

Angenäherte Tschebyscheff-Approximation einer Stammfunktion — eine Modifikation des Verfahrens von Clenshaw und Curtis

Von
SIEGFRIED FILIPPI

1. Einleitung

Die gebräuchlichen Methoden der numerischen Quadratur beschränken sich auf die Auswertung eines bestimmten Integrals der Form

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Neben die Quadraturaufgaben dieser Art stellt sich gelegentlich auch das allgemeinere Integrationsproblem, einen analytischen Näherungsausdruck für die Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(u) du \quad (a \leq x \leq b)$$

zu einem in analytischer Form vorliegenden Integranden $f(x)$ zu finden. Die üblichen Quadraturverfahren erlauben nur eine schrittweise Integration und führen nach sukzessiven numerischen Quadraturen von $f(x)$ über angrenzende Teilintervalle in $[a, b]$ auf eine diskontinuierliche Wiedergabe von $F(x)$ in Form einer Wertetabelle. Das im folgenden behandelte Verfahren liefert dagegen einen handlichen analytischen Näherungsausdruck, der die Berechnung beliebiger Funktionswerte von $F(x)$ innerhalb des Intervalls $[a, b]$ ohne Tafelinterpolation gestattet, und stellt darüber hinaus eine angenäherte Tschebyscheff-Approximation der Stammfunktion über einer finiten Integrationsbasis dar. Maßgeblich für den letztgenannten Effekt ist eine spezielle Stützstellenwahl zur Interpolation des Integranden. Auch bei reinen Quadraturaufgaben über ein festes Intervall kann dieses Verfahren bei Benutzung von elektronischen Rechenmaschinen einen Vergleich mit anderen Verfahren zur numerischen Quadratur wegen seiner einfachen Fehlerkontrolle, die den Rechenaufwand nicht wesentlich über den gerade notwendigen Mindestumfang hinauswachsen läßt, durchaus bestehen.

Ein ähnliches Verfahren haben bereits CLENSHAW und CURTIS (vgl. [1]) entwickelt, an das wir uns insbesondere in der praktischen Durchführung unserer Methode weitgehend anlehnen können. CLENSHAW und CURTIS hatten vor allem die formale Einfachheit und die Wirtschaftlichkeit ihres Verfahrens im Auge, mit der eine gegebene Funktion mittels Interpolation in eine finite Reihe von Tschebyscheff-Polynomen entwickelt werden kann. Unsere Modifikation des Verfahrens von CLENSHAW und CURTIS erreicht bei gleicher Stützstellenzahl eine höhere Approximationsgüte unter Wahrung aller übrigen Vorzüge.

2. Optimale Stützstellen zur Interpolation

Durch eine lineare Variablensubstitution sei das gegebene finite Intervall $[a, b]$ auf das Grundintervall $[-1; 1]$ transformiert. Bei stetigem Integranden $f(x)$ von beschränkter Variation läßt sich die Stammfunktion

$$F(x) = F(-1) + \int_{-1}^x f(u) \, du \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

durch eine Reihe von Tschebyscheff-Polynomen $T_n(x)$ in der Form

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \dots + A_n T_n(x) + \dots \tag{1}$$

approximieren.

Dabei sind die Koeffizienten A_n durch

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{F(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{2}$$

zu bestimmen. Mit Hilfe der Relation

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n^2} \frac{d}{dx} [\sqrt{1-x^2} T_n'(x)] \quad (n \geq 1)$$

erhält man nach partieller Integration in (2) wegen $F'(x) = f(x)$ für die Koeffizienten A_n auch den Ausdruck

$$A_n = -\frac{2}{\pi n^2} \int_{-1}^{+1} f(x) T_n'(x) \sqrt{1-x^2} \, dx \quad (n \geq 1). \tag{3}$$

Nun bilden die Polynome

$$T_n'(x) = n \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)} \quad \text{oder} \quad T_n'(\cos t) = n \frac{\sin nt}{\sin t} \tag{4}$$

ebenfalls ein Orthogonalsystem. Es bestehen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{+1} T_n'(x) T_m'(x) \sqrt{1-x^2} \, dx = n m \int_0^\pi \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} n^2 & \text{für } n = m. \end{cases}$$

