Längentreue Deformationen von Kurvennetzen mit einer Geradenschar

Von

Robert Sauer, TH München

Herrn Paul Funk zum 75. Geburtstag am 14. April 1961

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 28. März 1961)

Die geradlinigen Kurvennetze werden, wenn man vom trivialen Fall zweier Parallelgeradenscharen absieht, von den Erzeugenden der einschaligen Hyperboloide und der hyperbolischen Paraboloide aufgebaut. Sie lassen bekanntlich eine 1-parametrige Menge längentreuer Deformation zu, bei denen die Kurven des Netzes geradlinig bleiben, während ihre Schnittwinkel sich ändern. Diese längentreuen Deformationen bilden den Ausgangspunkt und das wesentliche Hilfsmittel für die vorliegende Untersuchung. Sie dient der Beantwortung der folgenden Frage:

> Gibt es längentreue Deformationen von Kurvennetzen, bei denen nur die Kurven der einen der beiden Scharen geradlinig sind und bei den Deformationen geradlinig bleiben?

Triviale Deformationen dieser Art sind die Verbiegungen der Regelflächen, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben. Jedes von den Erzeugenden und einer weiteren Kurvenschar der Regelfläche gebildete Kurvennetz wird bei diesen Verbiegungen längentreu deformiert. Von diesen für die gestellte Frage triviale Deformationen soll fortan abgesehen werden. Es wird sich zeigen, daß es auf jeder Regelfläche auch Kurvennetze gibt, die nichttriviale Deformationen der verlangten Art zulassen. Alle derartigen nichttrivialen Deformationen werden im Folgenden ermittelt. Zu ihnen gehören insbesondere Deformationen der Asymptotenliniennetze der nicht abwickelbaren Regeflächen.

I. Vorbemerkungen über geradlinige Kurvennetze

Die affinen Transformationen

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - \nu}}{a}\,x',\quad y = \frac{\sqrt{b^2 - \nu}}{b}\,y',\quad z = \frac{\sqrt{c^2 + \nu}}{c}\,z',\quad (a^2 \geq b^2 > 0,\ c^2 > 0)$$

