Zeitschrift für Physik 179, 148–160 (1964)

Aus dem Seminar für Allgemeine Relativitätstheorie der Universität Hamburg

Zur Theorie der infinitesimalen Holonomiegruppe in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Von

WOLF BEIGLBÖCK

(Eingegangen am 4. März 1964)

Starting from the infinitesimal holonomy group H_i of a V^4, $(+++-)$ the spin-holonomy group $\tilde{H}_i \equiv \bar{\sigma}^1(H_i)$ defined by the covering isomorphism σ: $G \to L_+^\uparrow$ is introduced. In Einstein-spaces we may replace its real Lie-algebra by a complex one. With the complex calculus we may reproduce the results of SCHELL, GOLDBERG and KERR with very much simplified proofs. A theorem on non-empty Einstein-spaces is given.

In part 4 we prove a theorem on the connection between the H_i-behaviour of a vector (spinor) and its covariant derivative in a V^4. With its help we get in a simple manner the metrics of a V^4 with given H_i and $\mathrm{Dim}(H_i) < 6$; our results agree with those given by GOLDBERG and KERR, CAHEN and DEBEVER. Finally we make some new statements on imperfect holonomy groups.

Obwohl die infinitesimale Holonomiegruppe ihrer Definition nach eng mit dem Riemannschen Krümmungstensor, also mit dem Gradienten des Gravitationsfeldes, zusammenhängt, hat man sich erst 1961 in den Kreisen der Relativitätstheoretiker für diese Gruppe zu interessieren begonnen. 1961 gab SCHELL[1] eine Klassifizierung der infinitesimalen Holonomiegruppe in einer Riemannschen V^4, Signatur $+2$ und verglich diese mit der Typenklassifizierung nach PETROV. Dies wurde in zwei Arbeiten von GOLDBERG u. KERR[2] aufgegriffen, die zum Vergleich zwischen Holonomie- und Petrov-Klassifizierung die kanonische Form des Riemann-Tensors benutzten; diese Verfasser konstruierten das Linienelement von Vakuumräumen, die eine zwei- bzw. vierdimensionale Holonomiegruppe zulassen. 1963 gaben CAHEN u. DEBEVER[13] mit Hilfe des tensoriellen Cartan-Formalismus des beweglichen Vierbeins die Metriken zu allen Holonomiegruppen der Dimension ≤ 4 an.

Diese Ergebnisse lassen sich schneller und einsichtiger gewinnen, wenn man von der gewöhnlichen Holonomiegruppe zur Spinholonomiegruppe übergeht und spinoriell rechnet; bei diesem Verfahren fällt auch noch ein Satz über die Holonomiegruppe in nicht leeren Einstein-Räumen ab.

---

[1] SCHELL, J. F.: J. Math. and Phys. **2**, Nr. 2 (1961).
[2] GOLDBERG, J. N., and R. P. KERR: J. Math. and Phys. **2**, Nr. 3 (1961).

Im ersten Abschnitt wird im Anschluß an NIJENHUIS, SCHOUTEN, LICHNEROWICZ, HLAVATY[3,4] die infinitesimale Holonomiegruppe definiert und ihre reelle, tensorielle Lie-Algebra angegeben; dabei beschränken wir uns von vornherein, auf eine V^4 mit Signatur $(+++-)$.

Im Abschnitt 2 gehen wir von der $L_+^\uparrow$ zu deren Überlagerungsgruppe G über. Wir betrachten das Urbild von H_i bei dem Überlagerungshomomorphismus $\sigma\colon G \to L_+^\uparrow$. Im zentralen Satz dieser Arbeit zeigen wir dann, daß dessen Lie-Algebra in Einstein-Räumen auch als komplexe Lie-Algebra aufgefaßt werden kann. Wählt man dann noch ein geeignetes komplexes Erzeugendensystem, dann liefert dieser Satz fast ohne Rechnung die Ergebnisse von SCHELL, GOLDBERG u. KERR, die wir in Abschnitt 3 zusammenfassen.

Am Beginn des vierten Abschnitts bringen wir ein für die Konstruktion von Linienelementen wichtiges Lemma, das das Verhalten eines Vektorfeldes gegen die Holonomiegruppe mit der Rekurrenz dieses Feldes verbindet. Dieses Lemma benutzen wir dann zur Gewinnung einiger Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten, die zusammen mit dem äußeren Differentialkalkül für Spinoren und einem Satz von FROBENIUS zur Konstruktion von Metriken herangezogen werden. Wir finden damit die Ergebnisse von GOLDBERG u. KERR, CAHEN u. DEBEVER wieder. Zum Abschluß geben wir eine Übersicht über die imperfekten Holonomiegruppen, die bisher noch nicht bekannt war.

1. Die Gruppe infinitesimaler Holonomie und ihre Lie-Algebra

In einem normalhyperbolischen Riemannschen Raum $V^4 \equiv V$ vermittelt die Parallelverschiebung entlang einer von einem Punkt x ausgehenden und nach x zurückkehrenden, nullhomotopen Kurve eine isometrische Abbildung des Tangentenraums T_x auf sich[3]. Bei festem x ist die Menge der zu allen solchen Wegen gehörenden Abbildungen isomorph zu einer Untergruppe H der homogenen, eigentlich orthochronen Lorentz-Gruppe $L_+^\uparrow$. Da die Gruppen $H(x)$ in verschiedenen Punkten zueinander isomorph sind, kann man von *der Holonomiegruppe** H des Raumes V sprechen. Ist V von der Differentiationsklasse C^∞, dann bildet der ${}^a{}_b$-Bereich der Tensoren $R^a{}_{bcd}$, $R^a{}_{bcd;e}$, $R^a{}_{bcd;ef}$, ... (in einem beliebigen Punkt x) eine Realisierung einer Lie-Unteralgebra dH_i der Lie-Algebra von H. Die zugehörige Lie-Untergruppe von H nennt man die Gruppe infinitesimaler Holonomie (oder

* Diese Gruppe wird oft als eingeschränkte Holonomiegruppe bezeichnet.

[3] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. — NIJENHUIS, A.: Proc. Sect. Sci. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. **56** A (1953); **57** A (1954). — LICHNEROWICZ, A.: Th. globale des Conn. et des Gr. d'Hol., Rom 1955.

