Numer. Math. 58, 35–49 (1990)

Numerische Mathematik

Analyse numerique des ecoulements quasi-Newtoniens dont la viscosite obeit a la loi puissance ou la loi de carreau

Jacques Baranger[1] **and Khalid Najib**[2]

[1] LAN-Bât. 101-Université Lyon 1, F-69622 Villeurbanne Cédex, France

[2] Départment de Mathématiques – Université Hassan II, Faculté des Sciences d'El Jadida – BP 20 – El Jadida, Maroc

Numerical analysis of quasi-Newtonian flow obeying the power low or the Carreau flow

Summary. We prove abstract error estimates for the approximation of the velocity and the pressure by a mixed FEM of quasi-Newtonian flows whose viscosity obeys the power law or the Carreau law. These estimates are optimal in some cases. They can be applied to most finite elements used for the solution of Stokes's problem.

Résumé: On prouve des estimations d'erreur abstraites pour l'approximation de la vitesse et la pression par une MEF mixtes d'écoulements quasi-Newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de Carreau. Ces estimations sont optimales dans certains cas. Elles peuvent être appliquées à la plupart des éléments finis utilisés pour la résolution du problème de Stokes.

Subject classifications: AMS (MOS): 65 N 15, 76 A 05; CR: G 1.8.

1 Introduction

On considère un écoulement de fluide dans un domain Ω de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ. On note u le vecteur vitesse, p la pression, σ le tenseur des contraintes (σ est symétrique), $D(u)$ le tenseur des vitesses de déformation ($D_{ij}(u)=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$), f le vecteur densité des forces extérieures; $v_{,i}=\partial v/\partial x_i$, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et on utilise la convention de sommation d'Einstein. On se limite à des écoulements stationnaires sans effets d'inertie et on néglige tous les effets thermiques. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.1}$$

Pour un fluide Newtonien:

$$\sigma=-p\mathrm{I}+2\eta D(u) \tag{1.2}$$

Offprint requests to: J. Baranger

où η est la viscosité du fluide supposée constante.

De nombreux écoulements de fluides (polymères fondus on en solution, huiles, boues ...) ne vérifient pas la loi de Newton (1.2) mais une relation plus complexe dans laquelle la viscosité varie en fonction du deuxième invariant de $D(u)$, $D_{11}(u)=1/2\,D_{ij}(u)\,D_{ij}(u)$:

(1.3) $$\sigma=-p\,|+2\eta(D_{11}(u))\,D(u).$$

Les écoulements de fluides vérifiant (1.3) pour une fonction η à préciser sont appelés quasi-Newtoniens.

La substitution de (1.3) dans (1.1) fournit la première équation de l'écoulement:

(1.4) $$-(2\eta(D_{11}(u))\,D_{ij}(u))_{,j}+p_{,i}=f_i \qquad \text{dans } \Omega.$$

On lui ajoute la condition d'incompressibilité:

(1.5) $$\operatorname{div} u=0 \qquad \text{dans } \Omega$$

et une condition au bord, choisie ici du type Condition de Dirichlet homogène pour simplifier l'exposé:

(1.6) $$u=0 \qquad \text{sur } \Gamma.$$

On se limite dans cet article à deux lois de viscosité populaires en rhéologie- mais les méthodes présentées peuvent s'appliquer à d'autres lois-, celle de Carreau:

(1.7) $$\eta(z)=\eta_\infty+(\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda z)^{r/2-1}$$

sous les conditions $\eta_0>\eta_\infty\geqq 0$, $\lambda>0$, $r>1$ et celle de la loi puissance:

(1.8) $$\eta(z)=\frac{g}{2}\,z^{r/2-1}$$

sous les conditions $g>0$, $r>1$.

Le modèle de Bingham correspond à $r=1$ dans (1.8) et on retrouve le modèle Newtonien en faisant $r=2$ dans (1.7) ou (1.8).

Le problème (1.4) (1.5) (1.6) admet une formulation faible directe:

(1.9) $$\int_\Omega 2\eta(D_{11}(u))\,D_{ij}(u)\,D_{ij}(v)\,dx=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in V$$
$$V=\{v\in X;\ \operatorname{div} v=0\}, \qquad u\in V$$

où X est un espace fonctionnel à préciser dépendant de la fonction η et qui est $H_0^1(\Omega)^N$ dans le cas Newtonien.

Il admet également une formulation faible mixte:

(1.10) $$\int_\Omega 2\eta(D_{11}(u))\,D_{ij}(u)\,D_{ij}(v)\,dx-\int_\Omega p\operatorname{div} v=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in X,$$

(1.11) $$-\int_\Omega q\operatorname{div} u=0 \qquad \forall q\in M$$

où M est également à préciser et est $L_0^2(\Omega)=\{q\in L^2(\Omega);\ \int_\Omega q=0\}$ dans le cas Newtonien.

Le problème (1.9) peut s'interpréter comme l'équation d'Euler $J'(u)=0$ de la minimisation d'une fonctionnelle convexe $J(v)$ convenable sur V. (1.10) (1.11) apparaît alors comme la formulation point-selle de ce problème de minimisation sous la contrainte $\operatorname{div} u=0$.

Le but de cet article est de donner pour le problème mixte non linéaire (1.10) (1.11) une étude des majorations d'erreur analogue à celle développée dans [11] pour le problème de Stokes. Grosso modo on peut dire qu'il s'agit de coupler les difficultés d'un opérateur A du type Laplacien non linéaire [12] à celle de la formulation mixte vitesse pression du problème de Stokes.

La loi de Carreau (1.7) ayant une partie non constante qui est une fonction non homogène, les techniques de [12] sont insuffisantes et nécessitent l'emploi des résultats de [6].

