}$, on note $\bar{x}$ la projection de x dans l'espace projectif $\mathbb{P}(N)$.

Choissons $\eta \in N'-\{0\}$ et $y \in N-\{0\}$ tels que les orbites $G\cdot\bar{\eta}$ et $G\cdot\bar{y}$ soient fermées dans $\mathbb{P}(N')$ et $\mathbb{P}(N)$, et tels que $\langle\eta, y\rangle = 1$. On pose $P = G_{\bar{\eta}}$, et on note P^u le radical unipotent de P.

Lemme. *Le sous-espace vectoriel* $(\mathfrak{G}\cdot\eta)^{\perp}$ *de* N *est stable par* P, *et* $N = \mathfrak{G}\cdot y \oplus (\mathfrak{G}\cdot\eta)^{\perp}$.

Preuve. Puisque η est un vecteur propre de P, $\mathfrak{G}\cdot\eta$ et $(\mathfrak{G}\cdot\eta\Psi^{\perp}$ sont stables par P.

Choisissons un tore maximal T dans $P \cap G_{\bar{y}}$ et notons $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. On écrit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{G}^{\alpha}$$

la décomposition de $\mathfrak{G}$ sous l'opération de T (R étant le système de racines). Pour $\alpha \in R$, désignons par U^{α} le sous-groupe connexe de G normalisé par T dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}^{\alpha}$ et par G^{α} le centralisateur dans G de la composante neutre de $\operatorname{Ker}(\alpha)$ ([3], §13).

On observe que $P = G_{\bar{\eta}}$ et $G_{\bar{y}}$ sont deux sous-groupes paraboliques de G qui sont opposés (c'est-à-dire $P \cap G_{\bar{y}}$ est un sous-groupe de Levi de P et $G_{\bar{y}}$). En effet, on a $G_{\bar{y}} \cap G_{\bar{\eta}} = G_{\overline{y \otimes \eta}}$ où $y \otimes \eta \in N \otimes N'$; si $U^\alpha \subset G_{\bar{y}} \cap G_{\bar{\eta}}$, on a aussi $U^\alpha \subset G_{y \otimes \eta}$, d'où $TU^\alpha \subset G_{y \otimes \eta}$ puisque $\langle \eta, y \rangle = 1$; comme TU^α est un sous-groupe de Borel de G^α, il s'ensuit que $G^\alpha \subset G_{y \otimes \eta} \subset G_{\bar{y}} \cap G_{\bar{\eta}}$, ce qui démontre l'assertion.

Si A est le sous-ensemble de R tel que $\operatorname{Lie} P^u = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{G}^\alpha$, on a

$$\mathfrak{G} \cdot y = ky \oplus \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{G}^\alpha \cdot y \quad \text{et} \quad \mathfrak{G} \cdot \eta = k\eta \oplus \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{G}^{-\alpha} \cdot \eta .$$

De plus, pour $\alpha \in A$, on a

$$\langle \mathfrak{G}^{-\alpha} \cdot \eta, \mathfrak{G}^\alpha \cdot y \rangle = \langle \eta, [\mathfrak{G}^{-\alpha}, \mathfrak{G}^\alpha] \cdot y \rangle = \langle \eta, ky \rangle = k .$$

Puisque l'intersection $\mathfrak{G} \cdot y \cap (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$ est stable par T, et que ky et $\mathfrak{G}^\alpha \cdot y$ $(\alpha \in A)$ sont des droites propres de T de poids différents, il s'ensuit que $\mathfrak{G} \cdot y \cap (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp = \{0\}$. De là et de $\dim \mathfrak{G} \cdot y = \dim \mathfrak{G} \cdot \eta$, on déduit que $N = \mathfrak{G} \cdot y \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$.

1.2. On conserve les notations et les hypothèses de 1.1.

Proposition. *L'opération de P^u dans N et $\mathbb{P}(N)$ induit les isomorphismes de variétés algébriques*

$$P^u \times (k^* y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp) \xrightarrow{\sim} N - (k\eta)^\perp$$

et

$$P^u \times [\mathbb{P}(ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp) - \mathbb{P}((\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp)] \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}((k\eta)^\perp) .$$

Preuve. Notons K l'ensemble des $s \in \mathrm{GL}(N)$ tels que $s \cdot (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp \subset (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$ et $s \cdot (k\eta)^\perp \subset (k\eta)^\perp$; notons S l'ensemble des $s \in K$ tels que $s \cdot y \in ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$: ce sont des sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}(N)$. On vérifie sans peine que $K/S \simeq k^{\dim P^u}$, que $K_y \subset K_{\bar{y}} \subset S$ et qu'on a

$$K \cdot y = N - (k\eta)^\perp ;$$
$$S \cdot y = k^* y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp ;$$
$$K \cdot \bar{y} = \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}((k\eta)^\perp) ;$$
$$S \cdot \bar{y} = \mathbb{P}(ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp) - \mathbb{P}((\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp) .$$

L'image de P (resp. de $G_{\bar{y}} \cap P$) par le morphisme $G \to \mathrm{GL}(N)$ tombe dans K (resp. dans S) et P^u se plonge comme sous-groupe dans K. Pour tout $\alpha \in A$, on a

$$\mathfrak{G}^\alpha \cdot y \cap [ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp] = \{0\}$$

(voir la preuve du lemme précédent). Puisque les U^α sont unipotents et que nous sommes en caractéristique nulle, il s'ensuit que les $U^\alpha \cap S$ sont réduits à l'élément neutre. Comme $P^u \cap S$ est engendré par les U^α qu'il contient (car $P^u \cap S$ est normalisé par $G_{\bar{y}} \cap P$), il s'ensuit que $P^u \cap S$ est réduit à l'élément neutre. Par conséquent, l'orbite de P^u dans K/S passant par S/S est ouverte et isomorphe à P^u. On sait que les orbites d'un groupe unipotent opérant dans une variété affine sont toutes fermées ([25], th. 2). Il s'ensuit que $P^u \xrightarrow{\sim} K/S$, autrement dit la multiplication dans K induit un isomorphisme $P^u \times S \xrightarrow{\sim} K$. Vu les propriétés de K et de S énumérées plus haut, les assertions de la proposition en résultent aussitôt.

1.3. Le lemme qui suit est une reformulation de la proposition précédente; il ne servira qu'au § suivant (voir 2.4). Soit M un G-module rationnel irréductible. Soit $\eta \in M' - \{0\}$ tel que l'orbite $G \cdot \bar{\eta}$ soit fermée dans $\mathbb{P}(M')$. On pose $P = G_{\bar{\eta}}$.