Die Koeffizienten A_n in (1) sind also nach (3) zugleich die Koeffizienten der verallgemeinerten Fourier-Reihe

$$f(x) = A_1 + A_2 T_2'(x) + A_3 T_3'(x) + \dots + A_n T_n'(x) + \dots,$$

welche mit der Ableitung von (1) übereinstimmt. Die Partialsummen

$$q_{N-1}(x) = A_1 + A_2 T_2'(x) + \dots + A_N T_N'(x) \tag{5}$$

vermitteln freilich keine Tschebyscheff-Approximation des Integranden $f(x)$ — was für unsere Zwecke auch gar nicht erforderlich ist —, sondern werden durch die Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - q_{N-1}(x)]^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \min \tag{6}$$

charakterisiert. Diese Reihenentwicklung ist für uns besonders interessant. Ein Lagrangesches Interpolationspolynom $\bar{q}_{N-1}(x)$ für $f(x)$ wird nämlich mit der exakten Partialsumme $q_{N-1}(x)$ in der Regel optimale Übereinstimmung erzielen, wenn als Interpolationsknoten x_1, x_2, \dots, x_N die Nullstellen des N -ten Orthogonalpolynoms in $[-1; 1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\sqrt{1-x^2}$ zugrunde gelegt werden, also gerade die Nullstellen von $T'_{N+1}(x)$. Denn wir haben als Interpolationsrestglied unter der Voraussetzung der Existenz der N -ten Ableitung von $f(x)$

$$f(x) - \bar{q}_{N-1}(x) = R_N(x) = \frac{\pi_N(x)}{N!} f^{(N)}(\xi),$$

wobei

$$\pi_N(x) = \prod_{r=1}^N (x - x_r)$$

und ξ eine noch von x abhängige Stelle im Interpolationsintervall ist. Setzen wir nun für $q_{N-1}(x)$ das Interpolationspolynom $\bar{q}_{N-1}(x)$ in (6) ein, dann erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} [R_N(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{f^{(N)}(\bar{\xi})}{N!} \right]^2 \int_{-1}^{+1} [\pi_N(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx = \min. \quad (7)$$

Der Ausdruck $f^{(N)}(\xi)$ in $R_N(x)$ entzieht sich einer gezielten Beeinflussung durch die Wahl der Stützstellen und kann nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung aus dem Integranden in (7) abgespalten werden. Die Minimalisierung des verbleibenden Integrals in (7) aber erzeugt eindeutig das N -te Polynom aus dem Orthogonalsystem in $[-1; 1]$ bezüglich $\sqrt{1-x^2}$, woraus die Beziehung

$$\pi_N(x) = \frac{T'_{N+1}(x)}{2^N(N+1)}$$

folgt. Die finite Reihenentwicklung unseres Interpolationspolynoms

$$\bar{q}_{N-1}(x) = a_1 + a_2 T'_2(x) + a_3 T'_3(x) + \dots + a_N T'_N(x) \quad (8)$$

liefert dann in ihren Koeffizienten a_n auch die in der Regel besten Näherungen für die Gesamtheit der A_n aus (5), die sich durch eine Lagrangesche Interpolation von $f(x)$ mit N Stützstellen erreichen lassen. Unmittelbar aber können wir diese Koeffizienten a_n , welche zunächst nur die A_n aus (3) vertreten, auch als einen völlig gleichwertigen Ersatz für (2) ansehen und eine Näherung der Tschebyscheffapproximierenden N -ten Partialsumme von (1) in der Form

$$F(x) \approx \bar{Q}_N(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + a_N T_N(x) \quad (9)$$

anschreiben. Lediglich das erste Glied $a_0/2$ ist in (8) nicht enthalten. Wir bestimmen es nachträglich (vgl. (8) in [I]) wie eine Integrationskonstante durch die Koinzidenzforderung $\bar{Q}_N(-1) = F(-1)$ aus der Reihe

$$\frac{a_0}{2} = F(-1) + a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{N+1} a_N. \quad (10)$$

