Numerische Mathematik 5, 303—331 (1963)

Optimale Punkte für Differentiation und Integration

Von

A. SCHÖNHAGE

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wie sich bei numerischer Differentiation durch geeignete Wahl der Stützstellen eine möglichst hohe Genauigkeit erreichen läßt. Bei der Integration führt diese Frage bekanntlich auf die Quadraturen vom Gauß-Typ; als optimale Punkte ergeben sich die Nullstellen der zur benutzten Belegung $p(x)$ orthogonalen Polynome. Diese sind auch für die Interpolation gut geeignet, wenn man den Fehler im quadratischen Mittel mit dem Gewicht $p(x)$ mißt.

Die Frage nach günstigen Punkten für die näherungsweise Differentiation wurde bisher jedoch kaum behandelt. Unter vorwiegend praktischen Gesichtspunkten gelangt SALZER [2] durch Minimalisierung des betraglichen Fehlermaximums zu einigen speziellen Ergebnissen. Wir betrachten den Fehler im quadratischen Mittel, und im Vordergrund sollen rein approximationstheoretische Fragen stehen.

$L_n(x)$ bezeichne das Lagrangesche Interpolationspolynom zu $f(x)$ und den Stützstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Ausgehend von einem genauen Studium des Restgliedes $f'(x) - L_n'(x)$ für n-fach stetig differenzierbares $f(x)$ bei beliebiger Lage der x_i wird in Abschnitt 2 die Minimalisierung von

$$\int_a^b p(x)\,\left(f'(x) - L_n'(x)\right)^2 dx$$

untersucht. Für die Jacobi-Belegungen

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \qquad (\alpha, \beta > -1), \qquad a = -1, \qquad b = +1$$

ergeben sich als optimale x_i die Nullstellen der Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$. Diese Punkte liefern gleichzeitig besonders gute Interpolationsquadraturen — exakt für Polynome von höchstens $(2n-3)$-tem Grade — die in engem Zusammenhang mit der optimalen Differentiation stehen. Als neuartige Charakterisierung der Jacobi-Belegungen erhalten wir in Abschnitt 3 weiter das abgrenzende Resultat, daß ein solcher Zusammenhang nur für $p(x) = c \cdot (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ möglich ist.

In Abschnitt 4 wird die Konvergenz des Approximationsverfahrens für $n \to \infty$ untersucht. Bei der Frage nach möglichst schwachen für die Konvergenz hinreichenden Voraussetzungen über $f(x)$ werden Ergebnisse erzielt, die in völliger Analogie zur direkten Interpolation von $f'(x)$ in den Nullstellen von $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$

stehen. Für die Konvergenz im quadratischen Mittel

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\big(f'(x)-L_n'(x)\big)^2dx\to 0$$

ist die Stetigkeit von $f'(x)$ hinreichend. Bei diesen Überlegungen wird allerdings Gebrauch von speziellen Eigenschaften der Jacobi-Polynome gemacht, so daß eine Behandlung der gleichen Fragen bei anderer Verteilung der x_i schwierig erscheint.

Die Übertragung unserer Problemstellung auf unendliche Bereiche ist ohne weiteres möglich. Für $a=0$, $b=\infty$, $p(x)=x^\alpha\cdot e^{-x}$ $(\alpha>-1)$ erhält man als optimale Punkte die Nullstellen der Laguerre-Polynome $L_n^{(\alpha-1)}(x)$, für $a=-\infty$, $b=+\infty$, $p(x)=e^{-x^2}$ die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Der auch hier bestehende enge Zusammenhang mit entsprechenden Quadraturformeln erweist sich wiederum als charakteristisch für die genannten Belegungen. Bezüglich aller dabei benutzten Eigenschaften der klassischen Orthogonalpolynome sei auf die Monographie von SZEGÖ [5] verwiesen.

Schließlich wird in Abschnitt 6 als einfaches Anwendungsbeispiel eine lineare Randwertaufgabe behandelt, bei deren Übersetzung in ein finites Problem das Zusammenwirken von Differentiation und Integration über den gleichen Stützstellen in besonderer Weise demonstriert wird. In diesem speziellen Zusammenhang nimmt unsere Methode eine gewisse Mittelstellung zwischen dem gewöhnlichen Differenzenverfahren und dem Ritzschen Verfahren ein.

1. Das Restglied bei Differentiation

Für die Elemente der Lagrange-Interpolation verwenden wir die Bezeichnungen

$$H(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)=\frac{H(x)}{H'(x_i)\,(x-x_i)}\quad\text{mit}\quad l_i(x_j)=\delta_{i,j},$$

$$L_n(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i(x)\,f(x_i).$$

Man erhält

$$l_i'(x)=\frac{H'(x)}{H'(x_i)\,(x-x_i)}-\frac{H(x)}{H'(x_i)\,(x-x_i)^2}\qquad(x\neq x_i),\tag{1.1}$$

$$l_i'(x_j)=\frac{H'(x_j)}{H'(x_i)\,(x_j-x_i)}\qquad(x_j\neq x_i)\tag{1.2}$$

und durch Grenzübergang $x\to x_i$

$$l_i'(x_i)=\frac{1}{2}\cdot\frac{H''(x_i)}{H'(x_i)}.\tag{1.3}$$

Für n-fach stetig differenzierbares $f(x)$ gilt die Lagrangesche Interpolationsformel mit Restglied

$$f(x)=L_n(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,H(x),\tag{1.4}$$

worin

$$\min(x, x_1) < \xi < \max(x, x_n).$$

Für $f(x) \equiv 1$ ergeben sich die Identitäten

(1.5) $$\sum_{i=1}^{n} l_i(x) \equiv 1,$$

(1.6) $$\sum_{i=1}^{n} l'_i(x) \equiv 0.$$

Bei der Betrachtung des Restgliedes $R_n(x) = f'(x) - L'_n(x)$ können wir von dem trivialen Fall $n = 1$ mit $R_1(x) = f'(x)$ absehen. Es sei also im folgenden stets $n \geqq 2$ vorausgesetzt.

Einfache Differentiation von (1.4) ist wegen der unbekannten Stelle ξ nicht möglich. Für $x \notin (x_1, x_n)$ jedoch gilt mit einem im allgemeinen anderen ξ (Milne-Thomson [*1*])

$$f'(x) = L'_n(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} H'(x).$$

Diese Restgliedform ist sicher nicht für alle x und beliebiges $f(x)$ richtig, zumindest nicht in den Nullstellen von $H'(x)$. Ihren genauen Gültigkeitsbereich beschreibt

Satz 1. *Für n-fach stetig differenzierbares $f(x)$ gilt in allen Punkten x, die der Bedingung*

(1.7) $$\left(H'(x) - \frac{H(x)}{x - x_1}\right)\left(H'(x) - \frac{H(x)}{x - x_n}\right) \geqq 0$$

genügen, die Restgliedformel

(1.8) $$f'(x) = L'_n(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} H'(x).$$

Insbesondere ist (1.7) für die Stützstellen x_i erfüllt.

Beim Beweise können wir uns nach dem oben Gesagten auf $x \in (x_1, x_n)$ beschränken. Nach dem Taylorschen Satz ist

$$f(x_i) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} (x_i - x)^\nu + \int_x^{x_i} \frac{(x_i - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt,$$

also

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f'(x) - \sum_{i=1}^{n} l'_i(x) f(x_i) \\ &= f'(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} \sum_{i=1}^{n} l'_i(x)\,(x_i - x)^\nu - \sum_{i=1}^{n} l'_i(x) \int_x^{x_i} \frac{(x_i - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \\ &= -\sum_{i=1}^{n} l'_i(x) \int_x^{x_i} \frac{(x_i - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt, \end{aligned}$$

denn die übrigen Glieder verschwinden wegen

$$\frac{1}{\nu!} \sum_{i=1}^{n} l'_i(z)\,(x_i - x)^\nu \Big|_{z=x} = \frac{1}{\nu!} \frac{d}{dz} (z - x)^\nu \Big|_{z=x} = \delta_{\nu,1}.$$

Durch Überlagerung der einzelnen Integranden unter Berücksichtigung der verschiedenen Integrationsbereiche ergibt sich

$$R_n(x) = \int_{x_1}^{x_n} k(x,t)\, f^{(n)}(t)\, dt \tag{1.9}$$

mit

$$k(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{x_i > t} l_i'(x)\,(x_i - t)^{n-1} & \text{für} \quad t \geqq x, \\ +\dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{x_i < t} l_i'(x)\,(x_i - t)^{n-1} & \text{für} \quad t < x. \end{cases} \tag{1.10}$$

Der Kern dieses Integraloperators ist nichts anderes als die partiell nach x differenzierte Greensche Funktion zur Differentialgleichung $y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ mit den Randbedingungen $y(x_i) = 0$.

Durch Zerlegung von $k(x,t)$ in positiven und negativen Bestandteil folgt nach dem Mittelwertsatz

$$R_n(x) = A(x)\, f^{(n)}(\xi_1) - B(x)\, f^{(n)}(\xi_2) \tag{1.11}$$

mit

$$A(x) = \int_{x_1}^{x_n} \max\big(0, k(x,t)\big)\, dt, \qquad B(x) = \int_{x_1}^{x_n} \max\big(0, -k(x,t)\big)\, dt.$$

Für $f(x) = \dfrac{H(x)}{n!}$ wird $f^{(n)}(t) \equiv 1$, also

$$\int_{x_1}^{x_n} k(x,t)\, dt = \frac{H'(x)}{n!} = A(x) - B(x).$$

Aus (1.11) erhält man demnach bei beliebigem $f^{(i)}(t)$ genau dann die vereinfachte Form (1.8), wenn $A(x)$ oder $B(x)$ verschwindet, d.h. wenn $k(x,t)$ bezüglich t einheitliches Vorzeichen besitzt.

In der Nähe der Randpunkte läßt sich das Vorzeichen aus (1.10) einfach ablesen, nämlich

$$\operatorname{sign} k(x,t) = \begin{cases} -\operatorname{sign} l_n'(x) & \text{für} \quad \max(x, x_{n-1}) < t < x_n, \\ (-1)^{n-1} \operatorname{sign} l_1'(x) & \text{für} \quad x_1 < t < \min(x, x_2). \end{cases} \tag{1.12}$$

Falls also $(-1)^n l_1'(x)\, l_n'(x) < 0$, dann wechselt $k(t) = k(x,t)$ sicherlich das Vorzeichen. Bei gleichen Vorzeichen an den Intervallenden, d.h. bei

$$(-1)^n l_1'(x)\, l_n'(x) > 0 \tag{1.13}$$

sind verschiedene Vorzeichen nur möglich, wenn $k(t)$ mindestens zweimal das Vorzeichen wechselt. Daß dieser Fall nicht eintreten kann, soll durch indirekten Beweis gezeigt werden. Dabei sei $n \geqq 3$ vorausgesetzt, denn bei $n = 2$ ist stets $l_1'(x)\, l_n'(x) < 0$.

