Numerische Mathematik 5, 226—233 (1963)

Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler

Von

GÜNTHER HÄMMERLIN

1. In der Arbeit [1] hat PH. DAVIS eine Methode zur Abschätzung des Fehlers $R(f)$, der etwa bei der numerischen Integration, der numerischen Differentiation oder der Interpolation einer reellen Funktion $f(x)$ notwendigerweise auftritt, in der Form $|R(f)| \leqq \sigma \|f\|$ angegeben. Von der Funktion $f(z)$ $(z = x + iy)$ ist dabei zu fordern, daß sie im Innern des Einheitskreises, der das betrachtete Intervall der reellen x-Achse ganz umschließe, analytisch und auf seinem Rande Γ stetig sei. In dieser Abschätzung hängt von $f(z)$ lediglich die Norm $\|f\|$ bezüglich der Randkurve Γ ab, während σ eine dem Näherungsansatz eigentümliche Konstante ist.

Die Abschätzung nach PH. DAVIS ist besonders für die häufig auftretende Aufgabe der Beurteilung von Quadraturfehlern von Bedeutung; gegenüber den herkömmlichen Fehlerabschätzungen gestattet sie es, ohne Differentiation der zu integrierenden Funktion auszukommen.

Die Untersuchungen in [1] sind bezüglich der Frage der Quadraturfehler von PH. DAVIS und P. RABINOWITZ im Hinblick auf eine Einschränkung der Regularitätsforderungen an $f(z)$ noch fortgesetzt worden ([3], [2]). Dazu werden als Analytizitätsbereiche von $f(z)$ konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten in $z_1 = -1$, $z_2 = +1$ angenommen, die die Endpunkte des Integrationsintervalls bilden. Es ergeben sich Abschätzungen der gleichen Form wie oben, wobei $\|f\|$ hier als Gebietsnorm gewählt wird.

In [1] werden für die Sehnentrapezregel, die Simpsonsche und die Weddlesche Regel, je einmal auf das Integrationsintervall $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ angewandt, die zugehörigen Werte von σ angegeben[1]. Ebenso findet man numerische Werte für σ bei verschiedener Wahl der ellipsenförmigen Analytizitätsbereiche in [3] und [2].

Um die Methode von PH. DAVIS praktisch verwenden zu können, ist es jedoch wünschenswert, über eine Darstellung von σ zu verfügen, die die Möglichkeit der wiederholten Anwendung einer Quadraturformel berücksichtigt und dabei insbesondere die entscheidende Rolle der Schrittweite h erkennen läßt. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, im Anschluß an [1] solche Abschätzungen des Quadraturfehlers zu finden.

2. Das Vorgehen von PH. DAVIS — wir beschränken uns von vornherein auf die Darstellung von Quadraturfehlern — läßt sich kurz so beschreiben: Sei $f(z)$ eine in $|z| < 1$ eindeutige regulär analytische, für $|z| = 1$ stetige und für reelles z $(z = x)$ im Intervall $-1 < a \leqq x \leqq b < +1$ reellwertige Funktion. Wir betrachten den Quadraturfehler

$$R(f) = \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} g_j f(x_j),$$

[1] Diese Werte bedürfen einer Berichtigung, die wir noch vornehmen werden.

$\sum_{j=0}^{n} g_j = b - a$, als beschränktes lineares Funktional im Hilbert-Raum dieser analytischen Funktionen. Dann gilt für $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}}\, ds,$$

integriert über den Einheitskreis Γ nach der Bogenlänge s. Also ist

$$R(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} R\left(\frac{1}{1 - x\bar{\zeta}}\right) f(\zeta)\, ds$$

und

$$|R(f)|^2 \leqq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma} \left|R\left(\frac{1}{1 - x\bar{\zeta}}\right)\right|^2 ds \cdot \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^2 ds.$$

Bei der entsprechenden Definition des inneren Produkts ist das eine Abschätzung der Form

$$|R(f)|^2 \leqq \sigma^2 \|f\|^2.$$

Dabei ist

$$R\left(\frac{1}{1 - x\bar{\zeta}}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(x^\nu)\, \bar{\zeta}^\nu,$$

und wegen der Orthogonalität der Potenzen ζ^ν bezüglich Γ ist

$$\sigma^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma} \left|R\left(\frac{1}{1 - x\bar{\zeta}}\right)\right|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} |R(x^\nu)|^2.$$

Mit

$$R(x^\nu) = \int_a^b x^\nu dx - \sum_{j=0}^{n} g_j\, x_j^\nu$$

reduziert sich so die Bestimmung der maßgeblichen Größe σ^2 auf die der Quadraturfehler von x^ν.