[4] HLAVATY, V.: J. Math. Mech. **8**, 2, 4 (1959); **9**, 1, 3 (1960); **10**, 2 (1961).

auch infinitesimale Holonomiegruppe) H_i; bei analytischer Mannigfaltigkeit V ist $H=H_i$. H_i heißt perfekt, wenn dH_i mit dem ${}^a{}_b$-Bereich von $R^a{}_{bcd}$ identisch ist, andernfalls imperfekt*.

Im folgenden wollen wir dH_i explizit beschreiben[4]: Die Dimension von dH_i sei $r(\leqq 6)$; dann existieren r linear unabhängige Bivektoren (Erzeugende infinitesimaler Lorentz-Transformationen) $E_\mu{}^a{}_b(x)$ und Tensoren $K^\mu{}_{cde..}(x)$, $K_\mu{}^{cde..}(x)$ $(\mu=1, \ldots, r)$ mit

$$R^a{}_{bcd;e..}(x)=E_\mu{}^a{}_b(x)\,K^\mu{}_{cde..}(x)\,, \tag{1}$$

$$R^a{}_{bcd;e..}\,K_\mu{}^{cde..}=E_\mu{}^a{}_b\,. \tag{2}$$

Zu $\{E_\mu{}^a{}_b\}$ gibt es die duale Basis $\{E^\nu{}_a{}^b\}$ mit

$$E_\mu{}^a{}_b\,E^\nu{}_a{}^b=\delta^\nu_\mu\,. \tag{3}$$

Für die Ableitungen der Erzeugenden folgt aus (1) und (2):

$$E_\mu{}^a{}_{b;e}=\Gamma^\nu_{\mu e}\,E_\nu{}^a{}_b \qquad (\Gamma^\nu_{\mu e}=E_\mu{}^a{}_{b;e}\,E^\nu{}_a{}^b)\,. \tag{4}$$

Die Eigenschaften (1) bis (4) kennzeichnen ein System von Bivektoren $E_\mu{}^a{}_b$ als eine Basis von dH_i.

Aus der Symmetrie $R_{abcd}=R_{cdab}$ des Krümmungstensors ergibt sich, daß der ${}^a{}_b$-Bereich gleich dem ${}^c{}_d$-Bereich ist. Folglich gibt es eine symmetrische Matrix $h^{\mu\nu}$ mit $K^\mu{}_{cd}=h^{\mu\nu}\,E_{\nu cd}$. Letzteres führt mit (1) auf die wichtige Darstellung:

$$R^a{}_{bcd}=h^{\mu\nu}\,E_\mu{}^a{}_b\,E_{\nu cd}\,. \tag{5}$$

Daraus lesen wir ab, daß H_i genau dann perfekt ist, wenn $h^{\mu\nu}$ den Rang r hat.

2. Konstruktion der Spinholonomiegruppe H_i

V versehen wir auf folgende Weise mit einer Spinorstruktur**. Wir ordnen jedem $x\in V$ einen zweidimensionalen, komplexen „Spinorraum" $S_x=\{\rho^A\}_{A=1,2}$ zu, womit auch die in bekannter Weise durch die Spinoralgebra verknüpften Räume $S_x^*=\{\varphi_A\}$, $\bar S_x=\{\sigma^{E'}\}$, $S_x\otimes\bar S_x=\{\rho^{AE'}\}$ gegeben sind. Weiter identifizieren wir den Tangentialraum T_x mit dem Raum der hermiteschen Spinoren $\rho^{AE'}$ so, daß mit $\rho^{AE'}=\sigma_a{}^{AE'}\,\rho^a$ immer $g_{ab}\,\rho^a\,\rho^b=-\varepsilon_{AB}\,\bar\varepsilon_{E'F'}\,\rho^{AE'}\,\rho^{BF'}$ ist, wobei ε_{AB} die schiefe Spinmetrik ist. Die kovariante Differentation ist mit der kovarianten Tensordifferentiation und obiger Zuordnung erst dann festgelegt, wenn wir mit PENROSE u.a.[5,6] fordern, daß ε_{AB} kovariant konstant sein soll.

* Perfektheit ist eine Eigenschaft des Tensorpaares $(R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;e})$ und nicht der Gruppe H_i; die oben benutzte irreführende Ausdrucksweise ist aber üblich.

** Das ist lokal stets möglich, global nur für gewisse V. Wir beschränken uns auf lokale Behandlung.

[5] PENROSE, R.: Ann. Phys. **10**, 2 (1960).

[6] JORDAN, P., J. EHLERS u. R. K. SACHS: Akad. Wiss. Lit. Mainz (math.-nat. Kl.) **1**, 1 (1961).

Die Möglichkeit obiger Identifizierung beruht darauf, daß die unimodulare Gruppe $G_2 \equiv G$ der zweireihigen, komplexen Matrizen der Determinante 1 die Überlagerungsgruppe der homogenen, eigentlich orthochronen Lorentz-Gruppe $L_{\uparrow}^{\downarrow}$ ist. Die durch die Identifizierung $\rho^a \leftrightarrow \rho^{AE'}$ mitbestimmte Zuordnung $G \ni \Lambda^A{}_B \to \Lambda^A{}_B \, \bar{\Lambda}^{E'}{}_{F'} \leftrightarrow L^a{}_b \in L_{\uparrow}^{\downarrow}$ ist ein Überlagerungshomomorphismus $\sigma\colon G \to L_{\uparrow}^{\downarrow}$.

Der Untergruppe $H_i \subset L_{\uparrow}^{\downarrow}$ entspricht auf Grund dieses Homomorphismus eine Untergruppe $\widetilde{H}_i \subset G$ als σ-Urbild von H_i. Wir nennen $\widetilde{H}_i$ die Spinholonomiegruppe. Sie beschreibt die Parallelverschiebung von Spinoren entlang geschlossener, nullhomotoper Kurven.