Gemäß (1.10) ist $k(t)$ $(n-2)$-fach differenzierbar:

$$k^{(\nu)}(t) = \begin{cases} -\dfrac{(-1)^\nu}{(n-1-\nu)!} \displaystyle\sum_{x_i > t} l_i'(x)\,(x_i - t)^{n-1-\nu} & \text{für} \quad t \geqq x, \\ +\dfrac{(-1)^\nu}{(n-1-\nu)!} \displaystyle\sum_{x_i < t} l_i'(x)\,(x_i - t)^{n-1-\nu} & \text{für} \quad t < x. \end{cases} \tag{1.14}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{n} l_i'(x)\,(x_i - t)^{n-1-\nu} = (n-1-\nu)\,(x-t)^{n-2-\nu}$$

sind die $k^{(\nu)}(t)$ stetig bis auf die Ausnahmestelle $t=x$ bei $k^{(n-2)}(t)$. Von der weiteren Behandlung schließen wir aus beweistechnischen Gründen zunächst endlich viele x-Werte aus, und zwar die Stützstellen x_i und die Nullstellen der Polynome

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^{i} l_j'(x), \qquad r_i(x) = \sum_{j=i}^{n} l_j'(x). \tag{1.15}$$

Es sind dies bis auf zusätzliche Vorzeichen die Anstiege der Geradenstücke, aus denen sich $k^{(n-2)}(t)$ zusammensetzt.

Nach (1.14) verschwinden die $k^{(\nu)}(t)$ für $0 \leqq \nu \leqq n-2$ in den Endpunkten x_1 und x_n. Hätte $k(t)$ außerdem zwei Nullstellen in (x_1, x_n), dann hätte $k^{(n-3)}(t)$, wie man durch wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle schließt, mindestens $n-1$ Nullstellen in (x_1, x_n). Die Sprungstelle von $k^{(n-2)}(t)$ in $t=x$ mit $x_m < x < x_{m+1}$ umgehen wir durch Unterscheidung der Fälle

(1.16a) $\quad k^{(n-3)}(t)$ hat in $(x_1, x]$ mindestens m Nullstellen,

(1.16b) $\quad k^{(n-3)}(t)$ hat in $[x, x_n)$ mindestens $n-m$ Nullstellen,

von denen einer zutreffen muß. Im Falle (1.16a) definieren wir $k^{(n-2)}(x)$ durch den linksseitigen Limes und erhalten wegen $k^{(n-3)}(x_1)=0$ nach Rolle für $k^{(n-2)}(t)$ mindestens m Nullstellen in (x_1, x), wegen $k^{(n-2)}(x_1)=0$ also $m+1$ Nullstellen in $[x_1, x)$. Das aber ist unmöglich, denn $k^{(n-2)}(t)$ setzt sich in diesem Intervall aus nur m Geradenstücken mit einem von 0 verschiedenen Anstieg zusammen. Im Falle (1.16b) gelangt man in völlig analoger Weise zu einem Widerspruch. Damit sichert (1.13) das einheitliche Vorzeichen von $k(x,t)$, abgesehen von den endlich vielen ausgeschlossenen x-Werten. Wegen der Stetigkeit von $k(x,t)$ bezüglich x und t ist aber die Menge der x, für die $k(x,t)$ in t nicht das Vorzeichen wechselt, abgeschlossen und wird deshalb genau durch

$$(-1)^n l_1'(x)\, l_n'(x) \geqq 0 \tag{1.17}$$

beschrieben. Das liefert folgendes Bild:

$$\left.\begin{array}{l} l_n'(x) \text{ hat } n-2 \text{ Nullstellen } u_i \in (x_{i-1}, x_i) \\ l_1'(x) \text{ hat } n-2 \text{ Nullstellen } v_i \in (x_i, x_{i+1}) \end{array}\right\} \quad (2 \leqq i \leqq n-1);$$

$(-1)^n l_1'(x)\, l_n'(x)$ ist positiv in $x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Somit beschreibt (1.17) die Vereinigung der $n-2$ Intervalle $[u_i, v_i]$ um die inneren Stützstellen.

Daß (1.8) außerdem für alle $x \notin (x_1, x_n)$ richtig ist, erfaßt man durch die modifizierte Bedingung

$$(-1)^n l_1'(x)\, l_n'(x)\,(x-x_1)\,(x-x_n) \leqq 0,$$

die mittels (1.1) und sign $H'(x_1)\,H'(x_n) = (-1)^{n-1}$ in (1.7) übergeht.

Für $x \in (x_1, x_n)$ läßt (1.7) eine interessante geometrische Interpretation zu. Es ist äquivalent damit, daß die Tangente an $H(x)$ im Punkte x die x-Achse zwischen x_1 und x_n schneidet. Die u_i und v_i ergeben sich so als die Berührungspunkte aller Tangenten von x_1 oder x_n aus an $H(x)$.

2. Optimale Punkte für Differentiation

Im Gegensatz zur Gauß-Integration kann die exakte Differentiation von Polynomen nach Abschnitt 1 nicht über den Grad $n-1$ hinaus erreicht werden. Man wird vielmehr versuchen, durch geeignete Wahl der x_i das Restglied über einem Bereich (a, b) zu minimalisieren, relativ zu einer fest gewählten Konkurrenzmenge von Funktionen $f(x)$ und in Abhängigkeit von der für das Restglied benutzten Norm.

Man könnte z.B. im Hinblick auf (1.9) für alle Funktionen mit quadratisch integrablem $f^{(n)}(x)$ und $\int_a^b \left(f^{(n)}(x)\right)^2 dx \leqq 1$ den Ausdruck $\int_a^b R_n^2(x)\, dx$ möglichst klein machen, d.h. die Norm des Integraloperators im L^2 minimalisieren. Wir gehen dieser Problemstellung jedoch nicht weiter nach, sondern betrachten gleichmäßig beschränkte $f^{(n)}(x)$. Dann ist die Größenordnung des Restgliedes nach Satz 1 im wesentlichen durch $|H'(x)|$ gegeben, grob gesprochen gerade dort, wo $|H'(x)|$ groß ist. So erscheint es gerechtfertigt, sich auf Polynome n-ten Grades zu beschränken, also auf den Fall $R_n(x) = c \cdot H'(x)$. Wir messen den Fehler im quadratischen Mittel mit einer Belegung $p(x)$ und erhalten damit als Forderung für die hier verstandene Optimalität:

Die Stützstellen sind so zu wählen, daß

$$\varrho = \int_a^b p(x)\, H'^2(x)\, dx \tag{2.1}$$

minimal wird. Wir nennen dabei $p(x)$ eine Belegung über (a, b) genau dann, wenn $p(x) > 0$ fast überall in (a, b) und $p(x)$ über (a, b) Lebesgue-integrabel ist. Falls $a = -\infty$ oder $b = +\infty$, wird außerdem die Existenz aller Momente

$$\mu_k = \int_a^b p(x)\, x^k\, dx$$

gefordert. Dann existiert ein bezüglich $p(x)$ orthonormiertes System von Polynomen $\varphi_0, \varphi_1(x), \ldots$, für die also

$$\int_a^b p(x)\, \varphi_\nu(x)\, \varphi_\mu(x)\, dx = \delta_{\nu,\mu}. \tag{2.2}$$

In der Entwicklung

$$H'(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, \varphi_\nu(x) \tag{2.3}$$

ist $|a_{n-1}|$ durch den höchsten Koeffizienten von $H'(x) = n\, x^{n-1} + \cdots$ bestimmt und somit unabhängig von den x_i. Aus (2.1), (2.2) und (2.3) folgt

$$\varrho = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^2,$$

also wird ϱ genau dann minimal, wenn

$$H'(x) = c \cdot \varphi_{n-1}(x), \tag{2.4}$$

d.h. *die x_i sind als Nullstellen einer Stammfunktion zu $\varphi_{n-1}(x)$ zu wählen*, wobei noch eine gewisse Willkür in der Integrationskonstanten liegt. Nun kann es aber sein, daß es kein Integral von $\varphi_{n-1}(x)$ mit n einfachen Nullstellen gibt. Dann wird das Minimum von ϱ durch eine Verteilung der x_i erreicht, bei der Stützstellen zusammenfallen, was bei unserem Ansatz nicht vorgesehen war. Es bleibt nichts anderes übrig, als diese Frage bei vorgegebener Belegung jeweils zu untersuchen. Im folgenden betrachten wir das endliche Intervall, wobei ohne Einschränkung $a = -1$, $b = +1$ gesetzt werden kann, mit den Jacobi-Belegungen

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \qquad (\alpha, \beta > -1).$$

Weiter werden wir in Abschnitt 5 die Fälle

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad p(x) = x^\alpha e^{-x} \quad \text{und} \quad a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad p(x) = e^{-x^2}$$

behandeln.

Zunächst stellen wir kurz die benutzten Eigenschaften der Jacobi-Polynome zusammen (SZEGÖ, Kap. 4). Die durch die Rodriguessche Darstellung gegebenen

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \{(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\}^{(n)} \tag{2.5}$$

bilden ein Orthogonalsystem zur Belegung $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ über $(-1, +1)$ mit dem Normierungsintegral

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^2 dx \\ &\qquad = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} & (n=0), \\[2ex] \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+1+\alpha+\beta} \cdot \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & (n \geqq 1). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hier ist aus Integrabilitätsgründen $\alpha > -1$, $\beta > -1$ zu fordern, während (2.5) für beliebiges α und β Polynome liefert, nämlich

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \binom{n+\beta}{\nu} \left(\frac{x-1}{2}\right)^\nu \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-\nu}. \tag{2.7}$$

Daraus erkennt man

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{2.8}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x), \tag{2.9}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}. \tag{2.10}$$

Weiter genügen diese verallgemeinerten $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\,x]\,y' + n(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0. \tag{2.11}$$

Besonders wichtig für unsere Zwecke sind die Relationen

$$(2.12)\qquad \left(P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\right)' = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta-1)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$(2.13)\qquad (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) = -\frac{1}{2n}\left\{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}',$$

weil durch sie die Differentiation und Integration der Jacobi-Polynome mit oder ohne Belegung auf eine Verschiebung um ± 1 in den Parametern α und β zurückgeführt wird. Schließlich notieren wir noch den Hauptkoeffizienten von $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ als

$$(2.14)\qquad a_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

Für $\alpha>-1$, $\beta>-1$ gilt $a_n \neq 0$, für $\alpha+\beta=-2, -3, \ldots$ jedoch kann a_n für kleine n verschwinden.

Nunmehr sind wir in der Lage, (2.4) speziell für die Jacobi-Belegungen zu diskutieren, wobei im folgenden stets $\alpha>-1$, $\beta>-1$ vorauszusetzen ist. Außerdem sei

$$(2.15)\qquad n+\alpha+\beta>1;$$

auf die Behandlung des damit ausgeschlossenen Spezialfalles $n=2$, $\alpha+\beta \leqq -1$ wollen wir im weiteren verzichten.