Lemme. *Pour tout $x \in M$ tel que $\langle \eta, x \rangle \neq 0$, il existe un unique $y \in M - \{0\}$ vérifiant:*
1) *$G \cdot \bar{y}$ est fermé dans $\mathbb{P}(M)$;*
2) *$x \in y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$.*

Preuve. Choisissons $y_0 \in M - (k\eta)^{\perp}$ tel que $G \cdot \bar{y}_0$ soit fermé dans $\mathbb{P}(M)$. D'après 1.2, l'opération de P^u dans M induit un isomorphisme

$$P^u \times (k^* y_0 + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}) \xrightarrow{\sim} M - (k\eta)^{\perp}.$$

Par conséquent, comme $(\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$ est stable par P, pour tout $x \in M - (k\eta)^{\perp}$, il existe $s \in P^u$ et $\lambda \in k^*$ tels que $x \in \lambda s y_0 + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$. Il est clair que $y = \lambda s y_0$ remplit les conditions du lemme.

Soit $x \in M - (k\eta)^{\perp}$ et soient y et y_1 deux éléments de M vérifiant les conditions du lemme. De 2) on tire $\langle \eta, y \rangle = \langle \eta, x \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle$. Le groupe G n'a qu'une seule orbite fermée dans $\mathbb{P}(M)$, d'où, grâce à 1) et $\langle \eta, y \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle$, il existe $s \in P^u$ tel que $sy = y_1$. De 2) on obtient aussi $y \in y_1 + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$, c'est-à-dire $y \in sy + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp} = s(y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp})$, d'où il suit, grâce à l'injectivité de l'isomorphisme

$$P^u \times (k^* y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}) \xrightarrow{\sim} M - (k\eta)^{\perp},$$

que $s = 1$ et que $y = y_1$.

1.4. Soit Z une G-variété algébrique (non nécessairement quasi-projective) normale, et soit $z \in Z$. On suppose que l'orbite $G \cdot z$ est une variété projective, autrement dit que G_z est un sous-groupe parabolique de G. Choisissons un sous-groupe parabolique P de G, opposé à G_z. Désignons par P^u le radical unipotent de P. Posons $L = P \cap G_z$: c'est un sous-groupe de Levi de P (et de G_z), c'est-à-dire L est réductif et $P = LP^u$.

Théorème. *Il existe des sous-variétés (localement fermées) affines W de Z possédant les propriétés suivantes:*
1) *W contient z et est stable par L;*
2) *$P^u \cdot W$ est ouvert dans Z;*
3) *l'opération de P^u dans Z induit un isomorphisme $P^u \times W \xrightarrow{\sim} P^u \cdot W$.*

Preuve. D'après un résultat de Sumihiro ([21]), quitte à remplacer Z par un voisinage ouvert G-stable de z convenable, on peut supposer qu'il existe un espace vectoriel de dimension finie N, un morphisme de groupes algébriques $G \to PGL(N)$, et un plongement $Z \to \mathbb{P}(N)$, plongement qui commute aux opérations de G.

Soit $y \in N - \{0\}$ tel que $\bar{y} = z$. Il est clair qu'on peut trouver $\eta \in N'$ vérifiant $\langle \eta, y \rangle = 1$ et $G_{\bar{\eta}} = P$. Posons

$$U = Z - \mathbb{P}((k\eta)^{\perp})$$

et

$$W_1 = U \cap \mathbb{P}(ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}).$$

Il est clair que W_1 est stable par L. D'après 1.2, l'opération de P^u dans Z induit un isomorphisme

$$P^u \times W_1 \xrightarrow{\sim} U.$$

En général, la variété W_1 est seulement quasi-affine, mais tout voisinage L-stable affine W de z dans W_1 (z est laissé fixe par L qui est réductif, voir [13], p. 29) remplit toutes les conditions du théorème.

Remarques

1. L'hypothèse de normalité de la variété Z n'est intervenue dans la preuve du théorème qu'à travers le résultat de Sumihiro, et peut donc être remplacée par une hypothése de «projectivité» de l'opération de G dans Z au voisinage de z.
2. Que reste-t-il du théorème en caractéristique positive (en supposant au besoin l'application $G \to G \cdot y \subset Z$ séparable)?

1.5. Voici une première application du théorème 1.4.

Corollaire. *Soit Z une G-variété algébrique lisse, connexe, complète et de dimension n. On suppose qu'un sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans Z. Alors tout point de Z possède un voisinage isomorphe à l'espace affine k^n.*

Preuve. Puisque toute orbite contient dans son adhérence une orbite fermée, il suffit de démontrer le corollaire pour tout $z \in Z$ dont l'orbite $G \cdot z$ est fermée, c'est-à-dire est projective. Les conditions de 1.4 sont alors remplies: soient P, L et W comme dans le théorème précédent. Puisqu'on suppose qu'un sous-groupe de Borel a une orbite ouverte dans Z, P a une orbite ouverte dans $P^u \cdot W$, donc L a une orbite ouverte dans W. Comme L est réductif, que W est une L-variété lisse et affine, et que L possède un point fixe dans W, on sait que W est L-isomorphe à un espace vectoriel dans lequel L opère linéairement (voir [10], p. 99). Par conséquent, le voisinage $P^u \cdot W$ de z, qui est isomorphe à $P^u \times W$, est isomorphe à k^n.

Remarque. Pour des exemples de variétés remplissant les hypothèses du corollaire, voir [5].

1.6. Voici une seconde application du théorème 1.4.

Soit H un groupe algébrique (affine) et soit Z une H-variété algébrique irréductible. Nous dirons que les groupes d'isotropie génériques de H dans Z sont conjugués, s'il existe un ouvert non vide Ω de Z tel que les H_z, $z \in \Omega$ soient conjugués deux à deux par H. On dispose de divers résultats sur l'isotropie générique (voir [18], [19], [6]): par exemple, si H est réductif et si Z est affine et lisse, alors les groupes d'isotropie génériques sont conjugués; d'un autre côté, dès que H contient un nombre non dénombrable de sous-groupes algébriques (unipotents) deux à deux non isomorphes, on sait qu'il existe des H-variétés dont les groupes d'isotropie génériques ne sont pas conjugués ([18], § 12).

Corollaire. *Soit G un groupe réductif (connexe) et soit B un sous-groupe de Borel de G. Quelle que soit la G-variété algébrique irréductible Z, les groupes d'isotropie génériques de B (et de B^u) dans Z sont conjugués.*

Preuve. Raisonnons par récurrence sur le rang semi-simple de G. Si ce rang est nul, $G=B$ est un tore, et les assertions du corollaire sont évidentes. Dans le cas général, quitte à remplacer Z par une G-variété qui lui est birationellement équivalente, on peut supposer Z normale et complète (voir [21]). On peut également supposer que la partie semi-simple de G n'opère pas trivialement dans Z. D'après [24], il existe alors $z \in Z - {}^G Z$ dont l'orbite $G \cdot z$ est fermée dans Z. Puisque Z est complète, $G \cdot z$ est projective. Le théorème précédent s'applique: soient P, L et W comme dans 1.4. On peut supposer que $B \subset P$. Puisque le rang semi-simple de L est strictement inférieur au rang semi-simple de G, les assertions du corollaire sont vraies, par hypothèse de récurrence, pour l'opération de L dans W. Puisque $P^u \cdot W$ est ouvert dans Z et que $P^u \times W \xrightarrow{\sim} P^u \cdot W$ est un isomorphisme, ces assertions sont alors manifestement aussi vraies pour l'opération de G dans Z.