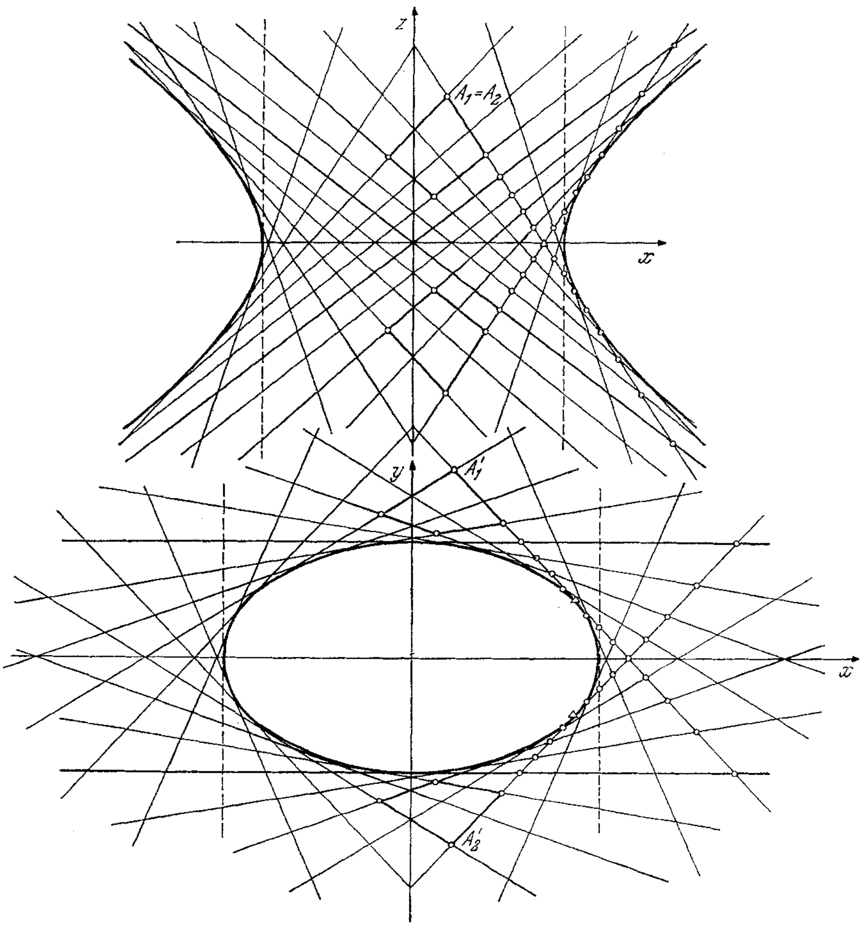

Abb. 1

wobei der Parameter ν das offene Intervall $-c^2 < \nu < b^2$ durchläuft, führen das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

in die 1-parametrige Schar ebensolcher Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}-\frac{z^2}{c^2+\nu}=1$$

über. Sie bilden die Erzeugenden wieder in Erzeugende ab und lassen die Längen auf den Erzeugenden ungeändert, liefern also längentreue Deformationen der Geradennetze der einschaligen Hyperboloide.

In den Grenzfällen $\nu=-c^2$ und $\nu=b^2$ ergeben sich ebene Geradennetze, nämlich das Tangentennetz einer Ellipse bzw. einer Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=1.$$

Diese ebenen Geradennetze sind also auch längentreu aufeinander bezogen (Abb. 1). Ist $a^2=b^2$, dann sind die Hyperboloide Drehhyperboloide, das Tangentennetz der Ellipse wird zum Tangentennetz eines Kreises und das Tangentennetz der Hyperbel klappt in die z-Achse zusammen.

Die affinen Transformationen

$$x=\frac{\sqrt{a^2-\nu}}{a}x', \; y=\frac{\sqrt{b^2+\nu}}{b}y', \; z=z', \; (a^2>0, \; b^2>0)$$

wobei der Parameter ν das offene Intervall $-b^2<\nu<a^2$ durchläuft, führen das hyperbolische Paraboloid

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2\,pz' \; (p\neq 0)$$

in die 1-parametrige Schar ebensolcher Paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}-\frac{y^2}{b^2+\nu}=2\,pz$$

über derart, daß die Längen auf den Erzeugenden wiederum ungeändert bleiben. In den Grenzfällen $\nu=-b^2$ und $\nu=a^2$ erhält man ebene Geradennetze, nämlich die Tangentenscharen der Parabeln

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}=2\,pz \quad \text{bzw.} \quad \frac{y^2}{a^2+b^2}=-2pz.$$

Diese beiden Geradennetze sind ebenso wie die von ihnen umhüllten

Parabeln kongruent und werden durch die längentreue Deformation in sich transformiert (Abb. 2).