Das sieht man folgendermaßen ein: Die kovariante Ableitung ist mit der Zuordnung $t_{ab\ldots} \leftrightarrow t_{AE'BF'\ldots}$ für Tensorfelder vertauschbar. Außerdem sind die Erzeugenden der Lie-Algebra dG Bispinoren* $E^A{}_B$ mit $E^A{}_A = 0$. Es ist dann ein Isomorphismus $d\sigma$ zwischen der Basis $\{E_\mu{}^a{}_b\}$ von dH_i und der Basis $\{E_\mu{}^A{}_B\}$ von $d\widetilde{H}_i$ gegeben durch die Beziehung:

$$E_{\mu ab} \leftrightarrow E_{\mu AE'BF'} = -(E_{\mu AB}\, \bar{\varepsilon}_{E'F'} + \bar{E}_{\mu E'F'}\, \varepsilon_{AB}). \tag{6}$$

(Die infinitesimale Transformation $\rho^A \to (\delta^A{}_B + \varepsilon\, E^A{}_B)\, \rho^B$ induziert nämlich in dem Raum der hermiteschen Spinoren $\varphi^{AE'}$ eine infinitesimale Transformation

$$\varphi^{AE'} \to (\delta^A{}_B + E^A{}_B)\,(\delta^{E'}{}_{F'} + \bar{E}^{E'}{}_{F'})\, \varphi^{BF'} = \left(\delta^{AE'}_{BF'} + (E^A{}_B\, \delta^{E'}{}_{F'} + \bar{E}^{E'}{}_{F'}\, \delta^A{}_B)\right) \varphi^{BF'},$$

woraus wegen $\varepsilon_{AR}\, \delta^R{}_B = -\varepsilon_{AB}$ (6) folgt.)

Insbesondere können wir also dem ${}^a{}_b$-Bereich der Tensoren $\{R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;e}, \ldots\}$ Bispinor-Vektorräume zuordnen mit

$$\{R^a{}_{bcd;e\ldots}\} \leftrightarrow \{R^{AE'}{}_{BE'cd;e\ldots}\}.$$

Dabei ist hervorzuheben, daß trotz der komplexen Komponenten auf beiden Seiten *reelle* Vektorräume stehen.

Für die aus dem Krümmungstensor gemäß $R^A{}_{Bcd} \equiv -\frac{1}{2} R^{AE'}{}_{BE'cd}$ abgeleiteten Krümmungsspinoren gilt $\rho^A{}_{;[bc]} = R^A{}_{Bcd}\, \rho^B$ ** und somit erzeugt $R^A{}_{Bcd}\, \delta x^c\, \delta x^d$ die Parallelverschiebung von ρ^A um das infinitesimale Flächenelement $\delta x^{[c}\, \delta x^{d]}$.

Wir haben jetzt eingesehen, daß $d\widetilde{H}_i$ von dem ${}^A{}_B$-Bereich*** der Krümmungsspinoren $R^A{}_{BCG'DH'}$, $R^A{}_{BCG'DH';e}, \ldots$ reell aufgespannt wird. Um nun die Erzeugenden von $\widetilde{H}_i$ explizit zu beschreiben, können wir zwei Wege gehen:

---

* Darunter verstehen wir zweistufige, symmetrische Spinoren.

** Dies sieht man genau wie im tensoriellen Fall ein: Mit $DD\rho^A = \Omega^A{}_B\, \rho^B$ und $D\rho^A = \rho^A{}_{;c}\, \vartheta^c$ wird die linke Seite zu: $\rho^A{}_{;cd}\, \vartheta^c \wedge \vartheta^d$. Auf der rechten Seite entwickeln wir nach den Basisformen $\Omega^A{}_B = R^A{}_{Bcd}\, \vartheta^c \wedge \vartheta^d$.

*** Hierbei ist gemeint: Der Bereich von $R^A{}_{BCG'DH';e\ldots}\, \varphi^{CG'}\, \rho^{DH'}\, p^e\ldots$ mit hermiteschen Spinoren $\varphi^{CG'}$, $\rho^{DH'}$.

Entweder folgen wir Schritt für Schritt den Ausführungen in Abschnitt 1, indem wir ein komplexes Spindyad entlang einer Schleife parallel verschieben und dann mit Hilfe der spinoriellen Krümmungsform $R^A{}_{BCG'DH'}$ und ihren Ableitungen die Lie-Algebra von $\widetilde{H}_i$ definieren, wonach dann in natürlicher Weise $\widetilde{H}_i$ als Untergruppe von G erscheinen wird[7]. Dabei braucht man von Tensoren gar nicht zu reden, denn man kann den Krümmungsspinor direkt aus dem spinoriellen Zusammenhang nach einem von BICHTELER[8] angegebenen Verfahren berechnen.

Oder aber – und diesen Weg wollen wir hier wählen – man benutzt den Isomorphismus $\sigma_a{}^{AE'}$ zwischen Tensor- und Spinorkomponenten und übersetzt die in 1 gewonnenen Resultate. Mit Hilfe von (6) wird dann

$$\left.\begin{aligned} h^{\mu\nu} E_{\mu ab} E_{\nu cd} \leftrightarrow h^{\mu\nu}(E_{\mu AB} E_{\nu CD}\, \bar{\varepsilon}_{E'F'}\, \bar{\varepsilon}_{G'H'} + E_{\mu AB} \bar{E}_{\nu G'H'}\, \varepsilon_{CD}\, \bar{\varepsilon}_{E'F'} + \\ +\text{konjugierte Ausdrücke}). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nach (5) steht dann auf der rechten Seite das spinorielle Analogon zum Riemann-Tensor, d.h. der Riemann-Spinor[5]

$$\left.\begin{aligned} R_{AE'BF'CG'DH'} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{X}_{ABCD}\, \bar{\varepsilon}_{E'F'}\, \bar{\varepsilon}_{G'H'} + \Sigma_{ABG'H'}\, \varepsilon_{CD}\, \bar{\varepsilon}_{E'F'} + \\ +\text{konjugierte Ausdrücke}). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Vergleichen wir jetzt (7) mit (8) dann erhalten wir die Darstellungen:

$$\mathrm{X}_{ABCD} = \Gamma_{ABCD} - \frac{\Lambda}{3}\, \varepsilon_{A(C}\, \varepsilon_{D)B} = \frac{1}{2}\, h^{\mu\nu} E_{\mu AB} E_{\nu CD}, \tag{9}$$

$$\Sigma_{ABG'H'} = \tfrac{1}{2}\, h^{\mu\nu} E_{\mu AB} \bar{E}_{\nu G'H'}, \tag{10}$$

wobei wir den dual-symmetrischen Spinor X_{ABCD} noch in den spurfreien Weyl-Spinor (Konformspinor) Γ_{ABCD} und den Spuranteil zerlegt haben. $\Sigma_{ABG'H'}$ heißt reduzierter Ricci-Spinor; er verschwindet in Einstein-Feldern ($R_{ab} \sim g_{ab}$) identisch. Im Vakuum beschreibt der Weyl-Spinor allein die Krümmungsform, weil auch $R = 4\Lambda$ verschwindet.

Wir beweisen jetzt den wichtigen 1. Satz.