2. Définitions et préliminaires

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit H un sous-groupe algébrique (non nécessairement réductif ni connexe) de G. Dans toute la suite, on supposera que H est sphérique: autrement dit, on supposera que H possède une orbite ouverte dans l'espace des drapeaux de G.

Fixons un sous-groupe de Borel B de G tel que BH soit ouvert dans G; ce choix n'est pas unique, mais deux tels B sont conjugués par H. Notons P l'ensemble des $s \in G$ tels que $sBH = BH$: c'est un sous-groupe parabolique de G contenant B.

Pour tout groupe algébrique K, nous noterons K^0 la composante connexe neutre de K.

2.1. Notons $k[G]$ l'algébre des fonctions régulières sur G. Désignons par $\mathscr{P}_+$ l'ensemble des $f \in k[G]$ possédant les propriétés suivantes:

1) f ne s'annule pas sur BH;
2) f prend la valeur 1 en l'élément neutre de G.

Notons $\mathscr{P}_{++}$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{P}_+$ qui s'annulent partout sur $G-BH$. L'ensemble $G-BH$ est vide ou pur de codimension 1 dans G (car BH/H est un ouvert affine de G/H, comme orbite d'un groupe algébrique résoluble); il s'ensuit que $\mathscr{P}_{++} \neq \emptyset$.

Lemme. 1) *Tout $f \in \mathscr{P}_+$ est vecteur propre pour P opérant par translations à gauche et pour H^0 opérant par translations à droite (dans $k[G]$).*

2) *Quels que soient $f \in \mathscr{P}_{++}$ et $f_1 \in \mathscr{P}_+$, il existe $f_2 \in \mathscr{P}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f_1 f_2 = f^n$.*

Preuve. Soit $f \in \mathscr{P}_+$. La fonction $\tilde{f}$ sur $P \times H^0$ définie par $\tilde{f}(p,h) = f(ph)$ ($p \in P$, $h \in H^0$) est régulière, et partout non nulle. On sait que, sur tout groupe algébrique connexe, les seules fonctions régulières, inversibles, et valant 1 en l'élément neutre sont les caractères ([26]). Par conséquent, il existe un caractère α de P et un caractère β de H^0 tels que $\tilde{f}(p,h) = \alpha(p)\beta(h)$ ($p \in P$, $h \in H^0$). Le morphisme $P \times H^0 \to BH \subset G$ induit par la multiplication est dominant et commute aux translations à gauche par P et à droite par H^0. La première assertion du lemme est démontrée.

Soient $f \in \mathscr{P}_{++}$ et $f_1 \in \mathscr{P}_+$. Puisque $k[G]$ est un anneau de Krull, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f^n/f_1 appartient à $k[G]$. Il est clair que $f_2 = f^n/f_1$ et n conviennent.

2.2. Lemme. 1) *Si M est un G-module rationnel simple et si $x \in M - \{0\}$ est un vecteur propre pour H^0, alors il existe $\eta \in M'$ tel que la fonction $f \in k[G]$ définie par $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$ $(s \in G)$ appartienne à $\mathscr{P}_+$.*

2) *Inversement, si $f \in \mathscr{P}_+$, il existe un G-module rationnel simple M, un $x \in M$ et un $\eta \in M'$, tels que $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$ $(s \in G)$, et le triplet M, x, η est unique à isomorphisme près.*

Preuve. 1) On sait qu'il existe un unique hyperplan de M, stable par B. Cet hyperplan ne peut contenir x (sinon il contiendrait aussi $G \cdot x \subset \overline{BH \cdot x} \subset \overline{B \cdot kx}$, ce qui n'est pas possible). Par suite, on peut trouver $\eta \in M'$, vecteur propre sous B, et vérifiant $\langle \eta, x \rangle = 1$. Comme $BH = BH^0$, on voit que la fonction f définie par $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$ $(s \in G)$ appartient à $\mathscr{P}_+$.

2) Notons $\hat{G}$ l'ensemble des (classe d'isomorphie de) G-modules rationnels simples. Il est bien connu que l'application

$$\varphi : \bigoplus_{M \in \hat{G}} M' \otimes M \to k[G]$$

définie par $\varphi(\xi \otimes x)(s) = \langle \xi, sx \rangle$ $(\xi \in M',\ x \in M,\ s \in G)$ est un isomorphisme de $G \times G$-modules (appelé parfois l'isomorphisme de Frobenius). La partie 2) du lemme en résulte aussitôt en prenant pour M le sous-G-module de $k[G]$ (relativement aux translations à droite) engendré par f.

2.3. Soit $f \in \mathscr{P}_+$, et soit M le G-module rationnel simple tel qu'il existe $\eta \in M'$ et $x \in M$ vérifiant $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$, $s \in G$ (voir 2.2).

Lemme. *On a $P \subset G_{\bar{\eta}}$. Si $f \in \mathscr{P}_{++}$, on a même $P = G_{\bar{\eta}}$.*

Preuve. Soit $s \in P$. D'après 2.1, il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que

$$\begin{aligned} \langle s \cdot \eta, t \cdot x \rangle &= \langle \eta, s^{-1} t \cdot x \rangle = f(s^{-1} t) = \lambda f(t) \\ &= \lambda \langle \eta, t \cdot x \rangle = \langle \lambda \eta, t \cdot x \rangle , \end{aligned}$$

quel que soit $t \in G$. Puisque $G \cdot x$ engendre l'espace vectoriel M, il s'ensuit que $s \cdot \eta = \lambda \eta$, d'où $P \subset G_{\bar{\eta}}$.

Si $s \in G_{\bar{\eta}}$, alors il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que $s \cdot \eta = \lambda \eta$, d'où on déduit aussitôt que la translation à gauche par s laisse stable $f^{-1}(0)$. Si $f \in \mathscr{P}_{++}$, cette translation laisse alors aussi stable $BH = G - f^{-1}(0)$, autrement dit $s \in P$.

2.4. Si $f \in k[G]$, notons $df(1) \in \mathfrak{G}'$ l'élément de la représentation coadjointe de G obtenu en évaluant la différentielle de f en l'élément neutre de G.

Soit $f \in \mathscr{P}_{++}$, et soient M, x, η comme dans 2.2. D'aprés 1.3, puisque $\langle \eta, x \rangle = 1 \neq 0$, il existe un unique $y \in M - \{0\}$ vérifiant:

1) $G \cdot \bar{y}$ est fermé dans $\mathbb{P}(M)$;

2) $x \in y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$.

