Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale

Von

Edmund Hlawka, Wien

Prof. Paul Funk zum 75. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 23. März 1961)

Es sei $f(x_1, \ldots, x_s)$ eine im Riemannschen Sinne integrierbare komplexwertige Funktion auf dem Quader

$$Q = Q^s : a_j \leqq x_j \leqq b_j \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

Es sollen Annäherungswerte für das Integral $\mu(f) = \int\limits_Q f(x)\, dx$ aufgestellt werden. Es kann o. B. d. A. angenommen werden, daß

$$f(x) \text{ auf } x_j = b_j \qquad (1 \leqq j \leqq s)$$

die gleichen Werte annimmt wie für $x_j = a_j$. Sonst betrachten wir z. B. die Funktion

$$f^*(x) = f^*(x_1, \ldots, x_s) = f(b_1 - |\, x_1 - b_1 \,|, \ldots, b_s - |\, x_s - b_s \,|)$$

auf $Q^* : a_j \leqq x_j \leqq 2\, b_j - a_j \qquad (j = 1, \ldots, s)$
Es ist tatsächlich z. B.

$$f^*(2\, b_1 - a_1, x_2, \ldots, x_s) = f^*(a_1, x_2, \ldots, x_s)$$

Weiter ist $\int\limits_{Q^*} f^*\, dx = 2^s \int\limits_Q f\, dx$, da ja auf $Q : f^* = f$ und Q^* sich aus 2^s Quadern Q zusammensetzt. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß Q der Quader $K : 0 \leqq x_j \leqq 1$ $(j = 1, \ldots, s)$ ist, denn sonst betrachten wir $f^*(t_1, \ldots, t_s) = f(a_1 + (b_1 - a_1)t, \ldots, a_s + (b_s - a_s)\, t)$ auf K und es ist $\int\limits_K f^*(t)\, dt = \dfrac{1}{V(Q)} \int\limits_Q f(x)\, dx$ ($V(Q)$ Volumen von Q). Es kann also stets angenommen werden, daß $f(x)$ auf K definiert ist und f auf den Seiten $x_j = 0$ des Quaders K den gleichen Wert annimmt, wie auf den Seiten $x_j = 1$. Es kann also f auf den ganzen R^s periodisch mit der Periode 1 fortgesetzt werden.

Jede Riemannsche Summe von $\mu(f)$ liefert natürlich einen Näherungswert für $\mu(f)$. Teilen wir z. B. die Kanten von K in n gleiche Teile ($n \geqq 1$), dann zerlegt sich K in $N = n^s$ Würfel,

$$\frac{k_j}{n} \leqq x_j < \frac{k_j + 1}{n} \qquad (j = 1, \ldots, s; 0 \leqq k_j \leqq n - 1)$$

und

$$\Sigma_N = \frac{1}{n^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s}^{n-1} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right)$$

ist eine solche Riemannsche Summe und $\lim\limits_{N \to \infty} \Sigma_N = \mu(f)$. Es ist

$$\Delta_N^1(f) = | \Sigma_N - \mu(f) |$$

der Fehler und es sei $\delta_N^1 = \sup\limits_f \Delta_N^1(f)$.

Es ist δ_N^1 für großes N sicher nicht kleiner als $O\left(\frac{1}{n}\right) = O(N^{-\frac{1}{s}})$ und das gilt auch für $\sup\limits_{f \varepsilon B} \Delta_N^1$ wenn B die Klasse der Funktionen von beschränkter Variation auf K ist.

Einfaches Beispiel: $f(x) = x_1 \ldots x_s$ auf $0 \leqq x_j < 1 \quad (j = 1, \ldots, s)$ und 0 sonst.

Dann ist

$$\Sigma_N = \frac{1}{2^s} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s$$

also ist

$$\Delta_N^1 = 2^{-s} \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s - 1 \right| > \frac{2^{-s}}{n}$$

Schreiben wir die $N = n^s$ Punkte $\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right)$ als Folge $\Omega_N : \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N$ so ist also

$$\Delta_N^1 = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\bar{x}_k) - \mu(f) \right| \tag{1}$$

Eine obere Abschätzung für Δ_n^1 wird später gegeben.