3. Praktische Durchführung des Verfahrens

Wir substituieren in (8) $x = \cos t$, multiplizieren mit $\sin t$ und erhalten wegen (4)

$$\bar{q}_{N-1}(\cos t) \sin t = a_1 \sin t + 2a_2 \sin 2t + \dots + N a_N \sin Nt.$$

Zur rationellen Berechnung der Koeffizienten a_n kann man die geläufigen Formeln der trigonometrischen Interpolation auf die ungerade periodische Funktion $f(\cos t) \sin t$ in Anwendung bringen. Man erhält dann für die ersten N Koeffizienten a_n mit den auf der t -Achse äquidistanten Stützstellen $t_r = \frac{r\pi}{N+1}$ den Ausdruck

$$a_n = \frac{2}{n(N+1)} \sum_{r=1}^N f(\cos t_r) \sin t_r \sin n t_r, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (11)$$

Von ausschlaggebender Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß in $x_r = \cos t_r$ genau die Nullstellen von $T'_{N+1}(x)$ erscheinen.

Damit haben wir unser Ziel schon erreicht, denn (11) liefert mit (10) — im Gegensatz zum Verfahren von CLENSHAW und CURTIS — *zugleich* die endgültigen Koeffizienten der Reihe (9). Ist nur das bestimmte Integral über $[-1; 1]$ gesucht, so brauchen wir (11) lediglich für die ungeraden n auszuführen, wobei wir die Relation

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = F(1) - F(-1) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \quad (12)$$

erhalten.

Zur vereinfachten Summenbildung in (11) bedient man sich mit Vorteil einer Rekursionsformel. Hat man etwa eine finite Reihe der Form

$$p(t) = c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + \dots + c_N \sin Nt \quad (13)$$

gegeben und wird der Summenwert für ein festes t_n gesucht, so berechnen wir eine Zahlenfolge z_N, z_{N-1}, \dots, z_1 sukzessiv mit den Startwerten $z_{N+1} = z_{N+2} = 0$ nach der Vorschrift

$$z_r = 2z_{r+1} \cos t_n - z_{r+2} + c_r. \quad (14)$$

Dann ist $p(t_n) = z_1 \sin t_n$. Ersetzen wir nämlich die c_r in (13) durch

$$c_r = z_r - 2z_{r+1} \cos t_n + z_{r+2}$$

und ordnen wir die Reihe nach steigenden Indizes um, so erhalten wir

$$p(t) = z_1 \sin t_n + \sum_{r=2}^N [\sin r t_n - 2 \cos t_n \sin(r-1) t_n + \sin(r-2) t_n] z_r,$$

wobei unter dem Summenzeichen jedes Glied identisch verschwindet. Nun können wir in (11) $\sin n t_r = \sin r t_n$ setzen und die Summe nach (14) mit $c_r = f(\cos t_r) \sin t_r$ auswerten, wobei wir den Ausdruck

$$a_n = \frac{2z_1 \sin t_n}{n(N+1)}$$

erhalten. Eine ähnliche Rekursionsformel zur Auswertung einer finiten Reihe von Tschebyscheff-Polynomen ist bereits früher von CLENSHAW (vgl. (15) in [I] und den dortigen Literaturhinweis) angegeben worden.

Zur *Genauigkeitskontrolle* können wir ganz dem in [I] beschrittenen Wege folgen. Wir berechnen, nachdem wir mit irgendeinem Anfangswert $N=N_1$ begonnen haben, einige der letzten Koeffizienten, etwa die letzten drei a_N, a_{N-1} und a_{N-2} . Sind diese drei Koeffizienten im Vergleich mit einer vorgeschriebenen Fehlerschranke ϵ vernachlässigbar, dann wird die Rechnung nach Ermittlung der übrigen Koeffizienten vervollständigt. Anderenfalls starten wir mit $N_2=2N_1+1$ wieder die Rechnung usf., bis schließlich die Forderungen an die letzten drei Koeffizienten erfüllt sind. Dabei können alle einmal berechneten Werte $f(\cos t_r) \sin t_r$ in jede folgende Stufe der Rechnung übernommen werden, und zwar erscheinen sie darin als die Glieder mit geradzahligem Indizes. Diese Eigenschaft der Stützstellenverteilung, die schon das Verfahren von CLENSHAW und CURTIS (vgl. [I]) auszeichnet und seine vorzügliche Wirtschaftlichkeit begründet, bleibt also auch hier ungeschmälert erhalten.