Lemme. *On a $G_{df(1)} = G_{\bar{\eta}} \cap G_{\bar{y}}$; en particulier $G_{df(1)}$ est un sous-groupe de Levi de $P = G_{\bar{\eta}}$.*

Preuve. Posons $L = G_{\bar{\eta}} \cap G_{\bar{y}}$. Pour tout $s \in P = G_{\bar{\eta}}$, écrivons $s = ul$, avec $u \in P^u$ et $l \in L$. Notons χ le caractère de L tel que $s \cdot \eta = \chi(l) \eta$; ce caractère vérifie aussi $l \cdot y$

$=\chi(l)^{-1}y$, quel que soit $l \in L$. Si $X \in \mathfrak{G}$, on a

$$\begin{aligned}\langle s \cdot df(1), X\rangle &= \langle s \cdot \eta, Xs \cdot x\rangle = -\chi(l)\langle X\eta, sx\rangle = -\chi(l)\langle X\eta, sy\rangle \\ &= -\langle X\eta, uy\rangle.\end{aligned}$$

De 1.2 résulte que $uy - y \in (\mathfrak{G} \cdot \eta)^{\perp}$ si et seulement si $u = 1$. Autrement dit, $P_{\mathrm{df}(1)} = L$.

L'orbite $P \cdot \mathrm{df}(1) = P^u \cdot \mathrm{df}(1)$ est fermée dans $\mathfrak{G}'$, car P^u est unipotent. Puisque G/P est complet, il s'ensuit que l'orbite $G \cdot \mathrm{df}(1)$ est aussi fermée dans $\mathfrak{G}'$. Par suite $G_{\mathrm{df}(1)}$ est réductif. Il s'ensuit que $G_{\mathrm{df}(1)}$ est connexe (car $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ sont G-isomorphes, et $X \in \mathfrak{G}$ est semi-simple si et seulement si $G \cdot X$ est fermé, et G_X est connexe si $X \in \mathfrak{G}$ est semi-simple). Puisque tout sous-groupe réductif connexe de G qui contient strictement L coupe P^u non trivialement, et que $G_{\mathrm{df}(1)} \cap P^u = \{1\}$, on a $G_{\mathrm{df}(1)} = P_{\mathrm{df}(1)} = L$, c.q.f.d.

2.5. Pour tout $f \in \mathscr{P}_{++}$, posons $L^f = G_{\mathrm{df}(1)}$. D'après 2.4, les L^f, $f \in \mathscr{P}_{++}$ sont des sous-groupes de Levi de P. Lorsque $f = f_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{n_r}$, où $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{P}_+$ et où $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a $\mathrm{df}(1) = n_1 \,\mathrm{df}_1(1) + \ldots + n_r \,\mathrm{df}_r(1)$. Il s'ensuit que $L^{f^n} = L^f$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$. Par contre, si f_1 et f_2 sont deux éléments différents de $\mathscr{P}_{++}$, on a en général $L^{f_1} \neq L^{f_2}$, comme on peut le constater sur l'exemple simple suivant.

On pose $G = SL(3, k)$. On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de k^3, et e'_1, e'_2, e'_3 la base duale. Soit H le sous-groupe des éléments de G qui fixent $e_1 + e_3$ et $e'_1 + e'_3$: le groupe H est isomorphe à $SL(2, k)$. Soit B le sous-groupe de Borel standard de G (formé des matrices de G qui ont une forme triangulaire supérieure). On vérifie sans peine que BH est ouvert dans G et que $P = B$. Définissons $f_1, f_2 \in k[G]$ par $f_1(s) = \langle e'_3, s(e_1 + e_3)\rangle$, $f_2(s) = \langle e_1, s(e'_1 + e'_3)\rangle$ $(s \in G)$. On vérifie sans peine que $\mathscr{P}_+$ est l'ensemble des f qui s'écrivent (de façon unique) sous la forme

$$f = f_1^{n_1} f_2^{n_2}, \quad \text{où} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Si on identifie $\mathfrak{G}'$ et $\mathfrak{G}$ au moyen de la forme bilinéaire $\operatorname{Tr} XY$ $(X, Y \in \mathfrak{G})$, on obtient

$$\mathrm{df}_1(1) = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{df}_2(1) = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre que

$$L^{f_1^{n_1} f_2^{n_2}} = s(n_1, n_2) T s(n_1, n_2)^{-1},$$

où T est le tore standard de G (formé des matrices de G qui ont une forme diagonale) et où

$$s(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Démonstration des résultats principaux

On conserve les notations et les hypothèses du § précédent.

3.1. Soit N un G-module rationnel de dimension finie, soit $z \in {}^H\mathbb{P}(N)$ et soit Y une orbite fermée de G dans $\overline{G \cdot z}$. Nous allons associer à un tel triplet un unique élément de $\mathscr{P}_+$, élément que nous noterons $f_{N,z,Y}$.

Désignons par M l'unique sous-G-module irréductible de N tel que $Y \subset \mathbb{P}(M)$. Choisissons $x \in N - \{0\}$ tel que $\bar{x} = z$. Choisissons $\eta \in N'$, vecteur propre sous B, non nul sur M et vérifiant $\langle \eta, x \rangle = 1$ (de tels η existent car $Y \subset \overline{G \cdot z}$ et $z \in {}^H\mathbb{P}(N)$). Montrons que la fonction $f \in \mathscr{P}_+$ définie par $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$ ($s \in G$) ne dépend que de N, z et Y (et non des choix de x et η).

Soit $\eta_1 \in N'$ un autre vecteur propre sous B qui est non nul sur M et qui vérifie $\langle \eta_1, x \rangle = 1$. Il suffit de montrer que $\langle \eta, sx \rangle = \langle \eta_1, sx \rangle$ quel que soit $s \in G$. Puisque ni η, ni η_1 ne sont nuls sur M, ils ont même poids sous B. Par suite, $\eta - \eta_1$ est un vecteur propre sous B tel que $\langle \eta - \eta_1, x \rangle = 0$. De

$$\langle \eta - \eta_1, BH \cdot x \rangle = \langle B \cdot (\eta - \eta_1), H \cdot x \rangle \subset k \langle \eta - \eta_1, x \rangle = 0$$

suit $\langle \eta - \eta_1, G \cdot x \rangle = 0$, d'où le résultat voulu.