La condition inf sup introduite dans [5] pour des problèmes mixtes linéaires doit être renforcée en l'existence d'un inverse à droite continu de l'opérateur divergence dans un cadre d'espace de Sobolev $W^{1,r}(\Omega)^N$.

Les majorations d'erreur de [12] ont été améliorées dans [16] où elles sont optimales. La combinaison de ces idées permet d'obtenir pour les modèles quasi Newtoniens considérés des estimations abstraites optimales (pour $1<r\leqq 2$) qui améliorent celles de [10] et [1]. Ces estimations sont également plus fines (sous de hypothèses plus fortes) que les estimations abstraites de [15].

On peut appliquer ces résultats abstraits à des éléments finis spécifiques en adaptant le cadre $H^1(\Omega)^N$ de [11] à $W^{1,r}(\Omega)^N$. A titre d'exemple on étudie l'élément P_1 flux P_0 de [9, 3], mais on peut dire schématiquement que plus généralement, si on a pour le problème de Stokes des estimations d'erreur en h^m pour la vitesse on a les mêmes estimations pour la loi de Carreau avec $\eta_\infty>0$ et des estimations en $h^{mr/2}(1<r\leqq 2)$ pour cette loi avec $\eta_\infty=0$ ou pour la loi puissance.

Cet article est basé sur [14].

2 Fonctionnelle énergie

Pour interpréter (1.9) comme l'équation d'Euler $J'(u)=0$ d'un problème de minimisation $\operatorname{Inf}\{J(v), v\in V\}$ on introduit:

$$E(z)=\int_0^z \eta(x)\,dx, \tag{2.1}$$

$$J_0(v)=\int_\Omega 2E(D_{11}(v(x)))\,dx, \qquad J(v)=J_0(v)-\langle f, v\rangle. \tag{2.2}$$

On a en effet formellement:

$$t^{-1}[J_0(u+tv)-J_0(u)]=2\int_\Omega t^{-1}[E(D_{11}(u+tv))-E(D_{11}(u))]\,dx,$$

$$\text{qui tend vers}\quad 2\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}E(D_{11}(u+tv))|_{t=0}\,dx.$$

On définit donc pour le modèle de Carreau la fonctionnelle J_0 par

(2.3) $$J_0(v)=2\int_\Omega \left\{\eta_\infty D_{11}(v)+\frac{2}{\lambda r}(\eta_0-\eta_\infty)\left[(1+\lambda D_{11}(v))^{r/2}-1\right]\right\}dx$$

et pour le modèle en loi puissance par

(2.4) $$J_0(v)=2\int_\Omega \frac{g}{r}D_{11}(v)^{r/2}\,dx.$$

La relation

$$\left|\sum_1^n \alpha_i\right|^p \leqq C_p\sum_1^n|\alpha_i|^p \qquad \forall p>0$$

($C_p=1$ si $p\leqq 1$, $C_p=n^{p-1}$ si $p>1$) est utilisée dans la suite. En particulier

$$(1+\lambda D_{11}(v))^{r/2}\leqq C_{r/2}\left(1+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{r/2}\sum_{i,j}|D_{ij}(v)|^r\right).$$

J_0 est naturellement définie sur l'espace X donné par:

(2.5) $X=H_0^1(\Omega)^N$ si $1<r\leqq 2$ et $\eta_\infty>0$,
$X=W_0^{1,r}(\Omega)^N$ sinon pour le modèle de Carreau;
et $X=W_0^{1,r}(\Omega)^N$ pour la loi puissance.

Grâce à l'inégalité de Korn dans $W^{1,r}(\Omega)^N$ [13] $\|u\|=\left(\int_\Omega D_{11}(u)^{r/2}dx\right)^{1/r}$ est une norme sur $X=W_0^{1,r}(\Omega)^N$ équivalente à la norme usuelle. On se donne $f\in W^{-1,r'}(\Omega)^N$, on pose:

(2.6) $$V=\{v\in X;\operatorname{div} v=0\}$$

et on considère le problème:

(P_m) Trouver $u\in V$ tel que $J(u)=\operatorname*{Inf}_{v\in V}J(v)$.

Proposition 2.1. *J_0 est Gâteaux différentiable sur X et $A=J_0'$ est donné par*:

(2.7) $$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega 2\eta(D_{11}(u))\,D_{ij}(u)\,D_{ij}(v)\,dx \qquad \forall u,v\in X.$$

Démonstration. En posant: $y=Du$, $z=Dv$, $F(y)=E(1/2|y|^2)$, $f(t)=F(y+tz)$ on peut écrire:

$$t^{-1}[J_0(u+tv)-J_0(u)]=2\int_\Omega t^{-1}[f(t)-f(0)]\,dx.$$

Comme

$$\partial_i F(y)=\eta(\tfrac12|y|^2)\,y_i \qquad \text{on a } f'(t)=\eta(\tfrac12|y+tz|^2)\,(y+tz,z).$$

Par conséquent, $t^{-1}[f(t)-f(0)]$ tend pour presque tout $x\in\Omega$ vers $\eta(D_{11}(u))\,D_{ij}(u)\,D_{ij}(v)$. De plus $t^{-1}[f(t)-f(0)]=f'(z)$, $z\in]0,t[$. On peut justifier le passage à la limite par le théorème de Lebesgue en montrant que $|f'(t)| \leqq g\in L^1(\Omega)$ $\forall t\in[0,t_0]$. Cette majoration résulte de diverses applications de l'inégalité de Hölder. La même majoration pour $t=0$ montre que $v\to\langle Au,v\rangle\in X'$. □

Si on montre que J est convexe le problème de minimisation (P_m) équivaut alors au problème variationnel (1.9) que l'on réécrit:

(P) Trouver $u\in V$ tel que:

$$\langle Au-f,v\rangle=0 \qquad \forall v\in V.$$

La convexité de J est une conséquence des résultats du paragraphe suivant.

