Invent. math. 75, 283–299 (1984)

Inventiones mathematicae

Thetareihen positiv definiter quadratischer Formen

R. Schulze-Pillot

Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstr. 3/5, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Ist $n \in \mathbb{Z}$, q eine positiv definite quadratische Form auf einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum V der Dimension k und L ein $\mathbb{Z}$-Gitter auf V vom Rang k, so kann man nach Siegel [34] ein gewichtetes Mittel der Darstellungsanzahlen von n durch die Gitter im Geschlecht von L als Produkt lokaler Darstellungsdichten berechnen. Das ebenso gewichtete Mittel der Thetareihen $\sum_{x \in L} \exp(2\pi i q(x) z)$ der Gitter ist (ebenfalls nach Siegel [34]) für $k \geqq 5$ eine Eisensteinreihe. Andrianov lieferte in [2] für gerades $k \geqq 4$ einen Beweis der letzteren Behauptung, indem er die Wirkung der Hecke-Operatoren auf die Thetareihen untersuchte.

In Abschnitt 3 dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich diese Methode auch für ungerades $k \geqq 3$ anwenden läßt, wenn man für $k=3$ den Raum der Eisensteinreihen als orthogonales Komplement des Raumes der Spitzenformen bezüglich des Petersson-Produktes definiert (Ting-Yi Pei hat kürzlich bewiesen [37], daß dieser Raum jedenfalls dann von Eisensteinreihen erzeugt wird, wenn die Stufe der Formen von der Gestalt $N=4D$ oder $N=8D$ mit ungeradem quadratfreiem D ist und der Charakter quadratisch ist). Zu diesem Zweck wird in Abschnitt 2 die Wirkung der Hecke-Operatoren auf die Thetareihen untersucht.

Daß sich die gleiche Methode auch auf das nach Siegel gewichtete Mittel der Thetareihen der Gitter in einem Spinorgeschlecht anwenden läßt, wird in Abschnitt 4 gezeigt. Dabei ergeben sich neue Beweise und für $k=3$ eine Verschärfung der mit arithmetischen Methoden von Eichler [7], Kneser [17] und Hsia [13] gefundenen Resultate. Das Ergebnis im Fall $k=3$ ermöglicht die Berechnung des nach Siegel gewichteten Mittels $r(n, \operatorname{spn} L)$ der Darstellungsanzahlen von n durch die Gitter eines Spinorgeschlechtes (für $k \geqq 4$ hat $r(n, \operatorname{spn} L)$ nach [7, 17, 13] für alle Spinorgeschlechter im Geschlecht den gleichen Wert und kann daher als Produkt lokaler Darstellungsdichten berechnet werden).

Ist $r(n, L)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch L und $r(n, \operatorname{gen} L)$ das nach Siegel gewichtete Mittel der $r(n, K)$ über die K im Geschlecht von L, so sind [34, S. 376] die $r(n, \operatorname{gen} L) - r(n, L)$ die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform vom Gewicht $k/2$.

Für $k \geqq 5$ wächst $r(n, \operatorname{gen} L)$ für n, die von allen Komplettierungen L_p dargestellt werden, wie $n^{\frac{k}{2}-1}$; für $k=4$ gilt das auch noch für n, die von den Primzahlen p mit anisotroper Komplettierung V_p nur in beschränkter Potenz geteilt werden. Aus Abschätzungen des Wachstums der Fourierkoeffizienten von Spitzenformen erhält man daher bekanntlich für $k \geqq 4$, daß $r(n, \operatorname{gen} L) - r(n, L)$ für große n, die obigen Einschränkungen genügen, klein gegen $r(n, \operatorname{gen} L)$ wird. Für $k=3$ geht dies nicht mehr ohne weiteres, denn der Raum der Spitzenformen vom Gewicht $\frac{3}{2}$ zerfällt in eine direkte Summe zweier Teilräume U und $U^{\perp}$, wobei die Fourierkoeffizienten a_n der Formen in U wie $n^{\frac{1}{2}}$ wachsen (und nur für n in endlich vielen Quadratklassen von 0 verschieden sind). In Abschnitt 5 wird gezeigt, daß die Differenz der Thetareihen zweier Gitter im gleichen Spinorgeschlecht in $U^{\perp}$ liegt. Ist die verallgemeinerte Ramanujan-Petersson-Vermutung für $U^{\perp}$ richtig ($|a_n| = O(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ für die Fourier-Koeffizienten a_n einer Spitzenform aus $U^{\perp}$), so folgt daraus und aus den Ergebnissen von Abschnitt 4, daß für große n, die vom Spinorgeschlecht von L primitiv dargestellt werden, $r(n, \operatorname{spn} L) - r(n, L)$ klein gegen $r(n, \operatorname{spn} L)$ wird. Man hat dann also eine asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen von n durch L.

Als Folge der Shimura-Korrespondenz [31] erhält man die Richtigkeit der verallgemeinerten Ramanujan-Petersson-Vermutung für $U^{\perp}$, wenn n auf eine Quadratklasse beschränkt wird. Das liefert unter der gleichen Einschränkung eine asymptotische Formel für $r(n, L)$. Ergebnisse von Waldspurger [39] lassen die Richtigkeit der verallgemeinerten Ramanujan-Petersson-Vermutung für $U^{\perp}$ auch ohne diese Einschränkung wahrscheinlich erscheinen (siehe Abschnitt 6).

Herrn M. Kneser und Herrn S.J. Patterson möchte ich für anregende Gespräche herzlich danken.

1. Bezeichnungen und Grundlagen

1.1 Modulformen

Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ bezeichne $M_0(k, N, \chi)$ den Raum der ganzen Modulformen vom Gewicht k und dem Charakter χ zur Gruppe $\Gamma_0(N)$, $S_0(k, N, \chi)$ den Unterraum der Spitzenformen und $E_0(k, N, \chi)$ sein orthogonales Komplement bezüglich des Petersson-Produktes. Modulformen halbzahligen Gewichts sind hierbei wie in [31] definiert. Die Hecke-Operatoren $T(p^2)$ seien für halbzahliges Gewicht ebenfalls wie in [31] definiert; $T(p^2)\bar{\chi}(p)$ ist hermitesch bezüglich des Petersson-Produktes. Auch das quadratische Restsymbol (a/b) ist wie in [31] definiert, erfüllt also insbesondere $(a/b) = -(a/|b|)$, falls $a<0$ und $b<0$ gilt, ferner ist

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & d \equiv 1 \bmod 4 \\ i & d \equiv -1 \bmod 4. \end{cases}$$

Ist k ungerade,

$$f(z) = \sum a_n e(nz) \in S_0\left(\frac{k}{2}, N, \chi\right)$$

$(e(z)=\exp(2\pi i z))$, t quadratfrei und $L(s,\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)n^{-s}$, so gilt nach Shimura [31] (siehe auch [33, 22, 10, 9, 4]) mit

$$\chi_t(n)=\chi(n)\left(\frac{-1}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{t}{n}\right):$$

