Numerische Mathematik 3, 62—71 (1961)

# Fehlerfortpflanzung bei Interpolation

Von

A. SCHÖNHAGE

**1.** Gegeben seien Argumente $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ $(n \geqq 2)$ und Werte $y_\nu$, die durch ein Polynom $A_0(x)$ vom Grade $n$ interpoliert werden. Es soll untersucht werden, wie sich Fehler $\delta_\nu$, mit denen die Ausgangswerte behaftet sind, auf $A_0(x)$ auswirken, während das Interpolationsverfahren selbst als genau vorausgesetzt wird. Man betrachtet also außerdem $A(x)$ mit $A(x_\nu) = y_\nu + \delta_\nu$ und die Differenz

$$P(x) = A(x) - A_0(x) \quad \text{mit} \quad P(x_\nu) = \delta_\nu .$$

Aus $|\delta_\nu| \leqq \varepsilon_\nu$ folgt nach LAGRANGE

$$|P(\xi)| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \delta_\nu \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{\xi - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \left| \frac{\xi - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} \right| = E(\xi);$$

diese Schranke ist die beste, denn sie wird bei festem $\xi$ von dem durch

$$Q_\xi(x_\nu) = \varepsilon_\nu \operatorname{sign} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{\xi - x_\mu}{x_\nu - x_\mu}$$

bestimmten Polynom angenommen. Falls $[\xi_1, \xi_2]$ kein $x_\nu$ enthält, gilt $Q_{\xi_1} \equiv Q_{\xi_2}$. *$E(\xi)$ setzt sich also stückweise aus Polynomen zusammen.*

Für spezielle Werte $x_\nu, \varepsilon_\nu, \xi$ ist die Fehlerabschätzung danach numerisch immer möglich. Für weitere allgemeine Untersuchungen sei nun die Gleichheit der $\varepsilon_\nu$ und (ohne Einschränkung) $\varepsilon_\nu = 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ vorausgesetzt. Betrachtet wird

$$\mathfrak{M} = \{P(x) \mid |P(x_\nu)| \leqq 1\} \quad \text{und} \quad M = \max_{\substack{x_0 \leqq \xi \leqq x_n \\ P \in \mathfrak{M}}} |P(\xi)|;$$

$M$ hängt nur von der Lage der $x_\nu$ ab und wird durch lineare Transformationen $\bar{x}_\nu = a\,x_\nu + b$ $(a \neq 0)$ nicht geändert.

Hier sind folgende Sätze von N. S. BERNSTEIN zu nennen (vgl. [*1*]):

*Für beliebige Verteilung der $x_\nu$ gilt $M \geqq \dfrac{\lg n}{8\sqrt{\pi}}$.*

*Im Falle der Tschebyscheff-Knoten $x_\nu = -\cos\left(\dfrac{2\nu+1}{2n+2}\pi\right)$ ist*

$$M \leqq 8 + \frac{4}{\pi} \lg(n+1).$$

**2.** Hier soll nun der äquidistante Fall $x_\nu = \nu$ diskutiert werden. Für $k-1 \leqq x \leqq k$ gilt $E(x) \equiv E_k(x)$, wobei das Polynom $E_k(x)$ durch

$$E_k(x_\nu) = \begin{cases} (-1)^{k-1-\nu} & \text{für} \quad \nu \leqq k-1 \\ (-1)^{k-\nu} & \text{für} \quad \nu \geqq k \end{cases}$$

festgelegt ist. $E_k(x)$ sei extremal genannt, wenn $\max\limits_{k-1 \leqq x \leqq k} E_k(x) = M$.