Für $s = 1$ gibt es eine Reihe von Quadraturformeln, z. B. die Simpsonsche Formel, welche für $\mu(f)$ gute Näherungsformeln liefert, jedenfalls dann, wenn f genügend oft differenzierbar ist. Für $s > 1$ existieren solche Formeln vor allem im Falle $s = 2$ oder 3, welche für großes s

praktisch unbrauchbar werden (abgesehen davon, daß hier keine vernünftigen Fehlerschätzungen bekannt sind), da die Anzahl N der zu berechnenden Punkte bei vorgeschriebener Genauigkeit exponentiell mit s wächst (vgl. z. B. Δ_N^1). Gerade solche Fälle haben sich in der letzten Zeit als sehr wichtig erwiesen. Heute verwendet man daher eine statistische Methode, die sogenannte Monte-Carlo-Methode. Es kann nämlich $\mu(f)$ als Erwartungswert $E(f)$ von f in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsdichte $\equiv 1$ auf K und 0 sonst im R^s aufgefaßt werden; die Verteilung p ist also im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie gleichverteilt auf K. Sind nun $X_1, \ldots, X_N$ unabhängige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion p, so ist $F = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(X_j)$ eine statistische Annäherung an $E(f)$, denn $E(F) = E(f) = \mu(f)$ und für die Streuung $\sigma_F{}^2$ von F gilt

$$\sigma_F{}^2 = E((F - E(F))^2) = \frac{1}{N} E((f - E(f))^2) = \frac{\sigma_f^2}{N} \tag{2}$$

Es hat also die statistische Näherung F eine Standardabweichung $\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$, also nimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Fehlers wie $N^{-1/2}$ ab. Für die numerische Berechnung müssen nun die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_N$ durch Stichprobenwerte $x_1, \ldots, x_N$ ersetzt werden. Aus (2) kann man schließen, daß es sicher solche Stichprobenwerte gibt, so daß $\Delta_N = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) - \mu(f) \right| \leqq \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$ ist, aber diese Werte hängen von f ab und sind natürlich im allgemeinen unbekannt. Es ist bekannt, daß mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) = \mu(f)$$

ist, d. h. maßtheoretisch ausgedrückt folgendes:

Ist $P = \bigotimes_{i=1}^{\infty} K_i$ $(K_i = K)$ der Raum aller Folgen $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$ mit Elementen aus K, $d\tilde{\mu}$ das Produktmaß in P zum Lebesgueschen Maß auf K, dann ist für $\tilde{\mu}$ — fast alle Folgen ω eben $\lim \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) = \mu(f)$ und man kann aus (2) sogar leicht schließen, daß sogar für fast alle Folgen $\Delta_N = 0(N^{-1/4} \log^2 N)$ und es gilt sogar noch mehr, nämlich $0(N^{-1/2} \log\log N)$.

Aber es kann natürlich passieren, daß eine irgendwie gewählte Folge $x_1, \ldots, x_N, \ldots$ von Stichprobenwerten gerade in einer Menge von Maß 0 in Bezug auf $\tilde{\mu}$ liegt. Es wurden verschiedene Methoden entwicjekt, um Pseudo-Zufallszahlen x_j aufzustellen, von denen zu hoffen ist, daß sie in der oben erwähnten Menge von Maß 1 liegt, aber es blieb ganz offen, ob dann mit diesen Werten $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)$ ein Näherungswert von $\mu(f)$ ist und wie groß der Fehler ist.