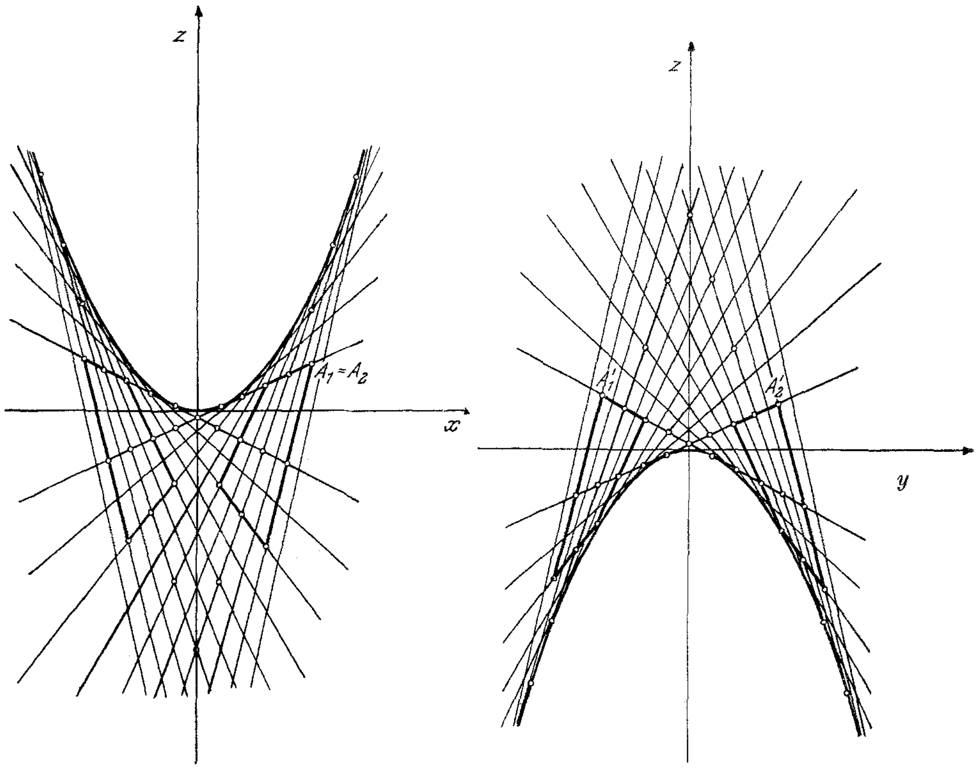

Abb. 2

II. Längentreu deformierbare Stangen-Faden-Modelle

Die längentreuen Deformationen der geradlinigen Kurvennetze lassen sich umdeuten als längentreue Deformationen eines Modells, das aus 2 windschiefen Stangen a, b und einer 1-parametrigen Schar gespannter Fäden besteht. Die Fäden verbinden die Punkte A der Geraden a mit den Punkten B der Geraden b. Das Modell ist bei gespannt bleibenden Fäden dann und nur dann längentreu deformierbar, wenn die Punktreihe A projektiv ist zur Punktreihe B. Die gespannten Fäden sind dann Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids oder eines hyperbolischen Paraboloids, und die Deformationen des Fadenmodells ergeben sich aus den in Abschnitt I besprochenen Deformationen dieser Flächen.

Durch Aneinanderfügen solcher Fadenmodelle mit je 2 Stangen erhält man Stangen-Faden-Modelle mit n Stangen, wobei die Fäden projektive Punktreihen der Stangen miteinander verbinden (Abb. 3). Jedes in einem solchen n-Stangen-Modell enthaltene 2-Stangen-Modell läßt eine 1-parametrige Menge längentreuer Deformationen zu. Außerdem

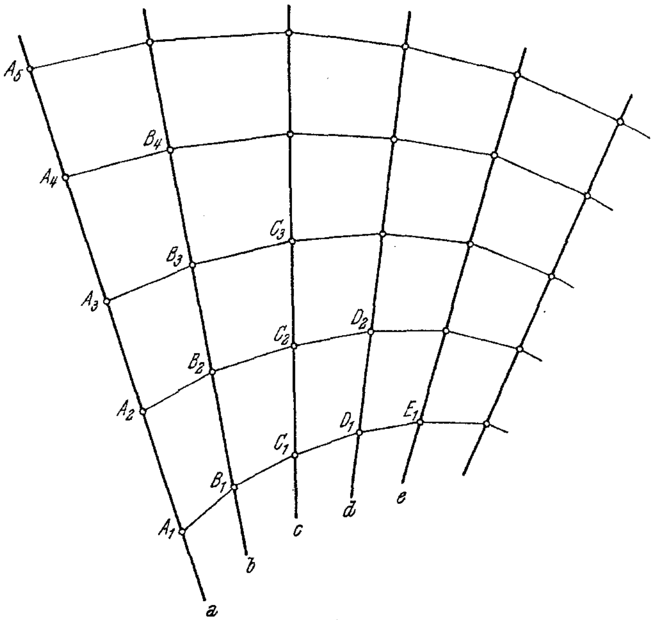

Abb. 3

kann man das n-Stangen-Modell unter Starrhaltung der 2-Stangen-Modelle verknicken, indem man die aufeinanderfolgenden 2-Stangen-Modelle um die ihnen gemeinsame Stange gegeneinander verdreht.