Satz 1. In Einstein-Räumen kann man $d\widetilde{H}_i$ als komplexe Lie-Algebra auffassen.

Beweis. Wegen des verschwindenden Ricci-Spinors gilt die Dualsymmetrie $R^{*}_{ab\,cd} = R_{ab\,cd}^{\;\;*}$. Setzt man das in (1), (2) ein, so wird jedes $E_\mu{}^{a*}_{\;b}$ Linearkombination der $E_\mu{}^a{}_b$ und somit ist auch das $*$-System Gruppenbasis. Das ist aber gleichbedeutend mit der Aussage, daß mit $E_\mu{}^A{}_B$ auch $-i\,\bar{E}_\mu{}^{E'}{}_{F'}$ Erzeugende von $\widetilde{H}_i$ ist; also ist $d\widetilde{H}_i$ nicht nur

[7] BEIGLBÖCK, W.: Preprint Hamburg 1962.

[8] BICHTELER, K.: Preprint Hamburg 1962 [Z. Physik **178**, 5 (1964)].

über dem reellen, sondern sogar über dem komplexen Zahlkörper eine Lie-Algebra.

Korollar. In Einstein-Räumen ist die (reelle) Dimension von $d\tilde{H}_i$ und damit die von dH_i gerade.

Auf Grund von Satz 1 und der Tatsache, daß der Bispinorraum von drei komplexen Bispinoren aufgespannt wird, finden wir die zu (5) analoge Darstellung:

$$X_{ABCD} = k^{\mu\nu} E_{\mu AB} E_{\nu CD} \tag{11}$$

mit $\mu = 1, \ldots, r/2$ und komplexen Erzeugenden.

3. H_i-Klassifizierung und Petrov-Klassifikation

Wir führen in $x \in V$ ein reelles Sachs-Tetrad[9,4] (x^a, y^a, k^a, l^a; $x_a x^a = y_a y^a = k_a l^a = 1$, alle übrigen Skalarprodukte Null) ein, mit dessen Hilfe wir die sechs linear unabhängigen Bivektoren

$$\left.\begin{array}{lll} E_{1ab} = k_{[a} x_{b]}, & E_{3ab} = x_{[a} y_{b]}, & E_{5ab} = l_{[a} x_{b]} \\ E_{2ab} = k_{[a} y_{b]}, & E_{4ab} = k_{[a} l_{b]}, & E_{6ab} = l_{[a} y_{b]} \end{array}\right\} \tag{12}$$

bilden können. Mit Hilfe dieser Bivektoren können die Krümmungstensoren der Einstein-Räume bilinear dargestellt werden[6]. Von dem reellen Sachs-Tetrad kann man zu einem komplexen Spindyad übergehen (κ^A, μ^A; $\kappa_A \mu^A = 1$), aus dem man die komplexen Bispinoren

$$E_{1AB} = \kappa_A \kappa_B, \qquad E_{2AB} = \kappa_{(A} \mu_{B)}, \qquad E_{3AB} = \mu_A \mu_B \tag{13}$$

aufbauen kann. Die so gewonnenen Bispinoren (13) entsprechen eineindeutig[4] den reellen Bivektoren (12), sofern wir implizieren, daß κ^A und μ^A bzw. den lichtartigen Vektoren k^a und l^a entsprechen. Dabei erzeugt:

E_{3ab} räumliche Drehungen in der (x, y)-Ebene,

E_{4ab} Minkowski-Drehungen in der (k, l)-Ebene,

E_{1ab}, E_{2ab} Nulldrehungen um k. E_{5ab}, E_{6ab} Nulldrehungen um l.

Unter dem H_i-Typ einer Mannigfaltigkeit V wollen wir die Dimension der Holonomiegruppe zusammen mit der Angabe, ob die Gruppe perfekt oder imperfekt ist, verstehen. Die so definierte Klasseneinteilung wollen wir mit der Petrov-Klassifikation der Weyl-Tensoren (Konformkrümmungstensoren) vergleichen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig mit den Krümmungsspinoren und der Spinholonomiegruppe $\tilde{H}_i$ zu operieren.

---

[9] Sachs, R. K.: Proc. Roy. Soc. A **270**, 103—126 (1962).

Jeder Weyl-Spinor gestattet genau eine der folgenden Normaldarstellungen[5,6] *:

$$\left.\begin{aligned}
N_{ABCD} &= \kappa_A \kappa_B \kappa_C \kappa_D \\
III_{ABCD} &= \kappa_A \kappa_B \kappa_{(C} \mu_{D)} + \kappa_{(A} \mu_{B)} \kappa_C \kappa_D \\
D_{ABCD} &= -s(4\kappa_{(A} \mu_{B)} \kappa_{(C} \mu_{D)} + \kappa_A \kappa_B \mu_C \mu_D + \mu_A \mu_B \kappa_C \kappa_D) \\
II_{ABCD} &= -s(4\kappa_{(A} \mu_{B)} \kappa_{(C} \mu_{D)} + \kappa_A \kappa_B \mu_C \mu_D + \mu_A \mu_B \kappa_C \kappa_D) + \\
&\quad + 4\kappa_A \kappa_B \kappa_C \kappa_D \\
I_{ABCD} &= D_{ABCD} + N_{ABCD} + N'_{ABCD} \quad \text{mit} \quad D_{ABCD} \neq 0 \\
H_{ABCD} &= N_{ABCD} + N'_{ABCD}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Normaldarstellungen sind bezüglich der Bispinoren $\kappa_A \kappa_B$, $\mu_A \mu_B$, $\kappa_{(A} \mu_{B)}$ eindeutig, außer im allgemeinen Typ, wo drei mögliche Zerlegungen bestehen, die wir in einer Additionsformel zusammengefaßt haben. Für die algebraische Behandlung ist es im weiteren zweckmäßig den Typ I in $D_{ABCD} \neq 0$ und $D_{ABCD} = 0$ aufzuspalten.

Durch Übersetzen der entsprechenden Definition in Abschnitt 1 erhalten wir folgenden

Hilfssatz. Die $\tilde{H}_i$ ist perfekt, wenn der ${}^{A}{}_{B}$-Bereich von $X^{A}{}_{BCD;e_1\ldots e_s}$ $(s=1, 2, \ldots)$ in dem ${}^{A}{}_{B}$-Bereich von $X^{A}{}_{BCD}$ enthalten ist.

