

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie,
physikalisch-radioaktive Abteilung.)

Wirkungsquerschnitte bei Reaktionen zwischen sehr leichten Atomkernen¹⁾.

Von S. Flüge in Berlin-Dahlem.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Januar 1938.)

Es werden Stoßprobleme behandelt, an denen bis zu vier Elementarteilchen in zwei Atomkernen auftreten. Empirische Daten liegen zunächst vor über die elastische Streuung von Neutronen und Protonen an Deuteronen. Das Hauptproblem für die Durchführung der Rechnung ist die Wahl geeigneter approximativer Eigenfunktionen. Als Näherung wird angenommen, daß das Deuteron beim Auftreffen auf das Proton oder Neutron seine Gestalt beibehält (Vernachlässigung der „Polarisation“) und unter dieser Voraussetzung die im Sinne eines Hartree-Fock-Verfahrens „beste“ Eigenfunktion bestimmt, indem durch Integration über alle Koordinaten außer dem Abstände des Neutrons oder Protons vom Deuteronschwerpunkt das Problem auf einen einzigen Freiheitsgrad reduziert und die übrigbleibende Integrodifferentialgleichung für diesen Freiheitsgrad durch Reihenentwicklungen und numerische Methoden möglichst genau gelöst wird. Die erhaltenen Streuquerschnitte liegen um 10^{-24} cm² herum und fallen langsam mit wachsender Energie ab. Sie sind etwas kleiner als die experimentellen Zahlen. — Für die Streuung von Protonen von 830 kV an Deuteronen wird die Richtungsverteilung ausgerechnet und mit den Experimenten von Tuve, Heydenburg und Hafstad verglichen. — Für die D + D-Reaktion als einfachster Kernumwandlung (mit vier Elementarteilchen) wurde mit Hilfe analog gebauter Eigenfunktionen die Übergangswahrscheinlichkeit aus einem D + D-Anfangs- in einen T + H-Endzustand ausgerechnet. Die Integrodifferentialgleichung für die Relativbewegung der beiden Deuteronschwerpunkte im Anfangszustand bzw. die Bewegung des Protons zum Tritonschwerpunkt im Endzustand wurde wieder möglichst exakt gelöst. Dabei ergibt sich eine starke Verringerung der Amplitude für kleine Abstände, die, verbunden mit der Verkürzung der Wellenlänge, in diesem Gebiet dazu führt, daß die Wirkungsquerschnitte um einen Faktor 10^4 kleiner werden als in den bisher vorliegenden Rechnungen von Dolch. Man kommt damit in die Größenordnung der experimentellen Zahlenwerte von Ladenburg u. a. (einige 10^{-26} cm²). — Es werden ferner einige Auswahlregeln diskutiert, die es vielleicht verständlich machen, daß bei der D + D-Reaktion charakteristische Abweichungen von der kugelsymmetrischen Verteilung der Trümmer beobachtet wurden.

1. Einleitung.

Die Kräfte, die zwischen den Elementarbausteinen des Atomkerns, den Protonen und Neutronen, wirken, sind uns heute in großen Zügen bekannt.

¹⁾ Vorgetragen in der Sitzung vom 10. November 1937 der Berliner Physikalischen Gesellschaft.

Der β -Zerfall hat uns gelehrt, daß sie mindestens zum Teil den Charakter von Austauschkräften¹⁾ haben müssen, d. h. daß sie eine Übergangswahrscheinlichkeit liefern müssen für die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und umgekehrt. Die Streuung langsamer Neutronen an Protonen lehrt uns, daß die Kräfte spinabhängige Anteile enthalten müssen; aus der Streuung von Protonen an Protonen endlich wissen wir, daß wenigstens bei antiparallelen Spins die Kräfte zwischen zwei gleichartigen Teilchen, abgesehen von der kleinen Coulombschen Abstoßung, quantitativ übereinstimmen mit denjenigen zwischen zwei verschiedenen Teilchen. Die Verallgemeinerung dieser Erfahrung zum „invarianten Kräfteansatz“ lag nahe, bei dem die Teilchen nicht mehr als zwei wesensverschiedene Arten angesehen werden, sondern als Teilchen ein und derselben Sorte, die sich lediglich durch eine zusätzliche Quantenzahl, die „Ladungsquantenzahl“ unterscheiden. Die Aussage, in welcher Weise die Kräfte dann außer vom Spin auch von der Ladung abhängen, ließ sich präzisieren durch eine Anwendung dieser Gedankengänge auf das Studium der Massendefekte schwerer Kerne, wie sie von Volz²⁾ und Kemmer³⁾ einerseits, von Euler⁴⁾ andererseits unlängst durchgeführt wurde. Die genannten Streuexperimente sowie unsere Kenntnis der Massendefekte und ungefähren Radien der Atomkerne gestatten ferner, anzugeben, wie stark die Kräfte sein müssen, um die richtigen Bindungsenergien, und wie weit sie reichen müssen, um die richtigen Kernradien zu ergeben. Diese Daten sind nun zwar mit erheblichen Unsicherheiten behaftet, da die Kernradien nur höchst ungenau definiert sind⁵⁾, und man

¹⁾ Das oft zugunsten der Austauschkräfte angeführte Argument, daß nämlich die Absättigung in der Bindungsenergie der schweren Kerne mit gewöhnlichen Kräften nicht zu verstehen sei, scheint mir für sich *allein* nicht überzeugend, da ja a priori eine starke Abstoßung zwischen zwei Teilchen bei Annäherung auf kleinere als die mittleren Abstände in den Atomkernen nicht auszuschließen ist und ebenfalls die Absättigung erklären könnte. Da wir andererseits aus der sicheren Quelle des β -Zerfalls wissen, daß Austauschkräfte vorliegen, würde die Annahme einer solchen kurzreichweitigen Abstoßung eine überflüssige Komplikation bedeuten. Doch ist bisher keineswegs bewiesen, daß sie nicht vielleicht doch da ist. Eine Entscheidung wird sich wohl erst dann treffen lassen, wenn wir einmal im Besitze einer konsequenten Theorie des β -Zerfalls sein werden. — ²⁾ H. Volz, ZS. f. Phys. **105**, 537, 1937. — ³⁾ N. Kemmer, Nature **146**, 192, 1937. — ⁴⁾ H. Euler, ZS. f. Phys. **105**, 553, 1937. — ⁵⁾ So ergibt eine von Bethe auf Grund des Bohrschen Mehrkörpermodells ausgeführte Überlegung um rund 50% höhere Kernradien für die schwersten Kerne (α -Strahler) als man auf Grund des Gamowschen Einkörpermodells früher annahm. Diese Betheschen Angaben sind jedoch umstritten; vgl. den Hinweis bei Heisenberg, Naturwiss. **25**, 749, 1937, sowie N. Bohr und F. Kalckar, Kgl. Danske Vidensk. Selskab, math. fysiske Medd. XIV, 10, 1937.

aus einer einzigen Zahl — eben der Bindungsenergie — nicht gut den ganzen Verlauf einer Funktion, etwa der Kraft als Funktion des Abstandes¹⁾ zweier wechselwirkender Teilchen, bestimmen kann.

Immerhin ist unsere Kenntnis des Kraftgesetzes aus den beschriebenen Methoden schon recht brauchbar. Wenn wir auch über einige Dinge noch keinen Aufschluß erhalten, z. B. die genaue Form der Ortsabhängigkeit, so hat das seine Ursache ja eben darin, daß es schwer ist, Experimente zu erdenken, auf die solche Feinheiten von Einfluß sind, so daß man sie aus ihnen ablesen könnte. Es hat daher guten Sinn, den Versuch zu unternehmen, auf Grund des gegenwärtig „besten“ Kraftgesetzes an die Durchrechnung spezieller Probleme der Kernphysik heranzugehen. Dabei zeigt sich, daß die mathematischen Schwierigkeiten sehr rasch mit wachsender Teilchenzahl zunehmen. So kommt es, daß eine befriedigende Theorie der Stoßvorgänge, an denen nur drei oder vier Elementarteilchen teilnehmen (z. B. der $D + D$ -Reaktion) noch nicht vorliegt. Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, eine möglichst weitgehende theoretische Behandlung der in diesem Gebiet von den Experimentalphysikern studierten Erscheinungen zu geben²⁾.

2. Fragestellung. Abgrenzung der Methode.

Die kernphysikalischen Stoßvorgänge können ganz generell in zwei Gruppen eingeteilt werden:

Bei den *schwereren* Kernen verteilt sich die Energie des stoßenden Teilchens, sowie es auf die Oberfläche des Atomkernes auftrifft, auf alle Kernbausteine. Bohr³⁾ hat in seiner grundlegenden Arbeit gezeigt, daß auf diese Weise ein Zwischenzustand entsteht, bei dem das stoßende Teilchen in den Kern eingebaut ist (compound nucleus), der sich ohne „Rückerinnern“ an seine Entstehung weiter umwandeln kann nach Zeiträumen, die mindestens 10^6 mal größer sind als die Perioden der Bewegung von Teilchen im Kern.

¹⁾ Ein Experiment, das genaueren Aufschluß über die Reichweite der Kräfte geben kann, haben kürzlich Teller und Schwinger (Phys. Rev. **52**, 286, 1937) erdacht. Die bisher hierzu vorliegenden Messungen von Stern und Mitarbeitern (ebenda, S. 142) scheinen auf Reichweiten zu führen, die sicher nicht weit von denjenigen liegen, die wir, etwas willkürlich, benutzen.

— ²⁾ Auf die Massendefekte der Kerne mit 3 oder 4 Teilchen gehen wir in dieser Arbeit nicht näher ein. Sie sind oft von verschiedenen Autoren berechnet worden auf jeder Stufe unserer fortschreitenden Kenntnis der Kräfte. Mit dem vorliegenden Kraftansatz wurden sie behandelt in einer Arbeit des Verfassers, an die im folgenden in Symbolik und Methode mehrfach angeknüpft werden wird (ZS. f. Phys. **105**, 522, 1937). — ³⁾ N. Bohr, Nature **137**, 344, 1936; Naturwiss. **24**, 241, 1936.

Im mathematischen Formalismus kann dieser aus den Experimenten gefolgerte Sachverhalt nichts anderes bedeuten, als daß die Wahrscheinlichkeit für direkte Übergänge aus dem Anfangs- in den Endzustand des Systems sicher nicht die Wahrscheinlichkeit für Übergänge zweiter Ordnung überwiegt, bei denen der Weg über einen langlebigen Zwischenzustand eingeschlagen wird. Die nähere Diskussion hat gezeigt, daß dies Verhalten daher rührt, daß die möglichen quasistationären Zustände bei einigermaßen schweren Kernen und nicht allzu kleinen Energien schon sehr dicht liegen, so daß eine ausgesprochene Resonanzerscheinung fast immer auftritt. Es hat den Anschein, als ob diese Resonanzeindringung in den Kern schon bei ziemlich leichten Kernen (der Masse 10) überwiegt¹⁾.

Geht man dagegen zu den *allerleichtesten* Kernen über, so kann es nur zu einer Verteilung der Energie des auffallenden Stoßpartners auf sehr wenige Teilchen kommen. Die Resonanzniveaus liegen dann so weit auseinander, daß es sehr unwahrscheinlich wird, in eines davon hineinzugeraten, und sie werden so verwaschen, daß die Lebensdauer des Zwischenzustandes, wenn er überhaupt zustande kommt, vergleichbar wird mit den Kernperioden. Hier werden also die direkten Übergänge aus dem Anfangs- in den Endzustand überwiegen.

Wir können diese Erscheinungen am Beispiel der elastischen Streuung sehr anschaulich auch so ausdrücken: Durchläuft das stoßende Teilchen den Kern, um ihn sofort wieder zu verlassen, so besteht eine scharfe Beziehung zwischen den Phasen der einfallenden und der auslaufenden Welle. Auf dem Vorhandensein einer derartigen Beziehung beruht ja das aus der optischen Beugungstheorie herübergenommene Verfahren zur Berechnung einer derartigen Streuerscheinung, wie es von Holtsmark, Mott²⁾ u. a. begründet worden ist. Es liegt also ein ausgesprochen *kohärenter* Streuvorgang vor. Ganz anders, wenn das stoßende Teilchen lange Zeit im Kern verweilt: Die zahlreichen Zufälligkeiten der Zusammenstöße mit den anderen Kernbausteinen werden dann entscheidenden Einfluß darauf haben, mit welcher Phase es den Kern wieder verläßt. Jede „Rückerinnerung“ an den Anfangszustand wird dann ausgelöscht sein; wir können von *inkohärenter* Streuung sprechen. Physikalisch sind natürlich alle Übergänge zwischen diesen beiden wohldefinierten Grenzfällen möglich; der Rechnung zugänglich scheint im Augenblick nur der eine oder andere Grenzfall selbst. Überwiegt die

¹⁾ Wenigstens scheint dies aus Beobachtungen zu folgen, die Bothe auf dem Physikertag in Bad Kreuznach, Sept. 1937, referiert hat. Vgl. E. Wilhelmy, *Naturwiss.* **25**, 173, 1937; *ZS. f. Phys.* **107**, 769, 1937. — ²⁾ Vgl. etwa N. F. Mott u. H. S. W. Massey, *Atomic Collisions* (Oxford 1933).

inkohärente Streuung, was bei schwereren Kernen sehr bald eintritt, so muß die Rechnung an die von Bohr entwickelten Gedankengänge anknüpfen, überwiegt dagegen die kohärente, wie es bei den uns hier interessierenden leichtesten Kernen zutreffen dürfte, so ist eine einfachere Form der Darstellung angemessen.