Ist $A_t(n)$ definiert durch

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_t(n)n^{-s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{tn^2}n^{-s}\right)L\left(s+1-\frac{k-1}{2},\chi_t\right),$$

so kann man eine Zahl $A_t(0)$ finden, so daß

$$F_t(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_t(n)e(nz)\in M_0(k-1,N_t,\chi^2)$$

für ein geeignetes N_t gilt. $F_t(z)$ nennt man dann die t-Shimura-Liftung von f. Die Eigenschaften dieser Liftung sind nach der grundlegenden Arbeit Shimuras [31] in [4, 9, 20, 22, 33, 36] weiter untersucht worden. Aus diesen Arbeiten entnehmen wir die folgenden Tatsachen: Ist f eine Eigenfunktion fast aller $T(p^2)$ mit Eigenwerten λ_p, so ist F_t eine Eigenfunktion fast aller $T(p)$ mit den gleichen Eigenwerten λ_p. Für $k\geqq 3$ kann man $N_t=N/2$ unabhängig von t wählen, für $k\geqq 5$ ist F_t eine Spitzenform. Für $k=3$ gilt mit

$$U_t=U_t(N,\chi)=S_0(\tfrac{3}{2},N,\chi)\cap\left\{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)ne(tn^2z)\right\}:$$

Die t-Shimura-Liftung F_t von f ist genau dann eine Spitzenform, wenn f im orthogonalen Komplement $U_t^{\perp}$ von U_t in $S_0(\frac{3}{2},N,\chi)$ bezüglich des Petersson-Produkts liegt. Die Räume U_t für verschiedene t sind orthogonal zueinander bezüglich des Petersson-Produkts. Ist

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)ne(tn^2z)\in U_t,$$

so folgt aus dem Beweis von Theorem 3 in [38], daß ψ modulo einer Zahl r mit $4r^2t|N$ erklärt ist (siehe auch [30]). Das Transformationsverhalten von f unter $\Gamma_0(N)$ impliziert dann, daß $\psi(mn)=\psi(n)\chi_t(m)$ für $(m,N)=1$ gilt. Wir setzen $U=\bigoplus_{t\,\mathrm{quadratfrei}}U_t$ und bezeichnen mit $U^{\perp}$ das orthogonale Komplement von U in $S_0(\frac{3}{2},N,\chi)$ bezüglich des Petersson-Produkts.

1.2 Quadratische Formen

V sei ein Vektorraum der Dimension $k\geqq 3$ über $\mathbb{Q}$, q eine positiv definite quadratische Form auf V mit zugehöriger Bilinearform $B(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$, L ein $\mathbb{Z}$-Gitter vom Rang k auf V mit $q(L)\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, $L^{\#}=\{y\in V|B(y,L)\subseteq\mathbb{Z}\}$ das zu L duale Gitter. Die Stufe $N=N(L)$ von L ist gegeben durch $q(L^{\#})\mathbb{Z}=N^{-1}\mathbb{Z}$, die Determinante $\det L$ von L ist die Determinante der Matrix $(B(e_i, e_j))$ für eine Basis $\{e_i\}$ von L und die Diskriminante $D=D(L)$ von L ist definiert durch

$$D=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\det L & \text{falls } k \text{ gerade}\\ \frac{1}{2}\cdot(-1)^{\frac{k-1}{2}}\det L & \text{falls } k \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Komplettierungen bezüglich einer Primzahl p werden mit $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$, V_p, L_p etc. bezeichnet. $O(V)$ ist die orthogonale Gruppe von V bezüglich q, $O^+(V) = \{u \in O(V) | \det u = 1\}$, $O(L)$ die (endliche) Untergruppe der Einheiten von L, $o(L)$ ihre Ordnung. θ: $O^+(V) \to \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$ bzw. $O^+(V_p) \to \mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2$ ist die Spinornorm, $O'(V) = \{u \in O^+(V) | \theta(u) = 1\}$. $O_A(V)$, $O_A(L)$ etc. bezeichnet die Adelisierung der jeweiligen Gruppe.

$$r(n, L) = \#\{x \in L | q(x) = n\}$$

ist die (endliche) Anzahl der Darstellungen von n durch L,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r(n, L)\, e(nz) = \sum_{x \in L} e(q(x))z = \vartheta(L, z)$$

ist die Thetareihe von L. Wir definieren die Thetareihe des Geschlechts $\vartheta(\operatorname{gen} L, z)$ und Zahlen $r(n, \operatorname{gen} L)$ durch

$$\begin{aligned}\vartheta(\operatorname{gen} L, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r(n, \operatorname{gen} L)\, e(nz)\\ &= \left(\sum_{K \in \operatorname{gen} L} \frac{\vartheta(K, z)}{o(K)}\right) \cdot \left(\sum_{K \in \operatorname{gen} L} \frac{1}{o(K)}\right)^{-1},\end{aligned}$$

die Thetareihe des Spinorgeschlechts von L und Zahlen $r(n, \operatorname{spn} L)$ als

$$\begin{aligned}\vartheta(\operatorname{spn} L, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r(n, \operatorname{spn} L)\, e(nz)\\ &= \left(\sum_{K \in \operatorname{spn} L} \frac{\vartheta(K, z)}{o(K)}\right) \cdot \left(\sum_{K \in \operatorname{spn} L} \frac{1}{o(K)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei geht die Summation über ein Vertretersystem der Klassen im Geschlecht bzw. Spinorgeschlecht von L.

Wir setzen im folgenden

$$\chi(d)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\det L}{d}\right), & \text{falls } k \text{ ungerade}\\ \left(\dfrac{D}{d}\right)=\left(\dfrac{(-1)^{k/2}\det L}{d}\right), & \text{falls } k \text{ gerade.}\end{cases}$$

Damit ist $\vartheta(L, z)$ eine Modulform vom Gewicht $k/2$ und Charakter χ für $\Gamma_0(N)$ ([24, 27, 31]). Sind K und L im gleichen Geschlecht, so ist $\vartheta(K, z) - \vartheta(L, z)$ eine Spitzenform (siehe [34], S. 376 für gerades k, für ungerades k rechnet man es genauso nach).

2. Wirkung der Hecke-Operatoren auf die Thetareihen

Für gerades k und $p\nmid N$ hat Eichler ([6], §21) die Wirkung des Hecke-Operators $T(p^2)$ (bzw. $T(p)$, falls p Norm einer Ähnlichkeitstransformation von L ist) auf die Thetareihe von L untersucht (für eine darstellungstheoretische Interpretation dieses Zusammenhangs siehe [26]). Für ungerades k ist p niemals Norm einer Ähnlichkeitstransformation, und die Wirkung der $T(p^2)$ kann man ganz analog zum Fall geraden Ranges mit Hilfe der Resultate aus §11 von [6] bestimmen (für $k=3$ siehe [25]). Der Übersichtlichkeit wegen fassen wir die Ergebnisse für $T(p^2)$ $(p\nmid N)$ für beliebiges k im folgenden noch einmal zusammen. Dafür benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