Zuerst behandeln wir das Vakuum; dort ist nach (9) $X_{ABCD} = \Gamma_{ABCD}$, und der reduzierte Ricci-Tensor ist Null. Daraus erhalten wir mit (11), (14) durch Ablesen:

Tabelle (15)

Petrov-Typ	Erzeugende der $\tilde{H}_i$	Erzeugende der H_i	Dim (H_i)
N	$\kappa_A \kappa_B$	$k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$	2
III	$\kappa_A \kappa_B$, $\kappa_{(A} \mu_{B)}$	$k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$, $x_{[a} y_{b]}$, $k_{[a} l_{b]}$	4
H	$\kappa_A \kappa_B$, $\mu_A \mu_B$	$k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$, $l_{[a} x_{b]}$, $l_{[a} y_{b]}$	4
D, II, I	alle	alle	6

für die perfekten Gruppen. Der Kommutator von $\kappa_A \kappa_B$, $\mu_A \mu_B$ ist nicht Linearkombination dieser Bispinoren und somit kann der Vakuum-*H*-Typ mit perfekter H_i nicht existieren; wir zeigen noch mehr:

Hilfssatz. In speziellen Einstein-Räumen gibt es keine Typ-*H*-Felder.

Beweis**. Aus den Bianchi-Identitäten

$$(\kappa_A \kappa_B \kappa_C \kappa_D)^{;DE'} + (\mu_A \mu_B \mu_C \mu_D)^{;DE'} = 0$$

* Das ist etwas verfeinert die von PETROV angegebene Typen-Klassifizierung.

** Private Mitteilung von Dr. J. EHLERS.

folgt Geodäsie und Verzerrungsfreiheit der Kongruenz; nach dem Satz von GOLDBERG u. SACHS[10] ist das Feld also vom speziellen Petrov-Typ, entgegen der Voraussetzung.

Für imperfekte Gruppen gilt der 2. Satz.

Satz 2. Jede imperfekte H_i ist im Vakuum sechsdimensional.

Beweis. Es gilt immer $\kappa_{A;e}=a_e\,\kappa_A+b_e\,\mu_A$; dann unterscheiden wir

1. $b_e=0$: $(\kappa_A\,\kappa_B)_{;e}\sim\kappa_A\,\kappa_B$ und $(\kappa_{(A}\,\mu_{B)})_{;e}=\mathrm{Lin}(\kappa_{(A}\,\mu_{B)},\kappa_A\,\kappa_B)$ woraus durch Vergleich mit (14) folgt, daß $\tilde{H}_i$ perfekt ist.

2. $b_e\neq 0$: $(\kappa_A\,\kappa_B)_{;e}=\mathrm{Lin}(\kappa_{(A}\,\mu_{B)},\kappa_A\,\kappa_B)$, während $(\kappa_{(A}\,\mu_{B)})_{;e}$ und $(\kappa_A\,\kappa_B)_{;ef}$ Linearkombinationen aller Bispinoren sind. Der Vergleich mit (14) beweist dann den Satz.

Obiger Beweis liefert uns gleichzeitig die explizite Lie-Algebra $d\tilde{H}_i$; sie wird aufgespannt im N-Fall durch den ${}^A{}_B$-Bereich von* $\Gamma^A{}_{BCD}$, $\Gamma^A{}_{BCD;e}$, $\Gamma^A{}_{BCD;ef}$ und im III-Fall von $\Gamma^A{}_{BCD}$, $\Gamma^A{}_{BCD;e}$.

Er liefert uns darüber hinaus noch das

Korollar. Kennzeichnend für die Perfektheit von H_i ist im Vakuum die Rekurrenz des Weyl-Spinors.

Für Einstein-nicht-Vakuum-Räume behaupten wir außerdem den 3. Satz.

Satz 3. Eine Mannigfaltigkeit V mit $R_{ab}\sim g_{ab}$ und $R\neq 0$ hat stets eine sechsdimensionale H_i.

Der *Beweis* erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst stellen wir fest, daß X_{ABCD} allein die Krümmungsform beschreibt. Um X_{ABCD} auszurechnen, stellen wir die Spinmetrik dar als $\varepsilon_{AB}=2\kappa_{[A}\,\mu_{B]}$ und dann wird:

$$\varepsilon_{A(C}\,\varepsilon_{D)B}=2\kappa_{(A}\,\mu_{B)}\,\kappa_{(C}\,\mu_{D)}-\kappa_A\,\kappa_B\,\mu_C\,\mu_D-\mu_A\,\mu_B\,\kappa_C\,\kappa_D\,. \tag{16}$$

Setzt man (16) in (9) ein, dann liest man mit (14) ab, daß in den Fällen Typ N und III die Gruppe sechsdimensional ist. Im Typ D, II, I bzw. könnte man durch $R=-24s$ erreichen, daß $\kappa_A\,\kappa_B$, $\mu_A\,\mu_B$ allein die Gruppe erzeugen. Da jedoch die dazu gehörige $d\tilde{H}_i$ nicht Lie-abgeschlossen ist, kann dieser Fall nicht auftreten; also ist H_i im Typ I sicher sechsdimensional**. In den Fällen Typ D und II bzw. könnte man durch $R=12s$ erreichen, daß $\kappa_{(A}\,\mu_{B)}$ und $\kappa_A\,\kappa_B$, $\kappa_{(A}\,\mu_{B)}$ den Krümmungsspinor aufbauen. Mit analytischen Mitteln werden wir im nachfolgenden Hilfssatz diesen Fall ausschließen und H_i ist auch für Typ D, II sechsdimensional.

* $\Gamma^A{}_{BCD}$, $\Gamma^A{}_{BCD;e}$ allein ergeben bei nicht-rekurrentem κ^A keine Lie-abgeschlossene Algebra.

** Typ D, II, I hat bei $R=-24s$ hier notwendig eine imperfekte H_i.

[10] GOLDBERG, J. N., and R. K. SACHS: Dept. Math. King's Coll. London, preprint 1961. — KUNDT, W., and A. THOMPSON: Compt. rend. **254**, 4257 (1962).

Hilfssatz. In nicht leeren Einstein-Räumen vom Typ D, II gibt es keine von $\kappa_{(A}\,\mu_{B)}$ oder $\kappa_A\,\kappa_B$, $\kappa_{(A}\,\mu_{B)}$ erzeugte $\tilde{H}_i$.