Es erscheint danach aussichtsreich, für diese einfachsten Prozesse die direkten, kohärenten Übergänge auszurechnen und mit der Erfahrung zu vergleichen. Die so erhaltenen Wirkungsquerschnitte dürften eher *zu klein* (nämlich um die inkohärenten Glieder) als zu groß ausfallen. Ein Versuch zu einer derartigen Rechnung wurde bisher nur einmal von Dolch¹⁾ unternommen für die einfachste denkbare Reaktion im eigentlichen Sinne:



Seine Rechnungen ergaben bei einer Energie des stoßenden Deuterons von 100 kV Wirkungsquerschnitte der Größenordnung 10^{-22} cm², was um rund 4 Zehnerpotenzen *größer* ist als die zur Zeit besten verfügbaren experimentellen Angaben von Ladenburg. Es wurde bereits vermutet, daß die Ursache dieses Versagens der Theorie in der Wahl der Eigenfunktionen zu suchen sei, doch schien es zunächst aussichtslos, eine namhafte Verbesserung herbeizuführen. Es wird einer der Hauptpunkte dieser Arbeit sein, diese Diskrepanz aufzuklären und durch konsequente Verbesserung der Eigenfunktionen zu beseitigen. Das Verfahren soll zunächst an Hand des einfacheren Dreikörperproblems erläutert werden, wo wir es nur mit elastischer Streuung zu tun haben. Es wird uns möglich sein, für die Streu- und Umwandlungsquerschnitte beim Drei- und Vierkörperproblem mit den Experimenten vergleichbare Angaben zu machen und auch zu einigen Aussagen über Richtungsverteilungen nach dem Stoß zu kommen.

3. Erläuterung des Verfahrens am Dreikörperproblem.

Für das Dreikörperproblem liegen empirische Daten vor über den Zusammenstoß eines Neutrons oder Protons mit einem Deuteron. Dabei sind folgende Prozesse denkbar:

1. *Einfangung* des stoßenden Teilchens, also entweder Anlagerung, d. h. Bildung eines ³H oder ³He unter Emission eines harten γ -Quants, oder Reemission (inkohärente Streuung). Es wurde bereits in Abschnitt 2 gezeigt, daß solche Prozesse sicher nicht sehr wahrscheinlich sind. Der mit γ -Strahlung verbundene Prozeß ist deshalb unwahrscheinlich, weil die

¹⁾ H. Dolch, ZS. f. Phys. **100**, 401, 1936.

Strahlungskräfte sehr klein sind gegen die Kernkräfte, also letzten Endes wegen der Kleinheit von $e^2/\hbar c$.

2. *Zertrümmerung* des Deuterons, so daß nach dem Stoß drei freie Teilchen entstehen. Dieser Prozeß kann erst oberhalb von etwa 3 MV Energie des stoßenden Teilchens einsetzen, da dies, um dem Impulssatz zu genügen, höchstens $\frac{2}{3}$ seiner Energie zur Anregung des Deuterons abgeben kann und diese $\frac{2}{3}$ mindestens den Massendefekt von 2 MV aufwiegen müssen.

3. *Kohärente elastische Streuung*. Dieser Prozeß dürfte unterhalb 3 MV der überwiegend wahrscheinliche sein. Über ihn allein liegt experimentelles Material vor, weshalb er hier eingehender betrachtet werden soll.

Wir legen für die *Kräfte* den folgenden Ansatz zugrunde: Die Rolle der potentiellen Energie zwischen zwei Teilchen 1 und 2 in der Schrödinger-Gleichung soll der folgende Operator übernehmen:

$$-M_{12} \Sigma_{12} P_{12} - H_{12} P_{12} + B_{12} \Sigma_{12} + W_{12}, \quad (1)$$

wobei Σ_{12} ein Operator ist, der die Spins der Teilchen 1 und 2 vertauscht, und P_{12} ein analog gebildeter die Ladungen vertauschender Operator¹⁾. Die Größen M_{12} , H_{12} , B_{12} , W_{12} sind gewöhnliche Potentialfunktionen des Abstandes r_{12} der beiden wechselwirkenden Teilchen voneinander. Wir setzen $M_{12} = m \cdot V_{12}$, $H_{12} = \hbar \cdot V_{12}$, $B_{12} = b \cdot V_{12}$ und $W_{12} = w \cdot V_{12}$ und

$$V_{12} = M_{12} + B_{12} + H_{12} + W_{12} = -A e^{-b^2 r_{12}^2}. \quad (2)$$

Dabei legen wir für die Koeffizienten m , \hbar , b und w die besten zur Zeit verfügbaren Werte zugrunde, nämlich die auf Grund einer Bemerkung von Kemmer korrigierten Angaben von Volz²⁾:

$$m = +10/12, \quad \hbar = -2/12, \quad b = +5/12, \quad w = -1/12, \quad (3)$$

welche die beobachteten Sättigungserscheinungen in den Massendefekten der schweren Atomkerne am besten wiedergeben.

Bezeichnen wir nun wieder wie l. c. mit σ eine Spinfunktion und mit ϱ eine Ladungsfunktion, so muß die Gesamteigenfunktion eines Systems aus einem Deuteron und einem dritten Teilchen (Neutron oder Proton) die Gestalt haben:

$$\Psi = \varphi(\bar{1} \bar{2}, 3) \sigma(\bar{1} \bar{2}, 3) \varrho(\bar{1} \bar{2}, 3) + \varphi(\bar{2} \bar{3}, 1) \sigma(\bar{2} \bar{3}, 1) \varrho(\bar{2} \bar{3}, 1) \\ + \varphi(\bar{3} \bar{1}, 2) \sigma(\bar{3} \bar{1}, 2) \varrho(\bar{3} \bar{1}, 2). \quad (4)$$

¹⁾ Die hier zur Anwendung kommende Schreibweise ist die gleiche wie in der Arbeit des Verfassers, ZS. f. Phys. **105**, 522, 1937, die dort eingehend erläutert ist. — ²⁾ In einer nach Abschluß der Rechnungen erschienenen Arbeit von Heisenberg (Naturwiss. **25**, 749, 1937) werden diese Koeffizienten ebenfalls als die wahrscheinlich besten angesehen.

Diese Eigenfunktion genügt zunächst dem Pauli-Prinzip in seiner erweiterten Form¹⁾, da sie antimetrisch ist in allen drei Teilchen. Der erste Summand allein besagt: 1 und 2 sind die beiden im Deuteron gebundenen, 3 das freie Teilchen. Die Ortsfunktion φ ist in 1 und 2 symmetrisch, wie es für den ^{13}S -Grundzustand des Deuterons sein muß; ihre Spins sind parallel und die Ladungseigenfunktion ist antimetrisch. Es möge der Spin des Deuterons in die z -Richtung fallen, dann kann sich der Spin des freien Teilchens parallel (Quartettzustand mit dem Spin $3/2$ und dem Gewicht $2/3$) oder antiparallel (Dublettzustand mit dem Spin $1/2$ und dem Gewicht $1/3$) dazu einstellen. Wir machen demgemäß folgende Ansätze für Spin- und Ladungsfunktion:

$$\begin{aligned} \sigma(\overline{12}, 3) &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 && \text{(Quartett),} \\ \sigma(\overline{12}, 3) &= \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 && \text{(Dublett),} \\ \rho(\overline{12}, 3) &= (a_1 b_3 - a_2 b_1) a_3 && \text{(in beiden Fällen).} \end{aligned} \quad (5)$$

Wir denken uns die so beschriebene Ψ -Funktion eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung im Konfigurationsraum aller drei Teilchen, wobei jedes drei Orts-, eine Spin- und eine Ladungskordinate hat. Dabei führen wir als Potential drei Ausdrücke der Form (1) mit den Argumenten 1, 2 und 1, 3 und 2, 3 ein. Wir können dann zunächst den Operator $\sum_{\rho} \rho(\overline{12}, 3)$ auf diese Gleichung anwenden, d. h. über alle möglichen Einstellungen des Ladungsvektors summieren, was noch keinen Unterschied gibt zwischen Quartett- und Dublettfall. Sodann üben wir die Operation $\sum_{\sigma} \sigma(\overline{12}, 3)$ aus, d. h. wir summieren über alle möglichen Einstellungen des Spins. Dabei erhalten wir, wenn wir mit T den Operator der kinetischen Energie bezeichnen, folgende Gleichungen:

Im Dublettfall:

$$\begin{aligned} T \varphi(\overline{12}, 3) &+ (M_{12} + H_{12} + W_{12} + B_{12}) \varphi(\overline{12}, 3) \\ &+ (W_{13} - \frac{1}{2} H_{13}) \varphi(\overline{12}, 3) + (W_{23} - \frac{1}{2} H_{23}) \varphi(\overline{12}, 3) \\ &+ (M_{13} - \frac{1}{2} B_{13}) \varphi(\overline{23}, 1) + (M_{23} - \frac{1}{2} B_{23}) \varphi(\overline{13}, 2) \\ &= E \cdot \varphi(\overline{12}, 3); \end{aligned} \quad (7)$$

im Quartettfall:

$$\begin{aligned} T \varphi(\overline{12}, 3) &+ (M_{12} + H_{12} + W_{12} + B_{12}) \varphi(\overline{12}, 3) \\ &+ (W_{13} + B_{13}) \varphi(\overline{12}, 3) + (W_{23} + B_{23}) \varphi(\overline{12}, 3) \\ &+ (M_{13} + H_{13}) \varphi(\overline{23}, 1) + (M_{23} + H_{23}) \varphi(\overline{13}, 2) \\ &= E \cdot \varphi(\overline{12}, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾ Vgl. z. B. F. Hund, ZS. f. Phys. **105**, 202, 1937.

Darin bedeutet ψ die Linearkombination

$$\psi(\overline{1\ 2}, 3) = 2 \cdot \varphi(\overline{1\ 2}, 3) - \varphi(\overline{2\ 3}, 1) - \varphi(\overline{1\ 3}, 2). \quad (9)$$

Setzt man hier die Volz-Kemmerschen Koeffizienten nach Gleichung (3) ein, so entsteht für den Dublettfall:

$$T \varphi(\overline{1\ 2}, 3) + V_{12} \varphi(\overline{1\ 2}, 3) + \frac{5}{8} V_{13} \varphi(\overline{2\ 3}, 1) + \frac{5}{8} V_{23} \varphi(\overline{1\ 3}, 2) = E \varphi(\overline{1\ 2}, 3) \quad (10)$$

und für den Quartettfall:

$$T \psi(\overline{1\ 2}, 3) + V_{12} \psi(\overline{1\ 2}, 3) + \frac{1}{3} V_{13} \psi(\overline{1\ 2}, 3) + \frac{1}{3} V_{23} \psi(\overline{1\ 2}, 3) + \frac{3}{4} V_{13} \psi(\overline{2\ 3}, 1) + \frac{3}{4} V_{23} \psi(\overline{1\ 3}, 2) = E \psi(\overline{1\ 2}, 3). \quad (11)$$

Es fällt auf, daß die in Gleichung (11) auftretenden Kräfte eine viel stärkere Anziehung bedeuten als die in (10). Danach könnte man bei flüchtiger Betrachtung den Eindruck gewinnen, als ob dies Verfahren bei der Anwendung auf gebundene Zustände, also bei der Berechnung des Massendefektes des Tritons, zu der Aussage führte, daß der Zustand mit dem Kernspin $3/2$ Grundzustand und derjenige mit dem Spin $1/2$ ein angeregter Zustand des Tritons sei. Daß dies nicht der Fall ist, folgt aus Gleichung (9): Für die tiefe Lage eines Zustandes ist ja außer der Intensität der anziehenden Kräfte die Ortsabhängigkeit der Eigenfunktion von entscheidender Bedeutung. In der Theorie der Atomhülle spielt letztere sogar fast ausschließlich eine Rolle zur Bestimmung der Reihenfolge der Niveaus. Dabei ist ein Zustand um so tiefer, je weniger Knotenlinien er hat. Der tiefste Zustand des Tritons wird also derjenige sein, bei dem φ oder ψ möglichst nahe kugelsymmetrisch ist. Aus (9) folgt aber, daß im Falle der Kugelsymmetrie ψ verschwindet: Der tiefste Zustand im Quartettsystem, der aus Gleichung (11) berechnet werden kann, ist durch das Pauli-Prinzip verboten. Dasselbe folgt natürlich noch anschaulicher für den speziellen Ansatz des Heisenbergschen Oszillatormodells¹⁾, wo die Analogie zum He-Spektrum der Elektronenhülle unmittelbar evident ist.