Wegen $p\nmid N$ ist die Komplettierung L_p ein $\mathbb{Z}_p$-maximales Gitter und daher ([6], Satz 9.7.) von der Form $L_p=H\perp G$, wo H eine orthogonale Summe hyperbolischer Ebenen und G anisotrop ist (evtl. $G=\{0\}$). $\{e_1,\ldots,e_{2l}\}$ sei eine Basis von H mit $q(e_i)=0$,

$$B(e_{2i-1},e_{2i})=B(e_{2i},e_{2i-1})=1 \qquad (i=1,\ldots,l)$$

und $B(e_i,e_j)=0$ sonst, $\{e_{2l+1},\ldots,e_k\}$ eine Basis von G falls $G\neq\{0\}$. Eine solche Basis $\{e_1,\ldots,e_k\}$ von L_p nennen wir im folgenden eine Standardbasis. $R_p(L)$ bezeichne die Menge aller Gitter K aus dem Geschlecht von L, für die $\mathbb{Z}[1/p]\cdot K=\mathbb{Z}[1/p]\cdot L$ gilt und für die es eine Standardbasis $\{e_1,\ldots,e_k\}$ von L_p gibt, so daß

$$\{p^{-1}e_1,pe_2,\ldots,p^{-1}e_{2l-1},pe_{2l},e_{2l+1},\ldots,e_{2k}\}$$

eine Basis von K_p ist. Eine äquivalente Charakterisierung der Gitter $K\in R_p(L)$ ist:

i) $K\subseteq p^{-1}L$ und $L\subseteq p^{-1}K$ mit $q(K)\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$,
ii) $(L_p:K_p\cap L_p)=(K_p:K_p\cap L_p)$,
iii) $(L_p:K_p\cap L_p)$ ist maximal unter den beiden ersten Bedingungen.

Denn aus ii) folgt wegen Satz 9.3. von [6], daß auch K_p ein $\mathbb{Z}_p$-maximales Gitter ist, wegen Satz 9.6 von [6] also zu L_p isomorph ist. Die Existenz einer Standardbasis von L_p mit der geforderten Eigenschaft folgt dann nach Satz 9.5. von [6], und da wegen i) die Gitter K und L an allen Stellen $\neq p$ die gleiche Komplettierung haben, ist K im Geschlecht von L. Die andere Richtung der behaupteten Äquivalenz ist trivial.

Wir setzen

$$c_p(L,K)=\#\{M\in R_p(L)\mid M\cong K\},$$
$$c_p(L)=\#R_p(L).$$

Ferner definieren wir für einen primitiven Vektor $x\in L_p$ mit $q(x)\in p^2\mathbb{Z}_p$:

$$\rho_p(L,x)=\#\{K\in R_p(L)\mid p^{-1}x\in K\}.$$

Ist $x_1\equiv x_2 \bmod p^2L_p$, so ist offensichtlich

$$\rho_p(L,x_1)=\rho_p(L,x_2).$$

Da es nach Hensels Lemma zu primitivem x mit $q(x)\in p^2\mathbb{Z}$ einen isotropen Vektor $x'\in L_p$ mit $x-x'\in p^2 L_p$ gibt (siehe etwa [19], Satz 14.2.) und zwei primitive isotrope Vektoren durch eine Einheit von L_p ineinander übergeführt werden können ([18], Satz 1), sieht man, daß $\rho_p(L,x)$ in Wahrheit von der Auswahl von x unabhängig ist. Wir schreiben daher im folgenden einfach $\rho_p(L)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

Hilfssatz 1. *Sei p eine Primzahl mit $p\nmid N$, sei*

$$\kappa_p(L)=\begin{cases} p^{k-2}+\left(\frac{D}{p}\right)p^{\frac{k}{2}-1}+1 & \text{falls } k \text{ gerade}\\ p^{k-2}+1 & \text{falls } k \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Dann gilt:

$$T(p^2)\,\vartheta(L,z)=\frac{1}{\rho_p(L)}\sum_{K\in R_p(L)}\vartheta(K,z)+\left(\kappa_p(L)-\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}\right)\vartheta(L,z).$$

3. Die Thetareihe des Geschlechts

Satz 1. *Sei $p\nmid N$ eine Primzahl,*

$$\kappa_p(L)=\begin{cases} p^{k-2}+\left(\frac{D}{p}\right)p^{\frac{k}{2}-1}+1 & \text{falls } k \text{ gerade}\\ p^{k-2}+1 & \text{falls } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

wie in Hilfssatz 1. Dann gilt: $\vartheta(\operatorname{gen}L,z)$ ist eine Eigenfunktion von $T(p^2)$ zum Eigenwert $\kappa_p(L)$.

Beweis. $\rho_p(K)$ bzw. $c_p(K)$ hat für alle K aus dem Geschlecht von L den gleichen Wert $\rho_p(L)$ bzw. $c_p(L)$. Die Behauptung ist daher gezeigt, wenn man

$$\sum_{K_i\in\operatorname{gen}L}\frac{1}{o(K_i)}\cdot\sum_{K_j\in R_p(K_i)}\vartheta(K_j,z)=c_p(L)\sum_{K_j\in\operatorname{gen}L}\frac{\vartheta(K_j,z)}{o(K_j)}$$

bewiesen hat (die Summation $K_i\in\operatorname{gen}L$ geht dabei und im folgenden über ein Vertretersystem der Klassen im Geschlecht von L). Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{K_i\in\operatorname{gen}L}\frac{1}{o(K_i)}\sum_{K_j\in R_p(K_i)}\vartheta(K_j,z)&=\sum_{K_i,K_j\in\operatorname{gen}L}\frac{c_p(K_i,K_j)}{o(K_i)}\vartheta(K_j,z)\\ &=\sum_{K_j\in\operatorname{gen}L}\left(\sum_{K_i\in\operatorname{gen}L}\frac{o(K_j)}{o(K_i)}c_p(K_i,K_j)\right)\frac{\vartheta(K_j,z)}{o(K_j)}.\end{aligned}$$

Ferner hat man für $K_j\in R_p(K_i)$:

$$o(K_j)\,c_p(K_i,K_j)=\#\{u\in O(V)\,|\,uK_j\in R_p(K_i)\},$$

und aus der Definition von $R_p(K_i)$ folgt, daß $uK_j\in R_p(K_i)$ äquivalent ist zu $u^{-1}K_i\in R_p(K_j)$.

Also gilt

$$o(K_j)\,c_p(K_i,K_j) = \#\{u \in O(V) \mid uK_i \in R_p(K_j)\}$$
$$= o(K_i)\,c_p(K_j,K_i), \tag{1}$$

Man hat also

$$\sum_{K_i \in \operatorname{gen} L} \frac{1}{o(K_i)} \sum_{K_j \in R_p(K_i)} \vartheta(K_j, z)$$
$$= \sum_{K_j \in \operatorname{gen} L} \Big(\sum_{K_i \in \operatorname{gen} L} c_p(K_j, K_i)\Big) \frac{\vartheta(K_j,z)}{o(K_j)}$$
$$= c_p(L) \sum_{K_j \in \operatorname{gen} L} \frac{\vartheta(K_j,z)}{o(K_j)}.$$

Korollar 1. *Die Thetareihe* $\vartheta(\operatorname{gen} L, z)$ *des Geschlechts von* L *liegt in* $E_0\left(\frac{k}{2}, N, \chi\right)$.