3.2. Soient N, z, Y comme dans 3.1. Soit $f \in \mathscr{P}_{++}$. Pour la définition de L^f, voir 2.5.

Lemme. *On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_{N,z,Y} = f^n$. Il existe alors un ouvert affine U de $\overline{G \cdot z}$ possédant les propriétés suivantes:*

1) *U est stable par P;*
2) *U rencontre Y;*
3) *l'opération de P^u dans U induit un isomorphisme $P^u \times \overline{L^f \cdot z}^U \xrightarrow{\sim} U$ (ici $\overline{L^f \cdot z}^U$ désigne l'adhérence de $L^f \cdot z$ dans U).*

Preuve. Soient $x \in N$, $\eta \in N'$ et $M \subset N$ comme dans 3.1. Le sous-G-module M_1 de N' engendré par η s'identifie de manière naturelle à M'. Notons x_1 la projection de x sur M le long de $M_1^\perp$. Soit y l'unique élément de M vérifiant $x_1 \in y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$ et $\bar{y} \in Y$ (voir 1.3). Puisque par hypothèse $f_{N,z,Y} = f^n$, et que $f_{N,z,Y}(s) = \langle \eta, sx \rangle = \langle \eta, sx_1 \rangle$, on a $G_{\bar{\eta}} = P$ (2.3) et $L^f = L^{f^n} = G_{\bar{\eta}} \cap G_{\bar{y}}$ (2.4). Il est clair qu'on a aussi $x \in y + (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp$. Posons

$$U = \overline{G \cdot z} - \mathbb{P}((k\eta)^\perp)$$

et

$$W = \overline{G \cdot z} \cap \mathbb{P}(ky \oplus (\mathfrak{G} \cdot \eta)^\perp) \cap U .$$

De 1.2 résulte que l'opération de P^u dans U induit un isomorphisme $P^u \times W \to U$ (U est stable par P et W est stable par L^f). Puisque PH est ouvert et dense dans G, $PH \cdot z = P \cdot z$ est ouvert et dense dans U. De l'isomorphisme $P^u \times W \xrightarrow{\sim} U$ résulte alors que $L^f \cdot z$ est ouvert et dense dans W, d'où $W = \overline{L^f \cdot z}^U$.

3.3. Soient N, z, Y comme dans 3.1. Soit $f \in \mathscr{P}_{++}$.

Lemme. *Il existe un G-module rationnel de dimension finie $\tilde{N}$, un $\tilde{z}\in {}^H\mathbb{P}(\tilde{N})$, une orbite fermée $\tilde{Y}$ de G dans $\overline{G\cdot\tilde{z}}$, et un morphisme de G-variétés algébriques $\varphi:\overline{G\cdot\tilde{z}}\to\overline{G\cdot z}$ vérifiant*

1) *$\varphi(\tilde{z})=z$ et $\varphi(\tilde{Y})=Y$;*

2) *il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f_{\tilde{N},\tilde{z},\tilde{Y}}=f^n$;*

3) *toute orbite de G dans $\overline{G\cdot z}$ contenant Y dans son adhérence est l'image par φ d'une orbite de G dans $\overline{G\cdot\tilde{z}}$ contenant $\tilde{Y}$ dans son adhérence.*

Preuve. Choisissons $x\in N$ et $x\in N'$ comme dans 3.1. Posons $f_1=f_{N,z,Y}$; on a $f_1(s)=\langle\eta,sx\rangle$, $s\in G$. D'après 2.1, il existe $f_2\in\mathscr{P}_+$ et $n\in\mathbb{N}$ tels que $f_1f_2=f^n$. Soit M_2 le G-module rationnel simple tel qu'il existe $\eta_2\in M_2'$ et $x_2\in M_2$ vérifiant $f_2(s)=\langle\eta_2,sx_2\rangle$, $s\in G$ (voir 2.2). Désignons par Y_2 l'unique orbite fermée de G dans $\mathbb{P}(M_2)$. Posons $\tilde{N}=M_2\otimes N$ et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{z}=(\bar{x}_2,\bar{x})\in & \mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N) & \\ \| & \downarrow & \\ \overline{x_2\otimes x}\in & \mathbb{P}(M_2\otimes N)=\mathbb{P}(\tilde{N}) \,. & \end{array}$$

Notons $\tilde{Y}$ l'unique orbite fermée de G dans $Y_2\times Y\subset\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N)\hookrightarrow\mathbb{P}(\tilde{N})$. Désignons par φ la restriction à $\overline{G\cdot\tilde{z}}\subset\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N)$ de la projection $\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N)\to\mathbb{P}(N)$.

Il est clair que φ envoie $\overline{G\cdot\tilde{z}}$ sur $\overline{G\cdot z}$, qu'il s'agit d'un morphisme de G-variétés algébriques, et qu'on a $\varphi(\tilde{z})=z$ et $\varphi(\tilde{Y})=Y$. De plus, on a

$$\langle\eta_2\otimes\eta,s(x_2\otimes x)\rangle=\langle\eta_2,sx_2\rangle\langle\eta,sx\rangle=f_1(s)f_2(s)\,,$$

d'où il suit que $f_{\tilde{N},\tilde{z},\tilde{Y}}=f^n$.

Soit A une orbite de G dans $\overline{G\cdot z}$ telle que $\bar{A}\supset Y$. Toute orbite A_1 de G dans $\overline{G\cdot\tilde{z}}$ telle que $\varphi(A_1)=A$ vérifie alors $\bar{A}_1\supset\tilde{Y}$: en effet, sinon il existerait une orbite fermée de G dans $\overline{G\cdot\tilde{z}}$, différente de $\tilde{Y}$ et se projetant sur Y; mais cela n'est pas possible, car la projection $\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N)\to\mathbb{P}(N)$ induit manifestement une bijection entre l'ensemble des orbites fermées de G dans $\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(N)$ et l'ensemble des orbites fermées de G dans $\mathbb{P}(N)$.

3.4. Théorème.

Pour tout $f\in\mathscr{P}_{++}$,

1) *on a $L^f\cap H=P\cap H$, et ce groupe est réductif;*

2) *les groupes L^f et $P\cap H$ ont même groupe dérivé (en particulier, le groupe dérivé (L^f,L^f) de L^f ne dépend pas de f et est contenu dans H).*

Preuve. Il est connu qu'il existe un G-module rationnel de dimension finie N, et un $z\in\mathbb{P}(N)$ tels que $G_z=H$. D'après 3.3, on peut supposer qu'il existe une orbite fermée Y de G dans $\overline{G\cdot z}$ telle que $f_{N,z,Y}=f^n$, $n\in\mathbb{N}$. De 3.2 résulte alors en particulier que

$$P^u\times L^f\cdot z\xrightarrow{\sim}P\cdot z=B\cdot z\,.$$

Il s'ensuit que $P\cap H=P_z=(L^f)_z=L^f\cap H$. Puisque B est résoluble, l'orbite $B\cdot z$ est affine, donc aussi l'orbite $L^f\cdot z$. Il est bien connu qu'un espace homogène sous un groupe réductif n'est affine que si ses groupes d'isotropie sont réductifs. Il s'ensuit que $(L^f)_z = L^f \cap H$ est réductif.