3. Um Schranken für σ^2 angeben zu können, verschaffen wir uns zunächst für einige herkömmliche Quadraturformeln einfache Abschätzungen von $|R(x^\nu)|$.

a) Sehnen- und Tangententrapezregel: Nach W. Wirtinger [7] und W. Tollmien [6] läßt sich das Restglied R_m einer Quadratur über $\langle 0, 1\rangle$ in folgender Form darstellen:

$$R_m = \frac{1}{m!}\left[f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)\right]\left[\frac{1}{m+1} - \sum_{j=0}^{n} g_j x_j^m\right] +$$
$$+ \frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m)}(x)\left[\sum_{j=0}^{n} g_j \overline{B}_m(x_j - x)\right] dx$$

mit den periodischen Bernoullischen Funktionen $\overline{B}_m(v)$, die durch periodische Fortsetzung der Bernoullischen Polynome $B_m(v)$ über das Grundintervall $\langle 0, 1\rangle$ hinaus entstehen. Dabei ist m der Grad der niedrigsten Potenz von x, die durch die betreffende Quadraturformel nicht mehr exakt integriert wird.

Für die Sehnentrapezregel ist $m=2$, $n=1$, $x_0=0$, $x_1=1$ und $g_0=g_1=\frac{1}{2}$, also

$$R_2=-\tfrac{1}{12}[f'(1)-f'(0)]+\tfrac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\,[\tfrac{1}{2}\overline{B}_2(-x)+\tfrac{1}{2}\overline{B}_2(1-x)]\,dx.$$

Wir wollen nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $a=-b$, $b>0$ sei. Dann ist $R(x^\nu)=0$ für $\nu=2k+1$, $k\geqq 1$, und wir können uns auf die Untersuchung der geraden Potenzen $\nu=2k$, $k\geqq 1$, beschränken. Wegen

$$\int_{-b}^{b} x^\nu dx=(2b)^{\nu+1}\int_0^1 (u-\tfrac{1}{2})^\nu du$$

betrachten wir die Funktion $f(x)=(x-\frac{1}{2})^\nu$.

Die folgenden Eigenschaften der durch die Festsetzungen

$$B_0(v)\equiv 1,\ \frac{dB_l(v)}{dv}=l\,B_{l-1}(v)\qquad\text{und}\qquad\int_0^1 B_l(v)\,dv=0$$

für $l\geqq 1$ definierten Bernoullischen Polynome bzw. Funktionen werden verwendet:

$$B_2(1-v)=B_2(v)\quad\text{und damit}\quad\overline{B}_2(-v)=\overline{B}_2(v);$$
$$B_l(0)=B_l(\tfrac{1}{2})=B_l(1)=0\quad\text{für ungerades } l;$$
$$B_3(v)>0\quad\text{in}\quad 0<v<\tfrac{1}{2},\qquad B_3(1-v)=-B_3(v).$$

Damit ist

$$\tfrac{1}{4}\int_0^1 f''(x)\,[\overline{B}_2(-x)+\overline{B}_2(1-x)]\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\,B_2(x)\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1)\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^{\nu-2}B_2(x)\,dx.$$

Weiter ist bei partieller Integration

$$\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^{2k-2}B_2(x)\,dx=-\frac{2k-2}{3}\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^{2k-3}B_3(x)\,dx$$
$$=-2\,\frac{2k-2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (x-\tfrac{1}{2})^{2k-3}B_3(x)\,dx>0.$$