(2.4) wird bis auf Proportionalitätsfaktoren von (2.12) realisiert, denn wegen (2.15) ist $\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta-1)\neq 0$. Wir wählen $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ als Stammfunktion, wobei diese spezielle Festsetzung im Hinblick auf die Beziehung (2.13) geschieht, die wir im Abschnitt 3 zur Herleitung von Quadraturformeln benutzen werden. Es bleibt zu zeigen, daß $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ wirklich n einfache reelle Nullstellen $x_1<\cdots<x_n$ besitzt. Auch bei dieser Frage leistet (2.13) gute Dienste. $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ hat als Orthogonalpolynom $n-1$ einfache Nullstellen in $(-1,+1)$. Also hat $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ in $[-1,+1]$ $n-1+r$ verschiedene Nullstellen, worin $r=2$ für $\alpha>0$, $\beta>0$, $r=1$ für $\alpha\leqq 0$, $\beta>0$ oder $\alpha>0$, $\beta\leqq 0$ und $r=0$ für $\alpha\leqq 0$, $\beta\leqq 0$. Nach ROLLE ergeben sich so $n-2+r$ verschiedene Nullstellen in $(-1,+1)$ für die linke Seite von (2.13), d.h. für $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$. Damit ist der Fall $\alpha>0$, $\beta>0$, $(r=2)$ schon erledigt. Aus (2.8) folgt weiter

$$P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(1) = \binom{n+\alpha-1}{n} = \frac{\alpha}{n}\binom{n-1+\alpha}{n-1}\begin{cases} =0 & \text{für} \quad \alpha=0,\\ <0 & \text{für} \quad -1<\alpha<0.\end{cases}$$

Mittels (2.12) gilt für $x\geqq 1$

$$(2.16)\qquad \begin{aligned}\left(P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\right)' &= \tfrac{1}{2}(n+\alpha+\beta-1)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\geqq \tfrac{1}{2}(n+\alpha+\beta-1)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1) = \tfrac{1}{2}(n+\alpha+\beta-1)\binom{n-1+\alpha}{n-1},\end{aligned}$$

weil

$$\left(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' = \tfrac{1}{2}(n+\alpha+\beta)\,P_{n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)>0 \quad \text{für} \quad x\geqq 1.$$

Im Falle $-1<\alpha<0$ hat $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ also genau eine Nullstelle $x_n>1$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{-P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(1)}{x_n-1} = \left(P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(\xi)\right)' \qquad (1<\xi<x_n),$$

woraus mit (2.16) die Abschätzung

$$x_n \leqq 1 + \frac{2|\alpha|}{n(n+\alpha+\beta-1)}$$

folgt. Analog erhält man $x_1 = -1$ für $\beta = 0$ und

$$-1 > x_1 > -1 - \frac{2|\beta|}{n(n+\alpha+\beta-1)}$$

für $-1 < \beta < 0$, womit auch die noch fehlenden Nullstellen im Falle $\alpha \leqq 0$ oder $\beta \leqq 0$ außerhalb von $(-1, +1)$ nachgewiesen sind.

Neben der allgemeinen Näherung für alle x interessiert besonders die Differentiation in den Stützstellen selbst. Statt $L'_n(x_k) = \sum_{i=1}^{n} l'_i(x_k)\, f(x_i)$ schreiben wir abkürzend $y'_k = \sum_{i=1}^{n} c_{k,i}\, y_i$, wobei die den x_i zugeordnete Matrix C eine finite Näherung an den Differentialoperator d/dx darstellt, exakt für alle Polynome von höchstens $(n-1)$-tem Grade, ansonsten mit Restgliedern gemäß Satz 1. Zusammenfassend formulieren wir

Satz 2.1. *Für $\alpha, \beta > -1$, $n + \alpha + \beta > 1$ hat das Jacobi-Polynom $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ n einfache Nullstellen $x_1 < \cdots < x_n$ mit*

$$(2.17)\qquad \begin{array}{lll} & x_n = +1, & 1 < x_n < 1 + \dfrac{2|\alpha|}{n(n+\alpha+\beta-1)}, \\ \textit{für} & \alpha = 0, & \alpha < 0, \\ & x_1 = -1, & -1 > x_1 > -1 - \dfrac{2|\beta|}{n(n+\alpha+\beta-1)} \\ \textit{für} & \beta = 0, & \beta < 0 \end{array}$$

und $-1 < x_i < +1$ sonst. Diese sind optimale Punkte für Differentiation bezüglich der Belegung $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ im Sinne von (2.4).

Als finite Ausdrücke für die Differentiation in den Stützstellen erhält man

$$(2.18)\qquad y'_k = \sum_{i=1}^{n} c_{k,i}\, y_i \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

mit den Koeffizienten

$$(2.19)\qquad c_{k,i} = \frac{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_k)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)\,(x_k - x_i)} \qquad (i \neq k),$$

$$(2.20)\qquad c_{i,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-x_i} - \frac{\beta}{1+x_i}\right) \qquad (x_i \neq \pm 1),$$

$$(2.21)\qquad \begin{cases} c_{1,1} = -\dfrac{(n-1)(n+\alpha)}{4} & (x_1 = -1,\ \beta = 0), \\ c_{n,n} = +\dfrac{(n-1)(n+\beta)}{4} & (x_n = +1,\ \alpha = 0). \end{cases}$$

Wegen (2.4) bzw. (2.12) folgt (2.19) sofort aus (1.2). Für die Auswertung von (1.3) benutzen wir die nach (2.11) für $H(x) = c \cdot P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ gültige Differentialgleichung

$$(1-x^2)\, H''(x) + [\beta(1-x) - \alpha(1+x)]\, H'(x) + n(n+\alpha+\beta-1)\, H(x) = 0.$$

Für $x = x_i \neq \pm 1$ folgt daraus (2.20) mittels (1.3) und $H(x_i) = 0$. Für $\alpha = 0$, $x_n = +1$ erhält man

$$(1-x)(1+x)H''(x) + \beta(1-x)H'(x) + n(n+\beta-1)H'(1)(x-1) = O\left((x-1)^2\right)$$

und im Grenzübergang $x \to 1$ nach Division durch $1-x$

$$2H''(1) + [\beta - n(n+\beta-1)]H'(1) = 0,$$

$$c_{n,n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{H''(1)}{H'(1)} = \frac{1}{4}(n^2 + n \cdot \beta - n - \beta) = \frac{(n-1)(n+\beta)}{4}.$$

Den Fall $\beta = 0$, $x_1 = -1$ behandelt man analog.

Eine weitere Charakterisierung der gefundenen Stützstellen gibt

Satz 2.2. *Für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ wird*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<k} (x_k - x_i)^2 \prod_{k=1}^{n} (1-x_k)^\alpha (1+x_k)^\beta \tag{2.22}$$

bei Variation der x_i in $[-1, +1]$ durch die Nullstellen von $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ maximiert (STIELTJES [4]).

Bei beliebiger Verteilung der x_i gilt

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{2}{x_k - x_i} = \frac{H''(x_k)}{H'(x_k)} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{2.23}$$

denn $2H'(x)$ wird als Polynom $(n-1)$-ten Grades über den x_i exakt differenziert, mittels (1.2) und (1.3) also

$$2H''(x_k) = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot l_i'(x_k) H'(x_i) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{2H'(x_k)}{x_k - x_i} + H''(x_k),$$

und daraus folgt (2.23).

Für die Nullstellen von $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ ergibt sich wegen (2.20)

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{2}{x_k - x_i} - \frac{\alpha}{1-x_k} + \frac{\beta}{1+x_k} = 0 \qquad (x_k \neq \pm 1),$$

und das ist $\frac{\partial}{\partial x_k}(\lg \Phi) = 0$. Weiter wird

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\lg \Phi) = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{2}{(x_k - x_i)^2} - \frac{\alpha}{(1-x_k)^2} - \frac{\beta}{(1+x_k)^2} < 0$$

wegen $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, so daß ein Maximum vorliegt. Falls $\alpha = 0$, dann ist $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} > 0$, und $x_n = +1$ maximiert auf Grund der Nebenbedingung $|x_i| \leqq 1$. Für $\beta = 0$ schließt man analog.

Satz 2.2 vermittelt ein recht anschauliches Bild von dem Charakter der für die Differentiation optimalen Stützstellen. Die Maximalität der gewichteten Diskriminante Φ besagt in etwa, daß sich die x_i in den Bereichen, in denen die Belegung groß ist, eng zusammendrängen, im übrigen aber „möglichst verschieden" voneinander bleiben. Das beruht auf dem globalen Charakter von

(2.1); es hätte demgegenüber keinen Sinn, nach optimalen Stellen für die Differentiation in nur einem Punkte zu fragen.

Während $\alpha<0$ oder $\beta<0$ wegen x_n oder x_1 außerhalb von $[-1, +1]$ zumindest bei Anwendungen eine gewisse Ausnahme bilden, ist der Fall $\alpha=\beta=0$, $p(x)\equiv 1$ von besonderem Interesse. $n+\alpha+\beta>1$ ist hier mit $n\geqq 2$ erfüllt; die x_i sind die Nullstellen des integrierten Legendre-Polynoms

$$P_n^{(-1,-1)}(x)=\frac{n-1}{2}\int_{-1}^{x}P_{n-1}(t)\,dt,$$

das der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,y''+n(n-1)\,y=0 \tag{2.24}$$

genügt. Es ist $x_1=-1$, $x_n=+1$ und die übrigen x_i sind gleichzeitig die Wendepunkte dieses Polynoms bzw. die Extremstellen von $P_{n-1}(x)$. Die Diagonalelemente der Matrix C werden besonders einfach; aus (2.20) und (2.21) folgt

$$c_{i,i}=\begin{cases}-\dfrac{n(n-1)}{4} & (i=1),\\ 0 & (i=2,\ldots,n-1),\\ +\dfrac{n(n-1)}{4} & (i=n).\end{cases} \tag{2.25}$$

3. Zusammenhang mit Integration

Die in Abschnitt 2 gefundenen optimalen Punkte für Differentiation liefern, wie jetzt gezeigt werden soll, gleichzeitig besonders gute Interpolationsquadraturen. Der enge Zusammenhang dieser Integrationsformeln mit der durch Satz 2.1 gegebenen finiten Differentiation wird sich als charakteristisch für die Jacobi-Belegungen erweisen. Im Hinblick auf diesen Einzigartigkeitsnachweis und auf analoge Anwendungen in Abschnitt 5 werden die folgenden Hilfssätze zunächst allgemein formuliert. Als neue Bezeichnungen benötigen wir noch $q_k(x)$, $r_k(x)$, $h_k(x)$ für Polynome von höchstens k-tem Grade. Dabei ist formal $q_{-1}(x)\equiv 0$ zu setzen.

Hilfssatz 3.1. *Bei fest gewählten x_i und $m\geqq -1$ gilt die Quadraturformel*

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}A_i\,f(x_i)\quad \textit{für alle}\quad f(x)=h_{n+m}(x) \tag{3.1}$$

genau dann, wenn

$$A_i=\int_a^b p(x)\,l_i(x)\,dx \tag{3.2}$$

und

$$\int_a^b p(x)\,H(x)\,q_m(x)\,dx=0\quad \textit{für alle}\quad q_m(x). \tag{3.3}$$

Wird (3.1) vorausgesetzt, dann folgt (3.2) mit $f(x)=l_i(x)$ und (3.3) mit $f(x)=H(x)\,q_m(x)$ wegen $l_i(x_j)=\delta_{i,j}$ und $H(x_i)=0$. Umgekehrt läßt sich jedes $f(x)=h_{n+m}(x)$ zerlegen in

$$f(x)=H(x)\,q_m(x)+r_{n-1}(x)$$

mit $r_{n-1}(x_i) = f(x_i)$, also

$$f(x) = H(x)\, q_m(x) + \sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, f(x_i).$$

Mittels (3.2) und (3.3) folgt daraus bei gliedweiser Integration (3.1).