Beweis. Da der Hecke-Operator $T(p^2)$ mit der Projektion π auf $S_0\left(\frac{k}{2}, N, \chi\right)$ vertauscht, ist auch $\pi(\vartheta(\operatorname{gen} L, z))$ (falls es ungleich 0 ist) Eigenfunktion aller $T(p^2)$ mit $p \nmid N$ mit den Eigenwerten $\kappa_p(L)$ (siehe Hilfssatz 1). Diese Eigenwerte wachsen mit $p \to \infty$ wie p^{k-2}. Ein so starkes Wachstum steht aber für $k \geqq 4$ im Widerspruch zu den bekannten Abschätzungen des Wachstums der Fourierkoeffizienten einer Spitzenform. Für $k \geqq 5$ genügt hier schon Heckes Abschätzung ([12], S. 651), für $k=4$ etwa die Abschätzung von Kloostermann [16]. Für $k=3$ nutzt man die Eigenschaften der Shimura-Liftung aus. Der Hecke-Operator $T(p^2)$ vertauscht mit den Projektionen π' auf $U^\perp$ und π_t auf die U_t, also sind alle diese Projektionen von $\vartheta(\operatorname{gen} L, z)$ entweder Null oder Eigenfunktionen aller $T(p^2)$ mit $p \nmid N$ zum Eigenwert $p+1$. Wäre die Projektion auf $U^\perp$ ungleich Null, so wären ihre Shimura-Liftungen Spitzenformen vom Gewicht 2, die Eigenfunktionen aller $T(p)$ mit $p \nmid N$ zum Eigenwert $p+1$ wären. Dies liefert wieder den gleichen Widerspruch wie im Fall $k=4$, also ist $\pi'(\vartheta(\operatorname{gen} L, z)) = 0$. Der nachfolgende Hilfssatz 2 impliziert aber auch $\pi_t(\vartheta(\operatorname{gen} L, z)) = 0$ für alle t, $\left(\text{wähle } p \nmid N \text{ mit } \chi(p)\left(\frac{-t}{p}\right) = -1\right)$, und die Behauptung ist bewiesen.

Hilfssatz 2. *Sei* $p \nmid N$ *Primzahl,* t *quadratfrei. Dann ist* $U_t = U_t(N, \chi)$ *Eigenraum für* $T(p^2)$ *zum Eigenwert* $\chi(p)\left(\frac{-t}{p}\right)(p+1)$.

Beweis. Dies rechnet man mit Hilfe der in 1.1 erwähnten Ergebnisse leicht nach.

Bemerkung. Die Methode des Beweises von Korollar 1 stammt von Andrianov [2], der Korollar 1 (und die entsprechende Aussage für mehrfache Thetareihen) für gerades $k \geqq 4$ bewies, indem er die Wirkung der Operatoren $T(p)$ (p Norm einer Ähnlichkeitstransformation von L_p) auf die Thetareihen untersuchte.

4. Die Thetareihe des Spinorgeschlechts

In diesem Abschnitt soll $\vartheta(\operatorname{spn} L, z)$ näher untersucht werden. Dafür benötigen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 3. *Für jede Primzahl p sei das Idel $i(p)=(i_q(p))$ definiert durch*

$$i_q(p)=\begin{cases}1 & q\neq p\\ p & q=p,\end{cases}$$

ferner sei $u\in O_A^+(V)$. Dann gilt: Es gibt unendlich viele Primzahlen p, so daß $i(p)\in\theta(u)\mathbb{Q}^\times\,\theta(O_A^+(L))$ gilt.

Beweis. Dies folgt aus dem Dirichletschen Primzahlsatz, da $\theta(O_A^+(L))$ eine offene Untergruppe der Idelgruppe von $\mathbb{Q}$ ist.

Satz 2. *Sei M ein Gitter aus dem Geschlecht von L, $k\geqq 4$. Dann gilt $\vartheta(\operatorname{spn} L, z)=\vartheta(\operatorname{spn} M, z)$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 gibt es unendlich viele Primzahlen p, so daß $i(p)\in\mathbb{Q}^\times\,\theta(O_A^+(L))$ gilt. Sei $p\nmid N$ eine solche Primzahl, K und K' aus dem Geschlecht von L mit $K'\in R_p(K)$ und $\{e_1,\dots,e_k\}$ eine Standardbasis von K, so daß

$$\{p^{-1}e_1, pe_2, \dots, p^{-1}e_{2l-1}, pe_{2l}, e_{2l+1}, \dots, e_k\}$$

eine Basis von K' ist. Die Basis von K wird auf die Basis von K' abgebildet durch ein $u_p\in O^+(V_p)$ mit $\theta(u_p)=p^l(\mathbb{Q}_p^\times)^2$, und da $i(p)^l\in\mathbb{Q}^\times\,\theta(O_A^+(L))$ gilt, liegen K und K' im gleichen Spinorgeschlecht. Daher gilt für K_j im Geschlecht von L:

$$\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L} c_p(K_j, K_i)=\begin{cases}0 & K_j\notin\operatorname{spn} L\\ c_p(L) & K_j\in\operatorname{spn} L.\end{cases}\tag{2}$$

Nach Hilfssatz 1 und wegen (1) gilt:

$$\begin{aligned}
&T(p^2)\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{\vartheta(K_i,z)}{o(K_i)}\\
&=\frac{1}{\rho_p(L)}\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{1}{o(K_i)}\sum_{K_j\in\operatorname{gen} L} c_p(K_i,K_j)\,\vartheta(K_j,z)\\
&\quad+\left(\kappa_p(L)-\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}\right)\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{\vartheta(K_i,z)}{o(K_i)}\\
&=\frac{1}{\rho_p(L)}\sum_{K_j\in\operatorname{gen} L}\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L} c_p(K_j,K_i)\frac{\vartheta(K_j,z)}{o(K_j)}\\
&\quad+\left(\kappa_p(L)-\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}\right)\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{\vartheta(K_i,z)}{o(K_i)}.
\end{aligned}$$

Wegen (2) ist das gleich

$$\begin{aligned}
&\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{\vartheta(K_i,z)}{o(K_i)}+\left(\kappa_p(L)-\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}\right)\sum_{K_i\in\operatorname{spn} L}\frac{\vartheta(K_i,z)}{o(K_i)}\\
&\quad=\kappa_p(L)\,\vartheta(\operatorname{spn} L, z).
\end{aligned}$$

Da dies für unendlich viele p gilt, folgt wie im Beweis von Korollar 1, daß $\vartheta(\operatorname{spn} L, z)$ orthogonal zum Raum der Spitzenformen ist. Die Spitzenform $\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)$ muß daher gleich Null sein.

Bemerkung. Die entsprechende Aussage für die Zetafunktionen bzw. die Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen wurde von Siegel [35] mit funktionentheoretischen Methoden, und von Eichler [7] und Kneser [17] mit arithmetischen Methoden bewiesen. Der Beweis von Kneser wurde von Hsia [13] auf definite Formen verallgemeinert.

Für den Fall $k=3$ benötigen wir einen weiteren Hilfssatz.