4. Beispiele

Wir führen die Reihenentwicklung (9) zunächst für

$$F(x) = e^{-1} + \int_{-1}^x e^u du \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

mit fünf Stützstellen aus. Die wahren Koeffizienten A_n lassen sich hier mit Hilfe der Besselschen Funktionen erster Gattung $I_n(x)$ für rein imaginäres Argument durch die Relation

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^x T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos t} \cos n t dt = 2I_n(1)$$

exakt angeben. Die folgende Tabelle 1 gibt die auf diese Weise ermittelten Koeffizienten A_n , die gemäß (11) berechneten Koeffizienten a_n und zum Vergleich auch die Koeffizienten b_n , die man nach dem Verfahren von CLENSHAW und CURTIS (vgl. [I]) bei Berechnung mit ebenfalls fünf Stützstellen erhält, an. Die erste Zeile der Tabelle 1 enthält die Werte $A_0/2$ bzw. $a_0/2$ und $b_0/2!$

Tabelle 1

n	A_n	a_n	Fehler (%)	b_n	Fehler (%)
0	1,2660 659	1,2661 037	-0,003	1,2660 967	-0,002
1	1,1303 182	1,1303 182	0	1,1302 959	0,003
2	0,2714 953	0,2714 953	0	0,2713 604	0,050
3	0,0443 368	0,0443 368	0	0,0443 444	-0,017
4	0,0054 742	0,0054 738	0,007	0,0056 100	-2,481
5	0,0005 429	0,0005 384	0,830	0,0005 474	-0,830

Aus der Tabelle 1 ist zu ersehen, daß die Koeffizienten A_n durch die nach unserer Methode gefundenen a_n hervorragend approximiert werden. Der Fehler $(a_0 - A_0)/2 = 0,0000378$ ist erwartungsgemäß annähernd von der Größe des ersten vernachlässigten Koeffizienten a_6 , dem Abbruchfehler der Reihe (10). Der exakte Wert von A_6 ist $A_6 = 0,0000449$. Aufschlußreich sind auch die sorgfältig

berechneten Fehlerkurven der beiden Näherungen (vgl. Fig. 1), wobei wir zur Abkürzung das Verfahren von CLENSHAW und CURTIS bzw. das von uns hier modifizierte Verfahren von CLENSHAW und CURTIS mit „CC-V“ bzw. „mod. CC-V“ bezeichnen. Auch das bestimmte Integral über $[-1; 1]$ wird nach dem mod CC-Verfahren mit einem wahren Fehler von $1,56 \cdot 10^{-5}$ etwas besser approximiert als nach dem CC-Verfahren mit einem wahren Fehler von $2,7 \cdot 10^{-5}$. Die größten Abweichungen im Innern des Intervalls $[-1; 1]$ (vgl. Fig. 1) betragen beim mod. CC-Verfahren $9 \cdot 10^{-5}$ und beim CC-Verfahren $35 \cdot 10^{-5}$.

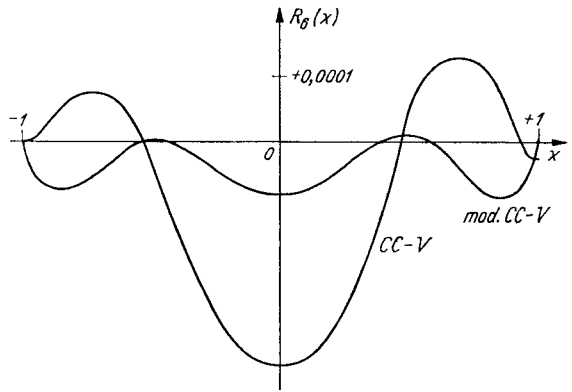


Fig. 1

Als weiteres Beispiel wenden wir beide Verfahren zur Approximation von

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{du}{1+(1+u)^2} = \text{arc tg}(1+x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

an. Wir fordern dabei vier gültige Dezimalen und haben daher als Fehlerschranke $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ zu nehmen. Der Start mit $N=4$ liefert noch zu große Werte der letzten Koeffizienten, während dagegen 9 Stützstellen für beide Verfahren bereits