Die Gleichungen (10) und (11), die die Unterlage bilden müssen für die Berechnung des Ortsanteils der Eigenfunktion, unterscheiden sich in charakteristischer Weise von einer normalen Schrödinger-Gleichung durch die beiden letzten Glieder der linken Seite, in denen die Eigenfunktion mit vertauschten Argumenten eingeht. Derartige Ausdrücke treten immer auf, wenn irgendwelche Austauscherscheinungen berücksichtigt werden müssen; also entweder wenn Austauschkräfte vorhanden sind, oder aber, wenn durch die Antimetrisierung der Eigenfunktion der Vertauschbarkeit gleicher

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **96**, 473, 1935.

Teilchen Rechnung getragen wird. Bei uns kommt beides zusammen; in der Theorie der Elektronenhülle tritt immer nur die zweite Erscheinung auf. Es ist dort zuerst von Fock¹⁾ gezeigt worden, in welcher Weise man dann die Hartree-Näherung zu erweitern hat, um derartigen Gliedern Rechnung zu tragen. In ähnlicher Weise werden wir hier verfahren.

Der *entscheidende Schritt* zur Lösung der Gleichungen (10) und (11) ist der folgende Ansatz: Sind bei einem Stoßvorgang Deuteron und stoßendes Teilchen räumlich noch weit voneinander getrennt, so muß $\varphi(\bar{1}2, 3)$ offenbar in drei Faktoren zerlegt werden können:

$$\varphi(\bar{1}2, 3) = g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) f\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \mathbf{r}_3\right) e^{i\mathfrak{r}^0 \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}}, \quad (12)$$

wobei g die gewöhnliche Eigenfunktion für die Relativbewegung der beiden im Deuteron gebundenen Teilchen ist, die exakt aus der Lösung eines Zweikörperproblems erhalten werden kann, und für die wir, wie zuerst Wigner²⁾ gezeigt hat, genähert

$$g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} \quad (13)$$

setzen können. Die Funktion f beschreibt die Relativbewegung der beiden Schwerpunkte der stoßenden Teilchen zueinander; sie geht also asymptotisch in eine ebene Welle über, die überlagert ist von einer auslaufenden Kugelwelle. Endlich bedeutet der dritte, unwesentliche Faktor, daß der Schwerpunkt des Gesamtsystems aus beiden Stoßpartnern sich noch im Raume bewegen kann. Wählen wir als Koordinatensystem dasjenige, in dem der Gesamtschwerpunkt ruht, so wird $\mathfrak{r}^0 = 0$, und dieser Faktor entfällt. Diese Vereinfachung soll im folgenden stets stillschweigend gemacht werden.

Unsere Näherung besteht nun darin, daß wir postulieren, der Ansatz (12) solle auch dann noch Sinn haben, wenn die beiden Teilchen zusammenstoßen. Physikalisch gesprochen heißt das, wir berücksichtigen nur den Einfluß des Deuterons auf die Bahn des stoßenden Teilchens; wir vernachlässigen dagegen dessen Rückwirkung auf die innere Bewegung des Deuterons, also die Verzerrung oder „Polarisation“, die dies durch das aufschlagende Teilchen erfährt. Es ist schwer abzuschätzen, wie groß der Fehler ist, der von dieser Vernachlässigung herrührt; er wird sicher klein, solange die kinetische Energie des aufschlagenden Teilchens klein ist gegen die Bindungsenergie von 2 MV des Deuterons. Welchen Einfluß er hat, wenn beide Energien miteinander vergleichbar werden, und insbesondere,

¹⁾ V. Fock, ZS. f. Phys. **61**, 126, 1930. — ²⁾ E. Wigner, Phys. Rev. **43**, 252, 1933.

ob er dann die Größenordnung der Resultate beeinflußt, kann nur die Durchführung der Rechnung und der Vergleich mit den Experimenten lehren.

Das Ziel unserer weiteren Rechnung wird also sein, die Funktion f zu bestimmen.

Dazu schlagen wir den konsequenten, durch die Methode von Hartree-Fock vorgezeichneten Weg ein. Die Rechnung auf Grund des Ansatzes (12) unterscheidet sich nun freilich in einem Punkte vom üblichen Hartree-Verfahren: Während man dort die unabhängige Bewegung der *Teilchen* voneinander postuliert und die Eigenfunktion in ein Produkt zerlegt, deren Faktoren jeweils nur von einer einzigen Teilchenkoordinate abhängen, spielen hier die Rolle der Teilchenkoordinaten drei etwas komplizierter gebaute *Freiheitsgrade* des Gesamtsystems, nämlich die Kombinationen:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad (14a)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (14b)$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{r}_3; \quad (14c)$$

also: Der Abstand der beiden Schwerpunkte voneinander, der Abstand der beiden das Deuteron bildenden Teilchen voneinander und die Schwerpunktskoordinate des Gesamtsystems.

Wir wenden uns nun der Behandlung von Gleichung (7) für den Dublettfall zu, indem wir von den Koordinaten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ auf die durch (14) definierten neuen Koordinaten $\mathfrak{R}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ umrechnen. Für die Gleichung (7) des Quartettfalles würde die Rechnung völlig analog verlaufen. Gleichung (7) geht über in:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} + 2 \Delta_{\mathbf{r}} \right) - E + V(\mathbf{r}) + \frac{e^2}{r_{13}} \right. \\ \left. + \left(m - \frac{1}{2} \mathfrak{h} \right) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) + V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] \right\} g(\mathbf{r}) f(\mathfrak{R}) \\ + \left(m - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \right) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} \mathbf{r}\right) \right. \\ \left. + V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3}{4} \mathbf{r}\right) \right] = 0. \quad (15)$$

Dabei haben wir noch das Coulomb-Glied e^2/r_{13} hinzugefügt, das nur im Falle eines stoßenden Protons auftritt und für ein stoßendes Neutron wegfällt.

Auf Gleichung (15) wenden wir die Operation an $\int d\mathbf{r} d\mathbf{s} g(\mathbf{r}) \dots$. Dann lassen sich die beiden Glieder

$$\int g(\mathbf{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{M} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) \right\} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E_D = -2,3 \text{ TME} \quad (16)$$

zusammenfassen; sie geben gerade den Massendefekt des Deuterons. Es tritt in der Gleichung also nur noch die Differenz

$$E_D - E = -E' \quad (17)$$

auf. E' ist die kinetische Energie der Relativbewegung der beiden Stoßpartner zueinander. Mit diesen Abkürzungen entsteht

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E' + \left(\mathfrak{w} - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \right) \int g^2(r) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) + V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \right] d\mathfrak{r} \right. \\ & \quad \left. + \int g^2(r) \frac{e^2}{r_{13}} d\mathfrak{r} \right\} f(\mathfrak{R}) \\ & \quad + \left(\mathfrak{m} - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \right) \left\{ \int g(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} \mathfrak{r}\right) d\mathfrak{r} \right. \\ & \quad \left. + \int g(r) V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3}{4} \mathfrak{r}\right) d\mathfrak{r} \right\} = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

In dieser Gleichung hängen die Funktionen V und g nur von den Beträgen ihrer Argumente ab. Infolgedessen kann man, wie man leicht überlegt, die Integrale paarweise zusammenziehen und erhält

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E' + (2\mathfrak{w} - \mathfrak{b}) \int g^2(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r} \right. \\ & \quad \left. + \int g^2(r) \frac{e^2}{r_{13}} d\mathfrak{r} \right\} f(\mathfrak{R}) \\ & \quad + (2\mathfrak{m} - \mathfrak{b}) \int g(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} \mathfrak{r}\right) d\mathfrak{r} = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Für die weitere Behandlung von (19) erinnern wir uns an die übliche Methode, Streuvorgänge nach der Wellenmechanik zu berechnen. Die asymptotische Form der Lösung für große R muß im Coulombfeldfreien Falle des Neutrons sein:

$$f(\mathfrak{R}) = \rightarrow e^{i k Z} + \frac{e^{i k R}}{2 i k R} \sum_l (2l + 1) (e^{2 i \delta_l} - 1) P_l(\cos \Theta), \quad (20a)$$

wobei $Z = R \cos \Theta$ ist und der Zusammenstoß der Teilchen längs der Z -Achse erfolgt. Im Falle des Protons tritt an Stelle von (20a):

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{R}) = & \rightarrow e^{i k Z + i \alpha_0 \ln \left(2 k R \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)} \\ & - \frac{\alpha_0}{2 k R \sin^2 \frac{\Theta}{2}} e^{i \left(k R - \alpha_0 \ln 2 k R - \frac{l \pi}{2} + 2 \eta_l \right)} \\ & + \frac{e^{i (k R - \alpha_0 \ln 2 k R)}}{2 i k R} \sum_l (2l + 1) (e^{2 i \delta_l} - 1) e^{2 i \eta_l} P_l(\cos \Theta), \quad (20b) \end{aligned}$$

wobei $\alpha_0 = e^2/\hbar v$ und $\eta_l = \arg(l + i\alpha_0)!$ ist. In diesen beiden Formeln bedeuten jeweils die nicht entwickelten Glieder die Eigenfunktion in einem Felde ohne Kernkräfte. In (20a) sind dann überhaupt keine Kräfte vorhanden, und es tritt nur eine ungestörte ebene Welle auf; in (20b) ist die einzige Störung das Coulomb-Feld, das zu einer logarithmisch mit der Entfernung wachsenden Phasenverschiebung und Änderung der Wellenlänge in der ebenen Welle führt und daneben eine zusätzliche Streuwelle auftreten läßt, die in ihrer Abhängigkeit von Θ das Rutherfordsche Streugesetz befolgt. Der Einfluß weiterer vorhandener Kräfte, die schneller abklingen als $1/r$, äußert sich in den hinzutretenden Gliedern, die in Form von Kugelfunktionsreihen geschrieben sind. Die δ_l sind hierin die Phasenverschiebungen, die die einzelnen Partialwellen durch die Kernkräfte erfahren. Man gewinnt sie, indem man $f(\mathfrak{R})$ nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} \sum_l c_l f_l(R) P_l(\cos \Theta), \quad (21)$$

und die so für jedes l aus (19) entstehende Gleichung löst, die nur noch die eine Koordinate R enthält. Schreibt man ihre asymptotische Lösung für große R in der Form

$$f_l(R) = \sin\left(kR - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right) \quad (22a)$$

für den Neutronenstoß, und

$$f_l(R) = \sin\left(kR - l\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \ln 2kR + \eta_l + \delta_l\right) \quad (22b)$$

für den Protonenstoß, so sind dadurch die Phasen δ_l bestimmt. Kennt man diese Phasen, so kann man sofort aus bekannten Formeln der wellenmechanischen Beugungstheorie die Wirkungsquerschnitte usw. berechnen.

Wir können in unserem Falle noch eine wesentliche Vereinfachung der Theorie vornehmen. Aus der Wellenkinematik solcher Beugungsvorgänge folgt nämlich der allgemeine Satz, daß die Entwicklung nach Kugelfunktionen um so schneller konvergiert, je größer die Wellenlänge λ der gebeugten Welle gegenüber dem Radius r_0 des beugenden Hindernisses ist. Nun ist $\lambda \sim E'^{-1/2}$, so daß wir uns für kleine Energien mit dem ersten, kugelsymmetrischen Gliede der Entwicklung begnügen dürfen. Eine Abschätzung zeigt sofort, daß in diesem Sinne „klein“ noch Energien von 2 bis 3 MV des stoßenden Teilchens sind. Da sich die Messungen im wesentlichen auf diesen Bereich beschränken, genügt es also, im folgenden die Voraussetzung der Kugelsymmetrie einzuführen.

Damit entfällt von vornherein der Beitrag des Quartettzustandes zur Streuung. Wir sahen ja bereits, daß in diesem Falle die Eigenfunktion einen Knoten haben muß, da sie in Spin und Ladung der beiden gleichartigen Teilchen symmetrisch ist, also zur Erfüllung des Pauli-Prinzips in ihren Örtern antimetrisch sein muß. Das ist aber unvereinbar mit der Voraussetzung der Kugelsymmetrie.