Hilfssatz 4. *Sei $k=3$, $t \in \mathbb{N}$ und $E = \mathbb{Q}(\sqrt{tD})$.*

i) *Ist $\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$ (I_E die Idelgruppe von E), $u \in O_A^+(V)$ mit $\theta(u) \in N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$ und $M = uL$, so gibt es unendlich viele Primzahlen $p \nmid tN$, für die aus $K \in R_p(L)$ folgt, daß $K \in \operatorname{spn} M$ gilt. Alle diese p sind zerlegt in $E/\mathbb{Q}$.*

ii) *Ist $\theta(O_A^+(L)) \nsubseteq N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$, so gibt es unendlich viele Primzahlen p, die in $E/\mathbb{Q}$ träge sind, und für die aus $K' \in R_p(K)$ $(K, K' \in \operatorname{gen} L)$ folgt, daß $K' \in \operatorname{spn} K$ gilt.*

Beweis. Teil i) folgt direkt aus Hilfssatz 3, wobei die Zerlegtheit von p in $E/\mathbb{Q}$ aus $\theta(u)\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$ folgt.

Zu ii) ist zu bemerken, daß man in Hilfssatz 3 auch

$$i(p) \in \theta(u)\mathbb{Q}^\times(\theta(O_A^+(L)) \cap N_{E/\mathbb{Q}}(I_E))$$

erreichen kann. Wählt man dann $u \in O_A^+(K)$ so, daß $\theta(u) \notin \mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$ gilt, so ist auch $i(p) \notin \mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$, also p träge in $E/\mathbb{Q}$.

Satz 3. *Sei $k=3$, t quadratfrei, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{tD})$, π_t die Projektion auf U_t. Dann gilt: Ist M im Geschlecht von L, so ist*

$$\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z) \in U.$$

Ist $\pi_t(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn}(M, z)) \neq 0$, so ist $\theta(O^+(L_p)) \subseteq N_{E_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(E_\mathfrak{p}^\times)$ für alle Primzahlen p und Primstellen $\mathfrak{p}/p$ von E.

Falls die zuletzt genannte Bedingung erfüllt ist, zerfällt das Geschlecht in zwei Halbgeschlechter bezüglich t, die gleich viele Spinorgeschlechter enthalten, so daß

$$\pi_t(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)) = 0$$

gilt, wenn M im Halbgeschlecht von L ist.

Beweis. Die erste Aussage erhält man, indem man wie im Beweis von Satz 2 zeigt, daß es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)$ Eigenfunktion von $T(p^2)$ zum Eigenwert $p+1$ ist und daraus – wie beim Beweis von Korollar 1 – einen Widerspruch herleitet, falls

$$\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z) \notin U$$

gilt. Zum zweiten Teil der Aussage: Sei q eine Primzahl, für die

$$\theta(O^+(L_q)) \notin N_{E_\mathfrak{q}/\mathbb{Q}_q}(E_\mathfrak{q}^\times)$$

gilt. Nach Hilfssatz 4 gibt es unendlich viele Primzahlen p, die in $E/\mathbb{Q}$ träge sind und für die aus $c_p(K,K') \neq 0$ ($K, K' \in \operatorname{gen} L$) folgt, daß $K \in \operatorname{spn} K'$ ist. Wie beim Beweis von Satz 2 folgert man, daß

$$T(p^2)(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)) = (p+1)(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z))$$

für diese p gilt. Da π_t mit $T(p^2)$ vertauscht, folgt nach Hilfssatz 2 wegen $\chi(p)\left(\frac{-t}{p}\right) = -1$:

$$\pi_t(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)) = 0.$$

Sei schließlich $\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$, $u \in O_A^+(V)$ mit $\theta(u) \in \mathbb{Q}^\times N_{E/F}(I_E)$, $M = uL$, p eine der Primzahlen aus Hilfssatz 3. Wie beim Beweis von Satz 2 zeigt man, daß

$$T(p^2)\,\vartheta(\operatorname{spn} L, z) = (p+1)\,\vartheta(\operatorname{spn} M, z)$$

$$T(p^2)\,\vartheta(\operatorname{spn} M, z) = (p+1)\,\vartheta(\operatorname{spn} L, z)$$

gilt.

Da $T(p^2)$ mit π_t vertauscht und $\chi(p)\left(\frac{-t}{p}\right) = 1$ gilt, folgt wegen Hilfssatz 2:

$$\pi_t(\vartheta(\operatorname{spn} L, z) - \vartheta(\operatorname{spn} M, z)) = 0.$$

Da $\mathbb{Q}^\times N_{E/F}(I_E)$ Index 2 in $I_{\mathbb{Q}}$ (der Idelgruppe von $\mathbb{Q}$) hat, liefert die Einteilung: K und uK ($u \in O_A^+(V)$) liegen im selben Halbgeschlecht genau dann, wenn

$$\theta(u) \in \mathbb{Q}^\times N_{E/F}(I_E)$$

gilt, die geforderte Einteilung in Halbgeschlechter

Korollar 2. *Sei $k=3$, t quadratfrei, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{tD})$. Dann gilt*

1. *Ist $\theta(O^+(L_p)) \nsubseteq N_{E_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(E_\mathfrak{p}^\times)$ für eine Primzahl $p(\mathfrak{p}|p)$, so ist*

$$r(tn^2, \operatorname{spn} L) = r(tn^2, \operatorname{spn} M)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und M im Geschlecht von L.

2. *Ist $\theta(O^+(L_p)) \subseteq N_{E_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(E_\mathfrak{p}^\times)$ für alle Primzahlen p $(\mathfrak{p}|p)$, so ist*

$$r(tn^2, \operatorname{spn} L) = r(tn^2, \operatorname{spn} M)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und M im gleichen Halbgeschlecht bezüglich t wie L.

3. *Ist M im Geschlecht von L, $\psi(n)$ gegeben durch*

$$r(tn^2, \operatorname{spn} L) - r(tn^2, \operatorname{spn} M) = \psi(n) \cdot n$$

und $\psi(n)$ nicht identisch gleich Null, so ist $4t$ ein Teiler von N. Ist $N = 4t \cdot t' \cdot h^2$ mit quadratfreiem t', so ist ψ modulo h definiert und erfüllt:

(i) $\psi(nm) = \psi(n)\left(\frac{tD}{m}\right)$, *falls* $(m, N) = 1$

(ii) $\psi(n) = 0$, *falls* $h|n$.

Insbesondere gilt: Ist $c \in \mathbb{N}$ und $N/4$ ein Teiler von c, so ist $r(c, \operatorname{spn} L) = r(c, \operatorname{spn} M)$ für jedes Gitter M im Geschlecht von L.

Beweis. Teil 1 und 2 der Behauptung folgen sofort aus Satz 3.

Zu 3: Daß ψ modulo h definiert ist, folgt aus dem Beweis von Theorème 3 in [38], siehe auch [30]. Daß ψ Eigenschaft i) hat, wurde schon in 1.1. bemerkt, und Eigenschaft ii) folgt aus

$$\psi(n)=\psi(np)=\psi(n)\left(\frac{tD}{p}\right)=-\psi(n)$$

für $h|n$, $p\nmid N$ mit $\left(\frac{tD}{p}\right)=-1$.