Tabelle 2

n	a_n	b_n
0	0,6662 407	0,6662 547
1	0,5440 391	0,5440 392
2	-0,1163 421	-0,1163 386
3	0,0114 609	0,0114 614
4	0,0032 882	0,0032 868
5	-0,0019 484	-0,0019 467
6	0,0004 320	0,0004 350
7	0,0000 085	0,0000 249
8	-0,0000 426	-0,0000 450
9	0,0000 161	0,0000 141

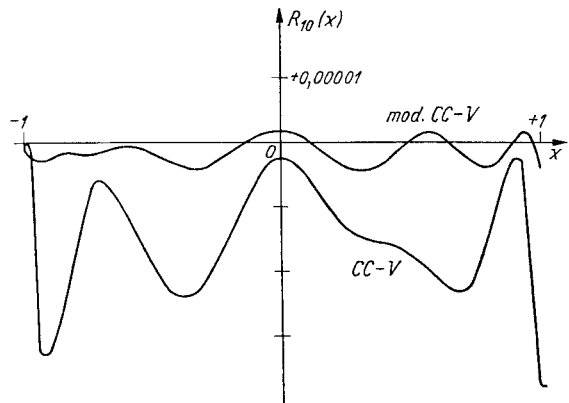


Fig. 2

ausreichen, um die geforderte Fehlerschranke zu erfüllen. Die vorstehende Tabelle 2 gibt die Koeffizienten a_n nach dem mod. CC-Verfahren und die Koeffizienten b_n nach dem CC-Verfahren wieder, wobei in der ersten Zeile $a_0/2$ bzw. $b_0/2$ eingetragen ist.

Die dabei jeweils erzielte Approximationsgüte wird durch die beiden Fehlerkurven in Fig. 2 veranschaulicht. Bemerkenswert sind in Fig. 2 die wiederholten

Koinzidenzen des Näherungspolynoms für $F(x)$ nach dem mod. CC-Verfahren mit der wahren Lösung, die in den Nullstellen der Fehlerfunktion des mod. CC-Verfahrens auftreten. Die Abweichungen bleiben hier im ganzen Intervall sogar unter $0,04 \cdot 10^{-4}$, während dagegen die Amplituden der ganz einseitig verlaufenden Fehlerkurve des CC-Verfahrens bis auf $0,37 \cdot 10^{-4}$ steigen, obwohl beide Approximationspolynome vom neunten Grade sind.

5. Einige asymptotische Eigenschaften

Einen maßgeblichen Einfluß auf die Anfälligkeit eines numerischen Quadraturverfahrens für die Anhäufung von Rundungsfehlern und eine wesentliche Bedeutung bei der Untersuchung der Quadraturkonvergenz eines Integrationsverfahrens (vgl. z. B. [4] und [5]) haben die *Vorzeichen* der Gewichtskoeffizienten γ_r , mit denen die diskreten Funktionswerte f_r in die Rechnung eingehen. Schreiben wir das bestimmte Integral — abgesehen vom Restglied — in der Form

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{r=1}^N \gamma_r f_r, \quad (15)$$

so erhalten wir nach (12), indem wir $M = N/2$ für geradzahlige N und $M = (N-1)/2$ für ungeradzahlige N einführen, den Ausdruck

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^M a_{2k+1} &= \frac{4}{N+1} \sum_{k=0}^M \sum_{r=1}^N f_r \sin t_r \frac{\sin(2k+1)t_r}{2k+1} \\ &= \frac{4}{N+1} \sum_{r=1}^N f_r \sin t_r \sum_{k=0}^M \frac{\sin(2k+1)t_r}{2k+1} \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich für die Gewichtskoeffizienten γ_r die Relation

$$\gamma_r = \frac{4 \sin t_r}{N+1} \sum_{k=0}^M \frac{\sin(2k+1)t_r}{2k+1}. \quad (16)$$

Die rechts stehende Summe in (16) kann in $0 < t_r < \pi$ nur positive Werte annehmen, so daß allgemein die Beziehung $\gamma_r > 0$ gewährleistet ist. Dieses Resultat sichert uns also eine genügende Unterdrückung der Anhäufung von Rundungsfehlern zu. Außerdem ist damit nach dem bekannten Satz von Stekloff (vgl. [5], S. 341 oder [4]) eine *hinreichende Bedingung* für die Konvergenz einer Folge von Interpolationsquadraturen bei Riemann-integrierbaren Funktionen $f(x)$ erfüllt.