N. M. Korobow[1] hat nun eine feste Folge $x_1, \ldots, x_N$ angegeben, für die der zugehörige Fehler die Größenordnung des statistischen Fehlers der Monte-Carlo-Methode hat, und zwar für alle Funktionen f, welche $2\,s$-mal differenzierbar sind. Genauer lautet sein Satz so:

Ist $\sum\limits_h C_h e^{2\pi i \langle h\, x\rangle}$ ($\langle h\, x\rangle$ skalares Produkt von h und x) die Fourierreihe von f, ist $\sigma = \sum |C_h| < \infty$, sind alle Ableitungen

$$\frac{\partial^{2r} f}{\partial x_{l_1}^2 \ldots \partial x_{l_r}^2} \quad (1 \leqq r \leqq s,\ 1 \leqq l_1 < l_2 < \ldots < l_r \leqq s)$$

stetig und dem Betrage nach $\leqq C$ und ist p eine Primzahl $> s$, dann ist

$$\left| \frac{1}{p^2-1} \sum_{k=1}^{p^2-1} f\left(\frac{k}{p^2}, \frac{k^2}{p^2}, \ldots, \frac{k^s}{p^2}\right) - \mu(f) \right| \leqq \frac{(s-1)\,\sigma}{\sqrt{p}} + \frac{s\,C}{10\,p} \tag{3}$$

An sich wäre statt $\frac{k^j}{p^2}$ zu schreiben $\frac{k^j}{p^2} - \left[\frac{k^j}{p^2}\right]$, da aber f periodisch mit der Periode 1 ist, so macht dies nichts aus. Eine analoge Abschätzung gilt für die Folge

$$\Omega = \left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \ldots, \frac{k^s}{p}\right) \bmod 1 \tag{4}$$

Beim Beweis von (3) müssen über f also Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden. Ich möchte nun zunächst zeigen, daß solche Abschätzungen bis auf logarithmische Faktoren gegeben werden können, unter der alleinigen Voraussetzung, daß f von beschränkter Variation ist; es kann also f auch unstetig sein. Dies erscheint mir gerade für $s > 1$ wertvoll. Dazu benütze ich folgenden Satz[2], welchen ich unlängst bewiesen habe:

---

[1] Dokladi CCCR, **115** (1957), 1062—65.

[2] Annali di Matematica (IV) **54**, 325—334 (1961).

Hilfssatz 1: Ist $f \in B$ (Funktion von beschränkter Variation auf K, $\omega = (x_1, \ldots, x_N)$ eine beliebige Folge über K

$$D_N(\omega) = \sup_{Q \subset K} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_Q(x_j) - V(Q) \right|$$

(χ charakteristische Funktion des Quaders $Q \subset K$), dann ist

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) - \mu(f) \right| \leqq V(f)\, D_N(\omega) \tag{5}$$

wo $V(f)$ die Variation von f auf K ist.

Besitzt f alle gemischten Ableitungen bis zur Ordnung s und sind diese stetig, dann ist $f \in B$ und die Schranke $V(f)$ in (5) kann ersetzt werden durch

$$\sum_{l} \int_{K^l} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right| d\, x_{i_1} \ldots d\, x_{i_l} \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqq s) \tag{6}$$

wo sich die Summe über alle l-Tupel $(i_1 < i_2 < \ldots < i_l)$ für $l = 1, \ldots, s$ erstreckt und K^l der Quader $0 \leqq x_j \leqq 1$ ist, mit $j = i_k$ $(k = 1, \ldots, l)$, $x_j = 0$ $(j \neq i_k)$ ist. Für die Anwendung von (5) muß $D_N(\omega)$ (sie ist stets $\leqq 1$) die sogenannte Diskrepanz abgeschätzt werden. Hier gilt nach *Erdös-Turan-Koksma*[3]:

Ist M eine beliebige natürliche Zahl $\geqq 300$, dann ist stets

$$D_N(\omega) < 2^s \frac{300}{M} + 30^s \sum_{0 < ||h|| \leq M} | S_N(h, \omega) |\, R^{-1}(h) \tag{7}$$

wobei

$||\, h\, || = \operatorname{Max}(|\, h_1\, |, \ldots\, |\, h_s\, |)$, $R(h) = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}(|\, h_j\, |, 1)$, $(h_1, \ldots h_s)$ ganz,

$S_N(h, \omega)$ die Weylsche Summe $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i <h x_k>}$ ist.