**Satz 1.** *Genau $E_1(x)$ und $E_n(x)$ sind extremal.*

Indirekter Beweis. Da $E_1$ und $E_n$ bis auf Spiegelung oder Drehung gleich sind, genügt es zu zeigen, daß die übrigen $E_k$ nicht extremal sind. Annahme: Für $1 < k < n$ $(n \geqq 3)$ und $x' \in (k-1, k)$ sei $E_k(x') = M$. $E_k$ hat $n-1$ Nullstellen innerhalb von $[0, n]$, also höchstens eine Nullstelle $z \notin [0, n]$; es kann $z < 0$ angenommen werden $\bigl($andernfalls betrachte man $E_{n+1-k}(x)\bigr)$, so daß also

$$\operatorname{sign} E_k(n+1) = \operatorname{sign} E_k(n) = (-1)^{k-n}.$$

$$G(x) = E_k(x) + (-1)^{k+1-n} \frac{|E_k(n+1)|+1}{n!} \prod_{\nu=0}^{n} (x-\nu)$$

erfüllt $G(\nu) = E_k(\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und

$$G(n+1) = E_k(n+1) + (-1)^{k+1-n} |E_k(n+1)| + (-1)^{k+1-n} = (-1)^{k+1-n},$$

also $|G(\nu)| = 1$ an den $n+1$ äquidistanten Stellen $\nu = 1, \ldots, n+1$. Da $M$ gegenüber linearen Transformationen invariant ist (hier Verschiebung um 1) und $x' \in (1, n-1)$, folgt $|G(x')| \leqq M$. Wegen

$$\operatorname{sign}\left\{(-1)^{k+1-n} \prod_{\nu=1}^{n} (x'-\nu)\right\} = (-1)^{k+1-n} \operatorname{sign}\left\{\prod_{\nu=k}^{n} (x'-\nu)\right\} = +1$$

ist im Widerspruch dazu $G(x') > E_k(x') = M$.

**3.** Im folgenden wird $E_1(x)$ vom Grade $n$ zu den Punkten $x_\nu = \nu$ mit $P_n(x)$ bezeichnet; für $M_n = \max\limits_{0<x<1} P_n(x)$ gilt

**Satz 2.** $M_n \sim \dfrac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot (\lg n + C)}$ *($C = 0{,}577\ldots$ Eulersche Konstante).*

*Beweis.* Nach Newton hat man $P_n(x) = 1 + \sum\limits_{\nu=2}^{n} Q_\nu(x)$;

$$Q_\nu(x) = (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{2^\nu - 2}{\nu!} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (x-\mu); \qquad \frac{Q_\nu'(x)}{Q_\nu(x)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1}{x-\mu} \leqq 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Da die $Q_\nu$ in $(0, 1)$ sämtlich positiv sind, folgt $P_n'(\frac{1}{2}) \leqq 0$; das Maximum $M_n$ liegt also im Intervall $0 < x \leqq \frac{1}{2}$, auf das sich die folgenden Abschätzungen beziehen.

Nach Lagrange ist

$$P_n(x) = \prod_{\mu=1}^{n} \frac{x-\mu}{-\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{x-\mu}{\nu-\mu}$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \left(1 + x \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{\nu - x}\right).$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) < \prod_{\nu=1}^{n} e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-h_n x}, \quad \text{worin} \quad h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu};$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) > \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{x}{\nu}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right) > e^{-h_n x} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} > e^{-h_n x}\left(1 - \frac{\pi^2}{6} x^2\right).$$

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}\,\frac{1}{\nu-x} > \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(\nu+1)!(n-\nu)!} = \frac{2^{n+1}-n-2}{n+1};$$

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu+1}\right);$$

$$\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu+1} = \frac{1+x}{(\nu-x)(\nu+1)} \leqq \frac{6(1+\frac{1}{2})}{(\nu+1)(\nu+2)},$$

also

$$S_n < \frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{9}{(n+1)(n+2)}\cdot 2^{n+2} = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{18}{n+2}\right).$$

Damit läßt sich $P_n(x)$ durch die Funktionen

$$f(x) = 1 + x\,e^{-h_n x}\,\frac{2^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{18}{n+2}\right)$$

und

$$g(x) = x\,e^{-h_n x}\,\frac{2^{n+1}}{n+1}\left(1-\frac{\pi^2}{6}x^2\right)$$

einschließen: $g(x) < P_n(x) < f(x)$.