Wächst nun N bzw. M unbeschränkt, dann strebt die Summe in (16) für $0 < t_r < \pi$ gegen $\pi/4$, womit wir noch die *asymptotische Abschätzung*

$$\gamma_r \cong \frac{\pi \sin t_r}{N+1} = \frac{\pi}{N+1} \sqrt{1-x^2} \quad (17)$$

gewinnen, wobei das Zeichen \cong „asymptotischgleich“ in dem Sinne bedeutet, daß der Quotient aus beiden Seiten für $N \rightarrow \infty$ gegen eins strebt. Da die Stützstellen durch

$$x_r = \cos \frac{r\pi}{N+1}$$

gegeben sind, erhalten wir für (17) die folgende geometrische Interpretation: Wird der Halbkreis über der Integrationsbasis $[-1; 1]$ in $N+1$ gleiche Bogen-

strecken geteilt und von deren Endpunkten das Lot auf die Integrationsbasis $[-1; 1]$ gefällt, so erhält man in den Lotfußpunkten genau die Stützstellen x_r . Die mit $\pi/N + 1$ multiplizierte Länge der Lote ergibt dabei asymptotisch die zugehörigen Gewichtskoeffizienten γ_r .

Das gleiche asymptotische Verhalten weisen übrigens auch die Gewichtskoeffizienten der *Gauß-Legendre-Quadraturformeln* auf (vgl. [5], S. 344), deren Stützstellen — definiert durch die Nullstellen der Legendreschen Polynome $P_N(x_r) = 0$ — wegen ihrer asymptotischen Abschätzung (vgl. [5], S. 188)

$$x_r \cong \cos \frac{r - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \pi$$

nur wenig von den Stützstellensätzen unseres mod. CC-Verfahrens differieren.

Eine weitere Merkwürdigkeit von geometrischer Art besteht darin, daß die Gewichtskoeffizienten asymptotisch gleich dem Abstand benachbarter Stützstellen werden, d.h. präziser, daß die asymptotischen Relationen

$$\gamma_r \cong \frac{1}{2} (x_{r-1} - x_{r+1}) \quad (18)$$

und

$$\frac{1}{2} (\gamma_r + \gamma_{r+1}) \cong x_r - x_{r+1}$$

bestehen. DAVIS und RABINOWITZ (vgl. [2]) haben diese Relationen bereits für die klassischen Gaußschen Quadraturformeln nachgewiesen. Auch bei unserem mod. CC-Verfahren findet man gemäß (17) die asymptotische Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x_{r-1} - x_{r+1}) &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{r-1}{N+1} \pi - \cos \frac{r+1}{N+1} \pi \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{N+1} \sin \frac{r\pi}{N+1} = \frac{\pi}{N+1} \sin t_r \cong \gamma_r. \end{aligned}$$

Für die linke Seite der zweiten Gleichung in (18) folgt hier unter Verwendung von (17) die asymptotische Relation

$$\frac{1}{2} (\gamma_r + \gamma_{r+1}) \cong \frac{\pi}{2(N+1)} \left(\sin \frac{r}{N+1} \pi + \sin \frac{r+1}{N+1} \pi \right) \cong \frac{\pi}{N+1} \sin \frac{2r+1}{2(N+1)} \pi$$

und übereinstimmend für die rechte Seite der zweiten Gleichung in (18) die asymptotische Relation

$$\begin{aligned} x_r - x_{r+1} &= \cos \frac{r}{N+1} \pi - \cos \frac{r+1}{N+1} \pi \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2(N+1)} \sin \frac{2r+1}{2(N+1)} \pi \cong \frac{\pi}{N+1} \sin \frac{2r+1}{2(N+1)} \pi. \end{aligned}$$

Asymptotisch läuft unser mod. CC-Verfahren in der Form (15) nunmehr vollends auf die Summendefinition des bestimmten Integrals hinaus, womit wir noch einen sehr einfachen und direkten Quadraturkonvergenzbeweis unseres mod. CC-Verfahrens erhalten haben.