Nehmen wir für ω die Folge Ω aus (4) mit $N = p - 1$, dann ist

$$S_N(h, \omega) = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} e^{2\pi i (h_1 k + \ldots + h_s k^s)/p}.$$

Aus der von *H. Hasse* für Geschlecht 1 und dann von *A. Weil* allgemein bewiesenen Vermutung für die Kongruenzzetafunktion folgt[4]

---

[3] *J. F. Koksma*, Math. Centrum Amsterdam, Scriptum **5**, 51 S. (1950).

[4] Vgl. z. B. Enzyklopädie d. Math. Wiss. 2. Aufl. I 2, 29 (L.K. HUA) 1959, B. G. Teubner.

$$|S_N| < \frac{s}{\sqrt{P}}$$

also wenn wir in (7) $M = p$ nehmen,

$$D_N(\omega) < \frac{300 \, . \, 2^s}{p} + \frac{(60 \log p)^s}{\sqrt{p}} < \frac{(70 \log p)^s}{\sqrt{p}}$$

und wir erhalten also (für $p \leqq 300$ ist die Ungleichung in trivialer Weise richtig)

Satz 1: Ist f von beschränkter Variation auf $K^s (s \geqq 2)$ mit Variation $V(f)$, dann ist stets

$$\Delta_p = \left| \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}, \ldots, \frac{k^s}{p}\right) - \int_K f\, dx \right| < V(f) \frac{(70 \log p)^s}{\sqrt{p}} \tag{8}$$

wenn p irgend eine Primzahl ist. Für $s = 2$, $f(x_1, x_2) = e^{2\pi i(x_1 + x_2)}$ ist $\mu(f) = 0$, die Summe links in (8) eine Gaußsche Summe vom Betrag $\sqrt{p}$, also ist in diesem Fall $\Delta_p \geqq p^{-1/2}$, also ist (8) scharf in Bezug auf die Größenordnung $p^{-1/2}$ auch dann, wenn nur die Klasse der analytischen Funktionen in Betracht gezogen wird. Aber auch die Potenz von $\log p$ kann nicht einfach weggelassen werden. Es sei nämlich f die folgende Funktion: $f(x_1, x_2) = 1$ für $0 < x_1 < 1/2, 0 < x_2 < \alpha$ $(0 < \alpha < 1$, α sonst beliebig), dann ist $\mu(f) = \frac{\alpha}{2}$ die Summe links in (8) die Anzahl der quadratischen Reste modulo p, welche im Intervall $> 0, \alpha <$ liegen und es ist nach *Paley*[4] bekannt, daß diese Anzahl sicher nicht $o\,(\sqrt{p} \log \log p)$ ist, also ist sicher nicht $\Delta_p = o\left(\frac{\log \log p}{p}\right)$ Offen bleibt nur, ob $\log^s p$ nicht durch eine Funktion, welche schwächer gegen ∞ geht, ersetzt werden kann. Ist f s-mal differenzierbar, so kann $V(f)$ wieder durch (6) ersetzt werden.

Führt man die analoge Überlegung für die Folge Ω_N^1 aus (1) durch, so erhält man sehr leicht, wenn man $D_N(\omega)$ direkt abschätzt.

Satz 2: Für alle $f \in B$ ist stets

$$\Delta_N^1 = \left| \frac{1}{N} \sum_{k_1, \ldots, k_s}^{n-1} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right) - \mu(f) \right| \leqq \frac{s\, V(f)}{N^{1/s}} \tag{9}$$

L. C. Hsu[5] und *L. W. Lin* haben vorgeschlagen, mehrfache Integrale durch einfache Integrale zu approximieren und diese durch geläufige

[5] Acta math. Acad. Sci. Hungar. **9**, 279—90 (1958).