$f(x)$ hat sein Maximum an der Stelle $\frac{1}{h_n} = a$;

$$(*) \qquad M_n < f(a) = 1 + \frac{2^{n+1}}{e\,h_n(n+1)}\left(1+\frac{18}{n+2}\right);$$

$$M_n > g(a) = \frac{2^{n+1}}{e\,h_n(n+1)}\left(1-\frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{h_n^2}\right);$$

wegen $h_n = \lg n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)$ folgt damit die asymptotische Aussage in Satz 2.

Tabelle 1

| $n$ | $M_n$ | $\frac{2^{n+1}}{en(\lg n + C)}$ |
|---|---|---|
| 2 | 1,250 | 1,158 |
| 3 | 1,631 | 1,171 |
| 4 | 2,208 | 1,499 |
| 5 | 3,106 | 2,153 |
| 6 | 4,549 | 3,313 |
| 7 | 6,930 | 5,332 |
| 8 | 10,946 | 8,862 |
| 9 | 17,849 | 15,068 |
| 10 | 29,900 | 26,162 |
| 20 | 1,099/04 | 1,080/04 |
| 30 | 6,601/06 | 6,619/06 |
| 40 | 4,692/09 | 4,741/09 |
| 50 | 3,640/12 | 3,690/12 |

($/xx$ bedeutet $\cdot 10^{xx}$)

Die Abschätzung (*) läßt sich im letzten Faktor noch etwas verbessern, aber von größerem Interesse dürften hier einige numerische Angaben sein (vgl. Tabelle 1).

**4.** Im Gegensatz zu den großen Abweichungen am Rande ergibt sich für die Mitte des Intervalls $(x_0, x_n)$ eine Abschätzung für $E(x)$, die mit den Bernsteinschen Ergebnissen verwandt ist. Der Einfachheit halber sei nur ungerader Grad $n = 2r+1$ betrachtet. Dann hat $E_{r+1}(x)$ in $(r, r+1)$ sein Maximum $m_n$ aus Symmetriegründen an der Stelle $r+\frac{1}{2}$:

$$m_n = \sum_{\nu=0}^{2r+1}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{2r+1}\left|\frac{r+\frac{1}{2}-\mu}{\nu-\mu}\right| = 2\sum_{\nu=0}^{r}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{2r+1}\left|\frac{r+\frac{1}{2}-\mu}{\nu-\mu}\right|$$

$$= 2\prod_{\mu=0}^{r}\left(r+\frac{1}{2}-\mu\right)^2\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!(2r+1-\nu)!}\cdot\frac{2}{2r+1-2\nu}.$$

Man schätzt ab:

$$\frac{1}{\nu!(2r+1-\nu)!} \leqq \frac{1}{r!(r+1)!};$$

$$\sum_{\nu=0}^{r} \frac{2}{2r+1-2\nu} = 2\sum_{\nu=0}^{r} \frac{1}{2\nu+1} < \lg\left(r+\frac{3}{2}\right) + \lg 4 + C;$$

$$\frac{2\prod\limits_{\mu=0}^{r}(r+\frac{1}{2}-\mu)^2}{r!(r+1)!} = \frac{\prod\limits_{\mu=0}^{r}(2\mu+1)^2}{2^{2r+1}\cdot r!(r+1)!} < \frac{2}{\pi} \quad \text{(Wallissches Produkt).}$$

Damit folgt

$$m_n < \frac{2}{\pi}\left(\lg(n+2) + \lg 2 + C\right).$$

**5.** Eng an die bisherigen Überlegungen schließt sich eine Fragestellung an, die z.B. bei numerischer Tschebyscheff-Approximation interessiert. Der Ausgangspunkt sei kurz skizziert:

Eine stetige Funktion $f(x)$ soll im Intervall $[a, b]$ durch ein Polynom vom Grade $k$ angenähert werden. Dabei ist $f(x)$ in vielen Fällen analytisch, so daß man sich darauf beschränken kann, ein hinreichend genaues Taylor-Polynom $Q_n(x)$ durch $Q_k(x)$ anzunähern (wobei meist $n$ wesentlich größer als $k$ ist). Ein dabei auftretendes Teilproblem ist die Abschätzung der polynomischen Fehlerkurve

$$P_n(x) = Q_n(x) - Q_k(x).$$

Diese wird in einem Schrittverfahren an $m+1$ äquidistanten Stellen $x_\mu = a + \frac{\mu}{m}(b-a)$ abgetastet, und man berechnet $|P_n(x_\mu)| \leqq \varepsilon$; welche Schranke läßt sich dann (natürlich unter der notwendigen Voraussetzung $m \geqq n$) für $\max\limits_{a \leqq x \leqq b} |P_n(x)|$ angeben?