6. Grundsätzliches zu beiden Verfahren

Zur angenäherten Tschebyscheff-Approximation einer Funktion $f(x)$ durch ein Polynom von vorgegebenem Grade $N-1$ mittels Interpolation benutzt man Stützstellensätze, wie sie auch von CLENSHAW und CURTIS zugrunde gelegt

werden. Damit erhält man Interpolationspolynome $\tilde{q}_{N-1}(x)$, welche einer gleichmäßigen Approximation der Funktion $f(x)$ zustreben, oder mit anderen Worten, welche auf eine Approximation der Partialsummen $q_{N-1}(x)$ der exakten Tschebyscheff-Entwicklung von $f(x)$ hinauslaufen. Integriert man ein solches Polynom $\tilde{q}_{N-1}(x)$, dann erhält man in dem neuen Polynom $\tilde{Q}_N(x)$ eine gewisse Näherung für die Stammfunktion $F(x)$, jedoch nicht die bestmögliche Approximation der N -ten Partialsumme einer exakten Tschebyscheff-Entwicklung derselben. Die Eigenschaft einer gleichmäßigen Näherung an $F(x)$ besitzt $\tilde{Q}_N(x)$ also durchaus nicht. Genau umgekehrt liegen die Verhältnisse nach unserer Modifikation des Verfahrens. Wir erhalten in (8) ein Interpolationspolynom $\bar{q}_{N-1}(x)$, welches in eine finite Reihe nach Polynomen $T'_n(x)$ entwickelt wird. Der Ausdruck $\bar{q}_{N-1}(x)$ bewirkt keine Approximation im Tschebyscheffschen Sinne an $f(x)$, wie bei (5) und (6) betont wurde. Durch Integration erhalten wir jedoch ein Polynom $\bar{Q}_N(x)$, das geradezu auf eine gleichmäßige Approximation der Stammfunktion $F(x)$ hintendiert, also die N -te Partialsumme einer exakten Entwicklung von $F(x)$ approximiert. Dieser Effekt beruht darauf, daß im Übergang von der Grundgleichung (2) auf (3) die unbekannt Funktion $F(x)$ völlig gleichwertig durch ihre bekannte Ableitung $F'(x)=f(x)$ ersetzt werden konnte. Die Entwicklung des Integranden $f(x)$ nach den Polynomen $T'_n(x)$ erweist sich somit als die „natürliche“ Basis zur gleichmäßigen Approximation der Stammfunktion $F(x)$.

Wie aus (11) zu ersehen ist, werden überdies die Koeffizienten der finiten Tschebyscheff-Reihe für $F(x)$ nach unserer Modifikation durch einen einzigen geschlossenen Ausdruck unmittelbar gefunden. Damit erfolgen noch rechen-technische Vereinfachungen gegenüber dem Formalismus in [I], die der Wirtschaftlichkeit des Verfahrens vorteilhaft zugute kommen.

Für die Mitwirkung bei dieser Arbeit danke ich Herrn cand. math. E. KRASKA.

Literatur

- [1] CLENSHAW, C. W., and A. R. CURTIS: A method for numerical integration on an automatic computer. Numer. Mathematik 2, 197–205 (1960).
- [2] DAVIS, P. S., and RABINOWITZ: Some geometrical theorems for abscissas and weights of Gauss type. J. of Mathematical Analysis and Applications 2, 428–437 (1961).
- [3] IMHOF, J. P.: On the Method for Numerical Integration of Clenshaw and Curtis. Numer. Mathematik 5, 138–141 (1963).
- [4] NATANSON, I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1955.
- [5] SZEGÖ, G.: Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, Colloquium Publications, 2. Aufl. New York 1948.

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Technische Hochschule
5100 Aachen, Templergraben 55

(Eingegangen am 18. November 1963)