Bemerkung. Jones und Watson haben in [14] Kriterien dafür angegeben, wann bei einem Geschlecht indefiniter ternärer Formen das Darstellungsmaß von n durch einige Klassen den Wert 0, für andere einen Wert $\neq 0$ annehmen kann (im indefiniten Fall fallen Spinorgeschlecht und Klasse zusammen). Von Kneser ist dann mit Methoden des Haarschen Maßes die Aussage der beiden ersten Teile von Korollar 2 für die Darstellungsmaße bewiesen worden ([17], Satz 2). Dieser Beweis wurde von Hsia in [13] auf definite Formen verallgemeinert. Eine Verschärfung dieser Ergebnisse für definite und indefinite Formen, die auch Teil 3 von Korollar 2 umfaßt, beweise ich (ebenfalls mit Methoden des Haarschen Maßes) in einer demnächst erscheinenden Arbeit [29]. Vergleicht man die dortigen Beweise mit den hier angegebenen, so erscheint jedoch bemerkenswert, daß aus Korollar 2, Teil 3i) sofort folgt, daß h durch den Führer der Erweiterung $E/\mathbb{Q}$ teilbar ist. Für den Beweis dieser Tatsache wird in [29] eine genaue Kenntnis der lokalen Arithmetik der Gitter benötigt. Andererseits erhält man mit den arithmetischen Methoden eine genauere Kenntnis von $\psi(n)$ als mit Korollar 2 (siehe [29], Satz 2) und bekommt die Ergebnisse für die Darstellungsmaße beliebiger nichtausgearteter ternärer quadratischer Formen über einem algebraischen Zahlkörper.

5. Vergleich der Thetareihen ternärer Formen im gleichen Spinorgeschlecht

Satz 4. *Sei $k=3$, M im Spinorgeschlecht von L. Dann gilt*

$$\vartheta(L,z)-\vartheta(M,z)\in U^{\perp}$$

Beweis. Sei wieder t quadratfrei, π_t die Projektion auf U_t, $p\nmid N$ eine Primzahl. Da π_t mit dem Hecke-Operator $T(p^2)$ vertauscht und

$$\kappa_p(L)=\frac{c_p(L)}{\rho_p(L)}=c_p(L)=p+1$$

für $k=3$ gilt (siehe [6], (11:19) oder [28], Satz 1ii) und Lemma 4) hat man nach Hilfssatz 1 und 2:

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\operatorname{gen}L} c_p(L,K)\,\pi_t\,\vartheta(K,z) &= \pi_t(T(p^2)\,\vartheta(L,z))\\ &= T(p^2)\,\pi_t\,\vartheta(L,z)\\ &= \left(\frac{tD}{p}\right)(p+1)\,\vartheta(L,z).\end{aligned}$$

Mit $\sum_{K \in \operatorname{gen} L} c_p(L,K) = c_p(L) = p+1$ ergibt sich hieraus für $\left(\frac{tD}{p}\right) = 1$:

$$\sum_{K \in \operatorname{gen} L} c_p(L,K)\, \pi_t(\vartheta(K,z) - \vartheta(L,z)) = 0.$$

Sei $\pi_t(\vartheta(K,z)) = \sum_{n=1}^{\infty} r''(n,K)\, e(nz)$, sei $Z_p(L)$ die Menge aller Gitter K im Geschlecht von L, für die $\mathbb{Z}[1/p]K = \mathbb{Z}[1/p]L$ gilt, sei $n = tm^2$ fest. Wir nehmen an, daß L so gewählt ist, daß

$$\operatorname{Re}(r''(n,L)) = \min\{\operatorname{Re}(r''(n,K)) \mid K \in Z_p(L)\}$$

gilt. Aus

$$\sum_{K \in \operatorname{gen} L} c_p(L,K)(r''(n,K) - r''(n,L)) = 0$$

folgt dann, daß $\operatorname{Re}(r''(n,K)) = \operatorname{Re}(r''(n,L))$ für alle $K \in Z_p(L)$ mit $c_p(L,K) \neq 0$ gilt. Andererseits kann man für beliebiges $K \in Z_p(L)$ eine Kette $L = K_0, K_1, \ldots, K_n = K$ von Gittern $K_i \in Z_p(L)$ finden, so daß $K_{i+1} \in R_p(K_i)$ gilt $(0 \leqq i \leqq n-1)$ (siehe etwa [28, Satz 1]). Daher gilt

$$\operatorname{Re}(r''(n,K)) = \operatorname{Re}(r''(n,L))$$

für alle $K \in Z_p(L)$. Genauso argumentiert man für den Imaginärteil, und da $n = tm^2$ beliebig war, folgt

$$\pi_t(\vartheta(L,z) - \vartheta(K,z)) = 0$$

für alle $K \in Z_p(L)$.

Ist nun M im Spinorgeschlecht von L, so folgt aus der Gültigkeit des starken Approximationssatzes für die Spingruppe, daß es für jedes $p \nmid N$ ein Gitter $K \in Z_p(L)$ in der Klasse von M gibt (siehe etwa [19], §24). Daher ist

$$\pi_t(\vartheta(L,z) - \vartheta(M,z)) = 0$$

für alle t, also

$$\vartheta(L,z) - \vartheta(M,z) \in U^{\perp}$$

wie behauptet.

6. Asymptotisches Verhalten der Darstellungsanzahlen einer ternären Form

Korollar 3. *Sei $k=3$. Sei $r^*(n,L)$ die Anzahl der primitiven Darstellungen von n durch L, analog sei $r^*(n, \operatorname{spn} L)$ definiert. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß gilt:*

Ist $f(z) = \sum a_n e(nz) \in U^{\perp}$, so ist $|a_n| = O(n^{\alpha})$.

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$r(n,L) = r(n, \operatorname{spn} L) + O(n^{\alpha})$$

$$r^*(n,L) = r^*(n, \operatorname{spn} L) + O(n^{\alpha+\varepsilon}).$$

Beweis. Die Behauptung für $r(n,L)$ ist klar nach Satz 4, die Behauptung für $r^*(n,L)$ folgt aus

$$r^*(n,L)=\sum_{d^2|n}\mu(d)\,r\left(\frac{n}{d^2},L\right).$$

Nach den bisherigen Ergebnissen (siehe auch [29]) hat man ein Verfahren zur Berechnung von $r(n,\operatorname{spn}L)$ und $r^*(n,\operatorname{spn}L)$ in der Hand. Denn Teil 1 von Korollar 2 zeigt (siehe [17], Satz 2, [13]): Liegt n nicht in einer von endlich vielen (explizit angebbaren) Quadratklassen, so ist $r(n,\operatorname{spn}L)=r(n,\operatorname{gen}L)$, kann also nach Siegel [34] als Produkt lokaler Darstellungsdichten berechnet werden. Ist $t\mathbb{Z}^2$ eine der Ausnahmequadratklassen, $n=tm^2$, und sind L und M in verschiedenen Halbgeschlechtern bezüglich t, so ist

$$r(n,\operatorname{spn}L)+r(n,\operatorname{spn}M)=2r(n,\operatorname{gen}L)$$

nach Teil 2 von Korollar 2 (siehe Satz 2 von [17], [13]), andererseits wird die Berechnung von

$$r(tm^2,\operatorname{spn}L)-r(tm^2,\operatorname{spn}M)$$

durch Teil 3 von Korollar 2 auf die Bestimmung dieser Differenz für endlich viele Werte von m zurückgeführt.