4. Lösung von Gleichung (19) für den kugelsymmetrischen Fall.

Die nächste Aufgabe wird es sein, unter Benutzung der speziellen Ansätze Gleichung (13) für die Funktion g und Gleichung (2) für die Potentialfunktion V die in Gleichung (19) vorkommenden Integrale mit einer kugelsymmetrischen Funktion

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} f_0(R) \tag{23}$$

auszuführen. Das in der ersten Zeile von (19) stehende gewöhnliche Potentialglied bietet dabei keine Schwierigkeiten, da im Integranden nur Funktionen vom Typus der Gaußschen Fehlerfunktion auftreten. Etwas schwieriger ist die Ausführung des Coulomb-Gliedes, wo man zu anderen Koordinaten übergehen muß, unter denen r_{13} vorkommt. In diesem Falle sind nicht alle Integrationen elementar ausführbar, und es bleibt am Ende ein Fehlerintegral stehen. Einige Schwierigkeiten bieten auch die in der dritten Zeile stehenden Austauschglieder. Hier empfiehlt sich die Umrechnung von den Koordinaten r, \mathfrak{R} auf

$$r' = -\frac{1}{2} \mathfrak{R} - \frac{3}{4} r \text{ und } \mathfrak{R}. \tag{24}$$

Die Integration über alle Winkel zwischen den Vektoren r' und \mathfrak{R} ist dann elementar möglich, dagegen bleibt natürlich ein Integral über r' stehen, unter dem die Funktion $f(r')$ auftritt. Die Gleichung (19) geht nach Ausführung dieser Rechnungen über in

$$\begin{aligned} & -\frac{3 \hbar^2}{4 M} \frac{d^2 f_0}{d R^2} - E' f_0(R) - (2 m - \mathfrak{b}) A \left(1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{8 \alpha}\right)^{-3/2} e^{-\varepsilon R^2} f_0(R) \\ & \quad + \frac{e^2}{R} \Phi(2 \sqrt{2 \alpha} R) f_0(R) \\ & - \left(\frac{4}{3}\right)^3 A (2 m - \mathfrak{b}) \left(\frac{2 \alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{2 \pi}{2 \mu} \int_0^\infty d r' f_0(r') e^{-\lambda(r'^2 + R^2)} (e^{2 \mu r' R} - e^{-2 \mu r' R}) \\ & \hspace{20em} = 0. \tag{25} \end{aligned}$$

Der Faktor $(\frac{4}{3})^3$ im letzten Gliede rührt dabei her von der Funktionaldeterminante der Transformation (24); die Faktoren 2π und $1/2\mu$ von den Integrationen über die Winkel. Die Abkürzungen bedeuten:

$$\lambda = \frac{4}{9} \cdot (5\alpha + b^2), \quad \mu = \frac{4}{9} (4\alpha - b^2), \quad \varepsilon = \frac{8\alpha b^2}{8\alpha + b^2}. \quad (26)$$

Im folgenden haben wir die Gleichung zu ihrer weiteren Behandlung umgeschrieben in die Form:

$$f_0'' + k^2 f_0 + A_1 e^{-\varepsilon R^2} f_0 + A_2 \int_0^\infty dr' f_0(r') e^{-\lambda(R^2 + r'^2)} (e^{2\mu R r'} - e^{-2\mu R r'}) - C \cdot \frac{\Phi(\zeta R)}{R} f_0(R) = 0 \quad (27)$$

mit den Abkürzungen:

$$k^2 = \frac{4M}{3\hbar^2} E', \quad C = \frac{4M}{3\hbar^2} e^2, \quad \zeta = 2\sqrt{2\alpha}. \quad (28)$$

$$A_1 = \frac{4M}{3\hbar^2} A (2w - \mathfrak{h}) \left(1 + \frac{b^2}{8\alpha}\right)^{-3/2}; \quad 2w - \mathfrak{h} = 0.$$

$$A_2 = \frac{4M}{3\hbar^2} \frac{16}{3} A (2m - \mathfrak{h}) \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{\pi}{4\alpha - b^2}; \quad 2m - \mathfrak{h} = \frac{5}{4}.$$

Die Lösung von Gleichung (27) ist schwierig. Das für Streurechnungen naheliegendste Verfahren einer numerischen Integration von innen nach außen bis zum Abklingen der Kräfte und Anschließen an die asymptotische Lösung für große R läßt sich in unserem Falle nicht durchführen infolge des Integralgliedes. Dessen Behandlung als Störung, wie es etwa bei Fock für die Elektronenhülle geschieht, erscheint hier auch nicht gerechtfertigt, da es stets einen überwiegenden Anteil der streuenden Kräfte enthält; im speziellen Falle des Dublettzustandes beim Dreikörperproblem enthält es wegen $A_1 = 0$ sogar die *gesamte* streuende Kraft.

Nach längerem Probieren wurde schließlich das folgende Verfahren als das brauchbarste befunden: Wir setzen für die Funktion f_0 bei kleinen R eine Reihenentwicklung an:

$$f_0(R) = N \cdot (a_1 R + a_3 R^3 + a_5 R^5 + \dots) e^{-\eta R^2}. \quad (29)$$

Beim Einsetzen der Entwicklung in (27) haben wir mit dieser Funktion, die sicher nur für kleine R zutrifft, im Austauschgliede über den ganzen Bereich $0 < r' < \infty$ zu integrieren. Nun steht aber im Integranden noch ein Faktor, der exponentiell mit r'^2 abklingt, so daß wir sicher sein können, daß die Gebiete großer r' , in denen unsere Entwicklung merklich falsch wird,

zum Integral nur wenig beitragen. Es wird also gleichgültig sein, ob wir dort unsere Entwicklung oder die richtige Funktion einsetzen. Gleichung (27) geht dann über in eine Summe von Potenzreihen in R , die jeweils mit Exponentialfaktoren multipliziert sind. Das Integralglied erhält dann den Faktor

$$\exp - \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\eta + \lambda} \right) R^2,$$

während die Glieder f_0'' und $k^2 f_0$ den Faktor $e^{-\eta R^2}$ enthalten. Wir verfügen nun über η so, daß diese beiden Exponentialfaktoren übereinstimmen, setzen also

$$\lambda - \frac{\mu^2}{\eta + \lambda} = \eta \quad \text{oder} \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}. \quad (30)$$

Benutzen wir außerdem noch die Abkürzungen

$$\sigma = \eta + \lambda \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\mu}{\eta + \lambda} = \frac{\mu}{\sigma}, \quad (31)$$

so erhalten wir

$$f_0'' + k^2 f_0 + A_1 e^{-\epsilon R^2} f_0 + A_2 e^{-\eta R^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n J_n = 0, \quad (32)$$

mit

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x + \tau R)^n e^{-\sigma x^2}. \quad (33)$$

Die Integrale (33) lassen sich nun wieder leicht ausrechnen, und zwar erhält man

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}, \\ J_3 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{3}{2\sigma} + \tau^2 R^2 \right), \\ J_5 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{15}{4\sigma^2} + \frac{5}{\sigma} \tau^2 R^2 + \tau^4 R^4 \right), \\ J_7 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{105}{8\sigma^3} + \frac{105}{4\sigma^2} \tau^2 R^2 + \frac{21}{2\sigma} \tau^4 R^4 + \tau^6 R^6 \right), \\ J_9 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{945}{16\sigma^4} + \frac{315}{2\sigma^3} \tau^2 R^2 + \frac{189}{2\sigma^2} \tau^4 R^4 + \frac{18}{\sigma} \tau^6 R^6 + \tau^8 R^8 \right). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Entwickelt man in (32) endlich noch $e^{-\epsilon R^2}$ und $\Phi(\zeta R)$ nach Potenzen von R^2 , so kann man überall den Faktor $N \cdot e^{-\eta R^2}$ abspalten und erhält

durch Koeffizientenvergleich in den übrigbleibenden Potenzreihen folgendes Schema linearer Gleichungen für die a_n , wenn wir noch setzen

$$A_2 \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \cdot \tau = A'_2 \quad \text{und} \quad C' = \frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} C. \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(-6\eta + k^2 + A_1 + A'_2 - C' \right) + a_3 \left(6 + \frac{3}{2\sigma} A'_2 \right) \\ + a_5 \left(\frac{15}{4\sigma^2} A'_2 \right) + a_7 \left(\frac{105}{8\sigma^3} A'_2 \right) + a_9 \left(\frac{945}{16\sigma^4} A'_2 \right) = 0, \\ a_1 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\xi^2}{3} \right) + a_3 \left(-14\eta + k^2 + A_1 - C' + A'_2 \tau^2 \right) \\ + a_5 \left(20 + \frac{5}{\sigma} A'_2 \tau^2 \right) + a_7 \left(\frac{105}{4\sigma^2} A'_2 \tau^2 \right) + a_9 \left(\frac{315}{2\sigma^3} A'_2 \tau^2 \right) = 0, \\ a_1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} A_1 - C' \frac{\xi^4}{10} \right) + a_3 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\xi^2}{3} \right) \\ + a_5 \left(-22\eta + k^2 + A_1 + A'_2 \tau^4 - C' \right) \\ + a_7 \left(42 + \frac{21}{2\sigma} A'_2 \tau^4 \right) + a_9 \left(\frac{189}{2\sigma^2} A'_2 \tau^4 \right) = 0, \\ a_1 \left(-\frac{\varepsilon^3}{6} A_1 + C' \frac{\xi^6}{42} \right) + a_3 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} A_1 - C' \frac{\xi^4}{10} \right) \\ + a_5 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\xi^2}{3} \right) \\ + a_7 \left(-30\eta + k^2 + A_1 + A'_2 \tau^6 - C' \right) + a_9 \left(72 + \frac{18}{\sigma} A'_2 \tau^6 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Kennt man die Lösung dieser Gleichungen, so kennt man die Funktion $f_0(R)$ in dem Gebiet, wo die Kräfte wirken, bis auf ihre Amplitude, die man aus homogenen Gleichungen natürlich nicht erschließen kann. Schließt man diese Lösung nun an die asymptotische Form (22a) oder (22b) für $l = 0$ an, je nachdem, ob es sich um ein Neutron oder ein Proton handelt, so gestatten die beiden Bedingungen, daß an der Anschlußstelle $R = R_0$ sowohl die Funktion, als die erste Ableitung übereinstimmen sollen, die Berechnung der Phase δ_0 und der Amplitude im Innern.

Für die zahlenmäßige Durchführung haben wir die Kraftkonstanten $A = 30$ und $b = 1$ gewählt¹⁾. Sie sind geeignet zur Darstellung des

¹⁾ Als Einheit der Energie benutzen wir im folgenden stets $10^{-3} Mc^2$, abgekürzt TME (tausendstel Masseneinheit). 1 TME = 0,936 MV. Als Längeneinheit dient der Elektronenradius $e^2/mc^2 = 2,81 \cdot 10^{-13}$ cm. Wo andere Einheiten benutzt werden, sind diese stets ausdrücklich hinzugefügt, z. B. bei den Resultaten für die Wirkungsquerschnitte, wo auf die gebräuchliche Einheit 10^{-24} cm² umgerechnet wurde.

Massendefektes des Deuterons nach (13) und (16); die Ausführung des entsprechenden Minimumproblems ergibt $\alpha = 0,5$. Die Reihenentwicklung wurde nach dem Gliede mit R^7 abgebrochen; man findet dann die in Tabelle 1 zusammengestellten Zahlen.

Tabelle 1.

k^2	a_3/a_1	a_5/a_1	a_7/a_1
0	0,592	0,169	+ 0,0064
0,1205	0,582	0,155	- 0,0026
0,241	0,572	0,142	- 0,0112
0,362	0,561	0,128	- 0,0202

Die Reihenentwicklung konvergiert also recht gut, besonders für kleine Werte von k^2 . Für $R < R_0$ ($R_0 = \text{Anschlußstelle}$) lautet die Eigenfunktion nach (29):

$$f_0^{(s)} = N R P(R) e^{-\eta R^2} \text{ mit } P(R) = 1 + a_3 R^2 + a_5 R^4 + \dots, \quad (37a)$$

wobei wir jetzt speziell $a_1 = 1$ setzen wollen, und die Ableitung

$$f_0^{(s)'} = N Q(R) e^{-\eta R^2} \quad (37b)$$

mit

$$Q(R) = 1 + (3 a_3 - 2 \eta) R^2 + (5 a_5 - 2 \eta a_3) R^4 + (7 a_7 - 2 \eta a_5) R^6 + \dots$$

Für $R > R_0$ dagegen ist nach (22a) für den Neutronenstoß:

$$f_0^{(a)} = \sin(kR + \delta_0), \quad (38a)$$

$$f_0^{(a)'} = k \cos(kR + \delta_0). \quad (38b)$$

Die beiden Anschlußbedingungen liefern dann die Gleichungen:

$$N^{-2} = R_0^2 e^{-2 \eta R_0^2} \left\{ \left(\frac{Q(R_0)}{k R_0} \right)^2 + (P(R_0))^2 \right\}, \quad (39)$$

$$\dot{\delta}_0 = -k R_0 + \arctan \left(k R_0 \frac{P(R_0)}{Q(R_0)} \right). \quad (40)$$

Ein Maß für die Güte der Näherung wird es sein, wie stark die Phase δ_0 davon abhängt, wo wir die Anschlußstelle hinlegen. Wären $f_0^{(s)}$ und $f_0^{(a)}$ beide streng richtige Lösungen, so müßte sich für jedes R_0 exakt dasselbe δ_0 und N^2 ergeben. In Wirklichkeit ist $f_0^{(s)}$ für große R_0 schlecht und $f_0^{(a)}$ für kleine; dazwischen muß irgendwo ein Gebiet liegen, wo beide Funktionen brauchbare Näherungen sind und wo $d\delta_0/dR_0$ verschwindet. Fig. 1 zeigt, daß man für $k^2 = 0,362$, also in einem ziemlich ungünstigen Fall, wo die Reihenentwicklung am schlechtesten konvergiert, immer noch eine hinreichende Konstanz von δ_0 erhält, um Vertrauen in die Methode zu gewinnen.