Quadratformeln zu berechnen. Sie geben Abschätzungen für die Differenz (A beliebige Zahl > 0, ganz)

$$| \mu(f) - \frac{1}{T} \int_0^T f(A^{q-1} t, A^{q-2} t, \ldots, A^{q-s} t)\, dt \tag{10}$$

wo $T = A^{r+s-q}$, wenn f r-mal differenzierbar ist und q beliebige natürliche Zahl ist. Die Abschätzung hängt von den Fourierkoeffizienten von f und A ab. Unter Verwendung der Simpsonschen Formel einer Ordnung N für das einfache Integral in (10) erhalten sie Näherungswerte für $\mu(f)$, welche von der Größenordnung $N^{-\varepsilon_r}$ sind, wo $\varepsilon_r = \frac{4r}{5r+4s-4}$ also $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_r = \frac{4}{5}$ und sicher $> \frac{4}{7}$ für $r \geqq 2s$, also unter sehr starken Voraussetzungen nur maximal einen um $\frac{8}{5}$ größeren Exponenten als in (8), trotzdem ist die Methode sehr nützlich.

Benützt man das kontinuierliche Analogon zu (5)

$$| \frac{1}{T} \int_0^T f(x(\tau))\, d\tau - \mu(f) | \leqq V(f)\, D_s\, (x(\tau)) \tag{5'}$$

wo $x(\tau) = (x_1(\tau), \ldots, x_s(\tau))$ integrierbare Vektorfunktion auf K

$$D_s = \sup_{Q \subset k} | \frac{1}{T} \int_0^T \chi_Q(x(\tau))\, d\tau - V(Q) |$$

und nimmt man $x(\tau) = \tau\, g$, wo $g = (A^{s-1}, A^{s-2}, \ldots, A^0)$, dann erhält man für $f \in B$

$$| \frac{1}{A} \int_0^A f(\tau\, g)\, d\tau - \mu(f) | < V(f)\, \frac{(70 \log A)^s}{A} \tag{11}$$

Es ist nämlich

$$D_s < 2^s \frac{300}{M} + 30^s \sum_{0 < ||h|| \leq M} R^{-1}(h)\, | \frac{1}{A} \int_0^A e^{2\pi i \tau <h\, g>}\, d\,\tau\, | \tag{7'}$$

Nun ist für $M = A - 1$ für alle ganzen $h \neq 0$ mit $||\, h\, || < A$ sicher

$$| \langle h\, g \rangle | = | h_1 A^{s-1} + \ldots + h_s | \geqq 1$$

also ist das Integral in (7′) sicher $\leqq (2\,\pi\, A)^{-1}$ und damit folgt die Abschätzung (11). Es sollen nun Folgen ω angegeben werden, für welche die Fehlerabschätzung Δ_N an Genauigkeit alle bisher angegebenen

Formeln übertrifft. Es sei wieder p eine Primzahl, dann nennen wir einen Gitterpunkt $g = (g_1, \ldots, g_s)$, $(1 \leqq g_j \leqq p-1,\ j = 1, \ldots, s)$ einen *guten* Gitterpunkt modulo p, wenn für alle Gitterpunkte $h = (h_1, \ldots, h_s)$ mit $0 < \|h\| \leqq \frac{p-1}{2}$ und $\langle h\,g\rangle \equiv 0 \pmod p$

$$R(h) \geqq p\ (8 \log p)^{-s} \tag{12}$$

Wir werden in Hilfssatz 2 zeigen, daß es stets gute Gitterpunkte g gibt. Sie können stets in endlich vielen Schritten bestimmt werden, und zwar sind höchstens p^{2s} elementare Rechenoperationen auszuführen.

Hilfssatz 2: Es gibt stets gute Gitterpunkte g mod p.