Daneben gilt $R_2=-\frac{1}{12}f''(\xi)$, $0<\xi<1$, d.h. wegen $f''(x)\geqq 0$ in $0\leqq x\leqq 1$ ist $R_2\leqq 0$. Daraus folgt mit $f'(1)=-f'(0)=\frac{\nu}{2^{\nu-1}}$:

$$\left|\int_{-b}^{b} x^\nu dx-T_s\right|=(2b)^{\nu+1}\left|\int_0^1\left(u-\frac{1}{2}\right)^\nu du-\widehat{T}_s\right|\leqq\frac{\nu}{6}(2b)^2 b^{\nu-1},$$

$\nu=2k$, $k\geqq 1$; T_s, $\widehat{T}_s=$ Sehnentrapeznäherung.

Überträgt man diese Abschätzung auf den Fall, daß das Integrationsintervall $\langle -b, b\rangle$ in gleiche Teilintervalle der Länge h unterteilt sei, so ergibt sich

$$\left|\int_{-b}^{b} x^\nu dx-T_s\right|=|R(x^\nu)|\leqq\frac{h^2}{6}\nu\,b^{\nu-1}, \tag{3.1}$$

$\nu=2k$, $k\geqq 1$ mit Gleichheit für $k=1$.

Für die Tangententrapezregel ist $m=2$, $n=0$, $x_0=\frac{1}{2}$ und $g_0=1$, also

$$R_2=\tfrac{1}{24}[f'(1)-f'(0)]+\tfrac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\,\overline{B}_2(\tfrac{1}{2}-x)\,dx.$$

Mit $f(x)=(x-\frac{1}{2})^\nu$ ist

$$\int_0^1 f''(x)\overline{B}_2(\tfrac{1}{2}-x)\,dx=\nu(\nu-1)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} t^{\nu-2}\overline{B}_2(t)\,dt=2\nu(\nu-1)\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\nu-2}B_2(t)\,dt$$

und

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2k-2}B_2(t)\,dt=-\frac{2k-2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2k-3}B_3(t)\,dt<0,$$

d.h.

$$\int_0^1 f''(x)\overline{B}_2(\tfrac{1}{2}-x)\,dx<0 \qquad \text{für} \qquad f(x)=(x-\tfrac{1}{2})^{2k}.$$

Deshalb und wegen $R_2=\frac{1}{24}f''(\xi)\geqq 0$ gilt

$$\left|\int_{-b}^{b} x^\nu dx-T_T\right|\leqq\frac{\nu}{12}(2b)^2 b^{\nu-1}, \qquad \nu=2k, \qquad k\geqq 1,$$

$T_T=$ Tangententrapeznäherung, bzw.

$$\left|\int_{-b}^{b} x^\nu dx-T_T\right|=|R(x^\nu)|\leqq\frac{h^2}{12}\nu\, b^{\nu-1} \tag{3.2}$$

mit Gleichheit für $k=1$.

Die Abschätzung (3.1) läßt sich auch ohne Zuhilfenahme der Bernoullischen Polynome so gewinnen: Nach G. Kowalewski ([4], S. 83) gilt: Wenn $f^{\mathrm{IV}}(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ ein festes Zeichen bewahrt und dieses Intervall in gleiche Teile der Länge h zerlegt wird, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx=T_s+\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]-\frac{\vartheta h^4}{384}[f'''(a)-f'''(b)],$$

$0\leqq\vartheta\leqq 1$. Sind nun $f'(x)$ und $f'''(x)$ in $\langle a, b\rangle$ monoton nicht-fallend, so gelten die Ungleichungen $f'(a)-f'(b)\leqq 0$, $f'''(a)-f'''(b)\leqq 0$ und $R(f)\leqq 0$ wegen $f''(\xi)\geqq 0$. Für $f(x)=x^\nu$, $\nu=2k$, sind diese Annahmen erfüllt und man erhält wieder die Abschätzung (3.1).