3 Propriétés de J'. Solutions de (P)

Proposition 3.1. *$J'=A$ est fortement monotone au sens suivant: Cas $1<r\leqq 2$: il existe $\alpha_1>0$ et $\beta_1,\beta_2\geqq 0$ $(\beta_1+\beta_2\neq 0)$ tels que:*

$$\text{(3.1)}\qquad \langle Au-Av,u-v\rangle\geqq\frac{\alpha_1\,\|u-v\|^2}{\beta_1+\beta_2(\|u\|+\|v\|)^{2-r}}\qquad \forall u,v\in X.$$

Cas $2\leqq r$: il existe $\alpha_1>0$ tel que:

$$\text{(3.2)}\qquad \langle Au-Av,u-v\rangle\geqq\alpha_1\,\|u-v\|^r\qquad \forall u,v\in X.$$

Démonstration. Pour le modèle en loi puissance, il suffit d'utiliser les techniques de [12] et l'inégalité de Korn dans $W^{1,r}(\Omega)^N$. Par exemple pour $1<r\leqq 2$ on utilise l'inégalité:

$$\text{(3.3)}\qquad (|z|+|y|)^{2-r}(|z|^{r-2}z-|y|^{r-2}y,z-y)\geqq C|z-y|^2\qquad \forall y,z\in\mathbb{R}^n$$

qui est une conséquence de l'homogénéité de la fonction $|z|^{r-2}z$.

Pour le modèle de Carreau la fonction $\eta-\eta_\infty$ n'étant pas homogène en la variable z les techniques de [12] ne peuvent s'appliquer. Nous utilisons le cadre abstrait introduit dans [6] (Nous nous limitons au cas $1<r\leqq 2$. Le cas $r\geqq 2$ est traité dans [14]):

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continue et telle que $t\varphi(t)=0$ en $t=0$. On montre dans [6] que si $\psi(t)=t\varphi(t)$ est continuement dérivable pour $t>0$ et il existe $k_1\geqq 0$, $k_2\geqq 0$, $k_1+k_2\neq 0$ et $C_1>0$ tels que $[\varphi(t)\,t]'\,[k_1+k_2\,t^{2-r}]\geqq C_1$ $\forall t,s\in\mathbb{R}^+$ alors $\forall y,z\in\mathbb{R}^n$

$$\text{(3.4)}\qquad [k_1+k_2(|z|+|y|)^{2-r}]\,(\varphi(|z|)\,z-\varphi(|y|)\,y,z-y)\geqq C_1|z-y|^2.$$

Examinons par exemple le modèle de Carreau avec $\eta_\infty=0$ et $X=W_0^{1,r}(\Omega)^N$. On a:

$$\psi(t)=\eta_0\, t\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{r/2-1},$$

$$\psi'(t)=\eta_0\left[(r-1)\frac{\lambda}{2}t^2+1\right]\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{r/2-2}$$

$$\geqq \eta_0(r-1)\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{r/2-1}=\frac{\eta_0(r-1)}{(1+\lambda/2t^2)^{1-r/2}}\geqq\frac{\eta_0(r-1)}{1+(\lambda/2)^{1-r/2}t^{2-r}}.$$

On peut donc appliquer (3.4) à $\varphi(t)=\eta_0\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{r/2-1}$ avec $k_1=1$, $k_2=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-r/2}$ et $C_1=\eta_0(r-1)$ ce qui donne en remplaçant z par $D(u)$ et y par $D(v)$

$$[1+2k_2(D_{11}(u)^{1/2}+D_{11}(v)^{1/2})^{2-r}]\,(\eta(D_{11}(u))\,Du-\eta(D_{11}(v))\,Dv, D(u-v))$$
$$\geqq 4C_1\,D_{11}(u-v).$$

On élève cette inégalité à la puissance $r/2$, on intègre sur Ω et on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $2/2-r$ et $2/r$ au premier membre. Il vient:

$$\Big\{\int_\Omega [1+k_2'(D_{11}(u)^{1/2}+D_{11}(v)^{1/2})^{2-r}]^{r/(2-r)}\Big\}^{(2-r)/2}$$
$$\cdot\Big\{\int_\Omega (\eta(D_{11}(u))\,Du-\eta(D_{11}(v))\,Dv, D(u-v))\Big\}^{r/2}$$
$$\geqq C_1'\int_\Omega D_{11}(u-v)^{r/2}.$$

La première intégrale est majorée par:

$$\Big\{\int_\Omega [1+k_2''(D_{11}(u)^{1/2}+D_{11}(v)^{1/2})^r]\Big\}^{(2-r)/2}$$
$$\leqq\Big\{|\Omega|^{2-r/r}+k_3\Big(\int_\Omega (D_u(u)+D_{11}(v))^{r/2}\Big)^{(2-r)/r}\Big\}^{r/2}$$
$$\leqq[\beta_1+\beta_2(\|u\|+\|v\|)^{2-r}]^{r/2}$$

ce qui démontre (3.1).

Proposition 3.2. *$J'=A$ est continue sur X et on a: Cas $1<r\leqq 2$: il existe $\gamma>0$ et δ tels que:*

(3.5) $$\|Au-Av\|_{x'}\leqq\gamma\,\|u-v\|^\delta\qquad\forall u,v\in X$$

$\delta=r-1$ pour la loi puissance et la loi de Carreau avec $\eta_\infty=0$; $\delta=1$ pour la loi de Carreau avec $\eta_\infty>0$. Cas $2\leqq r$: il existe $C>0$ et K_1, $K_2\geqq 0$ $(K_1+K_2\neq 0)$ tels que:

(3.6) $$\|Au-Av\|_{x'}\leqq C\,\|u-v\|\,[K_1+K_2(\|u\|+\|v\|)^{r-2}].$$

Démonstration. Pour la loi puissance on utilise les techniques de [10]. Pour le modèle de Carreau on utilise celles de [4]. Nous nous limitons ici à $1<r\leqq 2$ et $\eta_\infty=0$. Pour les autres cas voir [14].