Die Orthogonalität (3.3) liefert mit $m = n-1$ genau $H(x) = c\cdot\varphi_n(x)$, und man erhält die Gauß-Integration zur Belegung $p(x)$ über (a, b).

Hilfssatz 3.2. *Für* $s \geqq 0$, $k \geqq -1$ *ist*

$$\psi_{s,k}(x) = \int_a^b p(t)\, \frac{\varphi_s(x)\,\varphi_{s+1+k}(t) - \varphi_s(t)\,\varphi_{s+1+k}(x)}{t-x}\, dt \tag{3.4}$$

ein Polynom in x genau vom Grade k.

Nach (3.4) ist $\psi_{s,-1} \equiv 0$. Für $k = 0$ folgt nach der Formel von CHRISTOFFEL-DARBOUX

$$\psi_{s,0}(x) = \int_a^b p(t) \sum_{\sigma=0}^{s} c_\sigma\, \varphi_\sigma(t)\, \varphi_\sigma(x)\, dt = c_0 \neq 0 \tag{3.5}$$

wegen

$$\int_a^b p(t)\, \varphi_\sigma(t)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b p(t)\, \varphi_0^2(t)\, dt = 1.$$

Weiter genügen die $\varphi_\nu(x)$ einer Rekursion

$$\varphi_{\nu+1}(x) = (u_\nu x - v_\nu)\, \varphi_\nu(x) - w_\nu\, \varphi_{\nu-1}(x) \qquad (u_\nu \neq 0,\ \varphi_{-1}(x) \equiv 0),$$

die wir für $k \geqq 1$ in (3.4) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\psi_{s,k}(x) &= \int_a^b \frac{p(t)}{t-x} \{\varphi_s(x)\, [(u_{s+k}\cdot t - v_{s+k})\, \varphi_{s+k}(t) - w_{s+k}\varphi_{s+k-1}(t)] - \\
&\quad - \varphi_s(t)\, [(u_{s+k}\cdot x - v_{s+k})\, \varphi_{s+k}(x) - w_{s+k}\, \varphi_{s+k-1}(x)]\}\, dt \\
&= (u_{s+k}\cdot x - v_{s+k}) \int_a^b \frac{p(t)}{t-x} \{\varphi_s(x)\, \varphi_{s+k}(t) - \varphi_s(t)\, \varphi_{s+k}(x)\}\, dt + \\
&\quad + u_{s+k} \int_a^b p(t)\, \varphi_s(x)\, \varphi_{s+k}(t)\, dt - \\
&\quad - w_{s+k} \int_a^b \frac{p(t)}{t-x} \{\varphi_s(x)\, \varphi_{s+k-1}(t) - \varphi_s(t)\, \varphi_{s+k-1}(x)\}\, dt;
\end{aligned}$$

wegen

$$\int_a^b p(t)\, \varphi_{s+k}(t)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad k \geqq 1$$

ergibt sich also

$$\psi_{s,k}(x) = (u_{s+k}\cdot x - v_{s+k})\, \psi_{s,k-1}(x) - w_{s+k}\, \psi_{s,k-2}(x) \qquad (u_{s+k} \neq 0),$$

und mittels $\psi_{s,-1}(x) \equiv 0$ und (3.5) folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 3.3. *Es sei* $H'(x) = c\cdot\varphi_{n-1}(x)$. *Dann ist*

$$\int_a^b p(x)\, H(x)\, q_{n-3}(x)\, dx = 0 \quad \textit{für alle} \quad q_{n-3}(x) \tag{3.6}$$

äquivalent mit der Darstellbarkeit der Gewichte als

$$A_i = \frac{\gamma}{\varphi_{n-1}^2(x_i)} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.7}$$

Nach (3.2) ist

$$A_i = \int_a^b p(t)\, l_i(t)\, dt = \int_a^b p(t) \frac{H(t)}{H'(x_i)(t-x_i)}\, dt$$
$$= \frac{1}{H'^2(x_i)} \int_a^b p(t) \frac{H(t)\,H'(x_i) - H(x_i)\,H'(t)}{t-x_i}\, dt$$

wegen $H(x_i) = 0$. Mit $H'(x) = c \cdot \varphi_{n-1}(x)$ erhält man

$$A_i = \frac{1}{c\,\varphi_{n-1}^2(x_i)} \cdot \psi(x_i), \quad \text{worin} \quad \psi(x) = \int_a^b p(t) \frac{H(t)\,\varphi_{n-1}(x) - H(x)\,\varphi_{n-1}(t)}{t-x}\, dt \tag{3.8}$$

Die Beziehung (3.6) ist äquivalent mit der Darstellbarkeit

$$H(x) = c_n\,\varphi_n(x) + c_{n-1}\,\varphi_{n-1}(x) + c_{n-2}\,\varphi_{n-2}(x),$$

woraus man $\psi(x)$ nach Hilfssatz 3.2 als Konstante berechnet:

$$\psi(x) = c_n\,\psi_{n-1,0} - c_{n-2}\,\psi_{n-2,0} = A.$$

Aus (3.8) folgt so (3.7) mit $\gamma = A/c$.

Setzt man umgekehrt $H(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\,\varphi_\nu(x)$, dann wird

$$\psi(x) = A - \sum_{\nu=0}^{n-3} c_\nu\,\psi_{\nu,n-2-\nu}(x)$$

ein Polynom höchstens $(n-2)$-ten Grades. Aus (3.7) und (3.8) folgt aber an n Stellen $\psi(x_i) = c \cdot \gamma$, also $\psi(x) \equiv c \cdot \gamma$. Nach Hilfssatz 3.2 sind die $\psi_{\nu,n-2-\nu}(x)$ genau vom Grade $n-2-\nu$ und somit linear unabhängig, also gilt $c_\nu = 0$ für $\nu < n-2$ und damit (3.6).

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen zeigen wir jetzt speziell für die Jacobi-Belegungen

Hilfssatz 3.4. *Mit* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *gilt für alle* $q_{n-3}(x)$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\, q_{n-3}(x)\, dx = 0. \tag{3.9}$$

Mit $\delta > 0$ liefert (2.13) die partielle Integration

$$\int_{-1+\delta}^{+1-\delta} (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1} P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\,(1-x^2)\, q_{n-3}(x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{2n} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,(1-x^2)\, q_{n-3}(x)\Big|_{-1+\delta}^{+1-\delta} +$$
$$+ \frac{1}{2n} \int_{-1+\delta}^{+1-\delta} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,\left[(1-x^2)\, q_{n-3}(x)\right]'\, dx.$$

Im Grenzübergang $\delta\to 0$ verschwindet das letzte Integral, weil $[(1-x^2)q_{n-3}(x)]'$ als Polynom höchstens $(n-2)$-ten Grades orthogonal zu $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ ist. Der ausintegrierte Teil enthält den Faktor $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ und verschwindet wegen $\alpha,\beta>-1$ in den Randpunkten $-1,+1$. Für $\alpha,\beta>0$ kommt man übrigens schneller zum Ziel, denn $(1-x^2)\,q_{n-3}(x)$ ist höchstens vom Grade $n-1$, also orthogonal zu $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ bezüglich der Belegung $(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}$.

Als erstes Hauptresultat dieses Abschnitts erhalten wir nunmehr

Satz 3.1. *$x_1<\cdots<x_n$ bezeichne die Nullstellen von $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ mit $\alpha,\beta>-1$, $n+\alpha+\beta>1$. Dann gilt für $(2n-2)$-fach stetig differenzierbares $f(x)$ die Quadraturformel*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}A_i\,f(x_i)+R_n(f) \tag{3.10}$$

mit den Gewichten

$$A_i=\frac{\gamma(\alpha,\beta)}{(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i))^2}, \tag{3.11}$$

worin

$$\gamma(\alpha,\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{(n+\alpha+\beta-1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta)}. \tag{3.12}$$

Das Restglied

$$R_n(f)=\int_{-1}^{+1}\frac{f^{(2n-2)}(\xi(x))}{(2n-2)!}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(x-x_1)(x-x_n)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}(x-x_i)^2\,dx \tag{3.13}$$

hat für $\alpha\leqq 0$, $\beta\leqq 0$ oder für Polynome vom Grade $2n-2$ die Form

$$R_n(f)=-\frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta-1)\,\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta)}\cdot\frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!}. \tag{3.14}$$

Das durch

$$h(x_1)=f(x_1),\qquad h(x_n)=f(x_n),$$
$$h(x_i)=f(x_i),\qquad h'(x_i)=f'(x_i)\qquad (i=2,\ldots,n-1)$$

festgelegte Hermitesche Interpolationspolynom von höchstens $(2n-3)$-tem Grade genügt der Restgliedformel

$$f(x)=h(x)+\frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!}\,\Omega(x) \tag{3.15}$$

mit

$$\Omega(x)=(x-x_1)(x-x_n)\prod_{i=2}^{n-1}(x-x_i)^2.$$

Nach Hilfssatz 3.4 kann in Hilfssatz 3.1 $m=n-3$ gesetzt werden; Integration von (3.15) liefert so (3.10) mit (3.13), und die in (3.11) genannte Form der Gewichte folgt aus Hilfssatz 3.3. Wenn $\alpha\leqq 0$ und $\beta\leqq 0$, dann ist nach Satz 2.1 $x_1\leqq -1$ und $x_n\geqq +1$, und $\Omega(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ hat in $(-1,+1)$ einheitlich negatives Vorzeichen, so daß man $f^{(2n-2)}(\xi)$ vor das Integral ziehen kann. Das ist ansonsten immer möglich, wenn $f(x)$ ein Polynom vom Grade $2n-2$, also $f^{(2n-2)}(x)$ eine Konstante ist. Man berechnet mittels partieller Integration (wie beim Beweise von Hilfssatz 3.4)

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\Omega(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{a_n^{(\alpha-1,\beta-1)}}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\,(1-x^2)\,(x^{n-2}+\cdots)\,dx$$

$$=\frac{1}{2n\,a_n^{(\alpha-1,\beta-1)}}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,(-n\,x^{n-1}+\cdots)\,dx$$

$$=\frac{-1}{2a_n^{(\alpha-1,\beta-1)}\,a_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\big(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\big)^2dx,$$

denn die übrigen Anteile von $n\,x^{n-1}+\cdots$ sind orthogonal zu $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$. Aus (2.6) und (2.14) berechnet man schließlich (3.14). Zur Bestimmung von $\gamma(\alpha,\beta)$ setzen wir in (3.10) $f(x)=\big(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\big)^2$ und bekommen

$$\frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!}\equiv\big(a_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\big)^2,\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\big(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\big)^2dx=n\cdot\gamma(\alpha,\beta)+R_n(f);$$

mittels (2.6) und (3.14) erhält man daraus nach einiger Rechnung (3.12).