Beweis. Nach dem Satz 4 im vierten Abschnitt ist κ^A ein rekurrenter Spinor und somit ist die Komponente des Spinzusammenhangs* $\omega^1{}_0=0$. Wegen Typ D, II ist $\Gamma_{0000}=\Gamma_{0001}=0$ und wegen $R=12s$ ist $\Gamma_{0011} = -\frac{R}{12}$. Dann wird aber $-\frac{R}{6}\,\vartheta^{11}=\Omega^1{}_0=d\omega^1{}_0+2\omega^1{}_0\wedge\omega^0{}_0=0$ und daraus $R=0$ entgegen der Voraussetzung.

Damit ist der algebraische Teil abgeschlossen. Er hat die Ergebnisse von SCHELL[1], GOLDBERG u. KERR[2] bestätigt, was den Vergleich von Petrov-Typ mit dem H_i-Typ betrifft. Neu dagegen ist der Satz 3, da SCHELL noch $\mathrm{Dim}(H_i)=2$, 4 für nicht-Vakuum-Einstein-Räume zuläßt, die wir mit unserer Methode aber ausschließen konnten.

4. Konstruktion von Linienelementen

Satz 4. Sei $\mathrm{Dim}(H_i)\geqq 2$ und $E_\mu{}^a{}_b\,v^b=r_\mu\,v^a\,(+)$ für alle $E_\mu{}^a{}_b$; dann gilt für ein Vektorfeld über V:

1**. $v^a{}_{;b}=v^a\,r_b$ mit $r_{[b,c]}=0$ genau, wenn $r_\mu=0$ für alle μ.

2. $v^a{}_{;b}=v^a\,r_b$ mit $r_{[b,c]}\neq 0$ genau, wenn $r_\mu\neq 0$ für wenigstens ein μ.

Beweis. Aus der Ricci-Identität folgt $R^a{}_{bcd}\,v^b=r_{[c,d]}\,v^a$. Differenziert man diese Beziehung dann erkennt man, daß aus der linken Seite die rechte folgt, wenn man noch (2) ausnutzt.

Für die Umkehrung bemerken wir ohne Beweis (s. LICHNÉROWICZ[3], S. 148), daß man aus jedem Vektor mit $(+)$ ein kovariant konstantes (falls $r_\mu=0$) bzw. ein rekurrentes (falls $r_\mu\neq 0$) Vektorfeld erzeugen kann. Sei $v^a(x')$ der Wert unseres gegebenen Feldes in x'; dann bezeichne $v^a(x',x)$ das daraus erzeugte rekurrente Feld. Machen wir das für alle x', dann erhalten wir Felder, deren Werte in einem festen Punkt x_0 die Vektoren $v^a(x',x_0)$ sind. Sie erfüllen nach Konstruktion und dem bereits Bewiesenen $(+)$. Die linear unabhängigen Richtungen darunter ergänzen wir zu einem orthonormalen Vierbein (bzw. einem Sachs-Tetrad, falls v^a ein Nullvektor ist) e^a_i, aus dem wir eine Bivektorbasis $e^{[a}_i\,e^{b]}_k$ bilden, die auch Gruppenbasis ist. Gebe es nun vier bzw. drei unabhängige Richtungen, dann existiert kein Bivektor, der $(+)$ für alle 4 bzw. 3 Richtungen identisch erfüllt; also ist die Welt flach. Für zwei unabhängige*** Richtungen (o.E. e^a_1, e^a_2) können wir $(+)$ gleichzeitig genau mit einem Bivektor $(e^{[a}_3\,e^{b]}_4)$ erfüllen; H_i ist eindimensional. Beides widerspricht der Voraussetzung. Gibt es dagegen nur eine unabhängige

* Wir benutzen die Bezeichnungen aus [8].

** Solche Felder kann man kovariant konstant eichen.

*** Falls beide lichtartig sind, erreicht man $V=V^2\oplus\bar{V}^2$ $(r_\mu\neq 0)$ bzw. $V=V^2\oplus R^2$ $(r_\mu=0)$.

Richtung, dann muß gelten: $v^a(x_0) = r(x')\, v^a(x', x_0)$, woraus mit der Vorbemerkung unmittelbar die Behauptung folgt.

Wir bemerken noch, daß dieser Satz auch für Spinoren richtig ist, da wir ja nur die Torsionsfreiheit und die Linearität des Zusammenhangs ausgenutzt haben. Der Satz wird sich im folgenden als sehr nützlich zur Auffindung von Eigenschaften der Felder bei bekannter H_i erweisen.

A. Vakuumfelder mit zweidimensionaler H_i. Wir verwenden hier die Spinholonomiegruppe. Aus der Tabelle (15) erkennen wir, daß solche Felder notwendig vom Petrov-Typ N sind und von $\kappa_A \kappa_B$ (also: $k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$) erzeugte, perfekte H_i haben. Nach Satz 4 existiert ein kovariant konstantes Spinorfeld κ^A und somit auch Bispinorfeld $\kappa^A \kappa^B$. Es gibt also ein lichtartiges, kovariant konstantes Vektorfeld k^a und zwei kovariant konstante, lichtartige Zweiflächen $k_{[a} x_{b]}, k_{[a} y_{b]}$. Ersteres bedingt, daß die optischen Skalare[6,8] $\kappa_{A;BF'}\, \kappa^A \kappa^B \bar{\kappa}^{F'} = \kappa_{A;BF'}\, \kappa^A \kappa^B \bar{\mu}^{F'} = \kappa_{A;BF'}\, \kappa^A \mu^B \bar{\kappa}^{F'} = \kappa_{A;BF'}\, \kappa^A \kappa^B \bar{\kappa}^{F'} = 0$ sind, die Nullkongruenz also geodätisch, verzerrungs-, expansions-, drill- und rotationsfrei ist. Aus letzterem und (11) ergibt sich, daß der Weyl-Spinor rekurrent ist. Alle diese hier mühelos abgeleiteten Eigenschaften kennzeichnen eindeutig die pp-Wellen[11,12], für die das Linienelement lautet: $G = |dz|^2 + 2du\, dv + H(x, y, u)\, du^2$ mit $H_{,xx} + H_{,yy} = 0$. Dabei ist v der affine Parameter auf der Strahlenkongruenz k^a, u die Phase und x, y $(x + i y = z)$ sind die Koordinaten in den Wellenflächen.