De $L^f \cdot z \subset B \cdot z$, on tire $L^f \subset B(P \cap H) \subset B(L^f \cap H)$, d'où $L^f = (L^f \cap B)(L^f \cap H)$. La dernière assertion du théorème résulte alors assitôt du lemme suivant.

Lemme. *Soient K un groupe réductif connexe, K_1 un sous-groupe réductif et B un sous-groupe de Borel de K. Si $K = BK_1$, alors K et K_1 ont même groupe dérivé.*

Preuve. De $K = BK_1$ suit que K_1^0 opère transitivement dans K/B, l'espace des drapeaux de K, qui est donc aussi l'espace des drapeaux de K_1^0. Pour tout groupe réductif, la dimension de l'espace des drapeaux est égale à la dimension des sous-groupes unipotents maximaux. Il s'ensuit que tout sous-groupe unipotent maximal de K_1^0 est aussi unipotent maximal dans K. De là résulte aussitôt que $(K, K) = (K_1^0, K_1^0)$; comme $(K_1, K_1) \subset (K, K) = (K_1^0, K_1^0) \subset (K_1, K_1)$, le lemme est démontré.

Notons B^u le radical unipotent de B. On déduit aussitôt du théorème précédent que $B^u \cap H = B^u \cap L^f$: en effet, $B^u \cap H \subset P \cap H \subset L^f \cap H \subset L^f$ et $B^u \cap L^f \subset (L^f, L^f) \subset H$. D'où le corollaire suivant, qui précise le résultat de [16].

Corollaire. *Le groupe $B^u \cap H$ est le sous-groupe unipotent maximal d'un sous-groupe de Levi de P. En particulier, il existe des tores maximaux de B qui normalisent $B^u \cap H$.*

3.5. Pour tout $f \in \mathscr{P}_{++}$, notons C^f la composante connexe neutre du centre de L^f.

Théorème. *Quel que soit $f \in \mathscr{P}_{++}$, quelle que soit la G-variété algébrique Z et quel que soit $z \in {}^H Z$, $P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$ contient un ouvert non vide de toute orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$; en particulier $G \cdot \overline{C^f \cdot z} = \overline{G \cdot z}$.*

Preuve. Soit A une orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$. Il faut montrer que $A \cap P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$ contient un ouvert non vide de A.

Quitte à remplacer la variété Z par sa normalisée, on peut supposer Z normale. Grâce à un résultat de Sumihiro ([21]), on peut ensuite se ramener au cas où $Z = \mathbb{P}(N)$, N étant un G-module rationnel de dimension finie. Grâce à 3.3, on peut alors de plus supposer qu'il existe une orbite fermée Y de G dans $\bar{A} \subset \overline{G \cdot z} \subset \mathbb{P}(N)$ et un entier n tels que $f_{N,z,Y} = f^n$.

D'après 3.2, il existe un ouvert U de $\overline{G \cdot z}$ possédant les propriétés suivantes: U est stable par P, U rencontre Y, et l'opération de P^u dans U induit un isomorphisme $P^u \times \overline{L^f \cdot z}^U \xrightarrow{\sim} U$. De 3.4 suit que $L^f \cdot z = C^f \cdot z$. D'où $A \cap U \subset P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$. Puisque $Y \subset \bar{A}$ et que $Y \cap U \neq \phi$, on a $A \cap U \neq \phi$.

Corollaire (voir aussi [20] et [1]). *Quelle que soit la G-variété Z et quel que soit $z \in {}^H Z$, le groupe G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\overline{G \cdot z}$, et ces orbites sont toutes des espaces homogènes sphériques.*

Preuve. Le groupe C^f étant un tore, C^f n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\overline{C^f \cdot z}$ (voir par exemple [8]). De là et de $\overline{G \cdot z} = G \cdot \overline{C^f \cdot z}$ résulte la première assertion du corollaire et que $P^u C^f$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$. Puisque $P^u \cdot \overline{C^f \cdot z}$ contient un ouvert non vide de toute orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$, $P^u C^f$ (et à plus forte raison B) a une orbite ouverte dans toute orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$.

4. Quelques compléments

4.1. Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit σ un automorphisme involutif de G. Désignons par H le sous-groupe des $s \in G$ tels que $\sigma s = s$. Il est bien connu que H est réductif, et que H est un sous-groupe sphérique au sens de 0.2 (voir par exemple [23]). Un sous-groupe parabolique Q de G est dit σ-anisotrope, si Q et σQ sont des sous-groupes paraboliques opposés de G. Le groupe H opère, par conjugaison, de façon transitive dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques σ-anisotropes minimaux de G (voir loc. cit.).

Choisissons un sous-groupe de Borel B de G tel que BH soit ouvert dans G, et revenons aux notations G, H, B, P, $\mathscr{P}_+$ etc. du § 2. Notons $\mathscr{P}_{++}^H$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}_{++}$ invariants par H opérant par translations à droite. On vérifie sans peine que $\mathscr{P}_{++}^H \neq \phi$ (cela est vrai plus généralement pour les espaces homogènes sphériques quasi-affines, d'après les résultats de [2]).

Proposition.

1) *Le groupe* $P(=\{s \in G,\ sBH = BH\})$ *est un sous-groupe parabolique* σ*-anisotrope minimal de* G.

2) *Pour tout* $f \in \mathscr{P}_{++}^H$, *on a* $L^f = P \cap \sigma P$.

Preuve. Soit $f \in \mathscr{P}_{++}^H$. Soient M un G-module rationnel irréductible, $\eta \in M'$ et $x \in M$, tels que $f(s) = \langle \eta, sx \rangle$, $s \in G$ (voir 2.2). Pour tout $X \in \operatorname{Lie} G$, on a $\langle \mathrm{df}(1), X + \sigma X \rangle = \langle \eta, (X + \sigma X) \cdot x \rangle = 0$ (car $X + \sigma X \in \operatorname{Lie} H$ et $x \in {}^H M$); il s'ensuit que $\sigma(\mathrm{df}(1)) = -\mathrm{df}(1)$, puis que $L^f = G_{\mathrm{df}(1)}$ est laissé stable par σ.

Comme BH est ouvert dans G, le sous-groupe B est contenu dans un sous-groupe parabolique σ-anisotrope minimal Q de G ([23], p. 322). Le radical R de Q vérifie les deux conditions: $B \supset R$ et $RH = QH$ (ibid.). On a alors

$$BH \subset QH = RH \subset BH,$$

d'où $Q \subset P$, par définition de P. De $P^u \subset Q^u$ suit que $P^u \cap \sigma P^u \subset Q^u \cap \sigma Q^u = \{1\}$, d'où il résulte que $P \cap \sigma P = L^f$. Enfin, puisque $(L^f, L^f) \subset H$, on a

$$Q^u \cap L^f = Q^u \cap (L^f, L^f) \subset Q^u \cap H \subset Q^u \cap \sigma Q^u = \{1\},$$

d'où il suit que $P = Q$, ce qui montre bien que P est un sous-groupe σ-anisotrope minimal de G.