b) Die Abschätzungen (3.1) und (3.2) lassen sich in der Aussage zusammenfassen, daß für $f(x)=x^{2k}$ das Restglied von Chevilliet[2] eine Betragsschranke für den Quadraturfehler der Trapezregeln liefert. Dieselbe Aussage läßt sich aus der Wirtinger-Tollmienschen Darstellung durch geeignete Substitutionen und partielle Integration auch für die Simpsonsche Regel (S.-R.), für Newtons $\frac{3}{8}$-

[2] Die angenäherte Darstellung des Restgliedes einer Quadraturformel vermittels der Differenz von Ableitungen an den Intervallenden findet sich schon bei Chevilliet, Comptes Rendus **78**, 1841 (1874) (nach R. Buckingham, Numerical Methods, S. 88. London: Sir Isaac Pitman and Sons 1957).

Regel ($\frac{3}{8}$-R.), für die MacLaurinsche Formel über je drei Teilintervalle (ML.-R.)

$$\left[\int_0^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left\{3f\left(\frac{h}{2}\right) + 2f\left(\frac{3h}{2}\right) + 3f\left(\frac{5h}{2}\right)\right\} + R(f)\right]$$

und für die Boolesche Regel (B.-R.) nachweisen. So ergeben sich die Abschätzungen, jeweils auf das Integrationsintervall $\langle -b, +b\rangle$ bezogen:

$$\left.\begin{array}{lll} (3.3) & \text{S.-R.:} & |R(x^\nu)| \leqq \frac{h^4}{90}\,\nu(\nu-1)(\nu-2)\,b^{\nu-3} \\ (3.4) & \frac{3}{8}\text{-R.:} & |R(x^\nu)| \leqq \frac{h^4}{40}\,\nu(\nu-1)(\nu-2)\,b^{\nu-3} \\ (3.5) & \text{ML.-R.:} & |R(x^\nu)| \leqq \frac{7h^4}{320}\,\nu(\nu-1)(\nu-2)\,b^{\nu-3} \end{array}\right\} \nu = 2k,\ k \geqq 2,$$

$$(3.6)\qquad \text{B.-R.:}\quad |R(x^\nu)| \leqq \frac{4h^6}{945}\,\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)\,b^{\nu-5},\quad \nu = 2k,\quad k \geqq 3.$$

Überdies ist stets $R(x^\nu) = 0$ für $\nu = 2k+1$, $k \geqq 0$.

4. Mit den Schranken (3.1) bis (3.6) ist nun die Konstante σ abzuschätzen.

a) Trapezregeln: Für die Sehnentrapezregel ist nach (3.1)

$$\begin{aligned} 2\pi\sigma^2 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} |R(x^\nu)|^2 = \sum_{\nu=2}^{\infty} |R(x^\nu)|^2 < \left(\frac{h^2}{6}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 (b^2)^{2k-1} \\ &= \frac{h^4}{3^2}\, b^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (b^4)^{k-1} = \frac{h^4}{3^2}\, b^2 \left\{ b^4 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(b^4)^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k (b^4)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{h^4}{3^2}\, b^2\, \frac{1+b^4}{(1-b^4)^3}\,. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(4.1)\qquad \sqrt{2\pi}\;\sigma < \frac{b}{3(1-b^4)} \left(\frac{1+b^4}{1-b^4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot h^2.$$

Ebenso ergibt sich für die Tangententrapezregel:

$$(4.2)\qquad \sqrt{2\pi}\;\sigma < \frac{b}{6(1-b^4)} \left(\frac{1+b^4}{1-b^4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot h^2.$$

b) Simpsonsche, Newtonsche und MacLaurinsche Regel: In $2\pi\sigma^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |R(x^\nu)|^2$ tritt hier jeweils die Summe

$$S_6(b^2) = \sum_{k=2}^{\infty} (2k)^2 (2k-1)^2 (2k-2)^2 (b^2)^{2k-3}$$

auf. Zur Berechnung dieser Summe bedienen wir uns einer Summationsformel von R. STALLEY [5]:

$$K_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = (1-x)^{-(n+1)} \sum_{r=1}^{n} \left[\sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \binom{n+1}{m-1} (r-m+1)^n \right] x^r$$

für $|x|<1$ und $n \geqq 0$, ganz. Damit errechnet man

$$S_6(b^2) = \frac{16 \cdot 36 \cdot b^2}{(1-b^4)^7}\left[1 + 18b^4 + 42b^8 + 18b^{12} + b^{16}\right],$$

so daß sich folgende Abschätzungen ergeben:

(4.3) S.-R.: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < \frac{h^4}{90}\,[S_6(b^2)]^{\frac{1}{2}}$,

(4.4) $\frac{3}{8}$-R.: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < \frac{h^4}{40}\,[S_6(b^2)]^{\frac{1}{2}}$,

(4.5) ML.-R.: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < \frac{7h^4}{320}\,[S_6(b^2)]^{\frac{1}{2}}$.

c) Boolesche Regel: Hier benötigt man

$$S_{10}(b^2) = \sum_{k=3}^{\infty} (2k)^2(2k-1)^2(2k-2)^2(2k-3)^2(2k-4)^2(b^2)^{2k-5}.$$

Wegen der Umständlichkeit des allgemeinen Ausdrucks $S_{10}(b^2)$ soll hier nur der numerische Wert der Summe für $b=\frac{1}{2}$ angegeben werden. Es ist $[S_{10}(\frac{1}{4})]^{\frac{1}{2}} = 1607.2$, so daß für $\langle -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ die Abschätzung

(4.6) $$\sqrt{2\pi}\,\sigma < 6{,}80\,h^6$$

gilt.

5. Legen wir uns, wie das etwa durch eine lineare Transformation stets zu erreichen ist, auf das Integrationsintervall $\langle -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ fest, so berechnet man schließlich[3]

(5.1) Sehnentrapezregel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 0{,}189\,h^2$,

(5.2) Tangententrapezregel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 0{,}0946\,h^2$,

(5.3) Simpsonsche Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 0{,}253\,h^4$,

(5.4) Newtons $\frac{3}{8}$-Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 0{,}569\,h^4$,

(5.5) MacLaurinsche Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 0{,}498\,h^4$,

(5.6) Boolesche Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma < 6{,}80\,h^6$.[4]

---

[3] Die explizite Angabe von $S_6(b^2)$ im vorhergegangenen Abschnitt kann nützlich sein, wenn bei einer Transformation auf $\langle -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ die Analytizität des Integranden in $|z|<1$ nicht gewahrt bleibt; möglicherweise leistet eine Transformation auf $\langle -b, +b\rangle$, $\frac{1}{2}<b<1$, dies noch.

[4] Die direkte Berechnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} |R(x^\nu)|^2$ für das Integrationsintervall $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ mit $h=\frac{1}{2}$ für die Sehnentrapezregel, $h=\frac{1}{4}$ für die Simpsonsche und $h=\frac{1}{12}$ für die Weddlesche Regel führt auf:

Sehnentrapezregel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma = 2{,}84 \cdot 10^{-2}$ $(\sqrt{2\pi}\,\sigma_T = 2{,}08 \cdot 10^{-1})$

Simpsonsche Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma = 5{,}46 \cdot 10^{-4}$ $(\sqrt{2\pi}\,\sigma_S = 5{,}1 \cdot 10^{-4})$

Weddlesche Regel: $\sqrt{2\pi}\,\sigma = 7{,}22 \cdot 10^{-7}$ $(\sqrt{2\pi}\,\sigma_W = 4{,}28 \cdot 10^{-7})$.

In Klammern finden sich die fehlerhaften Werte aus [*1*].

Abschätzung von $\|f\|$: Neben der Möglichkeit der Berechnung von $\|f\|^2$ hat man stets die einfache Abschätzung

$$\|f\|^2 = \int_{|z|=1} |f(z)|^2 ds \leqq \operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)|^2 \cdot 2\pi$$

zur Hand. Damit läßt sich $R(f)$ durch

$$|R(f)| \leqq (\sqrt{2\pi}\,\sigma) \operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)|$$

abschätzen.