B. Vakuumfelder mit vierdimensionaler H_i. Hier ergibt Tabelle (15), daß das Feld vom Petrov-Typ III ist und die notwendig perfekte H_i von $\kappa_A \kappa_B$, $\kappa_{(A} \mu_{B)}$ (also: $k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$, $x_{[a} y_{b]}$, $k_{[a} l_{b]}$) aufgespannt wird. Satz 4 gewährleistet die Existenz eines lichtartigen, rekurrenten Strahlvektors k^a, für den wir o.E. erreichen können, daß $k_{a;b} = r\, k_a k_b$ ist, woraus folgt, daß die Kongruenz hyperflächenorthogonal ist, d.h. $k_{[a} k_{b;c]} = 0$. Wieder ist die Kongruenz geodätisch, drill-, expansions-, verzerrungs- und rotationsfrei. Die beiden ersten Eigenschaften davon ergeben, daß die Felder endliche Wellenflächen haben. Damit haben wir die kennzeichnenden Eigenschaften der Metrik[2,11,13] $G = |dz|^2 + 2du\big(dv + f(x, y, u)\, dx + g(x, y, u, v)\, du\big)$ aufgefunden.

C. Allgemeine Felder mit vierdimensionaler H_i. Durch Kommutatorbildung erkennt man, daß die zu $k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} y_{b]}$, $k_{[a} l_{b]}$, $x_{[a} y_{b]}$ gehörende Gruppe H_i die einzige vierdimensionale Holonomiegruppe in V ist. Wir können sie spinoriell behandeln mit $\kappa_A \kappa_B$, $\kappa_{(A} \mu_{B)}$ als Erzeugende. Wieder schließen wir mit Satz 4, daß solche Fehler einen rekurrenten,

---

[11] ROBINSON, I., and A. TRAUTMAN: Proc. Roy. Soc. (London) A **265**, 463 (1962).

[12] KUNDT, W.: Z. Physik **163**, 77 (1961); — Akad. Wiss. Lit. Mainz (math.-nat. Kl.) **12**, 980 (1962).

[13] CAHEN, M., et R. DEBEVER: Bull. Cl. Sci. acad. Roy. Belg., Ser. V **47**, 6 (1962).

lichtartigen, also notwendig hyperflächenorthogonalen Strahlvektor k^a haben. Hieraus weiter, daß die zugehörige Nullkongruenz notwendig geodätisch, drill-, expansions-, verzerrungs- und rotationsfrei ist. Mit den Mitteln des äußeren Differentialkalküls und dem Satz von FROBENIUS für Differentialformen wird in [8] gezeigt, daß das Linienelement einer verzerrungsfreien, normalen Strahlkongruenz die Gestalt $G=\exp(2A)\,|dz+B\,du|^2+2du(dv+H\,du)$ mit reellen A und komplexen B hat. Wegen der Rekurrenz von κ^A gilt $\omega^1{}_0=\frac{1}{2}e^{-A}(e^{2B}\bar{B})_v\,du+A_v e^A d\bar{z}=0$ und hieraus also $A_v=0=B_v$. Der Satz von GOLDBERG u. SACHS[10] liefert, daß das Feld von Petrov-Typ *II, D, III, N* sein muß. Aus (8), (9), (10), (14), (16) kann man im Fall der perfekten H_i weiter schließen, daß für $R\neq 0$ das Feld vom Typ *II, D* sein muß mit $\Gamma_{0011}=R/12$; nach Satz 3 ist das Feld kein Einstein-nicht-Vakuum-Feld. Für $R_{ab}\sim k_a k_b$ ist das Feld Typ *III* (hierzu ist B ein Spezialfall).

Da es in V mit Signatur $+2$ keine fünfdimensionale H_i geben kann[1], was man durch Kommutatorbildung erkennt, ist dies das allgemeinste Feld für das man mit Hilfe der H_i irgendwelche Eigenschaften für die Konstruktion von Linienelementen erschließen kann. Dieses Feld jedoch ist von einer sehr einfachen Bauart und man muß an dieser Stelle zu dem Schluß kommen, daß die H_i-Klassifikation von Welten nur in sehr wenigen Spezialfällen eine nützliche Information gibt.

Alle Felder, die man aus Gruppen der Dimension $r\leqq 3$ erhält, sind Spezialfälle von C, da ja die zugehörigen Gruppen Untergruppen der in C auftretenden Gruppe sind. Diese Felder wurden schon in [13] ausgerechnet. Da wir glauben, die von uns vorgeschlagene Methode zur Gewinnung von Metriken bereits genügend illustriert zu haben, begnügen wir uns mit einer kurzen Zusammenfassung der Ergebnisse. Alle Felder werden die Eigenschaften aus C haben. Außerdem gilt für sie:

D. Dreidimensionale H_i. Davon gibt es zwei Lie-abgeschlossene Gruppen:

a) $k_{[a}x_{b]}$, $k_{[a}y_{b]}$, $k_{[a}l_{b]}$ als Erzeugende führen zu zwei rekurrenten, lichtartigen Zweiflächen, woraus folgt, daß A der Laplace-Gleichung genügt. Man kann dann erreichen $G=|dz|^2+2du\,dv+C\,du^2$.

b) $k_{[a}x_{b]}$, $k_{[a}y_{b]}$, $x_{[a}y_{b]}$ führt zu dem Linienelement aus C mit der Zusatzbedingung $H_v=0$. Beide Felder sind Typ *D, II* und für $R=0$ vom Typ *III*.

E. Zweidimensionale H_i. Hier gibt es drei verschiedene Lie-abgeschlossene Gruppen:

a) $k_{[a}l_{b]}$, $x_{[a}y_{b]}$. Hier empfiehlt sich auch mit der Spinholonomiegruppe H_i zu rechnen, wobei dann $\kappa_{(A}\mu_{B)}$ Erzeugende ist. Wegen der

Symmetrie existiert noch ein zweiter lichtartiger, rekurrenter Vektor l^a und es folgt $\omega^0{}_1 = 0 = \omega^1{}_0$. Also gilt für alle durch $G = -2\vartheta^t \vartheta^{\bar{t}} + 2\vartheta^k \vartheta^l$ festgelegten Formen $d\vartheta^i \wedge \vartheta^i = 0$ $(i = t, \bar{t}, k, l)$ und daraus mit dem Satz von FROBENIUS[8] für das Linienelement $G = -\exp(2C)\,|dz|^2 + \exp(2H)\, du\, dv$ mit $C = C(x, y)$ und $H = H(u, v)$. Aus diesem Linienelement errechnet man etwa mit den in [8] angegebenen Formeln, daß nur die Komponente $\Gamma_{0011} = -e^{-2C} C_{z\bar{z}} - \frac{1}{2} H_{vv}$ von Null verschieden ist. Das Feld ist also vom Typ D. Weiter ist $\Sigma_{010'1'}$ die einzige von Null verschiedene Komponente des Ricci-Spinors mit $\Sigma_{010'1'} = \frac{1}{2}(2e^{-2C} C_{z\bar{z}} - H_{vv})$. Es ist $R = -8\Gamma_{0011}$. $R \neq 0$ ist also notwendig, da sonst entgegen der Voraussetzung flache Welt vorliegen würde. Das bedeutet, daß reine Strahlungsfelder ausgeschlossen sind. Es existiert noch ein kovariant konstantes Bivektorfeld nach Satz 4.