Das Restglied (3.14) unterscheidet sich vom Restglied der Gauß-Integration über den $n-1$ Nullstellen von $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ um den Faktor $-\frac{n}{n+\alpha+\beta-1}$, also insbesondere im Vorzeichen. Damit ist, falls $f^{(2n-2)}(x)$ nicht das Vorzeichen wechselt, durch Anwendung beider Quadraturen eine Einschließung des Integralwertes möglich.

Der wichtige Spezialfall $\alpha=\beta=0$[1] zeichnet sich dadurch aus, daß einerseits (3.14) gilt und andererseits die x_i in $[-1,+1]$ liegen. Nach (2.24) sind es die Nullstellen von $(1-x^2)\,P'_{n-1}(x)$, und die Gewichte sind

$$A_i=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{P_{n-1}^2(x_i)}\,. \tag{3.16}$$

Hiermit ist übrigens auch die Lösung des folgenden Problems gegeben:

Gesucht sind Punkte $x_2,\ldots,x_{n-1}$ und Gewichte $a_1,\ldots,a_n$, so daß mit fest gewähltem $x_1=-1$, $x_n=+1$ die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}a_i\,f(x_i) \tag{3.17}$$

für Polynome möglichst hohen Grades gilt.

Die Lösung nach Satz 3.1 ist exakt bis zum Grade $2n-3$. Daß sich nicht mehr erreichen läßt, daß also Polynome $(2n-2)$-ten Grades (3.17) nicht immer erfüllen, zeigt folgende Überlegung: Angenommen, man hätte die a_i und $x_2,\ldots,x_{n-1}$ gewählt; dann gilt (3.17) nicht für $H(x)H''(x)$, denn

$$\sum_{i=1}^{n}a_iH(x_i)\,H''(x_i)=0,$$

[1] Als Lobattoquadratur bekannt (Zus. b. d. Korr.).

aber mittels partieller Integration folgt wegen $H(-1)=H(+1)=0$

$$\int_{-1}^{+1} H(x)\,H''(x)\,dx = -\int_{-1}^{+1} H'^2(x)\,dx \neq 0.$$

Für $n=2$ erhält man die Trapezregel, für $n=3$ die Simpson-Integration, so daß man Satz 3.1 auch als Verallgemeinerung dieser Spezialfälle interpretieren kann. Für $n=4$ z.B. liefern die Punkte -1, $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $+\frac{1}{\sqrt{5}}$, $+1$ mit den Gewichten $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$ eine für Polynome höchstens 5. Grades exakte Integration mit dem Restglied $-\frac{2}{23625} f^{(6)}(\xi)$.

Um nun den Zusammenhang zwischen optimaler Differentiation und Integration über den gleichen Stützstellen näher zu beschreiben, führen wir die Diagonalmatrix D mit den Diagonalelementen

$$d_i = \frac{\sqrt{\gamma(\alpha,\beta)}}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_i)} \tag{3.18}$$

ein. Damit erhält man für die in Satz 2.1 gegebene Differentiationsmatrix C die Darstellung

$$C = D^{-1} B D, \tag{3.19}$$

worin die durch

$$b_{k,i} = \frac{1}{x_k - x_i} \quad (i \neq k), \tag{3.20}$$

$$b_{i,i} = c_{i,i} \tag{3.21}$$

beschriebene Matrix B nur noch die für finite Differentiation charakteristischen Reziprokwerte von Argumentdifferenzen sowie in der Diagonalen gewisse von der Belegung abhängige „Randteile" enthält. Letzteres wird am Spezialfall (2.25) besonders deutlich.

Ein Vergleich von (2.19) und (3.20) zeigt, daß die Ähnlichkeitstransformation (3.19) bei beliebiger Verteilung der x_i möglich ist, wobei die $d_i = c/H'(x_i)$ bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt sind. Die eigentliche Besonderheit der optimalen x_i aus Satz 2.1 liegt darin, daß die Gewichte der zugeordneten Interpolationsquadraturen — bei geeignetem Faktor in (3.18) — gerade durch

$$d_i^2 = A_i \tag{3.22}$$

gegeben sind. Hilfssatz 3.3 und Hilfssatz 3.1 zeigen ferner — optimale Differentiation vorausgesetzt — die Äquivalenz von (3.22) mit der Genauigkeit bis zum Grade $2n-3$ in den Quadraturformeln von Satz 3.1. Bei den Jacobi-Belegungen gilt (3.22) für alle n mit $n+\alpha+\beta>1$. Wenn wir jetzt fragen, für welche Belegungen dieser enge Zusammenhang von optimaler Differentiation und zugeordneter Interpolationsquadratur überhaupt möglich ist, dann genügt es natürlich nicht, nur ein festes n zu betrachten. Wir setzen für alle hinreichend großen n Punkte optimaler Differentiation und die zu (3.22) äquivalente Beziehung (3.6) voraus. Als endliches Intervall kann ohne wesentliche Einschränkung $(-1, +1)$ gewählt werden. Damit erhalten wir als Charakterisierung der Jacobi-Belegungen

Satz 3.2. *$p(x)$ sei eine Belegung über $(-1, +1)$. Für alle $n \geqq n_0$ gelte über den durch $H'_n(x) = c_n \varphi_{n-1}(x)$ gekennzeichneten Punkten optimaler Differentiation*

$$(3.23) \qquad \int_{-1}^{+1} p(x) H_n(x)\, q_{n-3}(x)\, dx = 0 \quad \textit{für alle} \quad q_{n-3}(x).$$

Dann ist fast überall $p(x) = c \cdot (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$.

Zum Beweise setzen wir für $x \notin (-1, +1)$ formal $p(x) \equiv 0$ und betrachten für ein festes $k \geqq n_0$, $k \geqq 1$ die Funktion

$$(3.24) \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, \varphi_k(t)\, dt.$$

Wegen $\int_{-1}^{+1} p(t)\, \varphi_k(t)\, dt = 0$ ist $g(x) = 0$ für $|x| \geqq 1$, $g(x)$ ist absolut stetig, und fast überall existiert $g'(x) = p(x)\, \varphi_k(x)$. Für $n \geqq k+3$ kann in (3.23) $q_{n-3}(x) = \varphi_k(x)$ gewählt werden, und mittels partieller Integration folgt wegen $H'_n(x) = c_n\, \varphi_{n-1}(x)$

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = -\frac{1}{c_{\nu+1}} \int_{-1}^{+1} p(x)\, \varphi_k(x)\, H_{\nu+1}(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq k+2.$$

Daraus ergibt sich

$$(3.25) \qquad g(x) = p(x) \sum_{i=0}^{k+1} a_i\, \varphi_i(x) = p(x)\, w_{k+1}(x)$$

fast überall mit $a_i = \int_{-1}^{+1} g(x)\, \varphi_i(x)\, dx$, denn die Lebesgue-integrable Funktion $g_0(x) = g(x) - p(x) \sum_{i=0}^{k+1} a_i\, \varphi_i(x)$ erfüllt wegen

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\, \varphi_\nu(x)\, \varphi_i(x)\, dx = \delta_{\nu,i} \quad \int_{-1}^{+1} g_0(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = 0$$

für alle ν, also auch $\int_{-1}^{+1} g_0(x)\, x^\nu dx = 0$ für alle ν, woraus $g_0(x) = 0$ fast überall folgt.

Wir können im weiteren annehmen, daß (3.25) für alle x gilt, indem wir $p(x)$ gegebenenfalls auf einer Menge vom Maß 0 abändern, wobei alle Belegungseigenschaften erhalten bleiben. Für $w_{k+1}(x) \neq 0$ ist dann $p(x) = \frac{g(x)}{w_{k+1}(x)}$ stetig, $g(x)$ differenzierbar wegen (3.24) und somit auch $p(x)$ differenzierbar. Differentiation von (3.24) und (3.25) ergibt

$$(3.26) \qquad p(x)\, \varphi_k(x) = \big(p(x)\, w_{k+1}(x)\big)',$$

also die Differentialgleichung

$$(3.27) \qquad p'(x) = \frac{\varphi_k(x) - w'_{k+1}(x)}{w_{k+1}(x)} \cdot p(x) \qquad \big(w_{k+1}(x) \neq 0\big).$$

Abgesehen von den Nullstellen des Polynoms $w_{k+1}(x)$ hat (3.27) analytische Lösungen. Da einerseits $p(x) \equiv 0$ für $|x| \geqq 1$, andererseits aber $p(x) > 0$ fast überall in $(-1, +1)$ gilt, muß $w_{k+1}(x)$ die Nullstellen -1 und $+1$ besitzen, d.h. $w_{k+1}(x) = (1-x^2)\, u_{k-1}(x)$. Setzt man dies in (3.26) ein, dann folgt mittels partieller

Integration für beliebige Polynome $q_{k-2}(x)=Q'_{k-1}(x)$

$$\int_{-1}^{+1} p(x)(1-x^2)u_{k-1}(x)q_{k-2}(x)\,dx=-\int_{-1}^{+1} p(x)\varphi_k(x)Q_{k-1}(x)\,dx=0.$$

$u_{k-1}(x)$ ist demnach $(k-1)$-tes Orthogonalpolynom zur Belegung $p(x)(1-x^2)$ und hat $k-1$ einfache Nullstellen $\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}$ in $(-1,+1)$. Damit erhält man in (3.27) eine Partialbruchzerlegung

$$p'(x)=\left\{\frac{-\alpha}{1-x}+\frac{\beta}{1+x}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\gamma_i}{x-\xi_i}\right\}p(x)$$

und als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$p(x)=c\cdot(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\prod_{i=1}^{k-1}|x-\xi_i|^{\gamma_i}. \tag{3.28}$$

Nun lassen sich aber alle Überlegungen für $k+1$ wiederholen. Dann ergibt sich das Orthogonalpolynom $u_k(x)$ zur Belegung $p(x)(1-x^2)$ mit k einfachen Nullstellen $\eta_1,\ldots,\eta_k$, verschieden von den ξ_i, denn die Nullstellen benachbarter Orthogonalpolynome trennen einander. Die resultierende Lösung

$$p(x)=c'\cdot(1-x)^{\alpha'}(1+x)^{\beta'}\prod_{i=1}^{k}|x-\eta_i|^{\gamma'_i}$$

ist mit (3.28) nur vereinbar, wenn die γ_i verschwinden, womit Satz 3.2 bewiesen ist.