Beweis: Wir bilden die Summe

$$\Sigma = \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{g \bmod p}' \sum_{\substack{0<\|h\|<p/2 \\ <h\,g> \equiv 0 \pmod p}} R^{-1}(h)$$

wo stets $g_j \not\equiv 0 \pmod p$ für alle j sei. Mit g_j durchläuft auch $h_j g_j$ alle Zahlen relativ prim zu p, wenn $h_j \neq 0$, also ist die Summe gleich

$$\frac{1}{(p-1)^s} \sum_{0<\|h\|<p/2} R^{-1}(h) \sum_{\substack{g \bmod p \\ <e(h)\,g> \equiv 0 \pmod p}}' 1$$

wo $e(h)$ als Komponenten die Zahlen 0 oder 1 hat, je nachdem die entsprechenden Komponenten von h Null sind oder ungleich Null sind. Nun hat eine solche Kongruenz $g_1^* + \ldots + g_l^* \equiv 0 \pmod p$, $l \leqq s$ höchstens p^{s-1} Lösungen mod p, also wird $\Sigma < \frac{2^s}{p} \sum_{0<\|h\|<p/2} R^{-1}(h) < \frac{(8 \log p)^s}{p}$.

Es gibt also ein g, so daß

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{0<\|h\|<p/2 \\ <hg> \equiv 0 \pmod p}} R^{-1}(h) < \frac{(8 \log p)^s}{p} \tag{13}$$

also gilt die Schranke rechts in (13) für alle Glieder in Σ_2 und dies ist gerade die Behauptung.

Satz 3: Ist p Primzahl, g ein guter Gitterpunkt modulo p, dann ist für jedes $f \in B(K)$

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k\,g}{p}\right) - \mu(f) \right| < V(f) \frac{(1000 \log p)^{2s}}{p} \tag{14}$$

Bemerkung 1: Diese Abschätzung für den Fehler ist, abgesehen von den Exponenten in der Potenz von log p die *genaueste* Abschätzung, welche überhaupt möglich ist. Aus einem Satz von *K. F. Roth*[6] folgt, daß für jede beliebige Folge ω stets $D_N \geqq 4^{-s} \frac{(\log N)^{(s-1)/2}}{N}$ ist.

Daraus folgt: Zu jeder Folge $\omega = (x_1, \ldots, x_N)$ gibt es stets Funktionen $f \in B(K)$, so daß

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) - \mu(f) \right| \geqq V(f)\, 4^{-s} \frac{(\log N)^{(s-1)/2}}{N} \tag{15}$$

Dies gilt auch dann, wenn das arithmetische Mittel links in (15) mit Gewichten λ_j versehen wird, also $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f(x_k)$ mit $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$ betrachtet wird, wie dies z. B. bei der Simpsonschen Formel der Fall ist.

Bemerkung 2: Es ist bei der Konstruktion der guten Gitterpunkte g mod p nicht notwendig anzunehmen, daß p Primzahl ist. Es kann z. B., was gerade für die Praxis wichtig ist, p eine Potenz von 2 sein. Auf diese Dinge und auf eine genauere Berechnung von g soll an anderer Stelle eingegangen werden. Ebenso soll gezeigt werden, daß man den Exponenten in der Potenz von log p in (14) noch verkleinern kann. Für $s = 2$ kann man auch andere Folgen $x_1, \ldots, x_N$ angeben, welche das gleiche leisten wie in (14). Eine solche Folge, welche in der Theorie der Gleichverteilung schon an anderer Stelle aufgetreten ist, ist folgende: Ist $n \geqq 1$ ganz, dann sei $x_1, \ldots, x_N (N = 2^n)$ die Folge der Punkte

$$\left(\frac{t_1}{2} + \cdots + \frac{t_n}{2^n}, \frac{t_n}{2^n} + \cdots + \frac{t_1}{2^n} \right)$$

wie die t_j unabhängig voneinander die Werte 0 oder 1 annehmen. Für diese Folge ist bekannt, daß $D_N \leqq 2 \frac{\log N}{N}$ ist.