Für $m = n$ war das in Satz 2 beantwortet. Wichtig ist hier nun die Frage, wie $m$ gewählt werden muß, damit diese Schranke hinreichend klein wird, wie also diese Schranke von $n$ *und* $m$ abhängt. Es genügt wieder, den relativen Fehler zu betrachten, also

$$\mathfrak{M}_{n,m} = \{P_n(x)\,|\,|P_n(x_\mu)| \leqq 1,\ x_\mu \text{ äquidistant}\},$$

$$E(x) = \max_{P_n \in \mathfrak{M}_{n,m}} |P_n(x)|, \qquad M_{n,m} = \max_{x_0 \leqq x \leqq x_m} E(x).$$

**Satz 3.** *$E(x)$ ist stückweise polynomisch, genauer: Es gibt Polynome $E_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ mit $E_\mu(x) \equiv E(x)$ für alle $x \in [x_{\mu-1}, x_\mu]$.*

*Beweis.* $\xi$ bezeichne im folgenden stets Punkte aus $(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$ ($\lambda$ fest). Man betrachte alle Systeme $S$ von $n+1$ der $x_\mu$, die $x_{\lambda-1}$ und $x_\lambda$ enthalten.

$$\mathfrak{M}_S = \{P_n(x)\,|\,|P_n(x_\mu)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad x_\mu \in S\}, \qquad E_S(x) = \max_{P_n \in \mathfrak{M}_S} |P_n(x)|.$$

Es gibt nur endlich viele solche $S$, also zu festem $\xi_0$ ein $S_0$ mit $E_{S_0}(\xi_0) = \min\limits_S E_S(\xi_0)$. Nach 1. gibt es ein Polynom $F \in \mathfrak{M}_{S_0}$ mit $F(\xi) \equiv E_{S_0}(\xi)$, und wegen $\mathfrak{M}_{n,m} \subset \mathfrak{M}_{S_0}$ folgt $E(\xi) \leqq F(\xi)$. Zum Nachweis von $E(\xi) \equiv F(\xi)$ braucht nur noch $F \in \mathfrak{M}_{n,m}$, d.h. $|F(x_\mu)| \leqq 1$ für alle $\mu$ gezeigt zu werden.

*Annahme.* $|F(x_k)| > 1$ $(x_k \notin S_0)$. Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

a) $x_k$ liegt zwischen zwei (benachbarten) Punkten aus $S_0$, $x_{\mu'} < x_k < x_{\mu''}$. Wegen $\operatorname{sign} F(x_{\mu'}) \neq \operatorname{sign} F(x_{\mu''})$ folgt entweder

$$\alpha)\ \operatorname{sign} F(x_k) = \operatorname{sign} F(x_{\mu'}) \quad \text{und} \quad \mu' \neq \lambda$$

oder

$$\beta)\ \operatorname{sign} F(x_k) = \operatorname{sign} F(x_{\mu''}) \quad \text{und} \quad \mu'' \neq \lambda - 1 .$$

Im Falle $\alpha$) ersetzt man $x_{\mu'}$ durch $x_k$ und erhält so ein abgeändertes System $S_1$. Da $F(x)$ sein Vorzeichen zwischen $x_{\mu'}$ und $x_k$ nicht ändert, gilt nach 1.

$$F(\xi) = \sum_{\substack{x \in S_1 \\ x \neq x_k}} \prod_{\substack{v \in S_1 \\ v \neq x}} \left| \frac{\xi - v}{x - v} \right| + |F(x_k)| \prod_{\substack{v \in S_1 \\ v \neq x_k}} \left| \frac{\xi - v}{x_k - v} \right|$$

und wegen $|F(x_k)| > 1$

$$E_{S_0}(\xi) = F(\xi) > \sum_{x \in S_1} \prod_{\substack{v \in S_1 \\ v \neq x}} \left| \frac{\xi - v}{x - v} \right| = E_{S_1}(\xi) .$$