Il est montré dans [6] que si φ est une fonction de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continue et telle que $t\varphi(t)=0$ en $t=0$ et s'il existe γ tel que:

(3.7) $$|\varphi(t)\,t-\varphi(s)\,s|\leqq\gamma|t-s|^{r-1}\qquad\forall s,t\in\mathbb{R}^+$$

on a:

(3.8) $$|\varphi(|z|)\,z-\varphi(|y|)\,y|\leqq\gamma|z-y|^{r-1}\qquad\forall y,z\in\mathbb{R}^n.$$

D'après la démonstration de la Proposition 3.1 pour le modèle de Carreau avec $\eta_\infty=0$ on a:

$$\psi'(t)=\eta_0\left[(r-1)\frac{\lambda}{2}t^2+1\right]\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{\frac{r}{2}-2}\leqq\eta_0\left(1+\frac{\lambda}{2}t^2\right)^{\frac{r}{2}-1}\leqq\tilde{\eta}_0\,t^{r-2}.$$

Pour $t>s$

$$|\psi(t)-\psi(s)|=\int_s^t\psi'(\theta)\,d\theta\leqq\tilde{\eta}_0\int_s^t\theta^{r-2}\,d\theta$$
$$\leqq\frac{\tilde{\eta}_0}{r-1}(t^{r-1}-s^{r-1})\leqq\tilde{\eta}_0(t-s)^{r-1}.$$

La relation (3.7) est donc satisfaite et on peut écrire (3.8) avec $z=D(u)$, $y=D(v)$, ce qui implique que:

$$\begin{aligned}|\langle Au-Av,w\rangle|&=|\int_\Omega(\eta(D_{11}(u))\,Du-\eta(D_{11}(v))\,Dv,Dw)|\\&\leqq\int_\Omega|\eta(D_{11}(u))\,Du-\eta D_{11}(v)|\,|Dw|\\&\leqq C\int_\Omega D_{11}(u-v)^{(r-1)/2}D_{11}(w)^{1/2}\\&\leqq C(\int_\Omega D_{11}(w)^{r/2})^{1/r}(\int_\Omega D_{11}(u-v)^{r/2})^{r-1}.\end{aligned}$$

Proposition 3.3. *Le problème (P_m) admet une solution $u\in V$ unique qui est aussi l'unique solution de (P).*

Démonstration. D'après ce qui précède, J est convexe car J' est monotone, Fréchet différentiable car J' est continue. De plus J est coercive sur X. V est un sous espace vectoriel fermé de X, donc (P_m) admet une solution unique caractérisée par l'équation d'Euler (P).

4 Formulation mixte

L'écriture variationnelle (1.11) de la contrainte $\operatorname{div} u=0$ conduit à considérer l'espace M définie par:

$$M=L_0^{r'}(\Omega)=\{q\in L^{r'}(\Omega);\ \int_\Omega q=0\} \qquad \text{avec } \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1. \tag{4.1}$$

Le problème variationnel mixte (1.10), (1.11) est alors parfaitement défini. On introduit $B\in\mathscr{L}(X,M')$ et $B'\in\mathscr{L}(M,X')$ tels que

$$\langle Bv,q\rangle=\langle B'q,v\rangle=\int_\Omega q\operatorname{div} v \qquad \forall v\in X, \qquad \forall q\in M.$$

Soit $g\in M'$; on considère le problème:

(Q) Trouver $(u,p)\in X\times M$ tels que

$$Au+B'p=f$$
$$Bu \qquad =g.$$

(1.10), (1.11) équivaut alors au problème (Q) avec $g=0$.

On notera que le problème (Q) signifie que le Lagrangien $L(v,q)=J(v)+\langle Bv-g,q\rangle$ admet (u,p) comme point selle sur $X\times M$.

On considère maintenant les problèmes abstraits (P) et (Q) sans référence particulière aux modèles quasi-Newtoniens.

Proposition 4.1. (Q) *admet une solution unique si et seulement si* (P) *admet une solution unique et* B *est surjectif.*

Démonstration. Ce résultat est un cas particulier de [15] que l'on peut étudier directement. Par le théorème de l'image fermée, B surjectif équivaut à $R(B')$ fermé et $\operatorname{Ker} B'=\{0\}$. Si (Q) admet une solution unique pour tout couple $(f,g)\in X'\times M'$, B est évidemment surjectif et u solution de (P). Réciproquement $\langle Au-f,v\rangle=0\ \forall v\in V$ signifie que $-Au+f\in V^0=\operatorname{Ker} B^0$. Comme $R(B')$ est fermé, $R(B')=\operatorname{Ker} B^0$, donc il existe p tel que $B'p=-Au+f$. Comme $\operatorname{Ker} B'=\{0\}$, p est unique. □

L'existence d'une solution unique de (Q) est alors conséquence de la proposition suivante:

Proposition 4.2. *Si la frontière* Γ *de* Ω *est assez régulière* $(N=2)$ *l'opérateur* $\operatorname{div}\in L(X,M)$ *est surjectif et admet un inverse à droite continu.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration de [10] de construction de l'inverse à droite et de vérifier que cet inverse est continu de M dans X, ce qui est une conséquence de la régularité $W^{1,r}$ des problèmes $\Delta\phi=q$, $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ d'une part et $\Delta p=0$, $\frac{\partial p}{\partial n}=h$ d'autre part.