Wir werden allerdings weiter unten sehen, daß beim Vierkörperproblem die Abweichungen von der Konstanz erheblich größer werden.

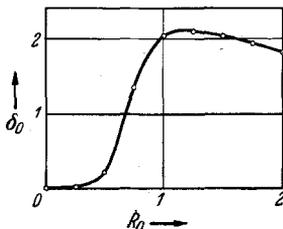


Fig. 1.
Berechnete Phase δ_0 als Funktion der Anschlußstelle R_0 für die Streuung von Neutronen der Energie $E_n = 2,25$ an Deuteronen.

Für die Streuung von Protonen kann die Berechnung der Phasen ganz analog durchgeführt werden durch Anschluß an (22b). Die Formeln sind dann ganz ähnlich wie (39) und (40) gebaut.

5. Ergebnisse und Vergleich mit der Erfahrung für das Dreikörperproblem.

a) *Streuung von Neutronen an Deuteronen.* Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie man die Phase δ_0 berechnen kann. Der Wirkungsquerschnitt wird nach einer bekannten Formel:

$$\Phi = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{3} \sin^2 \delta_0. \quad (41)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß nur der Dublettzustand (Gewicht $\frac{1}{3}$) zur Streuung beiträgt, und daß auch hier nur die zentralen Stöße mit $l = 0$ Beiträge liefern. Im vorigen Abschnitt wurde klargelegt, warum diese beiden Voraussetzungen weitgehend zutreffen dürften. k^2 ist bis auf einen Faktor die kinetische Energie des stoßenden Teilchens, und zwar ist beim Stoß eines Neutrons der kinetischen Energie E_n gegen ein ruhendes Deuteron

$$k^2 = \frac{4M}{3\hbar^2} E_n = \frac{4M}{3\hbar^2} \frac{2}{3} E_n = 0,1605 E_n. \quad (42)$$

Bei Berechnung von δ_0 nach der geschilderten Methode erhält man hieraus die in Fig. 2 dargestellte Wirkungsquerschnittskurve.

Zur Kritik des Verfahrens zeigt Fig. 3 die berechneten Wirkungsquerschnitte als Funktion der willkürlichen Anschlußstelle für die Energie $E_n = 0$ und für die Energie $E_n = 2,25$ TME. Gewählt wurde jeweils der im Minimum von der Funktion angenommene Wert. Man sieht sofort, daß die Unabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Anschlußstelle

für die größere Energie einigermaßen gewahrt ist, dagegen für $E_n = 0$ der Schluß, der lediglich auf der Lage des Minimums aufbaut, etwas gewagt ist.

Der Vergleich mit dem Experiment kann nur sehr bedingt durchgeführt werden, da es schwierig ist, die Energie schneller Neutronen genau anzugeben. Ältere Messungen von Dunning und Mitarbeitern¹⁾ führten zu zwei Zahlen für die totale Schwächung eines Neutronenstromes in einer Deuteriumschicht: Für thermische (C -)Neutronen, also für $E_n = 0$, erhalten sie

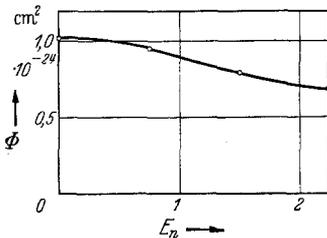


Fig. 2. Berechnete Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen an Deuteronen.

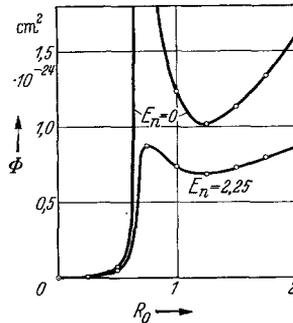


Fig. 3. Änderung des Wirkungsquerschnitts für die Streuung von Neutronen an Deuteronen bei Variation der Anschlußstelle.

$\Phi = 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ und im Falle „schneller“ Neutronen, die alle möglichen Geschwindigkeiten zwischen 1 V und 10 MV umfassen, $\Phi = 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Diese Zahlen sind noch nicht unmittelbar vergleichbar mit unseren theoretischen Ergebnissen. Bei C -Neutronen ist zu beachten, daß ihre kinetische Energie klein ist gegen die Bindungsenergie der Deuteronen im Molekularverbände. Sie können daher keinen Impuls an die Deuteronen abgeben; die reduzierte Masse des Systems ist einfach gleich der Masse M des Neutrons, während für die Streuung an freien Deuteronen die reduzierte Masse $\frac{2}{3} M$ auftritt. Da die Wirkungsquerschnitte proportional sind dem Quadrat der reduzierten Masse, folgt

$$\frac{\Phi_{\text{frei}}}{\Phi_{\text{gebunden}}} = \frac{4}{9}. \tag{43}$$

Der Dunning'sche Wert für C -Neutronen ist zum Vergleich mit der Theorie also zu ersetzen durch $1,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, was mit dem theoretischen Wert

¹⁾ J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. 48, 265, 1935.

$1,0 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ einigermaßen vergleichbar ist. Neuere Messungen von Goldhaber und Briggs¹⁾ ergeben den Wert $7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, auf freie Deuteronen korrigiert also $3,1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, was hiermit schlechter übereinstimmt.

Der von Dunning²⁾ für „schnelle“ Neutronen angegebene mittlere Wirkungsquerschnitt scheint ebenfalls etwas reichlich groß. Der geringe Unterschied zwischen diesem Wert und dem von Dunning für *C*-Neutronen gefundenen würde gut zu dem theoretischen Befund passen, daß der Wirkungsquerschnitt mit abnehmender Energie nur sehr langsam ansteigt. Doch scheinen sowohl die theoretischen als die experimentellen Zahlen im Augenblick noch als zu unsicher, um auf einen solchen Vergleich allzuviel zu geben. Es sollte nur veranschaulicht werden, wie groß die Unsicherheit noch ist, und in welchem Maße man ungefähr Übereinstimmung erwarten darf.

b) *Streuung von Protonen an Deuteronen.* Bei Anwesenheit eines Coulomb-Feldes erhält man nach (20 b) für das Amplitudenquadrat der Streuwelle, sobald es genügt, sich auf den kugelsymmetrischen Anteil mit $l = 0$ zu beschränken:

$$J = \left| -\frac{\alpha_0}{2kR \sin^2 \frac{\Theta}{2}} e^{-i \frac{l\pi}{2}} + \frac{1}{2ikR} (e^{2i\delta_0} - 1) \right|^2. \quad (44)$$

Es ist üblich, das Verhältnis der in einen Winkelbereich $2\pi \sin \Theta d\Theta$ gestreuten Intensität zu derjenigen anzugeben, die nach dem Rutherford'schen Gesetz (also für $\delta_0 = 0$) in diesen Bereich gelangen würde. Man erhält für dieses Verhältnis, wenn man wieder berücksichtigt, daß nur der Dublettzustand beiträgt:

$$R = \frac{\frac{1}{3} J_{\text{Dublett}} + \frac{2}{3} J_{\text{Quartett}}}{J_{\text{Rutherford}}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{J_{\text{Dublett}}}{J_{\text{Rutherford}}}, \quad (45)$$

und weiter aus (44)

$$R = 1 + \frac{4}{3\alpha_0} \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin \delta_0 \cos \left(\delta_0 + \alpha_0 \ln \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) + \frac{4}{3\alpha_0^2} \sin^4 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin^2 \delta_0. \quad (46)$$

¹⁾ M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937. — ²⁾ Siehe Fußnote 1 auf voriger Seite.

Dabei rechnet man von dem Winkel Θ im Schwerpunktsystem um auf den Winkel ϑ im Koordinatensystem der Beobachtung, in dem das Teilchen der Masse M_1 auf das ruhende der Masse M_2 stößt, nach der Formel:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{M_1}{M_2}}. \quad (47)$$

Experimente wurden bisher nur von Tuve, Heydenburg und Hafstad¹⁾ ausgeführt für den Stoß von Protonen von 830 kV auf Deuteronen. Dann ist $M_1/M_2 = 1/2$.

Die Berechnung von δ_0 hängt auch hier wieder von der Anschlußstelle ab, wie Fig. 4 zeigt. Als bester Wert wurde das Maximum $\delta_0 = 2,277$ ($R_0 = 1,25$) eingesetzt, womit sich für das Streuverhältnis R Werte ergaben,

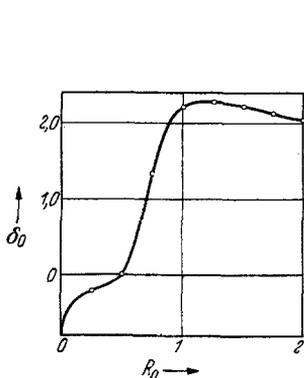


Fig. 4. Berechnete Phase δ_0 als Funktion der Anschlußstelle R_0 für die Streuung von 830 kV-Protonen an Deuteronen.

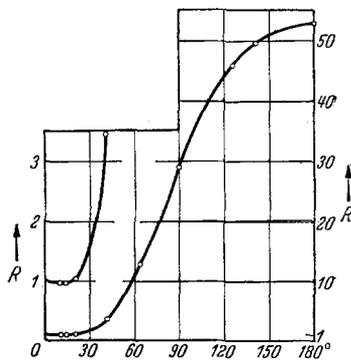


Fig. 5. Berechnetes Streuverhältnis R als Funktion des Streuwinkels für die Streuung von 830 kV-Protonen an Deuteronen.

die von 1 bei 0° bis auf 53 bei 180° ansteigen. Fig. 5 veranschaulicht diesen Verlauf; links ist der Anstieg der Kurve bei kleinen Winkeln in größerem Ordinatenmaßstab noch einmal herausgezeichnet.

Die von Tuve und Mitarbeitern angegebenen Meßpunkte stimmen im Bereich der Vorwärtsstreuung, d. h. für Ablenkungen bis zu 90° quantitativ mit den theoretischen Werten überein. Für größere Winkel dagegen ergibt sich ein völlig von der theoretischen Erwartung abweichendes Bild. Bei $\vartheta = 126^\circ$ erhalten sie statt unseres Wertes $R = 45,7$ einen jähen Anstieg

¹⁾ M. A. Tuve, N. P. Heydenburg u. L. R. Hafstad, Phys. Rev. 50, 806, 1936.

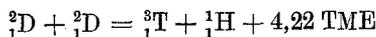
der Kurve auf $R = 2275$. Dazu ist zu bemerken: Ein so schroffer Anstieg ist sicher in keiner Weise zu verstehen. Selbst bei Mitwirken von P -Streuung in beträchtlichem Umfange, die sich auch in einem Beitrag des Quartettzustandes zur Streuung äußern würde, könnte man niemals eine Diskrepanz um einen Faktor 50 verstehen, wie sie hier vorläge. Sollte sich daher das Tuvesche Ergebnis bewahrheiten, so läge eine ernste Schwierigkeit vor, da es unabhängig von der Art unserer Näherung in Widerspruch stände zu den Grundlagen der Wellenkinematik und damit der quantenmechanischen Methode überhaupt¹⁾.

Nun bezeichnen die Autoren ihre Ergebnisse allerdings selbst erst als vorläufig. Der auffällige Unterschied zwischen dem Bereich der Vorwärts- und Rückwärtsstreuung geht vielleicht teilweise doch zurück auf das verschiedene experimentelle Verfahren, was sie in diesen beiden Gebieten anwenden: Im vorwärtsliegenden Winkelbereich ($\vartheta < 90^\circ$) zählen sie die Zahl der gestreuten Protonen aus; im rückwärtsliegenden dagegen, wo deren Intensität sehr stark abgenommen hat, die Zahl der vorwärtslaufenden Rückstoßdeuteronen. Es wird sich also empfehlen, weitere Angaben der Autoren abzuwarten.

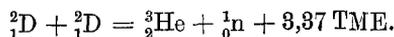
Es soll nicht unbemerkt bleiben, daß die quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im Bereich der Vorwärtsstreuung durchaus zufällig sein kann; doch sollte der allgemeine Verlauf von Streuexperimenten durch die Kurve Fig. 5 bis auf einen Faktor 2 bei 180° dargestellt werden.