b) $k_{[a}\, x_{b]}, k_{[a}\, y_{b]}$. Das Feld hat eine Untergruppe von $D(a)$, $D(b)$ als H_i und daher alle unter D angeführten Eigenschaften. Es läßt sich spinoriell beschreiben mit $\kappa_A\, \kappa_B$ und dann ergibt sich, daß für perfekte H_i notwendig $R = 0$ sein muß; wir haben es mit reinen (elektromagnetischen, gravischen) Strahlungsfeldern zu tun und der Petrov-Typ ist N. Das Linienelement ist $D(a)$ mit $C_v = 0$. Hierzu ist A ein Spezialfall.

c) $k_{[a}\, x_{b]}, k_{[a}\, l_{b]}$. Hier haben wir eine Untergruppe von $D(a)$, doch existiert noch ein kovariant konstanter, raumartiger Vektor. Also gilt $C_y = 0$ in dem Linienelement aus $D(a)$. Das Feld ist Typ D, II und notwendig $R \neq 0$. Also sind reine Strahlungsfelder ausgeschlossen.

F. Eindimensionale H_i. Hier unterscheiden wir drei Fälle:

a) $x_{[a}\, y_{b]}$. Hier hat man das Linienelement $E(a)$ mit $H = 0$. Das Feld ist Typ D mit $R \neq 0$ und H_i ist trivialerweise perfekt.

b) $k_{[a}\, l_{b]}$. Hier gilt $E(a)$ mit $C = 0$ im Linienelement. Wieder ist es ein D-Feld mit $R \neq 0$.

c) $k_{[a}\, x_{b]}$. Hier handelt es sich um eine gemeinsame Untergruppe von $E(b)$, $E(c)$. Es gilt $C_v = C_y = 0$ mit dem Linienelement aus $D(a)$. Das Feld ist Typ N mit $R = 0$.

G. Als Holonomiegruppe taucht noch $k_{[a}\, x_{b]}, k_{[a}\, y_{b]}, a\, x_{[a}\, y_{b]} + b\, k_{[a}\, l_{b]}$ als dreidimensionale, für $a, b \neq 0$ notwendig perfekte H_i auf. Dies impliziert einen Typ III mit $R \neq 0$.

Im folgenden soll noch etwas über imperfekte H_i gesagt werden. Erst stellen wir fest, daß alle unter F aufgeführten Gruppen trivialerweise perfekt sind. Wird der Krümmungstensor von $k_{[a}\, x_{b]}$ aufgespannt, dann kann der Fall $E(b)$, imperfekte H_i auftreten. Doch heißt ersteres: Typ N, $R = 0$ und somit sind *alle* $E(b)$ Felder Typ N, $R = 0$. Die Felder $E(a)$ sind notwendig perfekt, während ein aus $k_{[a}\, l_{b]}$ aufgebauter Krümmungstensor eine imperfekte H_i vom Typ $E(c)$ nach sich ziehen kann.

Damit sind die imperfekten $E(c)$-Felder notwendig Typ D mit $R \neq 0$. Da $E(c)$ keinen N-Typ zuläßt kann dort keine imperfekte H_i existieren, bei der $k_{[a} x_{b]}$ den Riemann-Tensor aufspannt. Aus demselben Grund gibt es keine Typ $D(a)$, $D(b)$-Felder deren Krümmungstensor aus den unter $F(c)$ bzw. $E(b)$ aufgeführten Erzeugenden gebildet wird. Wird er gebildet aus den Erzeugenden von $F(b)$ bzw. $E(c)$, dann können wir eine imperfekte Gruppe vom Typ $D(a)$ erhalten, die notwendig Typ D, II ist. Nur ein aus $x_{[a} y_{b]}$ aufgespannter Krümmungstensor kann zu $D(b)$ führen und somit sind dort die imperfekten Gruppen notwendig vom Petrov-Typ D.

In Fall C können wir eine ganze Reihe von imperfekten Gruppen finden. Wir tabellieren das Ergebnis: Werde der Riemann-Tensor aufgespannt von den Erzeugenden unter

$$\left.\begin{array}{llll} F(c), & E(b) & & \\ F(a), & F(b), & E(a) & \\ E(c) & & & \\ D(a), & D(b) & \text{mit} & R=0 \\ D(a), & D(b) & \text{mit} & R\neq 0 \end{array}\right\} \text{ dann folgt } \left\{\begin{array}{ll} R=0, & \text{Typ } N \\ R\neq 0, & \text{Typ } D \\ R\neq 0, & \text{Typ } D, II \\ R=0, & \text{Typ } III \\ R\neq 0, & \text{Typ } D, II. \end{array}\right.$$

Imperfekte Gruppen in $D(b)$, C können aus einem von $k_{[a} x_{b]}$, $x_{[a} y_{b]}$ aufgespannten Riemann-Tensor entstehen und sind dann vom Typ D mit $R \neq 0$. Wird der ${}^a{}_b$-Bereich der Krümmungsform von $k_{[a} x_{b]}$, $k_{[a} l_{b]}$, $x_{[a} y_{b]}$ aufgespannt, haben wir noch eine imperfekte H_i aus C mit einem Feld vom Typ D, $R \neq 0$.

Damit haben wir alle imperfekten Gruppen mit $\mathrm{Dim}(H_i) \leqq 4$ untersucht, ihr zugehöriges Linienelement angegeben und den zugelassenen Petrov-Typ genannt.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. P. JORDAN für die Unterstützung dieser Arbeit und den Mitgliedern des Hamburger Seminars für Allgemeine Relativitätstheorie für wertvolle Diskussionen. Besonderer Dank gebührt Dr. J. EHLERS für eine detaillierte Kritik dieser Veröffentlichung. Ich danke auch dem Bundesministerium für Wissenschaftliche Forschung für Unterstützung.