Remarque 4.1. On peut identifier M et M'. L'existence d'un inverse continu à droite pour div équivaut alors à l'existence d'un supplémentaire topologique de Ker B dans X et à la condition inf-sup continue:

$$\inf_{q\in M}\sup_{v\in X}\frac{\langle Bv,q\rangle}{\|q\|_M\|v\|_X}\geqq\beta>0. \tag{4.2}$$

Remarque 4.2. Soit $q\in L_0^{r'}(\Omega)$, $\tilde{q}=|q|^{r'-2}q$ et $\bar{q}=\tilde{q}-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\tilde{q}$. Alors $\bar{q}\in L_0^r(\Omega)$ donc il existe $v\in W_0^{1,r}(\Omega)^2$ tel que:

$$\operatorname{div} v=\bar{q}\quad\text{et}\quad \|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)^2}\leqq C\|\bar{q}\|_{L^r(\Omega)}=C\|q\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'-1}.$$

On en déduit que:

$$\int_\Omega q\operatorname{div} v=\int_\Omega q\bar{q}=\int_\Omega q\tilde{q}=\|q\|_{L^{r'}(\Omega)}^{r'}.$$

5 Problème approché et Estimations abstraites

On introduit deux sous espaces de dimension finie $X_h\subset X$ et $M_h\subset M$ et on approche (Q) par:

(Q_h) Trouver $(u_h,p_h)\in X_h\times M_h$ tels que:

$$\langle Au_h,v_h\rangle+\langle Bv_h,p_h\rangle=\langle f,v_h\rangle\qquad\forall v_h\in X_h \tag{5.1}$$

$$\langle Bu_h,q_h\rangle=\langle g,q_h\rangle\qquad\forall q_h\in M_h \tag{5.2}$$

(P_m) est approché par:

(P_h) Trouver $u_h\in V_h(g)=\{v_h\in X_h,\langle Bv_h,q_h\rangle=\langle g,q_h\rangle\ \forall q_h\in M_h\}$ tel que

$$J(u_h)=\operatorname{Inf}\{J(v_h),v_h\in V_h(g)\} \tag{5.3}$$

Nous allons supposer dans la suite que $1<r\leqq 2$. Le formalisme décrit dans [11] pour l'approximation mixte abstraite du problème de Stokes est repris ici pour le problème non linéaire. Les estimations d'erreur que nous obtiendrons pour u dans le cadre de la formulation mixte (optimisation avec contraintes) sont optimales et identiques à celles obtenues dans [16] pour le problème sans contraintes du Laplacien non linéaire.

Les erreurs $\|u-u_h\|_X$ et $\|p-p_h\|_M$ sont estimées dans le théorème suivant:

Théorème 5.1. i) *On suppose que* (u,p) *solution de* (Q) *existe et que sont vérifiées la relation* (3.5) *de continuité Holdérienne de* A, *la relation* (3.1) *de forte monotonie de* A *et que* $V_h(g)\neq\phi$. *Alors le problème de minimisation* (P_h) *admet une solution unique,* $u_h\in V_h(g)$, *et il existe une constante* $C_1>0$, $C_1(\alpha,K,\gamma,\delta,r,\|u\|_X,\|p\|_M$ *telle que*:

$$\forall v_h\in V_h(\chi),\ \forall q_h\in M_h$$

$$C_1\frac{\|u-u_h\|_X^2}{1+\|u-u_h\|_X^{2-r}}\leqq\|u-v_h\|_X^{\delta+1}+\|p-q_h\|_M(\|u-v_h\|_X+\|u-u_h\|_X). \tag{5.4}$$

ii) *On suppose de plus vérifiée la condition inf-sup discrète*:

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{\langle B v_h, q_h \rangle}{\|q_h\|_M \|v_h\|} \geqq \beta^* > 0. \tag{5.5}$$

Alors $V_h(g)$ est non vide et il existe un unique $p_h \in M_h$ tel que $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ soit l'unique solution du problème (Q_h). De plus, il existe C_2, A_1 et A_2, trois constantes strictement positives telles que:

$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in M_h$

$$C_2 \frac{\|u-u_h\|_X^2}{1+\|u-u_h\|_X^{2-r}} \leqq \|u-v_h\|_X^{\delta+1} + \|p-q_h\|_M (\|u-v_h\|_X + \|u-u_h\|_X), \tag{5.6}$$

$$\|p-p_h\|_M \leqq A_1 \|u-u_h\|_X^\delta + A_2 \|p-q_h\|_M, \tag{5.7}$$

Démonstration. i) $V_h(g)$ étant non vide, grâce à la linéarité et la continuité de B, c'est un convexe fermé de X_h. Les autres hypothèses sur J nous placent dans le cadre du théorème classique d'existence en analyse convexe. Le problème (P_h) admet donc une solution unique $u_h \in V_h(g)$ qui vérifie:

$$J(u_h) \leqq J(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h(g). \tag{5.8}$$

Et alors:

$$F = J(u_h) - J(u) - \langle J'(u), u_h - u \rangle \leqq J(v_h) - J(u) - \langle J'(u), u_h - u \rangle.$$

Donc:

$$\begin{aligned} F &\leqq \int_0^1 \langle J'(u+t(v_h-u)), v_h - u \rangle \, dt - \langle J'(u), u_h - u \rangle \\ &\leqq \int_0^1 \langle J'(u+t(v_h-u)) - J'(u), v_h - u \rangle \, dt - \langle J'(u), u_h - v_h \rangle \\ &\leqq \int_0^1 \|J'(u+t(v_h-u)) - J'(u)\|_{X'} \|v_h - u\|_X \, dt - \langle J'(u), u_h - v_h \rangle. \end{aligned}$$