6. Berechnung der Eigenfunktionen für das Vierkörperproblem.

Nachdem wir am einfachen Falle des Dreikörperproblems unsere Methode studiert haben, können wir uns dem schwierigeren, aber interessanten Vierkörperproblem zuwenden. Hier hat praktisches Interesse nur der eine Fall, daß das stoßende Teilchen ebenfalls ein Deuteron ist, und die Reaktion eintritt:



oder



Hier tritt also zum ersten Male eine im eigentlichen Sinne kernchemische Umwandlung ein. Es genügt daher nicht mehr die Betrachtung eines stationären Zustandes, der sowohl das Verhalten vor als nach dem Stoß

¹⁾ Diese Schwierigkeit wird auch in der inzwischen erschienenen Arbeit von H. Primakoff, Phys. Rev. **52**, 1000, 1937, diskutiert.

umfaßt, sondern es ist notwendig, die Wahrscheinlichkeit auszurechnen für den Übergang eines Anfangszustandes aus zwei Deuteronen in einen Endzustand aus Triton und Proton. Dabei wollen wir zunächst nur die Übergänge zwischen Zuständen betrachten, welche den Drehimpuls $l = 0$ sowohl vor als nach dem Stoß haben. Dann muß auch der Spin des Systems vor und nach dem Stoß der gleiche sein. Wir haben also drei Möglichkeiten:

a) *Quintettzustand* (Gewicht $\frac{5}{9}$): Die Spins der beiden Deuteronen stehen parallel, $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 2$. Da nach dem Stoß zwei Teilchen entstehen, deren jedes nur den Spin $1/2$ hat, kann dieser Zustand nicht vor und nach dem Stoß den Bahnimpuls $l = 0$ haben und gleichzeitig seinen Gesamtdrehimpuls behalten. Der Quintettzustand liefert also erst Beiträge zur P -Umwandlung.

b) *Triplettzustand* (Gewicht $\frac{3}{9}$): $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 1$. Hier ist es nun zwar möglich, auch nach dem Zusammenstoß den Spin 1 zu bewahren, indem man die Spins von Triton und Proton parallel stellt. Nun verdankt aber das Triton seinen ganzen Spin dem in ihm gebundenen Proton; mit anderen Worten: Im Endzustand muß die Eigenfunktion in den Spins (und Ladungen) der beiden Protonen symmetrisch sein, also antimetrisch in ihren Örtern. Das ist aber unverträglich mit der Kugelsymmetrie; der Triplettzustand trägt ebenfalls erst zur P -Umwandlung bei.

c) *Singulettzustand* (Gewicht $\frac{1}{9}$): $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 0$. Nach dem Stoß müssen die Spins von Triton und Proton antiparallel stehen, also auch die Spins der beiden Protonen. Nur hier ist es möglich, sowohl vor als nach dem Stoß einen kugelsymmetrischen Zustand, also S -Umwandlung, zu bekommen.

Wir stellen fest, daß wir für die Berechnung der S -Umwandlung, wie sie in dieser Arbeit ausschließlich durchgeführt werden soll, uns begnügen dürfen mit der Betrachtung des Singulettzustandes und von vornherein den Gewichtsfaktor $\frac{1}{9}$ im Wirkungsquerschnitt anzubringen haben.

Gleichzeitig erklärt dieser Sachverhalt vielleicht auch die Beobachtung von Neuert¹⁾, sowie von Kempton, Browne und Maasdorp²⁾, daß schon für sehr langsame Deuteronen von 100 bis 200 kV Energie sich keine im Schwerpunktsystem kugelsymmetrische Richtungsverteilung der bei der Umwandlung entstehenden Protonen ergab, sondern ihre Intensität als Funktion des Winkels etwa das Gesetz

$$J \sim 2 + \cos^2 \Theta$$

¹⁾ H. Neuert, Phys. ZS. **38**, 122, 1937. — ²⁾ A. E. Kempton, B. C. Browne u. R. Maasdorp, Proc. Roy. Soc. London (A) **157**, 386, 1937.

befolgt¹⁾. Die P -Umwandlung sollte also ungefähr halb soviel zum Wirkungsquerschnitt beitragen wie die S -Umwandlung. Mit anderen Worten: Die S -Umwandlung ist durch eine Auswahlregel zwar nicht völlig, aber doch zum größten Teil verboten; während sie sonst die P -Umwandlung weit überwiegen würde, macht sie in Wirklichkeit nur noch ungefähr das Doppelte davon aus. Ein solches „Beinaheverbotensein“ bedeutet aber gerade unser Gewichtsfaktor $\frac{1}{9}$.

Wir müssen uns hier mit diesem qualitativen Hinweis begnügen, da eine quantitative Bestimmung des Verhältnisses von S - und P -Umwandlung zueinander schwierig ist und wohl auch außerhalb der Tragweite unseres Näherungsverfahrens liegt. Wir beschränken uns daher im folgenden ausschließlich auf die Betrachtung des Singulettüberganges allein.

Schreiben wir für die Ortsfunktion, welche besagt, daß 1 und 2 das erste, 3 und 4 das zweite Deuteron bilden, kurz:

$$\varphi(\overline{12}, \overline{34}) = \varphi_{12}, \quad (48)$$

so können wir die Eigenfunktion des Anfangszustandes schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_a = & \varphi(\overline{12}, \overline{34}) \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \beta_4 (a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_3 b_4 - a_4 b_3) \\ & + \varphi(\overline{34}, \overline{12}) \beta_1 \beta_2 \alpha_3 \alpha_4 (a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_3 b_4 - a_4 b_3) \\ & - \varphi(\overline{23}, \overline{41}) \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 (a_2 b_3 - a_3 b_2) (a_4 b_1 - a_1 b_4) \\ & - \varphi(\overline{41}, \overline{23}) \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_4 (a_2 b_3 - a_3 b_2) (a_4 b_1 - a_1 b_4) \\ & - \varphi(\overline{31}, \overline{24}) \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_4 (a_1 b_3 - a_3 b_1) (a_2 b_4 - a_4 b_2) \\ & - \varphi(\overline{24}, \overline{31}) \beta_1 \alpha_2 \beta_3 \alpha_4 (a_1 b_3 - a_3 b_1) (a_2 b_4 - a_4 b_2) \end{aligned} \quad (49)$$

Für den Endzustand soll

$$\varphi(\overline{123}, 4) = \varphi_4 \quad (50)$$

bedeuten: Das vierte Teilchen ist das freie Proton, während 1, 2 und 3 das Triton bilden. Die Eigenfunktion eines Tritons ist in der zitierten Arbeit des Verfassers angegeben; sie ist das Produkt einer Ortsfunktion mit dem Spin-Ladungsfaktor:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_3 \cdot a_1 a_2 b_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_1 \cdot a_2 a_3 b_1 \\ + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_1 b_2. \end{aligned} \quad (51)$$

¹⁾ Nach einer Angabe von Oliphant auf der Konferenz in Kopenhagen, Sept. 1937, erhält man für die alternative Emission der Neutronen praktisch kugelsymmetrische Richtungsverteilung. Die Frage dürfte also auch experimentell noch nicht ganz geklärt sein. Ich danke Frau Prof. Meitner für den freundlichen Hinweis auf diese Mitteilung.

Die Gesamteigenfunktion für den Endzustand lautet daher:

$$\begin{aligned}
 \Psi_e = & \varphi_4 \beta_4 b_4 [(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_3 \cdot a_1 a_2 b_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_1 a_2 a_3 b_1 \\
 & + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_1 b_2] \\
 - & \varphi_3 \beta_3 b_3 [(\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4) \alpha_2 \cdot a_4 a_1 b_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_4 a_1 a_2 b_4 \\
 & + (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2) \alpha_1 \cdot a_2 a_4 b_1] \\
 + & \varphi_2 \beta_2 b_2 [(\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3) \alpha_1 \cdot a_3 a_4 b_1 + (\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4) \alpha_3 \cdot a_4 a_1 b_3 \\
 & + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \alpha_4 \cdot a_1 a_3 b_4] \\
 - & \varphi_1 \beta_1 b_1 [(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_4 \cdot a_2 a_3 b_4 + (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_4 b_2 \\
 & + (\alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4) \alpha_3 \cdot a_4 a_2 b_3]. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Unser Verfahren läuft nun ganz analog zu dem beim Dreikörperproblem ausgeführten weiter. Wir schreiben zunächst die durch Summation über Spin und Ladung entstehenden Schrödinger-Gleichungen für den Anfangs- und Endzustand hin, also die Analoga zu Gleichung (7):

Anfangszustand:

$$\begin{aligned}
 T \varphi_{12} + \{ & (M_{12} + W_{12} + H_{12} + B_{12}) + (M_{34} + W_{34} + H_{34} + B_{34}) \\
 & + (W_{13} - H_{13}) + (W_{24} - H_{24}) + W_{14} + W_{23} \} \varphi_{12} \\
 & + (M_{13} - B_{13}) \varphi_{23} + (M_{24} - B_{24}) \varphi_{14} + M_{14} \varphi_{24} \\
 & + M_{23} \varphi_{13} = E \cdot \varphi_{12}, \quad (53)
 \end{aligned}$$

Endzustand:

$$\begin{aligned}
 T \varphi_4 + \{ & (M_{12} + W_{12} + H_{12} + B_{12}) + (M_{13} + W_{13} - H_{13} - B_{13}) \\
 & + (M_{23} + W_{23}) + W_{14} + (W_{24} - H_{24}) + (W_{34} + B_{34}) \} \varphi_4 \\
 & + M_{14} \varphi_1 + (M_{24} - B_{24}) \varphi_2 + (M_{34} + H_{34}) \varphi_3 = E \cdot \varphi_4. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Für die Lösung machen wir wieder den analogen Ansatz wie im Falle des Dreikörperproblems: Im *Anfangszustand* setzen wir

$$\varphi_{12} = e^{-\alpha(r_{12}^2 + r_{34}^2)} f\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}\right). \quad (55)$$

D. h. wir nehmen an, daß die Wechselwirkung der beiden Deuteronen lediglich darin besteht, daß sie die Bewegung ihrer Schwerpunkte zueinander gegenseitig beeinflussen, nicht aber sich gegenseitig polarisieren.

Wir führen die Koordinaten ein

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_3 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_1 &= \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_1 & & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\
 \mathfrak{R}_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{s} - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_1 & & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\
 \mathfrak{R}_2 &= & \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_3 &= \mathbf{s} & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_2 - \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\
 \mathfrak{R} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_4 &= \mathbf{s} & & - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_2 - \frac{1}{2} \mathfrak{R}.
 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \Delta_s + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_1} + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_2} + \Delta_{\mathfrak{R}}. \quad (57)$$

Geht man in (54) mit dem Ansatz (55) ein und übt den Operator

$$\int d\mathfrak{s} d\mathfrak{R}_1 d\mathfrak{R}_2 e^{-\alpha(\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2)}$$

darauf aus, so bleibt eine zu (19) analoge Gleichung stehen, nämlich:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathfrak{R}} f(\mathfrak{R}) + \left(\frac{6\hbar^2}{M} \alpha - E \right) f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(m + w + \mathfrak{h} + \mathfrak{b}) \left(1 + \frac{b^2}{2\alpha} \right)^{-3/2} f(\mathfrak{R}) + \frac{e^2}{R} \Phi(2\sqrt{\alpha}R) f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(2w - \mathfrak{h}) \left(1 + \frac{b^2}{4\alpha} \right)^{-3/2} e^{-\frac{4\alpha b^2}{4\alpha + b^2} \mathfrak{R}^2} f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(2m - \mathfrak{b}) \cdot 8 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} e^{-(2\alpha + b^2)\mathfrak{R}^2} \int d\mathfrak{R}' e^{-(2\alpha + b^2)\mathfrak{R}'^2 + 2b^2\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} f(\mathfrak{R}') = 0. \quad (58) \end{aligned}$$

Hierin bedeutet die Größe

$$\frac{6\hbar^2}{M} \alpha - 2A(m + w + \mathfrak{h} + \mathfrak{b}) \left(1 + \frac{b^2}{2\alpha} \right)^{-3/2} = 2E_D \quad (59)$$

zweimal den Massendefekt des Deuterons, also = -4,6 TME.

Die analoge Behandlung der Gleichung (54) für den *Endzustand* erfolgt auf Grund des Ansatzes:

$$\varphi_4 = e^{-\beta(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)} f\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - r_4\right), \quad (60)$$

der besagt, daß das Triton durch das Proton nicht polarisiert wird. Diese Voraussetzung ist wahrscheinlich weniger gut erfüllt als die analoge für den Anfangszustand, denn es ist zwar die Bindungsenergie des Tritons mit rund 9 TME sehr viel größer als die der Deuteronen, dafür ist aber auch die kinetische Energie der Teilchen im Endzustand viel größer, nämlich um rund die Hälfte hiervon. Als Koordinaten wählen wir sinngemäß:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{4} r_1 + \frac{1}{4} r_2 + \frac{1}{4} r_3 + \frac{1}{4} r_4; & r_1 &= s + \frac{2}{3} \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R}_1 &= r_1 - r_2; & r_2 &= s - \frac{1}{3} \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R}_2 &= r_2 - r_3; & r_3 &= s - \frac{1}{3} \mathfrak{R}_1 - \frac{2}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{3} r_3 - r_4; & r_4 &= s - \frac{3}{4} \mathfrak{R}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \Delta_s + \frac{4}{3} \Delta_{\mathfrak{R}} + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_1} + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_2} - 2 \nabla_{\mathfrak{R}_1} \cdot \nabla_{\mathfrak{R}_2}. \quad (62)$$

In der Wahl der Koordinaten \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 liegt natürlich eine gewisse Willkür, die sich aber wohl nicht vermeiden läßt. Bildet man die zu (58) analoge Gleichung, so entsteht

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2}{M} \Delta_{\mathfrak{R}} f(\mathfrak{R}) + \left(\frac{9\hbar^2}{M} \beta - E \right) f(\mathfrak{R}) - 3A(m+w) \left(1 + \frac{b^2}{3\beta} \right)^{-3/2} f(\mathfrak{R}) \\
 & - A(3w+b-h) \left(1 + \frac{b^2}{9\beta} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{9\beta b^2}{9\beta + b^2} \mathfrak{R}^2 \right) f(\mathfrak{R}) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{e^2}{R} \Phi(3\sqrt{\beta}R) f(\mathfrak{R}) \\
 & - A(3m-b+h) \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^3 \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int d\mathfrak{R}' \exp \left[-\frac{45}{16} \beta (\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \frac{6}{5} \mathfrak{R}\mathfrak{R}') \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{9}{16} b^2 (\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')^2 \right] f(\mathfrak{R}') = 0. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Dabei können die beiden Glieder

$$\frac{9\hbar^2}{M} \beta - 3A(m+w) \left(1 + \frac{b^2}{3\beta} \right)^{-3/2} = E_T = -9TME, \quad (64)$$

zum Massendefekt des Tritons zusammengefaßt werden.