Das aber ist an der Stelle $\xi_0$ ein Widerspruch zu $E_{S_0}(\xi_0) = \min\limits_{S} E_S(\xi_0)$. Im Falle $\beta$) schließt man analog.

b) $x_{\mu_0}$ sei der erste, $x_{\mu_n}$ der letze Punkt von $S_0$; $x_k > x_{\mu_n}$: Falls $\operatorname{sign} F(x_k) = \operatorname{sign} F(x_{\mu_n})$, ist a), $\alpha$) anwendbar. Im Falle $\operatorname{sign} F(x_k) \neq \operatorname{sign} F(x_{\mu_n})$ ist $\mu_0 \neq \lambda - 1$, weil sonst $F(x)$ $n+1$ Nullstellen hätte, nämlich $n-1$ zwischen $x_\lambda$ und $x_{\mu_n}$, eine zwischen $x_{\mu_n}$ und $x_k$ und eine links von $x_{\lambda-1}$. Hier erhält man $S_1$ durch Fortlassen von $x_{\mu_0}$ und Hinzunahme von $x_k$ und gelangt wieder wie unter a) zum Widerspruch.

c) $x_k < x_{\mu_0}$ wird analog zu b) behandelt.

Das im letzten Teil des Beweises beschriebene Austauschverfahren gibt nun auch gleichzeitig bei speziellem $n$ und $m$ eine konstruktive Methode zur praktischen Bestimmung von $E_\mu(x)$ für alle $\mu$, also zur numerischen Berechnung von $M_{n,m}$.

**6.** Zum Schluß soll eine qualitative Abschätzung für $M_{n,m}$ gegeben werden. Für $n=2$ liegen die Verhältnisse besonders einfach:

$$m = 2k+1:\ E_{k+1} \text{ ist extremal und } M_{2,2k+1} = 1 + \frac{1}{2k(k+1)};$$

$$m = 2k:\ E_k \text{ und } E_{k+1} \text{ sind extremal und } M_{2,2k} = 1 + \frac{1}{2k(k+1)};$$

also $M_{2,m} = 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$.

Welches $E_\mu(x)$ extremal ist, läßt sich allgemein nicht so leicht beantworten wie im Falle $m=n$. Es genügt jedoch, $E_m(x)$ (oder $E_1(x)$) zu untersuchen, um eine Abschätzung für $M_{n,2m}$ zu erhalten; denn aus den $2m+1$ äquidistanten Punkten lassen sich stets $m+1$ benachbarte so herausgreifen, daß jedes der $2m$ Intervalle einmal am Rande von $m$ Intervallen auftritt — man nutzt also die Beschränktheit nur an der Hälfte aller Stützstellen aus.

Zur Abschätzung von $E_m(x)$ wird das Intervall $[-1, +1]$ mit den Rasterpunkten $z_\mu = -1 + \mu \cdot \frac{2}{m}$ betrachtet. Es kommt nun darauf an, ein $S$ zu wählen, in dem $z_{m-1} = 1 - \frac{2}{m}$ und $z_m = 1$ vorkommen und für das $E_S(x)$ in $1 - \frac{2}{m} \leqq x \leqq 1$ klein (wenn auch nicht unbedingt minimal) ist. Dazu werden die Extremalpunkte $t_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ des Tschebyscheff-Polynoms vom Grade $n$ herangezogen. Es sei

$$x_0 = 1; \qquad x_1 = 1 - \frac{2}{m} \qquad \text{und für } \nu = 2, 3, \ldots, n$$

$$x_\nu = \max\{z_\mu \mid z_\mu \leqq t_\nu\}.$$

Damit die $x_\nu$ voneinander verschieden sind, wird

$$\min(t_\nu - t_{\nu+1}) = 1 - \cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \geqq \frac{2}{m}$$

vorausgesetzt. Mit $n \geqq 3$ hat man

$$\sin^2\frac{\pi}{2n} \geqq \frac{\pi^2}{4n^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi^2}{36}} = \frac{9}{4n^2},$$

also

$$m \geqq \tfrac{4}{9} n^2.$$

Es ist

$$E_m(\xi) \leqq E_S(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \quad \text{mit} \quad A_\nu = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq\nu}}^{n} \left| \frac{\xi - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} \right|.$$