Die längentreuen Deformationen der Stangen-Faden-Modelle enthalten als Grenzfälle Deformationen in ebene Gebilde. In diesen Grenzfällen sind die Stangen und Fäden der in dem n-Stangen-Modell enthaltenen 2-Stangen-Modelle Tangenten einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel. Wenn die 2-Stangen-Modelle aus Drehhyperboloiden entnommen sind, läßt sich das Stangen-Faden-Modell so deformieren, daß alle Stangen miteinander zur Deckung kommen, daß also das ganze Modell in eine einzige Gerade zusammenklappt.

III. Längentreu deformierbare Geraden-Kurven-Netze

Das differentialgeometrische Analogon der Stangen-Faden-Modelle sind die Geraden-Kurven-Netze, die von den Erzeugenden und einer weiteren Kurvenschar einer beliebigen nicht abwickelbaren Regelfläche gebildet werden. Für diese Geraden-Kurven-Netze ergibt sich aus Abschnitt II folgender Satz:

> Ein Geraden-Kurven-Netz, bei dem die Geraden von der zweiten Kurvenschar nach projektiven Punktreihen geschnitten werden, läßt abgesehen von den Verbiegungen der das Geraden-Kurven-Netz enthaltenden Regelfläche noch unbegrenzt viele weitere längentreue Deformationen zu, bei denen die Geraden geradlinig bleiben. Hierbei gehen 2 willkürliche Funktionen von einer Veränderlichen ein. Die eine Funktion bestimmt die Schränkung (= Grenzwert des Quotienten $\dfrac{\text{kürzester Anstand}}{\text{Winkel}}$ aufeinanderfolgender Erzeugenden), die andere Funktion legt die Verbiegung der Regelfläche fest.

Man kann dieses Ergebnis unabhängig von Abschnitt I und II auch leicht durch Rechnung verifizieren (Abb. 4):

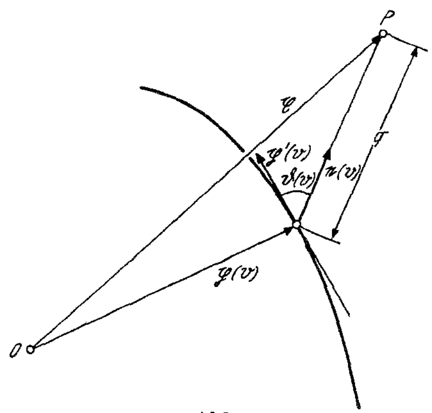

Abb. 4

v sei die Bogenlänge und $\mathfrak{p}(v)$ der Ortsvektor der Punkte einer Kurve auf einer nicht abwickelbaren Regelfläche. q sei die von der Kurve $\mathfrak{p}(v)$ aus nach einer der beiden Seiten hin positiv gezählte Länge auf den Erzeugenden. $\mathfrak{e}(v)$ ist der in der positiven Zählrichtung von q verlaufende

Einheitsvektor auf den Erzeugenden. Die Regelfläche wird dann durch die Parameter v, q in der Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{p}(v) + q\, \mathfrak{e}(v) \tag{1}$$

gegeben. Die Kurven $v = \text{const}$ sind die Erzeugenden, die Kurven $q = \text{const}$ die zur Ausgangskurve $q = 0$, d. i. $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}(v)$, hinsichtlich der Erzeugenden äquidistanten Kurven. Nimmt man statt dieser Kurven $q = \text{const}$ irgend eine andere Kurvenschar $u = \text{const}$ als Parameterlinien, so hat man $q = q(u, v)$ zu setzen und erhält dann für das u, v-Geraden-Kurven-Netz das Linienelement $ds^2 = Edu^2 + 2\,Fdudv + Gdv^2$ mit

$$E = q_u^2,\quad G = 1 + q_v^2 + N^2 q^2 + 2\,Mq + 2\,q_v \cos\vartheta,\quad F = q_u(q_v + \cos\vartheta). \tag{2}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{e}'^2 = N^2,\quad \mathfrak{e}'\mathfrak{p}' = M,\quad \mathfrak{e}\mathfrak{p}' = \cos\vartheta. \tag{3}$$

Wir verlangen nun, daß die Kurven $u = \text{const}$ die Erzeugenden nach projektiven Punktreihen schneiden, und lassen die Kurve $u = 0$ mit der Kurve $q = 0$ zusammenfallen. Dann ist

$$q(u, v) = \frac{u}{a(v) + u\, b(v)},\quad a(v) \neq 0, \text{ im übrigen } a(v),\, b(v) \text{ beliebig.} \tag{4}$$