In die Gleichungen (58) und (63) führen wir als nächsten Schritt nun die Voraussetzung der *Kugelsymmetrie* ein:

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} f_0(R). \quad (65)$$

Dann kann man im Integralgliede jeweils die Integration über die Winkel ganz ähnlich wie früher ausführen. Man wird in beiden Fällen auf eine Gleichung geführt vom Typus der Gleichung (27), in der nur die Konstanten $k^2, A_1, A_2, \varepsilon, \lambda, \mu, C, \zeta$ jetzt andere Werte haben als beim Dreikörperproblem. Auch das Lösungsverfahren, also Reihenentwicklung nach (29) und Zurückführung auf das lineare Gleichungssystem (36), kann man genau so durchführen wie früher. Es ist also nur noch nötig, die Werte der genannten Konstanten anzugeben, und zwar erhält man Tabelle 2.

Die Zahlenwerte, mit denen gerechnet wurde, sind $A = 30$, $b = 1$ und die sich aus Gleichung (59) und (64) ergebenden zugehörigen $\alpha = 0,5$ und $\beta = 0,35$, die jeweils die Energie des Deuterons bzw. des Tritons zu einem Minimum machen. Die Größe E' bezeichnet die Energie im Schwerpunktsystem; im Anfangszustand ist daher $E' = \frac{1}{2} E_0$, wenn E_0 die kinetische Energie des stoßenden Deuterons ist, und im Endzustand $E' = \frac{1}{2} E_0 + U$, wenn U die Wärmetönung ($= 4,22$) ist.

Tabelle 2.

Koeffizient	Anfangszustand	Endzustand
k^2	$k^2 = \frac{2 M E'}{\hbar^2}; E' = E - 2 E_D$	$k'^2 = \frac{3 M}{2 \hbar^2} E'; E' = E - E_T$
A_1	$\frac{4 M}{\hbar^2} A (2 w - \mathfrak{h}) \left(1 + \frac{b^2}{4 \alpha}\right)^{-3/2}$ $2 w - \mathfrak{h} = 0$	$\frac{3 M}{2 \hbar^2} A (3 w + \mathfrak{b} - \mathfrak{h}) \left(1 + \frac{b^2}{9 \beta}\right)^{-3/2}$ $3 w + \mathfrak{b} - \mathfrak{h} = \frac{1}{3}$
A_2	$\frac{2 M}{\hbar^2} \cdot 16 A (2 m - \mathfrak{b}) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}$ $2 m - \mathfrak{b} = \frac{5}{4}$	$\frac{3 M}{2 \hbar^2} A \left(\frac{9}{4}\right)^3 (3 m - \mathfrak{b} + \mathfrak{h}) \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}$ $3 m - \mathfrak{b} + \mathfrak{h} = \frac{23}{12}$
ε	$\frac{4 \alpha b^2}{4 \alpha + b^2}$	$\frac{9 \beta b^2}{9 \beta + b^2}$
λ	$2 \alpha + b^2$	$\frac{9}{16} (5 \beta + b^2)$
μ	b^2	$\frac{9}{16} (3 \beta - b^2)$
$\eta = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$2 \sqrt{\alpha (\alpha + b^2)}$	$\frac{9}{4} \sqrt{\beta (\beta + b^2)}$
σ, τ	$\sigma = \eta + \lambda; \tau = \frac{\mu}{\sigma}$	$\sigma = \eta + \lambda; \tau = \frac{\mu}{\sigma}$
A'_2	$A_2 \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{3/2}$	$A_2 \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{3/2}$
C	$\frac{2 M}{\hbar^2} e^2$	$\frac{3 M}{2 \hbar^2} e^2$
ζ	$2 \sqrt{\alpha}$	$3 \sqrt{\beta}$
$C' = \frac{2 \zeta}{\sqrt{\pi}} C$	$8 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{M e^2}{\hbar^2}$	$9 \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \frac{M e^2}{\hbar^2}$

Setzt man wieder $a_1 = 1$, so lauten die Koeffizienten für den Anfangszustand numerisch:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 0,225 - 0,0615 k^2, \\ a_5 &= -0,280 - 0,0660 k^2, \\ a_7 &= -0,316 - 0,0423 k^2, \\ a_9 &= -0,1826 - 0,0197 k^2, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

und für den Endzustand, wo wir a'_i statt a_i schreiben wollen:

$$\left. \begin{aligned} a'_3 &= 0,1510 - 0,0755 (k'^2 - 1,160), \\ a'_5 &= -0,285 - 0,0717 (k'^2 - 1,160), \\ a'_7 &= -0,249 - 0,0514 (k'^2 - 1,160). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Dabei ist 1,160 der Wert von k'^2 für 100 kV. Die Korrekturen in (66) und (67), die durch die Abhängigkeit von k^2 und k'^2 hineinkommen, sind durchweg klein für kinetische Stoßenergien bis zu einigen hundert kV. Sie wurden jedoch berücksichtigt. Man sieht, daß die Koeffizienten hier sehr viel langsamer abklingen wie im Falle des Dreikörperproblems. Die Konvergenz ist schlechter, und die Resultate mögen quantitativ nicht allzu zuverlässig sein, dürften aber auf jeden Fall die Größenordnung der Erscheinung richtig wiedergeben.

Als Normierung wollen wir vorläufig annehmen, daß im Außenraum die Funktion durch Gleichung (22 b) mutatis mutandis dargestellt wird. Den Normierungsfaktor, der den Anschluß hieran erlaubt, nennen wir wieder N , bzw. N' für den Endzustand. Dabei können wir im Endzustand genau wie früher verfahren und finden bei 100 kV $N' = 1,067$, wenn wir die Anschlußstelle $R_0 = 1$, und $N' = 1,356$, wenn wir $R_0 = 1,5$ wählen.

Im Anfangszustand dagegen liegen die Verhältnisse ein wenig komplizierter. Hier ist die Energie der Teilchen so klein (z. B. 100 kV), daß wir uns noch unterhalb des Gipfels des Gamow-Berges befinden. Die asymptotische Lösung (22 b) ist aber nur dann verwendbar, wenn die kinetische Energie des stoßenden Teilchens groß wird gegen den Betrag der Coulomb-Abstoßung. Das tritt, wie man sich leicht ausrechnet, erst sehr weit außen, für $R = 10$ bis 20 Elektronenradien ein, wo unsere Reihenentwicklung (66) längst nicht mehr konvergiert. Infolgedessen wurde die Anschlußstelle R_0 , bis zu der (66) benutzt wird, wie bisher in eine Gegend gelegt, wo die eigentlichen Kernkräfte ziemlich abgeklungen sind (1 bis 2 El. Rad.) und von da ab durch den Gamow-Berg hindurch die Differentialgleichung unter Auslassung der Glieder mit den Kernkräften, aber unter Mitnahme des Coulomb-Feldes, numerisch integriert bis zu so großen R -Werten, daß die asymptotische Darstellung anwendbar ist. Auf diese Weise wurden folgende Amplitudenwerte für den Anfangszustand erhalten (Anschlußstelle $R_0 = 1,5$; in dieser Gegend ist N ziemlich unabhängig von R_0 , für größere R_0 dagegen wächst es an) (siehe Tabelle 3).

Dabei sind in der letzten Spalte die „Gamow-Faktoren“ zusammengestellt. Hätte man ein reines Coulomb-Feld, so wäre der Wert der Eigen-

funktion $f = \frac{1}{R} f_0(R)$ an der Stelle $R = 0$ nicht, wie es hier herauskommt,

$= N$, sondern $= \sqrt{G}$. Daher stellt \sqrt{G} den Anteil dar, den das Coulomb-Feld zur Verkleinerung der Amplitude im Innern beiträgt. Für die Diskussion der Eigenfunktionen vgl. Abschnitt 8.

Tabelle 3.

E_0	N	N/k	\sqrt{G}
0,1	0,0473	0,353	0,218
0,2	0,1061	0,560	0,364
0,3	0,1540	0,662	0,450
0,5	0,233	0,777	0,550
0,7	0,294	0,827	0,610

7. Berechnung der Wirkungsquerschnitte für die $D + D$ -Reaktion.

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes müssen wir zunächst das Matrixelement für den Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand kennen:

$$H_{ae} = \frac{\int \Psi_e^* V \Psi_a d\tau}{\sqrt{\int \Psi_e^* \Psi_e d\tau} \cdot \sqrt{\int \Psi_a^* \Psi_a d\tau}}, \quad (68)$$

wobei V den gesamten Operator der potentiellen Energie des Systems bedeutet, also die Summe von sechs Ausdrücken der Form Gleichung (1) in den sechs möglichen Kombinationen je zweier Teilchenabstände. Normiert man die Eigenfunktion so, daß

$$\int d\tau \varphi_{12}^2 = 1, \quad \int d\tau \varphi_4^2 = 1 \quad (69)$$

wird, so wird

$$H_{ae} = -A \int d\tau e^{-b^2 r_{12}^2} \{ \varphi_1 [\varphi_{13} (b - 2m) + \varphi_{24} (b - 2w) - \varphi_{34}] + \varphi_3 [-\varphi_{12} + (-2w + b - 2m + b) \varphi_{24}] \}. \quad (70)$$

Darin ist

$$b - 2m = -\frac{5}{4}, \quad b - 2w = 0, \quad -2w + b - 2m + b = -\frac{5}{4}.$$

Statt dessen können wir auch schreiben

$$H_{ae} = -A \int d\tau \varphi_1 \varphi_{13} \left\{ -\frac{5}{4} e^{-b^2 r_{12}^2} - e^{-b^2 r_{13}^2} - e^{-b^2 r_{24}^2} - \frac{5}{4} e^{-b^2 r_{23}^2} \right\}, \quad (71)$$

unter der Voraussetzung, daß $\varphi_{12} = \varphi_{34}$ ist, d. h. daß die Eigenfunktion des Anfangszustandes invariant ist gegen eine Vertauschung der beiden Deuteronen, wie es für S -Zustände der Fall ist. Für die Integration erweist es sich als zweckmäßig, die Koordinaten einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{4} r_1 + \frac{1}{4} r_2 + \frac{1}{4} r_3 + \frac{1}{4} r_4; & r_1 &= s & & -\frac{3}{4} \mathcal{R}_e, \\ \mathcal{R}_e &= -r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{3} r_3 + \frac{1}{3} r_4; & r_2 &= s - r & & -\frac{3}{4} \mathcal{R}_e, \\ \mathcal{R}_a &= \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2 + \frac{1}{2} r_3 - \frac{1}{2} r_4; & r_3 &= s & + \mathcal{R}_a + \frac{3}{4} \mathcal{R}_e, \\ r &= r_1 - r_2; & r_4 &= s + r - \mathcal{R}_a + \frac{3}{4} \mathcal{R}_e. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Auf diese Weise entsteht aus (71):

$$\begin{aligned}
 H_{ae} = -A \int ds d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e d\mathfrak{r} \exp - \{ & \beta (\frac{9}{2} \mathfrak{R}_e^2 + 6 \mathfrak{R}_a^2 + 6 r^2 + 9 \mathfrak{R}_e r - 6 \mathfrak{R}_a r) \\
 & + \alpha (\frac{9}{2} \mathfrak{R}_e^2 + 2 \mathfrak{R}_a^2 + 4 r^2 + 6 \mathfrak{R}_e r - 4 \mathfrak{R}_a r) \} \\
 \cdot f^{(a)}(\mathfrak{R}_a) f^{(e)}(\mathfrak{R}_e) \cdot \{ & -\frac{5}{4} e^{-b^2 r^2} - e^{-b^2 (\frac{2}{3} \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_a)^2} - e^{-b^2 (-\frac{2}{3} \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_a - 2r)^2} \\
 & -\frac{5}{4} e^{-b^2 (-\frac{2}{3} \mathfrak{R}_e - \mathfrak{R}_a - r)^2} \}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Die Integration über s gibt einfach als Faktor das Normierungsvolumen V . Die Integration über r kann ausgeführt werden ohne Kenntnis der Funktionen $f^{(a)}$ und $f^{(e)}$ für Anfangs- und Endzustand. Sie wurde sofort numerisch durchgeführt mit den obengenannten Zahlenwerten der Konstanten A , b , α , β ; nach ihrer Durchführung bleiben noch vier Integrale stehen vom Typus

$$J_{1-4} = \int d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e f^{(a)}(\mathfrak{R}_a) f^{(e)}(\mathfrak{R}_e) e^{-(A \cdot \mathfrak{R}_a^2 + B \cdot \mathfrak{R}_e^2 + 2C \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e)}. \quad (74)$$

In diesen Integralen kann zunächst die Integration über die Winkel ebenfalls ausgeführt werden ohne Kenntnis der Funktionen $f^{(a)}$ und $f^{(e)}$. Sodann sind die bekannten Reihenentwicklungen für diese Funktionen einzuführen. Die Integrationen können dann sämtlich elementar ausgeführt werden; die ziemlich komplizierten Schlußformeln, die sich so ergeben, sollen nicht ausführlich hingeschrieben werden. Die Rechnung wurde durchgeführt für die Energie $E_0 = 100$ kV; sie ist nahezu unabhängig davon, ob man die Energie um einige 100 kV verändert. Man erhält schließlich bei Normierung der Eigenfunktionen nach (69), wobei jetzt $d\tau$ das Volumenelement in den Integrationskoordinaten, also $ds d\mathfrak{r} d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e$ bedeutet, das Resultat:

$$H_{ae} = -0,301 A N N'. \quad (75)$$

Das gilt unter der Voraussetzung, daß die Normierung von f_0 im Anfangs- und Endzustand jeweils auf die Amplitude 1 für große R geschieht.