D'après (3.5) on a:

$$\begin{aligned} F &\leqq \gamma \left(\int_0^1 \|t(v_h-u)\|_X^\delta \, dt \right) \|v_h - u\|_X - \langle J'(u), u_h - v_h \rangle \\ &\leqq \frac{\gamma}{\delta+1} \|v_h - u\|_X^{\delta+1} - \langle J'(u), u_h - v_h \rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle J'(u), u_h - v_h \rangle &= \langle A u, u_h - v_h \rangle - \langle B, u_h - v_h \rangle \\ &= -\langle B(u_h - v_h), p \rangle = -\langle B(u_h - v_h), p - q_h \rangle \\ &\leqq \|B\|_* \|p - q_h\|_M (\|u - u_h\|_X + \|u - v_h\|_X). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout v_h dans $V_h(g)$:

(5.9) $$F \leqq \frac{\gamma}{\delta+1} \|u-v_h\|_X^{\delta+1} + \|B\|_* \|p-q_h\|_M (\|u-u_h\|_X + \|u-v_h\|_X).$$

F peut être aussi minoré comme suit:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \langle J'[u+t(u_h-u)], u_h-u\rangle\, dt - \langle J'(u), u_h-u\rangle \\ &= \int_0^1 \langle J'[u+t(u_h-u)] - J'(u), u_h-u\rangle\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \langle J'[u+t(u_h-u)] - J'(u), [u+t(u_h-u)]-(u)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

De (3.1) on tire:

$$\begin{aligned} F &\geqq \int_0^1 \frac{1}{t} \frac{\alpha \|t(u_h-u)\|_X^2\, dt}{K+(\|u+t(u_h-u)\|_X + \|u\|_X)^{2-r}} \\ &\geqq \int_0^1 t \frac{\alpha \|u_h-u\|_X^2}{K+(2\|u\|_X + \|u-u_h\|_X)^{2-r}}\, dt, \end{aligned}$$

(5.10) $$F \geqq \frac{\frac{\alpha_1}{2} \|u-u_h\|_X^2}{K+(2\|u\|_X + \|u-u_h\|_X)^{2-r}}.$$

La combinaison de (5.9) et de (5.10) nous donne la relation (5.4).

ii) Définissons un opérateur $B_h \in \mathscr{L}(X, M'_h)$ par:

$$\langle B_h v, q_h\rangle = \langle Bv, q_h\rangle \qquad \forall v \in X, \qquad \forall q \in M_h$$

X_h étant de dimension finie, Ker $B_h|_{X_h}$ admet un supplémentaire topologique E et $B_h|_{X_h}$ est un isomorphisme de E dans M'_h. $V_h(g)$ est donc non vide.

D'après i) (P_h) admet une solution unique u_h. De plus, il existe un unique $p_h \in M_h$ tel que (u_h, p_h) soit l'unique solution de (Q_h). On montre (voir [11], p. 115) que:

(5.11) $$\operatorname*{Inf}_{w_h \in V_{h(x)}} \|u-w_h\|_X \leqq \left(1+\frac{\|B\|_*}{\beta^*}\right) \operatorname*{Inf}_{v_h \in X_h} \|u-v_h\|_X.$$

D'où la relation (5.6). Estimons l'erreur sur p:

Soit $(v_h, q_h) \in X_h \times M_h$:

$$\begin{aligned} \langle Bv_h, p_h-q_h\rangle &= \langle f, v_h\rangle - \langle Au_h, v_h\rangle - \langle Bv_h, q_h\rangle \\ &= \langle Au - Au_h, v_h\rangle + \langle Bv_h, p-q_h\rangle \\ &= \langle J'(u) - J'(u_h), v_h\rangle + \langle Bv_h, p-q_h\rangle. \end{aligned}$$

D'après la relation (5.5):

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{\langle B v_h, p_h - q_h \rangle}{\|v_h\|_X} \geqq \beta^* \|p_h - q_h\|_M$$

ce qui nous donne:

$$\|p_h - q_h\|_M \leqq \frac{1}{\beta^*} \sup_{v_h \in X_h} \left\{ \frac{1}{\|v_h\|_X} (\langle J'(u) - J'(u_h), v_h \rangle + \langle B v_h, p - q_h \rangle) \right\}$$
$$\leqq \frac{1}{\beta^*} \sup_{v_h \in X_h} \{ \|J'(u) - J'(u_h)\|_{X'} + \|B\|_* \|p - q_h\|_M \}.$$

Et d'après (3.5):

$$\|p_h - q_h\|_M \leqq \frac{1}{\beta^*} (\gamma \|u - u_h\|_X^\delta + \|B\|_* \|p - q_h\|_M).$$

Du fait que:

$$\|p - p_h\|_M \leqq \|p - q_h\|_M + \|p_h - q_h\|_M$$

on a:

$$\|p - p_h\|_M \leqq \frac{\gamma}{\beta^*} \|u - u_h\|_X^\delta + \left(1 + \frac{\|B\|_*}{\beta^*}\right) \|p - q_h\|_M \qquad \forall q_h \in M_h$$

ce qui n'est autre que (5.7) avec $A_1 = \frac{\gamma}{\beta^*}$ et $A_2 = 1 + \frac{\|B\|_*}{\beta^*}$. □

Les résultats abstraits du Théorème 5.1 présentent l'intérêt d'être applicables aux modèles quasi-Newtoniens. Dans la suite, on prend:

$$X = (W^{1,r}(\Omega))^N,$$
$$M = L_0^{r'}(\Omega) = \{q \in L^{r'}(\Omega) \int_\Omega q\, dx = 0\}.$$

Soit W_h un sous-espace de $(W^{1,r}(\Omega))^N$, et Q_h un sous-espace de $L^{r'}(\Omega)$, de dimensions finies.