Bekanntlich (siehe z.B. [23]) gilt mit

$$\bar{q}_r(L)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\in q(L_p) \text{ für alle } p,\ p^r\nmid n, \text{ falls } V_p \text{ anisotrop ist}\}$$

für festes $r\in\mathbb{N}$ und $\varepsilon>0$:

$$n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\ll r^*(n,\operatorname{gen}L)\leqq r(n,\operatorname{gen}L)\ll n^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

wenn n in $\bar{q}_r(L)$ wächst. In Korollar 2 und Korollar 3 aus §5 von [29] werden Bedingungen angegeben, unter denen diese untere Abschätzung auch für $r^*(n,\operatorname{spn}L)$ bzw. $r(n,\operatorname{spn}L)$ gilt; insbesondere wird dort gezeigt, daß $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\ll r^*(n,\operatorname{spn}L)$ für alle $\varepsilon>0$ gilt, falls n in

$$q^*(\operatorname{spn}L):=\{n\in\mathbb{N}\,|\,r^*(n,\operatorname{spn}L)\neq 0\}$$

wächst. Könnte man zeigen, daß die Fourierkoeffizienten a_n einer Spitzenform in $U^\perp$ für ein $\varepsilon>0$ höchstens wie $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ wachsen, so hätte man also (mit den gemachten Einschränkungen) eine asymptotische Formel für $r(n,L)$ bzw. $r^*(n,L)$. Insbesondere würde folgen, daß jede hinreichend große Zahl, die vom Spinorgeschlecht von L primitiv dargestellt wird, auch von L primitiv dargestellt wird. Dieses Ergebnis haben Linnik und Malyshev (siehe [21]) in Spezialfällen unter Annahme einer schwachen Form der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung bewiesen. Peters hat dann in [23] mit Hilfe der Methoden von Linnik und Malyshev gezeigt, daß deren Ergebnis auch im allgemeinen Fall gültig ist (wobei er statt den Spinorprimitivausnahmen des Geschlechts alle Zahlen ausschließt, die in einer der Ausnahmequadratklassen (siehe Korollar 2) liegen).

Die Gültigkeit der verallgemeinerten Ramanujan-Petersson-Vermutung für $U^\perp$ würde $\alpha=\frac{1}{4}+\varepsilon$ implizieren. Für halbzahliges Gewicht ist diese Vermutung bisher aber noch nicht entschieden, und der beste bisher bekannte Wert, $\alpha=\frac{1}{2}+\varepsilon$ (siehe [11]), liefert einen Fehlerterm, der von der gleichen Größenordnung wie der Hauptterm $r(n, \operatorname{spn} L)$ ist. Einen kleineren Fehlerterm erhält man mit Hilfe der Shimura-Korrespondenz, wenn man sich auf n in einer festen Quadratklasse beschränkt:

Hilfssatz 5. *Sei t quadratfrei, $f(z)=\sum a_n e(nz)\in U_t^\perp=U_t(N,\chi)^\perp$. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$:*

$$|a_{tn^2}|\leqq C(t)n^{\frac{1}{2}}d(n)^2$$

mit einer nur von f und t abhängigen Konstanten $C(t)$ und $d(n)=\sum_{m|n}1$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $(n,N)=1$ erhält man

$$|a_{tn^2}|\leqq C\,|a_t|\,n^{\frac{1}{2}}d(n)^2$$

mit einer nur von f abhängigen Konstanten C.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die t-Shimura-Liftung $F_t(z)=\sum A_t(n)e(nz)$ von f eine Spitzenform vom Gewicht 2 ([4, 20]), und man hat

$$a_{tn^2}=\sum_{m|n}\chi_t(m)\,\mu(m)\,A_t\left(\frac{n}{m}\right)\quad(\mu \text{ die Möbius-Funktion}).$$

Für Spitzenformen vom Gewicht 2 wurde die Gültigkeit der verallgemeinerten Ramanujan-Petersson-Vermutung von Eichler in [8] bewiesen. Danach gilt

$$\left|A_t\left(\frac{n}{m}\right)\right|\leqq C(t)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{n}{m}\right)$$

mit einer nur von F_t abhängigen Konstanten $C(t)$, also gilt

$$|a_{tn^2}|\leqq C(t)n^{\frac{1}{2}}d(n)^2.$$

Für den zweiten Teil der Behauptung bemerken wir, daß $U^\perp$ eine Basis aus Eigenfunktionen aller $T(p^2)$ mit $p\nmid N$ besitzt, da diese Operatoren eine kommutative Algebra hermitescher Operatoren erzeugen. Ist $f(z)=\sum a_n e(nz)$ eine solche Eigenfunktion und $F_t(z)=\sum A_t(n)e(nz)$ die t-Shimura-Liftung von f, so ist nach Shimura ([31], Korollar 1.8.) für $(n,N)=1$:

$$A_t(n)=a(t)\cdot A_1(n).$$

Dies zeigt die Behauptung für die Formen aus $U^\perp$, und für die Formen aus den $U_{t'}$ mit $t\neq t'$ ist die t-Shimura-Liftung gleich Null.

Korollar 4. *Ist $k=3$, t quadratfrei, so gilt*

$$r(tm^2,L)=r(tm^2,\operatorname{spn}L)+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$
$$r^*(tm^2,L)=r^*(tm^2,\operatorname{spn}L)+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Bemerkung. Andrianov hat in [1] ein ähnliches Ergebnis behauptet. Sein Hauptterm hängt aber nicht vom Spinorgeschlecht von L ab und wird daher falsch für Quadratklassen $t\mathbb{Z}^2$, für die die Funktion $\psi(n)$ aus Korollar 2 nicht identisch verschwindet. Zum Beweis seiner Behauptung ordnet er der Thetareihe einer quadratischen Form in einer ungeraden Anzahl $k \geqq 3$ von Variablen für jede Quadratklasse $t\mathbb{Z}^2$ eine Modulform vom Gewicht $k-1$ in der gleichen Weise wie Shimura zu. Er untersucht jedoch nicht, unter welchen Bedingungen an K, L und t die der Differenz $\vartheta(L,z)-\vartheta(K,z)$ bezüglich der Quadratklasse $t\mathbb{Z}^2$ zugeordnete Modulform eine Spitzenform ist. Daher ist nicht klar, wie er das behauptete Ergebnis erhält. Für Quadratklassen $t\mathbb{Z}^2$ mit $t \nmid N$ ist das Ergebnis von Korollar 4 auch schon von Kitaoka [15] erwähnt worden. Das ist der Teil des Ergebnisses, den man ohne Benutzung von Satz 4 erhält.

Die Ergebnisse von Earnest über primitive Darstellungen ([5], Theorem 2 und 3) folgen ebenfalls sofort aus Korollar 4 in Verbindung mit der Abschätzung für $r^*(tm^2, \operatorname{spn} L)$ aus Korollar 2 von [29].