Nun müssen die Funktionen aber so normiert sein, daß φ_{12} und φ_4 asymptotisch in ebene Wellen übergehen, wenn der Abstand der stoßenden Teilchen groß ist. Daher geht

$$f^{(a)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot e^{i\mathfrak{R}_a} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{\sin k R_a}{k R_a} + \dots \right),$$

also

$$f_0^{(a)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\sin k R_a}{k}.$$

An Stelle des Normierungsfaktors N muß also treten $\frac{1}{k\sqrt{V}} \cdot N$, entsprechend an Stelle von N' der Faktor $\frac{1}{k'\sqrt{V}} N'$. Wir erhalten damit endgültig (wegen $0,301 A = 9,02$):

$$H_{ae} = -\frac{9,02}{V} \frac{N}{k} \frac{N'}{k'}. \quad (76)$$

Nach einer bekannten Formel findet man den Wirkungsquerschnitt aus dem Matricelement wie folgt:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\hbar} \varrho_E \frac{V}{v_a} \frac{1}{9} |H_{ae}|^2. \quad (77)$$

Dabei ist $\frac{1}{9}$ der dem Singulettzustand entsprechende Gewichtungsfaktor, ϱ_E ist die Anzahl der möglichen Energieendzustände im Energieintervall 1, also die Dichte der möglichen Niveaus, in die das System übergehen kann. Ohne den Faktor V/v_a (Normierungsvolumen durch Geschwindigkeit im Anfangszustand) würde (77) die Wahrscheinlichkeit eines Überganges in der Zeiteinheit bedeuten; dieser Faktor macht daraus definitionsgemäß den Wirkungsquerschnitt. Die Dichte ϱ_E der Niveaus im Endzustand kann man berechnen aus

$$\varrho_E = \frac{4\pi p_e^2 dp_e V}{h^3 dE_e}, \quad (78)$$

wobei p_e der Impuls im Endzustand ist, also, da die reduzierte Masse aus Triton und Proton $= \frac{3}{4}M$ ist, $p_e^2 = \frac{3M}{2} E_e$. Es wird daher

$$\frac{p_e^2 dp_e}{dE_e} = \frac{1}{2} p_e \frac{d}{dE_e} (p_e^2) = \frac{3M}{4} p_e = \frac{3M}{4} \sqrt{\frac{3M}{2} E_e}.$$

Ferner ist $v_a = \sqrt{E_0/M}$, so daß man erhält

$$\varrho_E = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{V}{h^3} M \sqrt{\frac{3}{2} M E_e}$$

und

$$\Phi = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M^2 V^2}{\hbar^4} \sqrt{\frac{E_e}{E_0}} |H_{ae}|^2. \quad (79)$$

Führt man endlich noch die Beziehung ein, $E_e = \frac{1}{2} E_0 + U$ ($U = 4,22$), so entsteht unter Benutzung von (76):

$$\Phi = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M^2}{\hbar^4} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E_0 + U}{E_0}} \cdot 81,5 \cdot \left(\frac{N N'}{k k'}\right)^2 \quad (80)$$

oder numerisch in Einheiten von 10^{-26} cm^2 die Schlußformel für den Wirkungsquerschnitt:

$$\Phi = 1,083 \left(\frac{N}{k}\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E_0 + 4,22}{E_0}}. \quad (81)$$

Dabei ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß N' und k' sicher nur wenig von der Energie E_0 abhängen und ihr Wert für 100 kV, der oben angegeben wurde, ein für allemal eingesetzt. Die ganze Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes rührt also von der Normierungskonstanten des Anfangszustandes her, sowie von dem Wurzelfaktor, der die einfache anschauliche Bedeutung hat: Je länger die beiden Teilchen beisammen sind, um so lieber werden sie miteinander reagieren.

8. Diskussion des $D + D$ -Wirkungsquerschnittes.

Die Schlußformel (81) ergibt mit den in Tabelle 3 zusammengestellten Werten von N/k die Wirkungsquerschnittskurve, die in Fig. 6 gezeichnet ist. Wir können das Ergebnis unserer Rechnung sowohl mit einer älteren Rechnung von Dolch vergleichen, also mit experimentellen Zahlen.

Die experimentellen Werte für die Wirkungsquerschnitte dieser Reaktion waren anfangs umstritten. Heute können wir mit Sicherheit ihre Größenordnung von einigen 10^{-26} cm² angeben. Die besten zur Zeit verfügbaren Werte scheinen Messungen von Ladenburg¹⁾ zu sein, und zwar folgende Zahlen: Für $E_0 = 0,1$: $\Phi = 2$, für $E_0 = 0,3$: $\Phi = 3$, sowie eine Messung von Fermi und Amaldi²⁾ für $E_0 = 0,7$: $\Phi = 13$ in Einheiten 10^{-26} cm².

Das stimmt mit der von uns berechneten Größenordnung gut überein. Dagegen wird von unserer Rechnung in keiner Weise der schroffe Anstieg wiedergegeben, der zwischen 0,3 und 0,7 MV beobachtet wurde. Für seine Erklärung stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Entweder ist die Ursache die Umwandlung im P -Zustand oder ein dort liegendes Resonanzniveau, das dem angeregten α -Teilchen zugehört. Die Rechnung von Hylleraas³⁾ über die angeregten Zustände des α -Teilchens ergibt in der hierfür in Frage kommenden Zone einen S - und einen D -Zustand; doch scheint mir schwer abzusehen, in welchem Umfange aus den Hylleraas-schen Rechnungen bindende quantitative Schlüsse gezogen werden dürfen. Unsere Näherung gestattet ebenfalls keine Entscheidung dieser Frage.

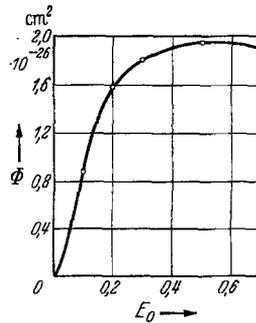


Fig. 6. Berechnete Wirkungsquerschnitte für die $D + D$ -Reaktion.

¹⁾ R. Ladenburg u. M. H. Kanner, Phys. Rev. **52**, 911, 1937. — ²⁾ E. Fermi u. E. Amaldi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936. — ³⁾ E. Hylleraas, ZS. f. Phys. **107**, 258, 1937.

Messungen über die Richtungsverteilung bei höheren Energien als 200 kV könnten vielleicht Aufschluß hierüber geben.

Sehr interessant ist der Vergleich mit dem Ergebnis der Dolchschen¹⁾ Rechnung. Dolch setzt die Eigenfunktionen in ganz ähnlicher Weise an, wie es hier geschieht, löst aber die Schrödinger-Gleichung für die Relativbewegung der beiden Schwerpunkte zueinander nicht, sondern führt hier einfach als Näherung eine ebene Welle ein, deren Amplitude er durch Hinzufügung eines Gamow-Faktors \sqrt{G} im Anfangszustand verringert. Damit ergeben sich Wirkungsquerschnitte, die um mehr als vier Zehnerpotenzen höher liegen als die von uns berechneten.

Zur Erklärung dieses Versagens der Dolchschen Näherung haben wir vor allem zwei Effekte zu beachten:

1. *Wellenlängeneffekt*: Für etwa $R < 1$ bewegen sich die beiden Deuteronen in einem Gebiet starker gegenseitiger Anziehung. Sie stürzen daher, sobald sie sich soweit genähert haben, mit erhöhter Geschwindigkeit aufeinander zu: Die Wellenlänge in diesem Bereich ist verkürzt. Im Anfangszustand ist nun wegen der Kleinheit der kinetischen Stoßenergie gegenüber den Kernenergien die Wellenlänge weit außen sehr groß gegen Kerndimensionen; im Innenraum wird sie etwa ≈ 2 Elektronenradien. Diese Wellenlängenverkürzung ist bei Dolch außer acht gelassen; er rechnet auch für kleine R mit der Eigenfunktion großer Wellenlänge. Zeichnen wir die Funktion $f(R) = \frac{1}{R} f_0(R)$ auf, so erhalten wir, wenn wir zunächst auf gleiche Amplitude 1 an der Stelle $R = 0$ normieren, das Bild der Fig. 7. Die Werte der Eigenfunktion sind durchweg verkleinert; in einigen Gebieten ist die Eigenfunktion sogar negativ, so daß sich bei der Bildung des Integrals H_{ae} einige Teile gegenseitig weginterferieren. Im Endzustand ist der Unterschied natürlich lange nicht so beträchtlich, aber immerhin noch deutlich merkbar. Insgesamt ergibt sich hieraus eine Verkleinerung des Matrixelements H_{ae} um rund den Faktor 10, also des Wirkungsquerschnittes um den Faktor 100 gegenüber der Dolchschen Rechnung.

2. *Amplitudeneffekt*. Tabelle 3 zeigt, daß an Stelle der von Dolch benutzten Amplitude \sqrt{G} im Anfangszustand das viel kleinere N tritt. Für 100 kV wird dadurch der Wirkungsquerschnitt weiter um den Faktor

$$N^2/G = (0,0473/0,218)^2 = 1/21,3$$

verkleinert. Im Endzustand ist dieser Effekt viel weniger ausgeprägt, ergibt aber immer noch den Faktor 1,6. Damit wird eine Verkleinerung

¹⁾ H. Dolch, ZS. f. Phys. **100**, 401, 1936.

gegenüber dem Dolchschen Wirkungsquerschnitt um rund den Faktor 3000 erhalten. Daß der Unterschied in Wahrheit noch rund eine Zehnerpotenz mehr ausmacht, hat seine Ursache teils in dem Gewichtsaktor $1/9$, teils in den Unterschieden im Kraftansatz.

Der Amplitudeneffekt ist anschaulich leicht zu verstehen. Auch er tritt ganz generell in jedem anziehenden Potentialfeld ein. Als Beispiel betrachten wir ein „Kastenpotential“ Fig. 8. Darunter gezeichnet ist die

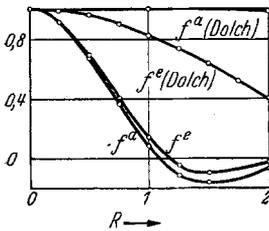


Fig. 7. Eigenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes nach unserer Rechnung und in der Näherung von Dolch. Normierung willkürlich.

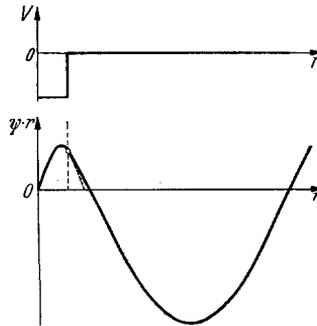


Fig. 8. „Wellenlängeneffekt“ und „Amplitudeneffekt“ im Spezialfall des Kastenpotentials.

ψ -Funktion für ein Energieniveau E_0 . Man sieht anschaulich, wie mit dem Wellenlängenverkürzungseffekt Hand in Hand eine Amplitudenverkleinerung im Innengebiet geht, verglichen mit dem Außengebiet. Nur wenn die Eigenfunktion an der Anschlußstelle gerade zufällig horizontale Tangente hat, ist die Amplitude innen und außen die gleiche: Wir sprechen dann von Resonanz (*Einkörperresonanz*!). Die von uns berechneten Eigenfunktionen sind nicht genau genug, um entscheiden zu können, ob nicht eine Resonanz in diesem Sinne bei Energien um 700 kV herum auftritt und die Größe des experimentellen Querschnittes dort verständlich macht.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, physikalisch-radioaktive Abteilung, im Dezember 1937.