4.2. Revenons au cas d'un espace homogène sphérique général. On conserve les notations et les hypothèses du § 2.

Soit L un sous-groupe de Levi de P, et notons C la composante connexe neutre du centre de L. Nous dirons que L est adapté à H, si

1) $L \cap H = P \cap H$;

2) quelle que soit la G-variété algébrique Z et quel que soit $z \in {}^H Z$, $P^u \cdot \overline{C \cdot z}$ contient un ouvert non vide de toute orbite de G dans $\overline{G \cdot z}$.

Nous avons vu au § 3 que les L^f, $f \in \mathscr{P}_{++}$ sont des sous-groupes de Levi de P adaptés à H.

Rappelons qu'on appelle plongement élémentaire de G/H tout couple X, x, où X est une G-variété algébrique irréductible lisse et où x est un point de X, vérifiant: le groupe d'isotropie G_x est égal à H, l'orbite $G \cdot x$ est ouverte dans X, et $Y = X - G \cdot x$ est une orbite fermée de codimension 1 de G dans X (voir [12], § 3). Le groupe P possède une orbite ouverte Y' dans Y (voir 3.5), et le couple $X' = P \cdot x \cup Y'$, x est manifestement un plongement élémentaire de $P/P \cap H$.

Lemme. *On suppose $L \cap H = P \cap H$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L est adapté à H;*

(2) *quel que soit le plongement élémentaire X, x de G/H, on a $\overline{C \cdot x} \cap Y' \neq \phi$;*

(3) *quel que soit le plongement élémentaire X, x de G/H, l'opération de P^u dans X' induit un isomorphisme de variétés algébriques $P^u \times \overline{C \cdot x}^{X'} \xrightarrow{\sim} X'$.*

Preuve. Que (1)⇒(2) est clair. Montrons que (2)⇒(3). Soit X, x un plongement élémentaire de G/H. De $L \cap H = P \cap H$ suit que $P^u \times L \cdot x \xrightarrow{\sim} P \cdot x = B \cdot x$. Comme dans 3.4, on en déduit que $(L, L) \subset H$. L'hypothèse $L \cap H = P \cap H$ implique donc que le morphisme $\psi: P^u \times \overline{C \cdot x}^{X'} \to X'$ donné par l'opération de P^u dans X', est un morphisme birationnel. Le groupe L opère dans $C \cdot x$, donc aussi dans $\overline{C \cdot x}^{X'}$; on en déduit une opération de P dans $P^u \times \overline{C \cdot x}^{X'}$ qui prolonge l'opération naturelle de P dans $P/P \cap H \simeq P^u \times L/L \cap H \simeq P^u \times C \cdot x$; de la sorte ψ est un P-morphisme. Le groupe P n'a que deux orbites dans X'; par conséquent, si l'on suppose $\overline{C \cdot x} \cap Y' \neq \phi$, alors ψ est surjectif. Puisque P n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $P^u \times (\overline{C \cdot x}^{X'} - C \cdot x)$ (tel est le cas pour l'opération de C dans $\overline{C \cdot x}^{X'}$ d'après la théorie des plongements toriques, [8] chap. I, §2), toutes de dimension $\leqq \dim X - 1$, et que les deux orbites de P dans X' ont dimension $\dim X$ et $\dim X - 1$, les fibres de ψ sont finies. D'après le théorème principal de Zariski (voir par exemple [17]), il en résulte que ψ est un isomorphisme (d'où a posteriori que $\overline{C \cdot x}^{X'}$ est lisse et que le couple $\overline{C \cdot x}^{X'}$, x est un plongement élémentaire du tore $C/C \cap H$). Cela montre que (2)⇒(3).

Que (3)⇒(2) est clair. Que (2)⇒(1) résulte du fait que, pour toute G-variété algébrique Z, pour tout $z \in {}^H Z$ et pour toute orbite A de G dans $\overline{G \cdot z} - G \cdot z$, il existe des plongements élémentaires X, x de G/H et des G-morphismes $\varphi: X \to Z$ tels que $\varphi(x) = z$ et $\varphi(Y) = A$ (voir [12], § 4).

Pour tout groupe algébrique affine G, notons $X_*(G)$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $\lambda: k^* \to G$. Si $\lambda \in X_*(G)$, notons $G(\lambda)$ le sous-groupe des $s \in G$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) s \lambda(t)^{-1}$ existe dans G; si G est réductif, on sait que les $G(\lambda)$, $\lambda \in X_*(G)$ sont des sous-groupes paraboliques de G (voir [13], p. 55).

Soit $\lambda \in X_*(P)$. Nous dirons que λ est adapté à H, si

1) $\lambda \in X_*(C_P(P \cap H))$;

2) $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot (H/H)$ n'existe pas dans G/H;

3) quelle que soit la G-variété algébrique Z et quel que soit $z \in {}^H Z$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot z = z_1$ existe dans $Z - G \cdot z$, $P \cdot z_1$ est ouvert dans $G \cdot z_1$.

Notons $X_*(P; H)$ l'ensemble des $\lambda \in X_*(P)$ adaptés à H. Posons

$$R = P^u \cap C_P(P \cap H) \cap \bigcap_{\lambda \in X_*(P; H)} P(\lambda):$$

c'est un sous-groupe algébrique de P^u.

Proposition. *Le groupe R opère, par conjugaison, de façon (simplement) transitive dans l'ensemble des sous-groupes de Levi de P adaptés à H.*

Preuve. Soit L un sous-groupe de Levi de P adapté à H, de centre connexe C. Si $s \in R$, montrons que sLs^{-1} est encore un sous-groupe de Levi de P adapté à H.

Puisque $s \in C_P(P \cap H)$, on a $sLs^{-1} \cap H \subset P \cap H = s(P \cap H)s^{-1} \subset sLs^{-1} \cap H$ d'où il suit que $sLs^{-1} \cap H = P \cap H$. Soit X, x un plongement élémentaire de G/H. Puisque $\overline{C \cdot x} \cap Y' \neq \phi$, il existe $\lambda \in X_*(C)$ tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x \in Y'$. Un tel λ est adapté à H: en effet, $C \subset C_P(L) \subset C_P(L \cap H) = C_P(P \cap H)$, d'où la première condition; la deuxième condition est claire; enfin, si Z est une G-variété algébrique et si $z \in {}^H Z$ est tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) z = z_1 \in Z - G \cdot z$, on sait qu'il existe un (unique) G-morphisme $\varphi: X \to Z$ tel que $\varphi(x) = z$ (voir [12], §4); il s'ensuit que $P \cdot z_1 = \varphi(Y')$ est ouvert dans $G \cdot z = \varphi(Y)$, d'où la dernière condition. Puisque $s \in G(\lambda)$, $s\lambda(t)s^{-1} \cdot x = (s\lambda(t)s^{-1}\lambda(t)^{-1}] \cdot \lambda(t) \cdot x$ tend vers une limite dans Y', lorsque $t \to 0$, d'où il suit que $\overline{sCs^{-1} \cdot x} \cap Y' \neq \phi$.