On pose: $X_h = X \cap W_h$, $M_h = M \cap Q_h$, $g = 0$,

$$\langle A u, v \rangle = \int_\Omega 2\eta(D_{11}(u))\, D_{ij}(u)\, D_{ij}(v)\, dx \quad \text{et} \quad \langle B v, q \rangle = -\int_\Omega q \operatorname{div} v\, dx.$$

On a alors immédiatement le corollaire suivant du Théorème 5.1:

Corollaire 5.1. *On suppose que les espaces éléments finis* (X_h, M_h) *vérifient la condition* inf sup *discrète* (5.5). *Alors les problèmes mixtes approchés correspondant aux modèles de Carreau et de la loi puissance possèdent une solution unique. De plus, pour* $1 < r \leqq 2$, *et pour le modèle de Carreau avec* $\eta_\infty > 0$ (*respectivement la loi puissance ou le modèle de Carreau avec* $\eta_\infty = 0$) *les estimations* (5.6)–(5.7) *sont valables avec* $\delta = 1$ (*respectivement avec* $\delta = r - 1$).

6 Application à quelques méthodes d'éléments finis

Si les espaces X_h et M_h (donc W_h et Q_h) sont des espaces d'éléments finis, il est commode d'utiliser des hypothèses sur les espaces discrets analogues à celle de [11]:

Il existe un entier naturel $l \geqq 1$.

(H 1): hypothèse d'approximation de X_h

il existe un opérateur π_h: $W^{1,r}(\Omega)^N \to W_h$ linéaire continu tel que

$$\pi_h(W_0^{1,r}(\Omega)^N) \subset X_h$$

et pour tout m vérifiant $1 \leqq m \leqq 1$, on a:

$$|v - \pi_h v|_{1,r,\Omega} \leqq c h^m \|v\|_{m+1,r,\Omega} \qquad \forall v \in (W^{m+1,r}(\Omega))^N$$

(H 2): hypothèse d'approximation de Q_h

il existe un opérateur continu S_h: $L^{r'}(\Omega) \to Q_h$ tel que pour tout m vérifiant $0 \leqq m \leqq 1$, on a:

$$\|q - S_h q\|_{0,r',\Omega} \leqq c' h^m \|q\|_{m,r',\Omega} \qquad \forall q \in W^{m,r'}(\Omega).$$

Le résultat de convergence est contenu dans le théorème suivant:

Théorème 6.1. Sous les hypothèses du Théorème 5.1 *et* (H 1) (H 2) *le problème mixte* (Q_h) *admet une solution unique convergeant vers la solution du problème continu* (Q). *Si, de plus, tout m vérifiant* $1 \leqq m \leqq l$:

$$(u, p) \in (W^{m+1,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega))^N \times W^{m,r'}(\Omega) \cap L_0^{r'}(\Omega)$$

alors:

i) *pour la loi puissance et le modèle de Carreau avec* $\eta_\infty = 0$:

$$(6.1) \qquad |u - u_h|_{1,r,\Omega}^{r-1} + \|p - p_h\|_{0,r',\Omega} \leqq c h^{r(r-1)m/2} (\|u\|_{m+1,r,\Omega} + \|p\|_{m,r',\Omega})$$

ii) *pour le modèle de Carreau avec* $\eta_\infty > 0$:

$$(6.2) \qquad |u - u_h|_{1,2,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,2,\Omega} \leqq c h^m (\|u\|_{m+1,2,\Omega} + \|p\|_{m,2,\Omega}).$$

Démonstration. On écrit (5.6) (5.7) avec $v_h = \pi_h v$ et $q_h = S_h q$. Pour le cas de la loi puissance ou de la loi de Carreau avec $\eta_\infty = 0$, on a $\delta = r - 1$; posant $x = |u - u_h|_{1,r,\Omega}$ on tire de (5.6):

$$(6.3) \qquad C_2 \frac{x^2}{1 + x^{2-r}} \leqq \alpha_1 h^m x + \alpha_2 h^{2m} + \alpha_3 h^{mr}.$$

On suppose $h \leqq h_0 \leqq 1$; on pose

$$V_h(x) = T(x) - h^m(\alpha_1 x + \tilde{\alpha}_2 h^{m(r-1)}),$$

où

$$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_3 + \alpha_2 h_0^{(2-r)m} \quad \text{et} \quad T(x) = C_2 \frac{x^2}{1+x^{2-r}},$$
$$V_h(x) \geqq T(x) - h_0^m(\alpha_1 x + \tilde{\alpha}_2) \qquad \forall h \leqq h_0.$$

On a $V_h(0)<0$ et $V_h(1) \geqq c/2 - h_0^m(\alpha_1+\alpha_2)>0$ pour h_0 assez petit; donc pour tout $h \leqq h_0$, il existe $x_h \in]0,1[$ tel que $V_h(x_h)=0$. D'autre part $1 \leqq 1+x_h^{2-r} \leqq 2$, d'où $c/2 x_h^2 \leqq T(x_h) \leqq C x_h^2$. Un calcul explicite montre alors que $x=O(h^{mr/2})$.

Remarque 6.1. On peut traiter de la même manière le cas $r \geqq 2$ mais les estimations obtenues ne sont pas optimales. Voir [14]. □

On suppose pour simplifier que Ω est un polygône triangulé par une triangulation $\mathscr{C}_h$: $\Omega = \bigcup_{K \in \mathscr{C}_h} K$.

L'application du Théorème 6.1 à des éléments finis concrets se fait en vérifiant (H1) (H2) et la condition inf sup discrète (5.3). En général on obtient (5.3) en montrant qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $q_h \in M_h$ il existe $v_h \in X_h$ tel que:

$$(6.4) \qquad B\langle v_h, q_h\rangle = \|q_h\|_{0,r',\Omega}^{r'} \quad \text{et} \quad |v_h|_{1,r,\Omega} \leqq C |q_h|_{0,r',\Omega}^{r'-1}$$

((6.4) généralise un résultat classique pour $r=2$).