4. Konvergenz

Unsere bisherigen Überlegungen bei festem n bezogen sich auf Polynome bzw. hinreichend oft differenzierbare Funktionen $f(x)$. Bei Konvergenzuntersuchungen für $n\to\infty$ ist es jedoch wünschenswert, mit wesentlich schwächeren Voraussetzungen über $f(x)$ auszukommen. Das durch Satz 3.1 gegebene Quadraturverfahren konvergiert für jede stetige Funktion, weil gemäß (3.11) alle Gewichte positiv sind (STEKLOFF [3]). Bei der Lagrange-Interpolation ist die Stetigkeit bekanntlich nicht hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz, wohl aber für die Konvergenz im quadratischen Mittel mit dem Gewicht $p(x)$, wenn man als Interpolationsknoten die Nullstellen der zu $p(x)$ gehörigen $\varphi_n(x)$ wählt. In Analogie dazu erhalten wir speziell für die im Satz 2.1 genannten Punkte optimaler Differentiation

Satz 4.1. *$L_n(x)$ interpoliere $f(x)$ in den Nullstellen x_i von $P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$ bei festem $\alpha,\beta>-1$. Dann gilt für stetig differenzierbares $f(x)$*

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\big(f'(x)-L'_n(x)\big)^2dx\to 0\qquad(n\to\infty). \tag{4.1}$$

Der Beweis dieses Satzes ist sehr verwickelt; wir stellen zunächst die wichtigsten Bezeichnungen zusammen, zeigen dann mehrere vorbereitende Hilfssätze und geben schließlich den zusammenfassenden Beweis. Für $n\geqq n_0(\delta)$ liegen gemäß (2.17) alle x_i in $(-1-\delta,+1+\delta)$, wobei $\delta>0$ fest gewählt wird. $q_{n-2}(x)$ sei das Polynom bester Approximation an $f'(x)$ in $[-1-\delta,+1+\delta]$ im Tschebyscheffschen Sinne mit der Abweichung $\varphi(x)=f'(x)-q_{n-2}(x)$. Für stetiges $f'(x)$

gilt dann

$$\max_{|x|\leq 1+\delta} |\varphi(t)| = E_{n-2} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4.2}$$

Mittels

$$Q_{n-1}(x) = \int_0^x q_{n-2}(t)\,dt$$

bilden wir die Funktion

$$\begin{cases} \Phi(z, x) = \dfrac{(f(x) - Q_{n-1}(x)) - (f(z) - Q_{n-1}(z))}{x - z} = \dfrac{\int_z^x \varphi(t)\,dt}{x - z} \qquad (x \neq z), \\ \Phi(z, z) = \varphi(z). \end{cases} \tag{4.3}$$

Neben den x_i mit den zugehörigen $l_i(x)$ benötigen wir weiter die Nullstellen z_k von $H'(x)$, d.h. von $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ mit

$$x_k < z_k < x_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{4.4}$$

Über den z_k hat man die Gauß-Integration zur Belegung $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ mit Gewichten $a_k > 0$, exakt für Polynome bis zum Grade $2n-3$.

Hilfssatz 4.1. *Für* $x_k < z < x_{k+1}$, $i \geqq k+1$ *gilt*

$$\left|\sum_{j=i}^{n} l_j(z)\right| \leqq |l_i(z)|. \tag{4.5}$$

Für $i = n$ ist (4.5) richtig; für $i < n$ ist

$$g_{i+1}(x) = \sum_{j=i+1}^{n} l_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = x_j, \quad j \geqq i+1, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_j, \quad j \leqq i. \end{cases}$$

$g'_{i+1}(x)$ ist ein Polynom $(n-2)$-ten Grades und hat nach Rolle seine $n-2$ Nullstellen in den Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ mit $1 \leqq \nu \leqq i-1$, $i+1 \leqq \nu \leqq n-1$. Deshalb gilt $g'_{i+1}(x) \neq 0$ für $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$, wegen $g_{i+1}(x_{i+1}) = 1$, $g_{i+1}(x_i) = 0$ also $g'_{i+1}(x_i) > 0$ und $\operatorname{sign} g'_{i+1}(x_\nu) = (-1)^{i-\nu}$ für $\nu \leqq i$. Damit folgt $\operatorname{sign} g_{i+1}(z) = (-1)^{i-k}$ und ebenso $\operatorname{sign} g_i(z) = (-1)^{i-1-k}$, wegen $g_i(z) = g_{i+1}(z) + l_i(z)$ also $|g_i(z)| \leqq |l_i(z)|$.

Hilfssatz 4.2. *Für* $z, x, u, v \in [-1-\delta, +1+\delta]$, $z < u < v$ *gilt*

$$|\Phi(z, x)| \leqq E_{n-2}, \tag{4.6}$$

$$|\Phi(z, v) - \Phi(z, u)| \leqq 2 \cdot \frac{v-u}{v-z} E_{n-2}. \tag{4.7}$$

(4.6) folgt unmittelbar aus (4.3) und (4.2) wegen

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \leqq |b - a| \cdot E_{n-2}.$$

Weiter ist

$$|\Phi(z, v) - \Phi(z, u)| = \frac{\left|(u-z)\int_z^v \varphi(t)\,dt - (v-z)\int_z^u \varphi(t)\,dt\right|}{(u-z)(v-z)}$$

$$\leqq \frac{\left|(u-z)\int_u^v \varphi(t)\,dt\right| + \left|(v-u)\int_z^u \varphi(t)\,dt\right|}{(u-z)(v-z)} \leqq 2 \cdot \frac{v-u}{v-z} E_{n-2}.$$

Hilfssatz 4.3. *Mit einer von n und k unabhängigen Konstanten gilt*

$$\sum_{i=k+2}^{n}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i-z_k}\right)^2<c_1(\alpha,\beta). \tag{4.8}$$

Wegen (4.4) und der Monotonie von $\frac{v-u}{v-z}$ bezüglich v ist

$$\sum_{i=k+2}^{n}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i-z_k}\right)^2\leqq\sum_{i=k+2}^{n}\left(\frac{x_i-z_{i-2}}{x_i-x_k}\right)^2\leqq 1+\sum_{i=k+2}^{n-1}\left(\frac{z_i-z_{i-2}}{z_i-z_k}\right)^2.$$

Wären die z_i äquidistant, dann erhielte man im wesentlichen eine Abschätzung durch die konvergente Reihe $\sum 1/m^2$. Statt dessen hat man asymptotisch eine trigonometrische Gleichverteilung der Nullstellen der Jacobi-Polynome $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$:

Mit $z_k=\cos\vartheta_k$ $(\pi>\vartheta_1>\cdots>\vartheta_{n-1}>0)$ *gilt*

$$\vartheta_k=\frac{\pi}{n-1}(n-k+\Theta\cdot K), \tag{4.9}$$

worin $|\Theta|\leqq 1$ *und* $K=K(\alpha,\beta)$ *unabhängig von n und k ist* (SZEGÖ, p. 236).

Die elementare Abschätzung

$$\frac{\cos u-\cos v}{\cos u-\cos w}\leqq\pi\cdot\frac{v-u}{w-u}\qquad(0<u<v\leqq w<\pi)$$

ermöglicht den Übergang von den z_i zu den ϑ_i, und mittels (4.9) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+2}^{n-1}\left(\frac{z_i-z_{i-2}}{z_i-z_k}\right)^2&\leqq\pi^2\sum_{i=k+2}^{n-1}\left(\frac{\vartheta_{i-2}-\vartheta_i}{\vartheta_k-\vartheta_i}\right)^2\leqq\pi^2\sum_{i=k+2}^{n-1}\left(\frac{\vartheta_{i-2}-\frac{\pi}{n-1}(n-i-K)}{\vartheta_k-\frac{\pi}{n-1}(n-i-K)}\right)^2\\&\leqq\pi^2\sum_{i=k+2}^{n-1}\left(\frac{(n-i+2+K)-(n-i-K)}{(n-k-K)-(n-i-K)}\right)^2\\&\leqq\pi^2\sum_{i=k+2}^{\infty}\left(\frac{2K+2}{i-k}\right)^2=c_2(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

womit (4.8) bewiesen ist.

Eine erste Zusammenfassung gibt

Hilfssatz 4.4. *Für* $n\geqq n_0(\delta)$ *und alle* k *gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}l_i(z_k)\,\Phi(z_k,x_i)\right)^2\leqq c_3(\alpha,\beta)\,E_{n-2}^2\sum_{i=1}^{n}l_i^2(z_k). \tag{4.10}$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung würde man mittels (4.6) statt einer Konstanten c_3 den Faktor n erhalten. Nun sind aber die $l_i(z_k)$ bezüglich i von alternierendem Vorzeichen, und nach (4.7) schwankt $\Phi(z_k,x)$ bezüglich x nicht zu stark. Beginnend mit der Aufspaltung

$$\left(\sum_{i=1}^{n}l_i(z_k)\,\Phi(z_k,x_i)\right)^2\leqq 2\left\{\left(\sum_{i\leqq k}\right)^2+\left(\sum_{i\geqq k+1}\right)^2\right\} \tag{4.11}$$

wenden wir z.B. auf die zweite Summe partielle Summation an und erhalten die Abschätzung

$$\left(\sum_{i=k+1}^{n} l_i(z_k)\,\Phi(z_k, x_i)\right)^2 \leqq \left\{\left|\sum_{j=k+1}^{n} l_j(z_k)\right| \cdot |\Phi(z_k, x_{k+1})| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=k+2}^{n} \left|\sum_{j=i}^{n} l_j(z_k)\right| \cdot |\Phi(z_k, x_i) - \Phi(z_k, x_{i-1})|\right\}^2$$

$$\leqq \left\{|l_{k+1}(z_k)| \cdot E_{n-2} + \sum_{i=k+2}^{n} |l_i(z_k)| \cdot 2\,\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - z_k} \cdot E_{n-2}\right\}^2$$

(nach Hilfssatz 4.1 und 4.2)

$$\leqq 4 \cdot E_{n-2}^2 \left\{\frac{1}{4} + \sum_{i=k+2}^{n} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - z_k}\right)^2\right\} \sum_{i=k+1}^{n} l_i^2(z_k)$$

(Schwarzsche Ungleichung)

$$\leqq c_4(\alpha, \beta)\, E_{n-2}^2 \sum_{i=k+1}^{n} l_i^2(z_k)$$

(nach Hilfssatz 4.3).

Wir haben die vorangehenden Hilfssätze speziell für diese Abschätzung formuliert; die Behandlung der ersten Summe in (4.11) ist aber in analoger Weise möglich, und damit folgt (4.10).

Hilfssatz 4.5. *Die Gauß-Integration über den z_k liefert*

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{i=1}^{n} l_i^2(z_k) < \mu_0(\alpha, \beta) = \int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta\, dx. \tag{4.12}$$

$h(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2(x)$ ist ein Polynom $(2n-2)$-ten Grades mit

$$\frac{h^{(2n-2)}(x)}{(2n-2)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{H'^2(x_i)} > 0.$$

Deshalb ergibt die Gauß-Integration ein positives Restglied, die Quadratur über den x_i nach Satz 3.1 gemäß (3.14) dagegen ein negatives Restglied. Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, h(z_k) < \int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta\, h(x)\, dx < \sum_{i=1}^{n} A_i\, h(x_i) = \int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta\, dx$$

wegen $h(x_i) = 1$ für alle i.