Nun zum Beweis von Satz 3: Betrachten wir die zugehörige Weylsche Summe

$$S_p(h, \omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k}{p} \langle h\, g \rangle} \qquad (0 < \| h \| < p/2),$$

so ist ihr Wert $= 0$, wenn $\langle h\, g \rangle \not\equiv 0 \pmod p$ und sonst 1, also wird die Summe rechts in (7) mit $M = \frac{p-1}{2}$ sicher

$$< \frac{2^s\, 600}{p} + 30^s \sum_{0 < \| h \| < p/2,\ \langle h g \rangle \equiv 0 \bmod p} R^{-1}(h) \tag{16}$$

[6] Mathematika **1**, 73—79 (1954); verallgemeinert für $s > 2$ von *J. H. Halton*, Numerische Mathematik **2**, 84—90 (1960).

Ist nun in $h\, h_{l-1}$ die 1. Komponente $\neq 0$, so ist also

$$h_{l-1}\, g_{l-1} + h_l\, g_l + \ldots + h_s\, g_s \equiv 0 \pmod p$$

oder (da $(g_{l-1}, p) = 1$)

$$h_{l-1} \equiv h_l\, g_l' + \ldots + h_s\, g_s' \pmod p,$$

also

$$h_{l-1} \equiv \langle h^{(l)}\, g^{(l)} \rangle \bmod p$$

wo

$$g^{(l)} = (g_l', \ldots g_s'),\ h^{(l)} = (h_l, \ldots, h_s)$$

Nach (12) ist

$$R(h^{(l)})\,|\,h_{l-1}\,| \geqq (8 \log p)^{-s}\, p \tag{17}$$

Die Summe in (16) rechts ist $\sum\limits_{l=2}^{s} \Sigma^{(l)},\ \Sigma^{(l)} = \sum\limits_{0<||h^l||<p/2} R^{-1}(h^{(l)})\,|\,h_{l-1}^{-1}\,|$.
Betrachten wir eine solche l-Summe z. B. für $l = 2$ (setzen $h^{(2)} = k, g^{(2)} = a$ $h_1 = h(k)$). Wir zerlegen den Summationsbereich $0 < ||\,k\,|| < p/2$ in Bereiche $P_r : 2^{r_j-1} \leqq \operatorname{Max}(|\,k_j\,|, 1) < 2^{r_i}$ ($j = 2, \ldots s$; ist $k_j = 0$, dann sei $r_j = 1$; $r_2, \ldots, r_s$ laufen von 1 bis $\log_2 p/2$. In P_r ist $2^{r_2+\cdots+r_s} \geqq R(h) > 2^{r_2+\cdots+r_s-s+1}$ also

$$\Sigma^{(2)} < 2^s \sum_{r_2\ldots r_s=1}^{\log p} 2^{-(r_2+\cdots+r_s)} \sum_{k \subset P_r} h^{-1}(k).$$

Es ist nach (17) in P_r stets

$$|\,h(k)\,| \geqq p\, 2^{-(r_2+\cdots+r_s)}\,(4 \log p)^{-s} = C_r.$$

Zu jedem $h(k)$ gibt es also eine natürliche Zahl v, so daß

$$v\, C_r \leqq |\,h(k)\,| < (v+1)\, C_r \qquad (v = 1, \ldots, [C_r^{-1}]).$$

In jedem solchen v-Intervall können höchstens zwei solche $h(k)$ $(k \in P_r)$ liegen. Gäbe es z. B. drei solche $h(k^1), h(k^2), h(k^3)$, dann müßten zwei, z. B. $h(k^1), h(k^2)$ das gleiche Vorzeichen haben, und es wäre dann $|\,h(k^1 - k^2)\,| < C_r$ mit

$$||\,k^1 - k^2\,|| < 2^{r_2+\cdots+r_s-s+1}$$

was (17) widerspricht. Es ist also

$$\sum_{k \subset P_r} < 2 \sum_v \frac{1}{v\, C_r}, \text{ also } p\, \Sigma^{(2)} < 2^{s+2}(8 \log p)^s \sum_{r_2\ldots r_s}^{\log p} (r_2 + \ldots + r_s) < 20^s (\log p)^{2s}.$$

Dies gilt nun für alle $\Sigma^{(l)}$ also ist die Summe in (16) rechts $< 30^s\, \dfrac{(\log p)^{2s}}{p}$, also eingesetzt in (16) liefert Satz 3.