Setzt man $\xi = 1 - \eta$ $\left(0 \leqq \eta \leqq \frac{2}{m}\right)$, dann folgt

$$A_0 = \left(1 - \frac{m}{2}\eta\right) \prod_{2}^{n} \left(1 - \frac{\eta}{1 - x_\mu}\right),$$

$$A_1 = \frac{m}{2}\eta \prod_{2}^{n} \left(1 + \frac{\frac{2}{m} - \eta}{1 - \frac{2}{m} - x_\mu}\right).$$

Weiter sei bezeichnet: $\frac{m}{2}\eta = u$ $(0 \leqq u \leqq 1)$,

$$\frac{2}{m} \sum_{2}^{n} \frac{1}{1 - x_\mu} = B_0, \qquad \frac{2}{m} \sum_{2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{2}{m} - x_\mu} = B_1.$$

$$A_0 + A_1 < (1 - u) \cdot e^{-uB_0} + u\, e^{(1-u)B_1} < e^{-uB_0}\left[1 + u\left(e^{B_1} - 1\right)\right] = f_1(u).$$

$$f_1'(u) = e^{-uB_0}\left[e^{B_1} - 1 - B_0 - u B_0 \left(e^{B_1} - 1\right)\right]$$

hat als einzige Nullstelle

$$u_0 = \frac{1}{B_0} - \frac{1}{e^{B_1} - 1};$$

die Rechnung zeigt weiter

$$f_1''(u_c) = -B_0(e^{B_1}-1)\,e^{-u_0 B_0} < 0,$$

$f_1(u)$ hat also in $u_0$ sein Maximum und

$$A_0 + A_1 < f_1(u_0) = \frac{e^{B_1}-1}{B_0} \cdot e^{\frac{B_0}{e^{B_1}-1}-1}.$$

$$f_2(t) = t\,e^{\frac{1}{t}-1}$$

ist monoton wachsend für $t > 1$; da $B_1 > B_0$, gilt $\frac{e^{B_1}-1}{B_0} > \frac{e^{B_1}-1}{B_1} > 1$; $\frac{e^{B_1}-1}{B_0}$ ist also nach oben abzuschätzen:

$$\frac{e^{B_1}-1}{B_0} = \frac{e^{B_1}-1}{B_1}\left(1+\frac{B_1-B_0}{B_0}\right) \leqq \frac{e^{B_1}-1}{B_1}\,(1+B_1),$$

denn

$$B_1 - B_0 = \frac{2}{m}\sum_2^n\left(\frac{1}{1-\frac{2}{m}-x_\mu} - \frac{1}{1-x_\mu}\right) = \frac{4}{m^2}\sum_2^n \frac{1}{\left(1-\frac{2}{m}-x_\mu\right)(1-x_\mu)} \leqq B_1 B_0.$$

$$f_3(B_1) = \frac{e^{B_1}-1}{B_1}\,(1+B_1)$$

ist ebenfalls monoton wachsend, so daß nun $B_1$ nach oben abzuschätzen ist. Zunächst ein

**Hilfssatz.**

$$\sum_2^n \frac{2}{1-t_\mu} < \frac{3}{\pi^2}\,n^2.$$

*Beweis.*

$$\sum_2^n \frac{2}{1-\cos\frac{\mu\pi}{n}} = \sum_2^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\mu\pi}{2n}\right)} < \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \int_2^n \frac{du}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{2n}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/2}\frac{du}{\sin^2 u} = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{2n}{\pi}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{n^2}{\pi^2}\left(\frac{\frac{\pi^2}{n^2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right).$$