Nunmehr kommen wir zum Beweis von Satz 4.1. Da $Q_{n-1}(x)$ über den x_i exakt differenziert wird, gilt

$$\begin{aligned}(f'(x) - L_n'(x))^2 &= \left\{f'(x) - Q_{n-1}'(x) - \sum_{i=1}^{n} l_i'(x)\,\big(f(x_i) - Q_{n-1}(x_i)\big)\right\}^2 \\ &\leqq 2E_{n-2}^2 + 2\left\{\sum_{i=1}^{n} l_i'(x)\,\big(f(x_i) - Q_{n-1}(x_i)\big)\right\}^2.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dieser Ausdruck wird als Polynom von höchstens $(2n-4)$-tem Grade über den z_k exakt integriert, also

$$\begin{aligned}(4.14)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left(f'(x)-L_n'(x)\right)^2dx \leqq 2E_{n-2}^2\cdot\mu_0(\alpha,\beta)+\\ +2\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left\{\sum_{i=1}^{n}l_i'(z_k)\left(f(x_i)-Q_{n-1}(x_i)\right)\right\}^2.\end{aligned}$$

Aus (1.1) folgt wegen $H'(z_k)=0$ die Beziehung

$$l_i'(z_k)=\frac{l_i(z_k)}{x_i-z_k};$$

mittels (1.6) und der Definition (4.3) erhält man

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{i=1}^{n}l_i'(z_k)\left(f(x_i)-Q_{n-1}(x_i)\right)\right\}^2\\ (4.15)\qquad &=\left\{\sum_{i=1}^{n}l_i'(z_k)\left[\left(f(x_i)-Q_{n-1}(x_i)\right)-\left(f(z_k)-Q_{n-1}(z_k)\right)\right]\right\}^2\\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}l_i(z_k)\,\Phi(z_k,x_i)\right)^2\leqq c_3(\alpha,\beta)\,E_{n-2}^2\sum_{i=1}^{n}l_i^2(z_k)\end{aligned}$$

nach Hilfssatz 4.4. Setzen wir dieses in (4.14) ein, dann folgt mittels Hilfssatz 4.5 abschließend

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left(f'(x)-L_n'(x)\right)^2dx\leqq c_5(\alpha,\beta)\,E_{n-2}^2$$

und daraus die behauptete Konvergenz (4.1) wegen (4.2) bei stetigem $f'(x)$.

Rückblickend bemerken wir, daß die speziellen Eigenschaften der x_i nur in den Hilfssätzen 4.3 und 4.5 benutzt wurden, während die übrigen Überlegungen allgemeiner gelten.

Bei der Frage nach gleichmäßiger Konvergenz wollen wir uns auf den Spezialfall $\alpha=\beta=0$ beschränken. Dann sind die x_i die Nullstellen von $P_n^{(-1,-1)}(x)$ und die z_k die Nullstellen des Legendre-Polynoms $P_{n-1}(x)$. Statt des Hilfssatzes 4.5 ist hier eine gleichmäßige Abschätzung von $h(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i^2(x)$ für $|x|\leqq 1$ nötig. Wegen $h(x_j)=1$ und

$$h'(x_j)=\sum_{i=1}^{n}2\cdot l_i(x_j)\,l_i'(x_j)=2\,l_j'(x_j)\begin{cases}<0 & \text{für}\quad x_1=-1,\\ =0 & \text{für}\quad j=2,\dots,n-1,\\ >0 & \text{für}\quad x_n=+1\end{cases}$$

gemäß (2.25) nimmt das Polynom $h(x)$ vom Grade $2n-2$ seine $n-2$ Maxima gerade in $x_2,\dots,x_{n-1}$ an, also gilt

$$\sum_{i=1}^{n}l_i^2(x)\leqq 1\quad \text{für}\quad |x|\leqq 1$$

Das ergibt in Verbindung mit (4.13) und (4.15)

$$|f'(z_k)-L_n'(z_k)|\leqq c_6E_{n-2}.$$

Demnach leistet die Approximation von $f'(x)$ durch die $L'_n(x)$ im wesentlichen das gleiche wie die direkte Lagrange-Interpolation an $f'(x)$ über den Nullstellen der Legendre-Polynome, und unter Verwendung entsprechender Abschätzungen von SZEGÖ (p. 333) erhalten wir

Satz 4.2. *$L_n(x)$ interpoliere $f(x)$ in den Nullstellen von $P_n^{(-1,-1)}(x)$. Genügt die stetige Ableitung $f'(x)$ in $[-1, +1]$ der Bedingung*

$$|f'(u)-f'(v)| = O\left(|u-v|^{\frac{1}{2}}\right) \quad \textit{bzw.} \quad = O\left(|\lg|u-v||^{-1}\right), \tag{4.16}$$

dann folgt in $[-1, +1]$ bzw. in $[-1+\delta, +1-\delta]$ die gleichmäßige Konvergenz $L'_n(x) \Rightarrow f'(x)$.

(4.16) ist z.B. erfüllt, wenn $f''(x)$ existiert und beschränkt ist oder auch nur $f'(x)$ von beschränktem Differenzenquotienten ist.

5. Unendliches Intervall

Anknüpfend an die allgemeinen Überlegungen am Anfang von Abschnitt 2 behandeln wir jetzt die Fälle $a=0$, $b=\infty$, $p(x)=x^\alpha e^{-x}$ $(\alpha>-1)$ und $a=-\infty$, $b=+\infty$, $p(x)=e^{-x^2}$. Wegen der weitgehenden Analogie zu den Ergebnissen im endlichen Intervall werden wir uns kurz fassen und nur die durch das unendliche Intervall bedingten Besonderheiten genauer darstellen.

Die durch die Rodriguessche Darstellung

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\, x^{-\alpha} e^x \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)} \tag{5.1}$$

definierten Laguerre-Polynome mit dem Hauptkoeffizienten $(-1)^n/n!$ bilden ein Orthogonalsystem zur Belegung $p(x)=x^\alpha e^{-x}$ mit dem Normierungsintegral

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{5.2}$$

Aus Integrabilitätsgründen ist $\alpha>-1$ zu fordern, (5.1) liefert aber für beliebiges α die Polynome

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!} \tag{5.3}$$

mit

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{5.4}$$

Weiter benutzen wir die Beziehungen

$$\left(L_n^{(\alpha-1)}(x)\right)' = -L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{5.5}$$

$$x^{\alpha-1} e^{-x} L_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{n}\left[x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right]', \tag{5.6}$$

$$L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \tag{5.7}$$

und die Differentialgleichung

$$x y'' + (\alpha+1-x) y' + n y = 0. \tag{5.8}$$

Wegen (5.5) können wir in (2.4) als Stammfunktion $L_n^{(\alpha-1)}(x)$ wählen. $x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ hat $n-1$ Nullstellen in $(0, \infty)$, eine in ∞ und für $\alpha > 0$ eine in 0. Nach ROLLE ergeben sich somit aus (5.6) für $\alpha > 0$ mindestens n Nullstellen der linken Seite in $(0, \infty)$, sonst $n-1$. Nach (5.4) ist

$$L_n^{(\alpha-1)}(0) = \binom{n-1+\alpha}{n} \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = 0, \quad \text{d.h.} \quad x_1 = 0, \\ < 0 & \text{für } -1 < \alpha < 0. \end{cases}$$

Mit dem Hauptkoeffizienten $(-1)^n/n!$ gilt andererseits $L_n^{(\alpha-1)}(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$, womit die noch fehlende Nullstelle $x_1 < 0$ im Falle $\alpha < 0$ nachgewiesen ist.

In Analogie zu Satz 2.1 formulieren wir

Satz 5.1. *Für $\alpha > -1$ sind die n einfachen Nullstellen des Laguerre-Polynoms $L_n^{(\alpha-1)}(x)$ mit*

$$x_1 \gtreqless 0 \quad \textit{für} \quad \alpha \gtreqless 0 \quad \textit{und} \quad x_i > 0 \quad \textit{für} \quad i = 2, \ldots, n \tag{5.9}$$

optimale Punkte für Differentiation bezüglich der Belegung $p(x) = x^\alpha e^{-x}$ über $(0, \infty)$. Die Matrix C ist gegeben durch

$$c_{k,i} = \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x_k)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(x_i)(x_k - x_i)} \qquad (k \neq i), \tag{5.10}$$

$$c_{i,i} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{x_i}\right) \quad (x_i \neq 0), \tag{5.11}$$

$$c_{1,1} = -\frac{n-1}{2} \qquad (\alpha = 0). \tag{5.12}$$

Aus (1.2) folgt (5.10). Bei (1.3) verwenden wir (5.8) mit $\alpha - 1$, also

$$x H''(x) + (\alpha - x) H'(x) + n H(x) = 0,$$

woraus sich mit $x_i \neq 0$, $H(x_i) = 0$ sofort (5.11) ergibt. (5.12) erhält man aus

$$x H''(x) - x H'(x) + n \cdot x \cdot H'(0) = O(x^2)$$

durch Grenzübergang $x \to 0$ nach Division durch x.

Nach (2.23) und (5.11) gilt für $x_k \neq 0$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{2}{x_k - x_i} = 1 - \frac{\alpha}{x_k};$$

daraus ergibt sich

Satz 5.2. *Für $\alpha \geqq 0$ wird*

$$\Phi = \prod_{i<k} (x_k - x_i)^2 \prod_{k=1}^{n} x_k^\alpha e^{-x_k} \tag{5.13}$$

bei Variation der x_i in $[0, \infty)$ durch die Nullstellen von $L_n^{(\alpha-1)}(x)$ maximiert.

Im Hinblick auf die Integration liefert (5.7)

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha-1)}(x)\, q_{n-2}(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } q_{n-2}(x), \tag{5.14}$$

nach Hilfssatz 3.1 und Hilfssatz 3.3 also

Satz 5.3. *Über den Nullstellen von $L_n^{(\alpha-1)}(x)$ $(\alpha > -1)$ gilt für Polynome $f(x)$ von höchstens $(2n-2)$-tem Grade*

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma(\alpha)}{(L_{n-1}^{(\alpha)}(x_i))^2} f(x_i), \tag{5.15}$$

worin

$$\gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!}. \tag{5.16}$$

Zur Bestimmung der Konstanten $\gamma(\alpha)$ setzen wir in (5.15)

$$f(x) = \left(L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right)^2;$$

mittels (5.2) folgt so $\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!} = n \cdot \gamma(\alpha)$ und damit (5.16).