Bemerkung: Aus (13) entnehmen wir: Es gibt stets einen guten Gitterpunkt g, so daß für jedes $f \in B(K)$

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{g\,k}{p}\right) - \mu(f) \right| \leqq V(f) \frac{(80 \log p)^s}{p} \tag{18}$$

Es ist nur notwendig, in (16) die Abschätzung (13) einzusetzen. Wenn wir voraussetzen, daß f differenzierbar ist bis zu einer Ordnung $m\,s$ ($m \geqq 2$, natürliche Zahl,) dann können wir (14) verschärfen.

Satz 4: Ist p Primzahl, g ein guter Gitterpunkt modulo p, besitzt f alle stetigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{mr} f}{\partial x_{l_1}^m \ldots \partial x_{l_r}^m} \quad (1 \leqq r \leqq s,\, l_1 < l_2 < \ldots < l_r;\, m \geqq 2)$$

und sind sie alle von einem Betrag $\leqq K_m$, dann ist

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k\,g}{p}\right) - \mu(f) \right| \leqq \frac{K_m}{p^m} (30 \log p)^{(m+1)\,s-1} \tag{19}$$

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen läßt sich f in eine absolutkonvergente Fourierreihe $\Sigma\, C_h\, e^{2\pi i <h\,x>}$ entwickeln, und die linke Seite von (17) ist gleich

$$\sum_{h \neq 0} C_h\, S_p(h, \omega) = \sum_{<h\,g> \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p),\, h \neq 0} C_h$$

Weiter ist $|\, C_h \,| \leqq K_m((2\,\pi)^s\, R(h))^{-m}$, also genügt es

$$\Sigma^* = \sum_{<h\,g> \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p),\, h \neq 0} R^{-m}(h)$$

abzuschätzen. Diese Summe

$$= \sum_{0 < ||\,h\,|| < p/2}^{*} + \sum_{||\,h\,|| > p/2}^{**} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Da in der zweiten Summe sicher in $R(h)$ ein Faktor die Gestalt $l_p + H$ ($l \neq 0$, $|\,H\,| \leqq \frac{p-1}{2}$) hat, also $\geqq \frac{|\,l\,|}{2}\, p$ hat, so ist

$$\Sigma_2 \leqq \left(\frac{2}{p}\right)^m \sum_{0 < ||\,h^*\,||} R^{-m}(h^*) < \left(\frac{2}{p}\right)^m \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} + 1\right)^s - 1\right) < \left(\frac{6\,s}{p}\right)^m.$$

Bei der ersten Summe gehen wir wie in Satz 3 vor, also

$$\Sigma_1 < \sum_{l=2}^{s} \sum_{0 < ||\,h^{(l)}\,|| < p/2} (R(h^{(l)})\, h_{l-1})^{-m}$$

Eine l-Summe ist wieder

$$< 2^{ms} \sum_{r_2, \ldots, r_s} 2^{-m(r_2+\cdots+r_s)} \sum_{k \subset P_r} h^{-m}(k) < 2^{ms} . 2 p^{-m} . (8 \log p)^{ms} \sum_{r_2, \ldots, r_s} \sum_{v} v^{-m} <$$

$$< 8(20 \log p)^{ms} (\log p)^{s-1} p^{-m}$$

und damit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Aus (13) entnehmen wir wieder, daß es stets einen guten Gitterpunkt g gibt, so daß sogar für die linke Seite von (18) die schärfere Abschätzung

$$\frac{K_m}{p^m} 20^s (\log p)^{ms}$$

gilt.

Bemerkung 2: Satz 4 gilt für $m > 1$, (m beliebig), wenn die partiellen Ableitungen nach Liouville definiert werden.