Der Vorteil der Abschätzungen in dieser Arbeit gegenüber den herkömmlichen, in die höhere Ableitungen von $f(x)$ eingehen, liegt weniger in der Schärfe als in ihrer Einfachheit. Während sich $|f(z)|$ im allgemeinen leicht abschätzen läßt, kann sich die Ermittlung von Ableitungsschranken recht schwierig gestalten. Die beiden folgenden Beispiele zeigen jedoch, daß unsere Abschätzung auch der herkömmlichen überlegen sein kann.

An dieser Stelle soll noch auf die folgende bemerkenswerte Tatsache hingewiesen werden: Derselbe Fehler, der bei der numerischen Integration der Funktion $f(x)$ mit einer der hier behandelten Quadraturformeln entsteht, tritt auch bei $f^*(x) = f(x) + \alpha$ mit der beliebigen Konstanten α auf. An die Stelle der Abschätzung oder Berechnung von $\|f\|$ kann also auch die von $\|f^*\|$ treten. Das gibt uns die Möglichkeit, in der Fehlerabschätzung die Funktion $f(z)$ durch $f^*(z)$ zu ersetzen und die Konstante α dabei so zu wählen, daß das $\int_{|z|=1} |f^*(z)|^2 ds$ bzw. das $\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f^*(z)|$ minimal wird. So wird man bei der Funktion $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$ nicht den Wert $\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| = 6$ heranziehen, sondern den weitaus günstigeren

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} \left| f(z) + \frac{11}{3} \right| = \frac{7}{3}$$

verwenden; durch $w = f(z)$ wird ja $|z| = 1$ auf einen Kreis vom Radius $r = \frac{7}{3}$ um $w = -\frac{11}{3}$ abgebildet.

Beispiele:

a) $f(x) = x^3 e^x$, $b = \frac{1}{2}$, Sehnentrapezregel.

Es ist $f''(x) = (6x + 6x^2 + x^3)e^x$, also $|f''(x)| \leqq 4{,}625\, e^{\frac{1}{2}}$ für $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$. Die herkömmliche Abschätzung liefert damit

$$|R(f)| \leqq \frac{h^2}{12} \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |f''(x)|\,(b-a) = 0{,}636\, h^2.$$

Andererseits ist $\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| = e$, so daß sich mit (5.1) die bessere Abschätzung $|R(f)| < 0{,}189 \cdot e \cdot h^2 = 0{,}514\, h^2$ ergibt.

b) $f(x) = x^6$, $b = \frac{1}{2}$, Simpsonsche Regel:

Mit $\operatorname*{Max}_{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}} |f^{IV}(x)| = 90$ erhält man zunächst

$$|R(f)| \leqq \frac{h^4}{180} \cdot 90 = 0{,}5\, h^4.$$

Daneben ergibt (5.3) mit $\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| = 1$ die Schranke $|R(f)| < 0{,}253\, h^4$.

Dieses Beispiel überrascht insofern etwas, als ja in die Abschätzung von σ diejenigen für *alle* geraden Potenzen x^ν eingehen.

Literatur

[1] DAVIS, PH.: Errors of Numerical Approximation for Analytic Functions. J. Rat. Mech. Anal. **2**, 303—313 (1953).
[2] — Errors of Numerical Approximation for Analytic Functions. Survey of Numerical Analysis, J. Todd ed., pp. 468—484. New York: McGraw-Hill Book Comp., Inc. 1962.
[3] —, and P. RABINOWITZ: On the Estimation of Quadrature Errors for Analytic Functions. Math. Tables Aids Comput. **8**, 193—203 (1954).
[4] KOWALEWSKI, G.: Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932.
[5] STALLEY, R.: A generalisation of the geometric series. Amer. Math. Monthly **56**, 325—327 (1949).
[6] TOLLMIEN, W.: Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte Quadratur. Z. angew. Math. Mech. **29**, 193—198 (1949).
[7] WIRTINGER, W.: Über das Fehlerglied bei numerischer Integration. Z. angew. Math. Mech. **13**, 166—168 (1933).

Institut für angewandte Mathematik
der Universität und Institut für angewandte
Mathematik und Mechanik der DVL
78 Freiburg i. Br.

(Eingegangen am 25. Januar 1963)