Soient L_1 et L_2 deux sous-groupes de Levi de P adaptés à H, et notons C_1 et C_2 leurs centres connexes. Il existe $s \in P^u$ tel qu'on ait $sL_1s^{-1} = L_2$ (d'où $sC_1s^{-1} = C_2$). Reste à montrer que $s \in R$.

Soit $\lambda \in X_*(P)$ adapté à H, et soit X, x le plongement élémentaire (unique) tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) x \in Y$ (voir [12], §4). Par définition du mot «adapté», on a $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x \in Y'$. D'après le lemme précédent, $P^u \times \overline{C_1 \cdot x}^{X'} \xrightarrow{\sim} X' \xleftarrow{\sim} P^u \times \overline{C_2 \cdot x}^{X'}$ (et $(L_1, L_1) = (L_2, L_2) \subset H$). Si $l \in L_1$, alors on a $sls^{-1} \cdot x = sls^{-1} \cdot l^{-1} \cdot x = x$ si et seulement si $sls^{-1}l^{-1} = 1$ et $l \in L_1 \cap H = P \cap H$; autrement dit

$$sL_1s^{-1} \cap H = P \cap H \cap C_G(s);$$

il s'ensuit que $sL_1s^{-1} \cap H = L_2 \cap H = P \cap H$ entraine $s \in C_P(P \cap H)$. Puisque C_1 est un tore maximal de $C_P(P \cap H)$, il existe $s_1 \in P^u$ tel que $(\operatorname{ad} s_1) \circ \lambda \in X_*(C_1)$. Du fait que $\lambda(t) \cdot x = [\lambda(t) s_1 \lambda(t)^{-1} s_1^{-1}] s_1 \lambda(t) s_1^{-1} \cdot x$ tend vers une limite dans $X' \simeq P^u \times \overline{C_1 \cdot x}^{X'}$ (lorsque $t \to 0$), résulte que $\lambda(t) s_1 \lambda(t)^{-1}$ tend vers une limite dans P^u, autrement dit $s_1 \in P(\lambda)$. Puisque $(\operatorname{ad} ss_1) \circ \lambda \in X_*(C_2)$ et que $X' \simeq P^u \times \overline{C_2 \cdot x}^{X'}$, on voit de même que $ss_1 \in P(\lambda)$. Par suite $s = (ss_1)s_1^{-1} \in P(\lambda)$. Puisque λ était un élément arbitraire de $X_*(P; H)$, il s'ensuit bien que

$$s \in P^u \cap C_P(P \cap H) \cap \bigcap_{\lambda \in X_*(P;H)} P(\lambda) = R.$$

Remarques

1. Dans l'exemple considéré en 2.5, le groupe R est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in k.$$

2. Parmi les sous-groupes de Levi de P adaptés à H, il est tentant de vouloir en distinguer un qui soit plus joli que les autres. Voici un candidat: $L = L^f$, où f est un élément de $\mathscr{P}_{++}$ qui s'annule avec la même multiplicité sur les différentes composantes irréductibles de $G - BH$ (si f_1, f_2 sont deux tels éléments, alors il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et $\chi \in X(G)$ tels que $f_1^{n_1} = \chi f_2^{n_2}$, d'où il suit que $L^{f_1} = L^{f_2}$).

Bibliographie

1. Ahiezer: Sur les opérations avec un nombre fini d'orbites (en russe). Funct. Anal. **19**, 1–5 (1985)
2. Bialynicki-Birula, A., Hochschild, G., Mostow, G.D.: Extension of representations of algebraic linear groups. Am. J. Math. **85**, 131–144 (1963)
3. Borel, A.: Linear algebraic groups, Amsterdam: Benjamin 1969
4. Brion, M.: Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques. Prépublication n° 24 de l'Institut Fourier, Grenoble (1985)
5. DeConcini, C., Procesi, C.: Complete symmetric varieties. Proc. Montecatini conf. on invariant theory. Lect. Notes Math. **996**, 1–44 (1983)
6. Elashvili, A.G.: Stationary subalgebras of points of general position for the Borel subgroups of simple linear Lie groups (en russe)
7. Guillemin, V., Sternberg, S.: Multiplicity-free spaces. J. Differ. Geom. **19**, 31–56 (1984)
8. Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.: Toroidal embeddings. Lect. Notes Math. **339** (1974)
9. Krämer, M.: Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compos. Math. **38**, 129–153 (1979)
10. Luna, D.: Slices étales. Bull. Soc. Math. Fr. Mémoire **33**, 81–105 (1973)
11. Luna, D.: Sur la structure locale des opérations algébriques des groupes réductifs. Prépublication n° 12 de l'Institut Fourier, Grenoble (1984)
12. Luna, D., Vust, Th.: Plongements d'espaces homogènes. Comment. Math. Helv. **58**, 186–245 (1983)
13. Mumford, D., Fogarty, J.: Geometric invariant theory. Second enlarged edition. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1982
14. Pauer, F.: Plongements normaux de l'espace homogène $SL(3)/SL(2)$. C.R. du 108e Congrès nat. Soc. sav., Grenoble (1983)
15. Pauer, F.: Caractérisation valuative d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique. C.R. du 109e Congrès nat. Soc. Sav., Dijon (1984)
16. Pauer, F.: Sur les espaces homogènes de complication nulle. Bull. Soc. Math. Fr. **112**, 377–385 (1984)
17. Raynaud, M.: Anneaux locaux henséliens. Lect. Notes Math. **169**, 1970
18. Richardson, R.W.: Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups. Acta Math. **129**, 35–73 (1972)
19. Richardson, R.W.: Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero. Invent. Math. **16**, 6–14 (1972)
20. Servedio, F.J.: Prehomogeneous vector spaces and varieties. Trans. Am. Math. Soc. **176**, 421–444 (1973)
21. Sumihiro, H.: Equivariant completion. J. Math. Kyoto Univ. **14**, 1–28 (1974)
22. Vinberg, E.B., Kimel'feld, B.N.: Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups. Funct. Anal. Appl. **12**, 168–174 (1978)
23. Vust, Th.: Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. Bull. Soc. Math. Fr. **102**, 317–334 (1974)
24. Bialynicki-Birula, A.: On action of $SL(2)$ on complete algebraic varieties. Pac. J. Math. **86**, 53–58 (1980)
25. Rosenlicht, M.: On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces. Trans. Am. Math. Soc. **101**, 211–223 (1961)
26. Rosenlicht, M.: Toroidal algebraic groups. Proc. Am. Math. Soc. **12**, 984–988 (1961)

Oblatum 26–VII–1985