Schränkt man n weiterhin ein auf

$$\tilde{q}_r(L) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in q(L_p) \text{ für alle } p,\ p^r \nmid n, \text{ falls } p \mid N \mid\},$$

so kann man sich zur Abschätzung des Fehlerterms $r(n,L)-r(n,\operatorname{spn} L)$ nach dem zweiten Teil von Hilfssatz 4 darauf beschränken, die Fourierkoeffizienten a_t einer Spitzenform aus $U^\perp$ mit quadratfreiem Index t abzuschätzen. Waldspurger [39] hat hier kürzlich folgendes bewiesen: Ist $f(z)=\sum a_n e(nz) \in U^\perp$ Eigenfunktion fast aller $T(p^2)$ mit Eigenwerten $c(p)$,

$$F(z)=\sum A_n e(nz)$$

eine Neuform vom Gewicht 2, die für fast alle $T(p)$ den gleichen Eigenwert $c(p)$ hat und setzt man

$$L(s,\chi_t,F)=\sum A_n \chi_t(n) e(nz)$$

für quadratfreies t, so gilt

$$|a_t|^2 = C t^{\frac{1}{2}} L(1,\chi_t,F)$$

mit einer Konstanten C, die noch von der Restklasse von t modulo einer gewissen Zahl M abhängt. Insbesondere würde die Gültigkeit der verallgemeinerten Lindelöf-Vermutung $|L(1,\chi_t,F)| \ll t^\varepsilon$ also $|a_t| \ll t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ für jede Spitzenform $f(z) = \sum a_n e(nz) \in U^\perp$ und quadratfreie t implizieren, da $U^\perp$ eine Basis von Eigenfunktionen der oben genannten Art hat ([32, 36]). Mit Hilfe der Funktionalgleichung von $L(s,\chi_t,F)$ und dem Satz von Phragmen-Lindelöf erhält man

$$|L(1,\chi_t,F)| \ll t^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

was wieder nur die bekannte Abschätzung $|a_t| \ll t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ liefert. Daraus erhält man immerhin noch einen Fehlerterm, der von kleinerer Ordnung als $r^*(n,\operatorname{spn} L)$ ist, wenn man n für festes $\gamma < 1$ in der Menge

$$q^*_\gamma(\operatorname{spn} L) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = tm^2,\ t \text{ quadratfrei}, \quad t < n^\gamma,\ r^*(n,\operatorname{spn} L) \neq 0\}$$

wachsen läßt.

Auf die gleiche Weise läßt sich mit obiger Methode das Ergebnis von Arenstorf und Johnson [3] über Gleichverteilung von Punkten auf Kugeln verschärfen und auf beliebige Ellipsoide übertragen.

Literatur

1. Andrianov, A.N.: Analytic arithmetic of quadratic forms with an odd number of variables, as connected with the theory of modular forms, Doklady Ak. Nauk SSSR Tom **145**, 241–244 (1960); englische Übersetzung in Soviet Mathematics-Doklady **3**, 949–952 (1962)
2. Andrianov, A.N.: Action of Hecke operator $T(p)$ on theta series. Math. Ann. **247**, 245–254 (1980)
3. Arenstorf, R.F., Johnson, D.: Uniform distribution of integral points on 3-dimensional spheres via modular forms. J. of Number Theory **11**, 218–238 (1979)
4. Cipra, B.: On the Niwa-Shintani-Theta-kernel lifting of modular forms. Preprint
5. Earnest, A.G.: Representation of spinor exceptional integers by ternary quadratic forms. Preprint
6. Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952
7. Eichler, M.: Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter. Math. Z. **55**, 216–252 (1952)
8. Eichler, M.: Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktionen. Arch. math. **5**, 355–366 (1954)
9. Flicker, Y.: Automorphic forms on covering groups of $GL(2)$. Invent. Math. **57**, 119–182 (1980)
10. Gelbart, S., Piatetski-Shapiro, J.: On Shimura's correspondence for modular forms of half integral weight, Proceedings of the Colloquium on Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Bombay, 1979
11. Goldfeld, D., Hoffstein, J., Patterson, S.J.: On automorphic functions of half-integral weight with applications to elliptic curves. In: Number Theory related to Fermat's last theorem, Progress in Mathematics Vol. 26. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1982
12. Hecke, E.: Mathematische Werke. Vandenhoeck und Ruprecht, 2. Aufl. Göttingen 1970
13. Hsia, J.S.: Representations by spinor genera. Pac. J. of Math. **63**, 147–152 (1976)
14. Jones, B.W., Watson, G.L.: On indefinite ternary quadratic forms. Canad. J. Math. **8**, 592–608 (1956)
15. Kitaoka, Y.: Modular forms of degree n and representation by quadratic forms II. Nagoya Math. J. **87**, 127–146 (1982)
16. Kloostermann, H.D.: Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Abh. Math. Sem. Hamburg **5**, 337–352 (1927)
17. Kneser, M.: Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen. Math. Z. **77**, 188–194 (1961)
18. Kneser, M.: Witts Satz für quadratische Formen über lokalen Ringen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1972, 195–203
19. Kneser, M.: Quadratische Formen. Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1974
20. Kojima, H.: Cusp forms of weight $\frac{3}{2}$. Nagoya Math. J. **79**, 111–122 (1980)
21. Malyshev, A.V.: Yu.V. Linnik's ergodic method in number theory. Acta arithmetica **27**, 555–598 (1975)
22. Niwa, S.: Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions. Nagoya Math. J. **56**, 147–161 (1974)
23. Peters, M.: Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen. Acta Arith. **34**, 57–80 (1977)
24. Pfetzer, W.: Die Wirkung der Modulsubstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl. Arch. Math. **4**, 448–454 (1953)
25. Ponomarev, P.: Ternary quadratic forms and Shimura's correspondence. Nagoya Math. J. **81**, 123–151 (1981)
26. Rallis, S.: The Eichler commutation relation and the continuous spectrum of the Weil representation, Non-commutative harmonic analysis, Proceedings Marseille-Luminy. 1978. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 728, pp. 211–244. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979

27. Schoeneberg, B.: Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Math. Ann. **116**, 511-523 (1939)
28. Schulze-Pillot, R.: Darstellung durch definite ternäre quadratische Formen. J. of Number Theory **14**, 237-250 (1982)
29. Schulze-Pillot, R.: Darstellungsmaße von Spinorgeschlechtern ternärer quadratischer Formen. Erscheint demnächst
30. Shemanske, T.: Primitive newforms of weight $\frac{3}{2}$. Acta Arith. **43** (erscheint demnächst)
31. Shimura, G.: On modular forms of half integral weight. Ann. of Math. **97**, 440-481 (1973)
32. Shimura, G.: The critical values of certain zeta functions associated with modular forms of half integral weight. J. of the Math. Soc. of Japan **33**, 649-672 (1981)
33. Shintani, T.: On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. Nagoya Math. J. **58**, 83-126 (1975)
34. Siegel, C.L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, pp. 326-405. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
35. Siegel, C.L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I, Gesammelte Abhandlungen Bd. 3, pp. 105-142. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
36. Sturm, J.: Theta series of weight $\frac{3}{2}$. J. of Number Theory **14**, 353-361 (1982)
37. Ting Yi Pei: Eisenstein series of weight $\frac{3}{2}$. I. Transactions of the AMS **274**, 573-606 (1982)
38. Vigneras, M.F.: Facteurs gamma et équations fonctionnelles, Modular functions of one variable VI. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 627, pp. 79-104. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
39. Waldspurger, J.-L.: Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. J. Math. Pures et Appl. **60**, 375-484 (1981)

Oblatum 26-VI-1983