Zeitschrift für Physik 182, 521—523 (1965)

Aus dem Seminar für Allgemeine Relativitätstheorie der Universität Hamburg

Bemerkungen über relativistische Stoßinvarianten

Von

KLAUS BICHTELER

(Eingegangen am 28. Oktober 1964)

The relativistic analogue of the theorem of GRAD is proven stating that the general additive collision invariant is given by the expression $\beta_a p^a + c$. It is used to determine the equilibrium distribution of a 1-component general relativistic quantum gas. The proof is not analogous to the one initially given by GRAD[1], but covers the non-relativistic case.

Der Phasenraum P für ein Gaspartikel der Ruhmasse m im Gravitationsfeld $(V^4, g_{ab}(x))$ ist die Vereinigung der Massenhyperboloide

$$H_x := [p^a p^b g_{ab}(x) = -m^2,\ p^0 > 0]\,{}^\star$$

über alle x aus V^4. Der Zustand eines Gases wird im Sinne der Boltzmannschen Gaskinetik beschrieben durch eine Verteilungsfunktion $F(x, I)$, $x \in V^4$, $I \in H_x$ (cf. [2]). Die Dynamik des Gases liefert der folgende Stoßzahl-Ansatz für die Erzeugungsdichte $q(x, I)$ der Teilchenbahnen im Punkt (x, I) von P (cf. [3]):

$$\left.\begin{aligned} q(x,\mathrm{I}) = -\iiint \{F(x,\mathrm{I})\,F(x,\mathrm{II}) - F(x,\mathrm{III})\,F(x,\mathrm{IV})\} \times \\ \times\,\delta(p_{\mathrm{I}}^a + p_{\mathrm{II}}^a - p_{\mathrm{III}}^a - p_{\mathrm{IV}}^a) \times W(\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}) \times dP_{\mathrm{II}}\,dP_{\mathrm{III}}\,dP_{\mathrm{IV}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei bestimmt $W(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei mit den Impulsen p_{I}, p_{II} aufeinander stoßende Teilchen mit den Impulsen p_{III}, p_{IV} weiterlaufen. Der δ-Faktor trägt dem Impulssatz Rechnung, und dP ist das Lorentz-invariante Lebesguesche Maß auf H_x.

Man beweist nun [4–6], daß die Entropie eines Gases genau dann zunimmt, wenn $\int q(x, I)\, dP \neq 0$, und definiert daher ein Gas als im Gleichgewicht befindlich, wenn $\int q(x, I)\, dP = 0$. Nimmt man an, daß

$\star$ „$:=$" bezeichnet die definitorische Gleichheit; die Größe auf Seiten des Doppelpunkts wird definiert.

[1] GRAD, H.: Comm. Pure Appl. Math. **2**, 331 (1949).

[2] SYNGE, J. L.: The Relativistic Gas. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1957.

[3] LICHNEROWICZ, A., et R. MARROT: Compt. rend **210**, 759 (1940).

[4] TAUBER, J.W., and G.E. WEINBERG: Phys. Rev. **122** (4) (1961).

[5] EHLERS, J.: Abhandl. Akad. Wiss. Mainz, Math.-Naturw. Kl. 1961, Nr. 11.

[6] ISRAEL, W.: J. Math. Phys. **4** (9) (1963).

alle mit dem Impulssatz verträglichen Stöße auch mit positiver Wahrscheinlichkeit W auftreten, so muß für eine Gleichgewichtsverteilung F offenbar die geschweifte Klammer in (1) auf der Stoßmannigfaltigkeit

$$S := [p_{\mathrm{I}}^a + p_{\mathrm{II}}^a - p_{\mathrm{III}}^a - p_{\mathrm{IV}}^a = 0] \tag{2}$$

verschwinden. Es gilt, die Gestalt der Gleichgewichtsverteilungen aus dieser Eigenschaft zu bestimmen.

Wir betrachten nun F auf dem Massenhyperboloid in einem festen Punkt $x \in V^4$ und definieren f durch $f(I) := \ln F(x, I)$. Wir haben dann folgende mathematische Aufgabe zu lösen: Auf der dreidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit

$$H^3 := [p^2 = -m^2,\; p^0 > 0]$$

sind fünf Funktionen p^a, f definiert. Die daraus auf dem vierfachen cartesischen Produkt von H^3 mit sich selbst,

$$M := H^3 \times H^3 \times H^3 \times H^3,$$

dessen Punkte mit $m = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$ bezeichnet werden, konstruierten Funktionen $f_{\mathrm{I}}(m) := f(I)$, $f_{\mathrm{II}}(m) := f(\mathrm{II}), \ldots, p_{\mathrm{I}}^a$ usf. haben die Eigenschaft, daß $\Delta f := f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{II}} - f_{\mathrm{III}} - f_{\mathrm{IV}}$ auf der Stoßmannigfaltigkeit S verschwindet. f ist zu bestimmen.

Satz. Unter den oben genannten Umständen ist $f = \beta_a p^a + c$ mit Konstanten β_a, c.