Sehr einfach erledigt sich der Fall $a = -\infty$, $b = +\infty$, $p(x) = e^{-x^2}$ mit den durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \tag{5.17}$$

definierten Hermiteschen Polynome. Sie genügen der Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \tag{5.18}$$

und es gilt $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$. Demnach sind die Nullstellen von $H_n(x)$ optimale Punkte für Differentiation. In der Matrix C erhält man mittels (5.18) und (1.3)

$$c_{i,i} = x_i. \tag{5.19}$$

Nach (2.23) maximieren die x_i die Funktion

$$\Phi = \prod_{i<k} (x_k - x_i)^2 \cdot \prod_{k=1}^n e^{-x_k^2}.$$

Die zugeordnete Quadratur schließlich ist die bis zum Grade $2n-1$ exakte Gauß-Integration mit den Gewichten

$$A_i = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{n} \cdot \frac{1}{H_{n-1}^2(x_i)}. \tag{5.20}$$

In Analogie zu Satz 3.2 erhalten wir als Charakterisierung der Laguerre-Belegungen und der Hermite-Belegung

Satz 5.4. *$p(x)$ sei eine Belegung über $(0, \infty)$ bzw. über $(-\infty, +\infty)$ mit optimaler Differentiation $H_n'(x) = c_n \varphi_{n-1}(x)$ für alle $n \geqq n_0$ und*

$$\int p(x) H_n(x) q_{n-3}(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } q_{n-3}(x). \tag{5.21}$$

Dann gilt fast überall

$$p(x) = c \cdot x^\alpha e^{-\beta x} \qquad (\alpha > -1,\ \beta > 0)$$

bzw.

$$p(x) = c \cdot e^{-\lambda(x-x_0)^2} \qquad (\lambda > 0).$$

Dem Beweise von Satz 3.2 folgend erhält man wieder

$$p(x)\varphi_k(x) = \left(p(x)\, w_{k+1}(x)\right)'$$

und die Differentialgleichung

$$p'(x) = \frac{\varphi_k(x) - w'_{k+1}(x)}{w_{k+1}(x)} \cdot p(x) \qquad (w_{k+1}(x) \neq 0). \tag{5.22}$$

Nun kann aber hier $w_{k+1}(x)$ gar nicht vom Grade $k+1$ sein, denn dann wäre für $x \to \infty$

$$p'(x) \geqq \frac{-c_1}{x} p(x), \qquad \lg p(x) \geqq -c_1 \lg x + c_2 \quad \text{und} \quad p(x) \geqq c_3 x^{-c_1},$$

das aber steht im Widerspruch zu der für eine Belegung stets geforderten Existenz aller Momente $\int^{\infty} p(x) \cdot x^n dx$.

Im Falle $(0, \infty)$ ist $p(x) \equiv 0$ für $x < 0$ und $p(x) > 0$ fast überall für $x > 0$ nur möglich, wenn $w_{k+1}(x) = w_k(x)$ die Nullstelle 0 besitzt, also ist $w_k(x) = x \cdot u_{k-1}(x)$. $u_{k-1}(x)$ erweist sich als Orthogonalpolynom zur Belegung $x p(x)$ und man erhält aus (5.22) durch Partialbruchzerlegung

$$p'(x) = \left\{-\beta + \frac{\alpha}{x} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma_i}{x - \xi_i}\right\} p(x)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$p(x) = c \cdot x^{\alpha} e^{-\beta x} \prod_{i=1}^{k-1} |x - \xi_i|^{\gamma_i}.$$

Wie beim Beweise von Satz 3.2 zeigt man dann das Verschwinden der γ_i. Ist $p(x)$ eine Belegung über $(-\infty, +\infty)$, dann kann $w_k(x)$ auch nicht vom Grade k sein, weil sonst, da $\varphi_k(x) - w'_k(x)$ genau vom Grade k ist, aus (5.22) für $|x| \to \infty$

$$p'(x) = \big(c_4 + o(1)\big) p(x) \quad \text{mit} \quad c_4 \neq 0 \quad \text{und} \quad \lg p(x) \sim c_4 \cdot x$$

folgen würde, im Widerspruch zur Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx$. So erhält man $w_k(x) = u_{k-1}(x)$ und in (5.22) die Partialbruchzerlegung

$$p' = \left\{c_5 x + c_6 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma_i}{x - \xi_i}\right\} p(x).$$

Mit Verschwinden der γ_i folgt daraus

$$p(x) = c \cdot e^{\frac{1}{2c_5}(c_5 x + c_6)^2}.$$

6. Eine Anwendung

Abschließend wollen wir an einem einfachen Beispiel zeigen, wie sich die optimale Differentiation in der numerischen Praxis verwenden läßt. Wir betrachten die selbstadjungierte Eigenwertaufgabe

$$-\big(q(x) y'\big)' + r(x) y = \lambda y \tag{6.1}$$

mit $q(x) > 0$ und den Randbedingungen $y(-1) = y(+1) = 0$. Für die finite Formulierung benutzen wir die Matrix C aus Satz 2.1 zur Belegung $p(x) \equiv 1$. Dann kommen -1 und $+1$ unter den Stützstellen vor, so daß sich die Randbedingungen gut erfassen lassen. Außerdem werden die Diagonalmatrizen Q und R mit den Diagonalelementen $q(x_i)$ bzw. $r(x_i)$ benötigt. Bezeichnet y den Vektor der $y_i = y(x_i)$, dann lautet (6.1) in finiter Form

$$-CQCy + Ry = \lambda y$$

oder mittels (3.19)

$$-D^{-1}BDQD^{-1}BDy + Ry = \lambda y,$$

und weil Diagonalmatrizen vertauschbar sind,

$$-BQB(Dy) + R(Dy) = \lambda(Dy). \tag{6.2}$$

Die Randbedingungen $y_1 = y_n = 0$ berücksichtigen wir durch Reduktion aller Matrizen und Vektoren auf die Komponenten $i = 2, \ldots, n-1$. Dann wird wegen (3.20), (3.21) und (2.25) insbesondere $-B = B'$, und mit $Dy = z$ erhält man aus (6.2) die Matrixeigenwertaufgabe

$$(B'QB + R)z = \lambda z. \tag{6.3}$$

Die Matrix $B'QB + R = A$ ist symmetrisch, in Übereinstimmung mit der Selbstadjungiertheit von (6.1). Die Elemente

$$a_{i,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k}}^{n} \frac{q(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)} + \delta_{i,k} r(x_i) \qquad (i, k = 2, \ldots, n-1) \tag{6.4}$$

hängen nur noch von den x_i ab, nicht aber von den d_i, die man nur zur Berechnung der Eigenvektoren y benötigt.

Zu der gleichen finiten Formulierung gelangt man nun aber auch auf folgendem Wege: Wir gehen von (6.1) auf die zugeordnete Variationsaufgabe über und ersetzen den Rayleigh-Quotienten

$$\varrho = \frac{\int_{-1}^{+1} (q(x)\, y'^2 + r(x)\, y^2)\, dx}{\int_{-1}^{+1} y^2\, dx} \tag{6.5}$$

in Zähler und Nenner durch finite Ausdrücke, wobei hier wesentlich die Differentiation und Integration über den gleichen Stützstellen benutzt wird. Dabei geht der Nenner wegen (3.22) in das Skalarprodukt

$$(D^2 y, y) = (Dy, Dy) = (z, z)$$

über. Entsprechend erhält man im Zähler

$$(D^2 QCy, Cy) = (D^2 QD^{-1}BDy, D^{-1}BDy) = (QBz, Bz) = (B'QBz, z)$$

und

$$(D^2 Ry, y) = (RDy, Dy) = (Rz, z),$$

also den angenäherten Quotienten

$$\bar{\varrho} = \frac{((B'QB + R)z, z)}{(z, z)}. \tag{6.6}$$

Die Rückübersetzung dieser finiten Variationsaufgabe liefert wieder die Eigenwertaufgabe (6.3).

Die beiden Herleitungen von (6.3) zeigen, daß diese Methode eine gewisse Mittelstellung zwischen dem gewöhnlichen Differenzenverfahren und dem Ritzschen Verfahren einnimmt. Bei letzterem hätte man als Konkurrenzfunktionen die Linearkombinationen $\sum_{i=2}^{n-1} y_i\, l_i(x)$.

Gegenüber dem Differenzenverfahren mit äquidistanten Stützstellen hat (6.3) den Vorzug, zur Erlangung einer bestimmten Genauigkeit mit einem ökonomischen n auszukommen. Dadurch vermindert sich einmal der Rechenaufwand zur Bestimmung der Matrixeigenwerte, und zum anderen sind nicht unnötig große Eigenwerte beteiligt, die bei der Berechnung der kleinen Eigenwerte zusätzliche Rundungsfehler verursachen würden.

Geht man davon aus, daß die x_i für praktisch interessierende Werte von n tabelliert vorliegen, dann sind in (6.3) bzw. (6.4) nur noch einfache Matrixoperationen auszuführen.

Für $q(x) \equiv 1$ erhalten wir die weitere Vereinfachung

$$(6.7)\qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,k}}^{n} \frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)} = \begin{cases} \dfrac{2}{(x_k-x_i)^2} & (i \neq k)\\[2mm] \dfrac{n(n-1)}{3(1-x_i^2)} & (i=k)\end{cases} \qquad (i, k = 2, \ldots, n-1).$$

Da die finite Differentiation

$$y_k'' = \sum_{i=1}^{n} l_i''(x_k)\, y_i$$

für Polynome y von höchstens $(n-1)$-tem Grade auch durch zweimalige Anwendung der Matrix C erreicht wird, enthält C^2 die Elemente $l_i''(x_k)$. Damit hat $B'B = -B^2 = -DC^2D^{-1}$ die Elemente

$$(6.8)\qquad \frac{P_{n-1}(x_i)}{P_{n-1}(x_k)}\left(-l_i''(x_k)\right).$$

Aus (1.1) folgt

$$(6.9)\qquad H'(x_i)\, l_i''(x) = \frac{H(x)}{x-x_i} - \frac{2H'(x)}{(x-x_i)^2} + \frac{2H''(x)}{(x-x_i)^3} \qquad (x \neq x_i).$$

Für $x_k \neq x_i$, $k \neq 1, n$ erhält man daraus wegen $H(x_i) = H''(x_i) = 0$

$$-l_i''(x_k) = \frac{2H'(x_k)}{H'(x_i)(x_k-x_i)^2} = \frac{P_{n-1}(x_k)}{P_{n-1}(x_i)} \cdot \frac{2}{(x_k-x_i)^2}$$

und mittels (6.8) den ersten Teil der Behauptung (6.7). Durch Grenzübergang $x \to x_i$ ergibt sich aus (6.9) weiter

$$(6.10)\qquad l_i''(x_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{H'''(x_i)}{H'(x_i)} = \frac{1}{3}\, \frac{P_{n-1}''(x_i)}{P_{n-1}(x_i)}.$$

Für $i \neq 1, n$ folgt wegen $P_{n-1}'(x_i) = 0$ aus (2.11) mit $\alpha = \beta = 0$

$$(1-x_i^2)\, P_{n-1}''(x_i) + n(n-1)\, P_{n-1}(x_i) = 0,$$

wodurch in Verbindung mit (6.8) und (6.10) auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen ist.

Literatur

[1] Milne-Thomson: The Calculus of Finite Differences. London: Macmillan 1951.
[2] Salzer, H. E.: Optimal Points for Numerical Differentiation. Num. Math. **2**, 214—227 (1960).
[3] Stekloff, W. A.: Über die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Formeln der mechanischen Quadraturen [Russisch]. IAN (6), **10**, 169—186 (1916).
[4] Stieltjes, T. J.: Sur les polynômes de Jacobi. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **100**, 620—622 (1885); — Oeuvres Complètes **1**, 442—444.
[5] Szegö, G.: Orthogonal Polynomials. A.M.S. Coll. Publ. vol. XXIII (1959).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität
5 Köln-Lindenthal
Weyertal 88

(Eingegangen am 15. April 1963)