Die längentreuen Deformationen des Geraden-Kurven-Netzes $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ ergeben sich dann folgendermaßen:

Die Erhaltung der Längen auf den Erzeugenden wird durch die Invarianz von $q(u, v)$, also durch Festhalten der Funktionen $a(v)$ und $b(v)$ gewährleistet. Die Erhaltung der Längen der Kurven $v = \text{const}$ wird durch Festhalten der Funktion $G(u, v)$ erreicht. Setzt man $q(u, v)$ aus Gl. (4) in den Ausdruck für G in den Gln. (2) ein, so ergibt sich nach Weglassen des ohnehin invarianten Bestandteils $1 + q_v^2$ und Division mit q^2 die Bedingung

$$N^2 + 2\,M\left(\frac{a}{u} + b\right) - 2\left(\frac{a'}{u} + b'\right)\cos\vartheta = \text{invariant.}$$

Ordnet man nach u, so erhält man die beiden Deformationsinvarianten

$$\begin{aligned} aM - a'\cos\vartheta &= V_1(v), \\ N^2 - 2\,b'\cos\vartheta + 2\,Mb &= V_2(v). \end{aligned} \tag{5}$$

Die Auflösung nach M und N^2 liefert

$$M = \frac{1}{a}\Big(a'\cos\vartheta + V_1(v)\Big),\quad N^2 = 2\cos\vartheta\left(b' - \frac{a'}{a}\right) - 2\frac{b}{a}\,V_1(v) + V_2(v). \tag{6}$$

Hiernach sind die die Deformation bestimmenden Funktionen $M(v)$ und $N(v)$ nicht voneinander unabhängig, sondern durch die beliebige Funktion $\vartheta(v)$ miteinander verkoppelt. Diese Funktion legt die Schnittwinkel der Erzeugenden mit der Netzkurve $u = 0$ fest und bestimmt dabei zugleich die Schränkung der Regelflächen bei den längentreuen Deformationen. Die Funktion, welche die Verbiegung der Regelflächen fixiert, geht in diese Rechnung naturgemäß nicht ein.

IV. Spezialfälle

Abschließend diskutieren wir noch einige Spezialfälle:

1. *Asymptotenliniennetze*

Die Asymptotenliniennetze einer nicht abwickelbaren Regelfläche sind längentreu deformierbar, da die Erzeugenden von den Asymptotenlinien der zweiten Schar nach projektiven Punktreihen geschnitten werden. Die oskulierenden Hyperboloide bzw. Paraboloide werden dabei längentreu mitdeformiert.

2. *HAFNER-Deformationen*

H. Hafner hat in seiner Dissertation (TH München 1914) die längentreuen Deformationen behandelt, bei denen die Erzeugenden von den Kurven der zweiten Schar nach kongruenten Punktreihen geschnitten werden. Dieser Sonderfall ergibt sich aus den Gln. (6) mit $a = \text{const}$, $b = 0$. Es sind dann M und N^2 von $\cos\vartheta$ unabhängig, also einzeln invariant. Die Kehllinie $q = -M/N^2$ bleibt bei diesen speziellen Deformationen Kehllinie.

Ein etwas allgemeiner Sonderfall liegt vor, wenn die Kurven $u = \text{const}$ die Erzeugenden nach ähnlichen Punktreihen schneiden.

3. *Ebene Geraden-Kurven-Netze*

Jedes längentreu deformierbare Geraden-Kurven-Netz ist in zwei ebene Geraden-Kurven-Netze deformierbar. In einem solchen ebenen Geraden-Kurven-Netz gehört zu jeder Geraden ein Kegelschnitt, der die Gerade im Berührpunkt der Hüllkurve berührt und außerdem von allen Tangenten der Netzkurven längs der Geraden berührt wird.

Wenn alle zugeordneten Kegelschnitte eines längentreu deformierbaren ebenen Geraden-Kurven-Netzes Kreise sind, läßt sich das Netz in eine einzige Gerade längentreu zusammenklappen.