Dieser Satz ist offenbar das relativistische Analogon des Satzes von GRAD[1].

Beweis. Man sieht zunächst, daß für die Funktionen des Satzes tatsächlich $\Delta f = 0$ auf S. Aus $\Delta f = 0$ auf S folgt andererseits $d(\Delta f) = \beta_a(s)\, d(\Delta p^a)$ auf S für gewisse Funktionen β_a von $s \in S$, und damit

$$\left.\begin{aligned} d f_{\mathrm{I}} &= \beta_a(s)\, d p_{\mathrm{I}}^a \\ d f_{\mathrm{II}} &= \beta_a(s)\, d p_{\mathrm{II}}^a \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{ auf } S. \tag{3}$$

Für die Restriktionen $\bar{f}_{\mathrm{I}}, \bar{f}_{\mathrm{II}}, \ldots$ von $f_{\mathrm{I}}, f_{\mathrm{II}}, \ldots$ auf S bleiben die Gln. (3) mit Querstrichen auf den f's richtig, und man erhält durch nochmalige äußere Differentiation*

$$0 = d\beta_a \wedge d p_{\mathrm{I}}^a = d\beta_a \wedge d p_{\mathrm{II}}^a \quad \text{auf } S. \tag{4}$$

Aus $p_a p^a = -m^2$ folgt nun

$$p_a\, d p^a = 0, \tag{5}$$

* Im Sinne der Theorie Pfaffscher Formen, cf. e.g. RHAM, G. DE: Variétés differentiables. Paris: Hermann 1955.

und daher sind von den acht linearen Gleichungen

$$d p_{\mathrm{I}}^{a}(X) = d p_{\mathrm{II}}^{a}(X) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4, \tag{6}$$

sechs linear unabhängig. Die Gln. (6) zeichnen also in jedem Punkt der 8-dimensionalen Mannigfaltigkeit S eine zweidimensionale Schar von Tangenten X aus. Man setzt nun ein solches X in die Gln. (4) ein und erhält $0 = d\beta_a(X)\, dp_{\mathrm{I}}^a = d\beta_a(X)\, dp_{\mathrm{II}}^a$. Andererseits ist (5) auch bis auf Faktoren die einzige Abhängigkeit zwischen den dp^a. Es folgt: $d\beta_a(X)$ ist proportional zu $p_{\mathrm{I}a}$ und $p_{\mathrm{II}a}$, also gleich Null auf der offenen Menge $p_{\mathrm{I}}^a \neq p_{\mathrm{II}}^a$. Setzt man β_a als stetig differenzierbar voraus – wegen (3) ist das der Fall, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist –, so ist also $d\beta_a(X) = 0$ für alle X aus (6). Das heißt aber, daß β_a von den Koordinaten III und IV nicht abhängt. Indem man von einer anderen Indexkombination als I, II in (3) ausgehend dieselben Betrachtungen durchführt, sieht man, daß β_a konstant ist. Aus (3) folgt die Behauptung.

Aus dem Verschwinden der geschweiften Klammer in (1) auf S im Gleichgewicht folgt also $F(x, I) = \exp(\beta_a(x)\, p_{\mathrm{I}}^a + c(x))$, da die β_a, c von Massenhyperboloid zu Massenhyperboloid variieren können. Berücksichtigt man in der Stoßgleichung (1) nun noch die Fermi-Statistik ($\varepsilon = -1$) oder die Bose-Statistik ($\varepsilon = +1$), so hat man die geschweifte Klammer in (1) zu ersetzen durch (Abhängigkeiten von $x \in V^4$ nicht ausgeschrieben):

$$F(\mathrm{I})\,F(\mathrm{II})\big(1+\varepsilon F(\mathrm{III})\big)\big(1+\varepsilon F(\mathrm{IV})\big) - F(\mathrm{III})\,F(\mathrm{IV})\big(1+\varepsilon F(\mathrm{I})\big)\big(1+\varepsilon F(\mathrm{II})\big).$$

Man erhält dann aus $\int q(x, I)\, dP = 0$ $\Delta f = 0$ für die Funktion $f(I) := \ln F(x, I) - \ln(1 + \varepsilon\, F(x, I))$ und kann nun den Satz oben anwenden, um in der Boltzmannschen Gaskinetik die bekannten Gleichgewichtsverteilungen zu finden

$$F(x, \mathrm{I}) = \left[e^{-\beta_a(x)\, p^a - c(x)} - \varepsilon\right]^{-1}.$$

Im nichtrelativistischen Fall tritt nur an Stelle des Massenhyperboloids der R^3 als Impulsraum und an Stelle der vier p^a die drei Impulse p^α und die Energie $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sum (p^\alpha)^2$. An Stelle der Abhängigkeit (5) tritt die Gleichung $2m\, dE = \sum p^\alpha\, dp^\alpha$, sonst bleiben die Überlegungen ungeändert.

Ich möchte Herrn Dr. J. Ehlers für die Anregung zu dieser Arbeit danken.