Zu untersuchen bleibt

$$g(t) = \frac{t^2}{\sin^2 t} + 2t\,\frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq \frac{\pi}{3};$$

dort gilt

$$g'(t) = \frac{2\cos t}{\sin^3 t}\,(\sin^2 t - t^2) < 0$$

und somit

$$g(t) < \lim_{t\to 0} g(t) = 3.$$

Nunmehr folgt wegen $x_\mu \leqq t_\mu$ $(\mu \geqq 2)$

$$B_1 = \frac{2}{m} \sum_2^n \frac{1}{1 - \frac{2}{m} - x_\mu} \leqq \frac{2}{m} \sum_2^n \frac{1}{1 - \frac{2}{m} - t_\mu} \leqq \frac{1 - t_2}{1 - \frac{2}{m} - t_2} \cdot \frac{2}{m} \sum_2^n \frac{1}{1 - t_\mu};$$

$$\frac{1 - t_2}{1 - \frac{2}{m} - t_2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m \sin^2 \frac{\pi}{n}}} \leqq \frac{1}{1 - \frac{4}{27} \cdot \frac{n^2}{m}} \quad \text{für} \quad n \geqq 3;$$

$$B_1 < \frac{\frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{n^2}{m}}{1 - \frac{4}{27} \cdot \frac{n^2}{m}} = f_4\left(\frac{n^2}{m}\right).$$

Zusammenfassend hat sich

$$A_0 + A_1 < f_2\left(f_3\left(f_4\left(\frac{n^2}{m}\right)\right)\right)$$

ergeben, und die asymptotische Rechnung zeigt $\left(\text{für } \frac{n^2}{m} \leqq \frac{9}{4}\right)$

$$A_0 + A_1 = 1 + O\left(\frac{n^4}{m^2}\right),$$

denn

$$f_4(t) = O(t), \qquad f_3(t) = 1 + O(t);$$

$$f_2(1 + t) = (1 + t)\, e^{-\frac{t}{1+t}} = (1 + t)\left(1 - \frac{t}{1+t} + \cdots\right) = 1 + O(t^2).$$

Abschätzung der $A_\nu$ für $\nu = 2, 3, \ldots, n$:

Gemäß der Festlegung der $x_\nu$ gilt für $\nu, \mu \geqq 2$

$$|t_\nu - t_\mu| - \frac{2}{m} \leqq |x_\nu - x_\mu| \leqq |t_\nu - t_\mu| + \frac{2}{m}.$$

Damit folgt

$$A_\nu = \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu \neq \nu}}^{n} \left| \frac{\xi - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} \right| \leqq \frac{\eta\left(\frac{2}{m} - \eta\right) \prod_2^n \left(1 + \frac{2}{m} - t_\mu\right)}{(1 - t_\nu)\left(1 - \frac{2}{m} - t_\nu\right)\left(1 + \frac{2}{m} - t_\nu\right)} \prod_{\substack{\mu=2\\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{1}{|t_\nu - t_\mu| - \frac{2}{m}}.$$

a) $\eta\left(\frac{2}{m} - \eta\right) \leqq \frac{1}{m^2}$.

b) $\prod_2^n \left(1 + \frac{2}{m} - t_\mu\right) = \prod_1^n (1 - t_\mu) \frac{1}{1 - t_1} \prod_2^n \left(1 + \frac{2/m}{1 - t_\mu}\right);$

$$\prod_1^n \left(1 - \cos\left(\frac{\mu \pi}{n}\right)\right) = 2^n \prod_1^n \sin^2\left(\frac{\mu \pi}{2n}\right) = 2^n \prod_1^{2n-1} \sin\left(\frac{\mu \pi}{2n}\right);$$

$$\frac{1}{1 - t_1} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} \leqq \frac{2}{9} n^2 \qquad (n \geqq 3);$$

$$\prod_2^n \left(1 + \frac{2/m}{1 - t_\mu}\right) < e^{\frac{2}{m} \sum_2^n \frac{1}{1 - t_\mu}} < e^{\frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{n^2}{m}}.$$