On peut schématiquement dire que tout élément fini donnant pour le problème de Stokes des estimations en h^m pour $\|u-u_h\|_X$ et h^{m-1} pour $\|p-p_h\|_M$ donnera les mêmes estimations pour le modèle de Carreau avec $\eta_\infty>0$ et des estimations en $h^{mr/2}$ pour $\|u-u_h\|_X$ et $h^{mr(r-1)/2}$ pour $\|p-p_h\|_M$ pour la loi puissance on le modèle de Carreau avec $\eta_\infty=0 (1<r\leqq 2)$. Les démonstrations consistent en des adaptations L^r des résultats de [11]. A titre d'exemple examinons, en dimension 2 d'espace, l'élément P_1 flux-P_0 de [9] et [3]. Certains éléments plus compliqués peuvent être étudiés à l'aide d'une version L^r du théorème de [4]; voir [2] pour les détails où on trouvera également d'autres exemples. Soit K un triangle. La partie vitesse de l'élément P_1 flux-P_0 est définie par

– l'espace $\mathscr{P}_1(K)$ des vecteurs à composantes polynômes, où

$$\mathscr{P}_1(K) = P_1^2 \oplus e \cdot v\{p_1, p_2, p_3\}.$$

P_1 ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, $p_i = n_i \lambda_j \lambda_k$ pour i, j, k différents, n_i vecteur normal (extérieur) au côte f_i opposé au sommet a_i de K, λ_i coordonnée barycentrique dans K telle que $\lambda_i(a_i)=1$.

– les degrés de liberté $u(a_i)$ et $\int_{f_i} u n_i \, ds$ $i=1,2,3$.

Les vitesses sont continues dans Ω. Les pressions sont constantes dans K. Les opérateurs d'interpolation π_h et S_h de (H1) et (H2) sont alors construits comme dans [11] par l'intermédiaire de l'opérateur R_h d'interpolation de fonctions discontinues de [8].

On a π_h: $W_0^{1,r}(\Omega)^2 \to X_h$ tel que:

$$\pi_h v(a) = R_h v(a) \qquad \forall a \text{ sommet de } \mathscr{C}_h,$$
$$\int_f (\pi_h v - v)\cdot n \, ds = 0 \qquad \forall f \text{ côté de } \mathscr{C}_h,$$

$$S_h\colon L^{r'}(\Omega) \to Q_h \qquad \text{est défini par } S_h q|_K = \frac{1}{|K|}\int_K q\,dx.$$

On montre alors la version L^r des résultats de [11]:

(6.5) $$|v-\pi_h v|_{1,r,\Omega} \leqq C h^{k-1} |v|_{k,r,\Omega} \qquad \forall v \in W^{k,r}(\Omega)^2$$

pour $k=1$ et 2 et:

(6.6) $$|q-S_h q|_{0,r',\Omega} \leqq C h |q|_{1,r',\Omega} \qquad \forall q \in L^{r'}(\Omega)$$

ce qui montre que (H 1) et (H 2) sont satisfaites pour $l=1$.

Pour la démonstration de (6.5), (6.6) voir [14].

La condition inf sup discrète s'obtient en utilisant la Remarque 4.2 et en posant $v_h=\pi_h v$.

On peut donc dire que pour l'élément P_1 flux-P_0, si $u \in W^{2,r}(\Omega)^2$ et $p \in W^{1,r'}(\Omega)$, on a les majorations du Théorème 6.1 avec $m=1$.

Remerciements. Les auteurs remercient V. Girault et P. Le Tallec pour d'intéressantes remarques et discussions.

References

1. Baranger, J., Georget, P., Najib, K.: Error estimates for a mixed finite element method for a non Newtonian flow. J. Non-Newtonian Fluid Mech. **23**, 415–421 (1987)
2. Baranger, J., Najib, K.: Local inf-sup condition and mixed finite element methods for quasi Newtonian flows – Ve Congrès International sur les méthodes numériques de l'ingénieur – Lausanne, 11–15 Septembre 1989
3. Bernardi, C., Raugel, G.: Analysis for some finite elements for the Stokes problem. Math. Comput. **44**, 71–79 (1985)
4. Boland, J., Nicholaides, R.: Stability of finite element under divergence constraints. SIAM J. Numer. Anal. **20**, 722–731 (1983)
5. Brezzi, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. RAIRO, Modelisation Math. Anal. Numer. **8**, 129–151 (1974)
6. Chow, S.S.: Finite element error estimates for non linear elliptic problems of monotone type – PHD Australian National University 1983
7. Ciarlet, P.G.: The finite element methods for elliptic problems. North Holland 1978
8. Clement, P.: Approximation by finite element functions using local regularization. RAIRO Modelisation Math. Anal. Numer. **9**, 77–84 (1975)
9. Fortin, M.: Old and new finite elements for incompressible flows. Int. J. Numer. Methods Fluids **1**, 347–364 (1981)
10. Georget, P.: Contribution à l'étude des équations de Stokes à viscosité variable. Thèse Université Lyon **1**, 1985
11. Girault, V., Raviart, P.A.: Finite element methods for Navier-Stokes Equations. Berlin Heidelberg New York: Springer 1986
12. Glowinski, R., Marroco, A.: Sur l'approximation par éléments finis d'ordre 1 et la resolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. RAIRO Modelisation Math. Anal. Numer. **9**, 41–76 (1975)
13. Mjasnikov, V.P., Mosolov, P.P.: A proof of Korn Inequality. Sov. Math. **12**, 1618–1622 (1971)
14. Najib, K.: Analyse Numérique de modèles d'écoulements quasi-newtoniens. Thèse Université Lyon **1**, 1988
15. Scheurer, B.: Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires. RAIRO Modelisation Math. Anal. Numer. **11**, 369–400 (1977)
16. Tyukhtin, V.B.: Sur la vitesse de convergence des méthodes d'approximation de la solution des problèmes variationnels unilatéraux (en russe). Vestn. Leningr. Univ., Math. Mec. Astronom. **3**, 36–43 (1983)