c) $$\frac{1}{(1-t_\nu)\left(1-\frac{2}{m}-t_\nu\right)}\prod_{\substack{\mu=2\\ \mu\neq\nu}}^{n}\frac{1}{|t_\nu-t_\mu|-\frac{2}{m}}\leqq\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}\frac{1}{|t_\nu-t_\mu|}\prod_{\substack{\mu=2\\ \mu\neq\nu}}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{2/m}{|t_\nu-t_\mu|}}\right);$$

$$\nu\neq n:\quad \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}|t_\nu-t_\mu|=2^n\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}\left|\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2n}\pi\right)\right|$$

$$=2^n\prod_{1}^{2n-1}\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\nu+n}{2n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2\nu}{2n}\pi\right)}=2^{n-1}\prod_{1}^{2n-1}\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right).$$

$$\nu=n:\quad \prod_{0}^{n-1}\frac{1}{|t_n-t_\mu|}=\prod_{1}^{n}\frac{1}{1-t_\mu}<\frac{1}{2^{n-1}\prod\limits_{1}^{2n-1}\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)}.$$

Die Zusammenfassung von a) bis c) ergibt

$$A_\nu<\frac{2}{9}\cdot\frac{n^2}{m^2}e^{\frac{3}{\pi^2}\frac{n^2}{m^2}}\frac{2}{1+\frac{2}{m}-t_\nu}\prod_{\substack{\mu=2\\ \mu\neq\nu}}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{2/m}{|t_\nu-t_\mu|}}\right).$$

$$\prod_{\substack{\mu=2\\ \mu\neq\nu}}^{n}\left(1-\frac{1}{m\left|\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2n}\pi\right)\right|}\right)\leqq\prod_{\substack{\mu=2\\ \mu\neq\nu}}^{n}\left(1-\frac{1}{m\sin^2\left(\frac{\nu-\mu}{2n}\pi\right)}\right)$$

$$=\prod_{1}^{\nu-2}\left(1-\frac{1}{m\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)}\right)\cdot\prod_{1}^{n-\nu}\left(1-\frac{1}{m\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)}\right)$$

$$\geqq\prod_{1}^{[n/2]}\left(1-\frac{1}{m\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)}\right)^2>\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2}{2m\,\lambda^2}\right)^2=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{\sqrt{m}}\right)}{\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{n^2}{m}}.$$

Bei den letzen Abschätzungen war über die frühere Einschränkung hinausgehend $m>\frac{1}{2}n^2$ vorauszusetzen.

Nach dem Hilfssatz läßt sich schließlich auch die Summation über $\nu$ durchführen:

$$\sum_{2}^{n}\frac{2}{1+\frac{2}{m}-t_\nu}<\sum_{2}^{n}\frac{2}{1-t_\nu}<\frac{3}{\pi^2}n^2$$

und damit

$$\sum_{2}^{n}A_\nu<\frac{2}{3\pi^2}\cdot\frac{n^4}{m^2}e^{\frac{3}{\pi^2}\frac{n^2}{m}}\left(\frac{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{n}{\sqrt{m}}}{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{\sqrt{m}}\right)}\right)^2=O\left(\frac{n^4}{m^2}\right).$$

Als qualitatives Ergebnis hat man zusammenfassend für $M_{n,2m}$

**Satz 4.** *Für* $m \geqq c n^2$ *mit festem* $c > \frac{1}{2}$ *gilt*

$$M_{n,2m} = 1 + O\left(\frac{n^4}{m^2}\right).$$

Abgesehen von der Möglichkeit, die $M_{n,m}$ direkt zu berechnen, liefern aber auch schon die vorstehenden Abschätzungen brauchbare Schranken (vgl. Tabelle 2).

Tabelle 2

| $k$ | $M_{n,kn^2} <$ |
|---|---|
| 2 | 1,8211 |
| 3 | 1,1749 |
| 4 | 1,0745 |
| 5 | 1,0414 |
| 6 | 1,0264 |
| 20 | 1,00186 |
| 200 | 1,0000173 |

## Literatur

[1] NATANSON, I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1955.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität
Köln-Lindenthal
Weyertal 88

*(Eingegangen am 20. Juni 1960)*