Zur Theorie der Minimalflächen.

Von

Torsten Carleman in Upsala.

Im folgenden wird der Satz bewiesen:

Der Flächeninhalt S einer durch eine Raumkurve C, von der Länge L, hindurchgelegten Minimalfläche (T) genügt der Ungleichung

$$S \leqq \frac{1}{4\pi} L^2. \tag{1}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn C ein Kreis ist.

Wenn die Kurve C eben ist, so wird die zugehörige Minimalfläche eine Ebene. Die Ungleichung (1) drückt in diesem Falle die bekannte isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises aus.

Um die Darstellung möglichst zu vereinfachen, nehmen wir an, daß C analytisch sei. Nach S. Bernstein läßt sich dann die Minimalfläche über C hinaus analytisch fortsetzen. Die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche können wir mittels der Weierstraßschen Formeln

$$\left\{\begin{aligned} x &= R\int (1-u^2)\,F(u)\,du, \\ y &= R\int i\,(1+u^2)\,F(u)\,du, \\ z &= R\int 2u\,F(u)\,du \end{aligned}\right. \tag{2}$$

als Funktionen der komplexen Veränderlichen u darstellen.

Die hier auftretende analytische Funktion $F(u)$ und der Variabilitätsbereich von u ergeben sich folgendermaßen. X, Y, Z mögen die Koordinaten des sphärischen Bildes von (x, y, z) sein (d. h. X, Y, Z sind die Richtungskosinus der Normale im Punkte x, y, z). Wenn (x, y, z) die Minimalfläche T beschreibt, so durchläuft X, Y, Z auf der Einheitskugel eine gewisse einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche T_1, die nur

Windungspunkte endlicher Ordnung besitzt. Diese entsprechen denjenigen Punkten, wo die Hauptkrümmungen verschwinden[1]).

u und $F(u)$ sind gegeben durch[2])

$$-u = \frac{dx + i\,dy}{dz}, \qquad F(u) = \frac{dx - i\,dy}{du}, \tag{3}$$

wo die Differentiale längs einer durch (x, y, z) hindurchgehenden Minimallinie der Fläche zu nehmen sind. Aus (3) ergibt sich leicht, daß $F(u)$ eine eindeutige Funktion auf T und T_1 ist. Die Richtung einer Minimallinie durch den Punkt (x, y, z) kehrt nämlich zu ihrem Anfangswert zurück, wenn (x, y, z) auf der einfach zusammenhängenden Fläche T eine geschlossene Kurve beschreibt, weil ja die Tangenten der beiden, durch einen Punkt auf T hindurchgehenden, Minimallinien niemals zusammenfallen können.

Projiziert man vom Punkte $(0, 0, 1)$ des X, Y, Z-Raumes aus die Fläche T_1 in die XY-Ebene, die wir als u-Ebene wählen können, so ergibt sich eine einfach zusammenhängende ebene Riemannsche Fläche T_2, die den Variabilitätsbereich von u ausmacht.

Wenn T keine Ebene ist, definieren die Formeln (2) eine konforme Abbildung von T auf T_2. Wir finden für das Quadrat des Linienelementes $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, indem wir $u = \alpha + i\beta$ schreiben,

$$ds^2 = (1 + |u|^2)^2\, |F(u)|^2\, (d\alpha^2 + d\beta^2). \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich für die Größen S und L

$$S = \iint\limits_{T_2} (1 + |u|^2)^2\, |F(u)|^2\, d\alpha\, d\beta, \tag{5}$$

$$L = \int\limits_{C_2} (1 + |u|^2)\, |F(u)|\, |du|. \tag{6}$$

[1]) Für nicht ebene Minimalflächen können die Hauptkrümmungen nur in isolierten Punkten gleichzeitig verschwinden. Denn hätten wir längs einer Linie γ

$$r = s = t = 0,$$

so wären wegen

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

die partiellen Ableitungen p und q längs γ konstant. So müßte infolge der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die Ebene (E)

$$z - px - qy = c \qquad (c = \text{Konstante})$$

die Kurve γ enthalten und die Minimalfläche längs γ berühren. Dann müßte aber, weil γ keine Charakteristik der Fläche sein kann, die Ebene E mit der Minimalfläche zusammenfallen, gegen die Voraussetzung.

[2]) Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, I (deuxième édition), S. 341.

C_2 bedeutet hier die Berandung von T_2. Weil T_2 einfach zusammenhängend ist, gibt es eine analytische Funktion $\varphi(z)$, die T_2 konform auf den Einheitskreis abbildet. Mit Hilfe dieser Funktion transformieren sich die Formeln (5) und (6) in die folgenden:

$$S=\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+|\varphi(z)|^2)^2\,|F(\varphi(z))|^2\,|\varphi'(z)|^2\,r\,dr\,d\theta \quad (z=re^{i\Theta}), \tag{7}$$

$$L=\int_0^{2\pi}(1+|\varphi(z)|^2)\,|F(\varphi(z))|\,|\varphi'(z)|\,d\theta \quad (z=e^{i\Theta}). \tag{8}$$

Führen wir hier die Funktionen

$$f_1(z)=F(\varphi(z))\,\varphi(z)^2\,\varphi'(z), \tag{9}$$

$$f_2(z)=F(\varphi(z))\,\varphi'(z) \tag{10}$$

ein, so ergibt sich

$$S=\int_0^1\int_0^{2\pi}(|f_1(z)|+|f_2(z)|)^2\,r\,dr\,d\theta \quad (z=re^{i\Theta}),$$

$$L=\int_0^{2\pi}(|f_1(z)|+|f_2(z)|)\,d\theta \quad (z=e^{i\Theta}).$$

Aus den Gleichungen

$$S=\int_0^1\int_0^{2\pi}|f_1(z)|^2\,r\,dr\,d\theta+\int_0^1\int_0^{2\pi}|f_2(z)|^2\,r\,dr\,d\theta+2\int_0^1\int_0^{2\pi}|f_1(z)|\cdot|f_2(z)|\,r\,dr\,d\theta,$$

$$L^2=\left[\int_0^{2\pi}|f_1(z)|\,d\theta\right]^2+\left[\int_0^{2\pi}|f_2(z)|\,d\theta\right]^2+2\int_0^{2\pi}|f_1(z)|\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}|f_2(z)|\,d\theta$$

schließen wir nun, daß unser Satz (1) bewiesen ist, falls wir zeigen, daß

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}|f_1(z)|\cdot|f_2(z)|\,r\,dr\,d\theta\leqq\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(e^{i\Theta})|\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}|f_2(e^{i\Theta})|\,d\theta, \tag{11}$$

sobald $f_1(z)$ und $f_2(z)$ im abgeschlossenen[3]) Einheitskreise reguläre Funktionen sind $(z=re^{i\Theta})$.

Daß die Funktionen (9) und (10) dieser Bedingung genügen, folgt leicht aus der Tatsache, daß die Integrale

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}|f_1(z)|^2 r\,dz\,d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^1\int_0^{2\pi}|f_2(z)|^2 r\,dz\,d\theta$$

wegen der Endlichkeit des Flächeninhaltes S konvergent sind[3]). Beim Beweise von (11) können wir uns auf Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ beschränken, die für $|z|<1$ nicht verschwinden. Denn, bezeichnen wir mit

[3]) Ein näheres Studium von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ ergibt, daß diese Funktionen auch auf dem Einheitskreise regulär sind.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Nullstellen von $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$, so gelten für die Funktionen

$$f_1^*(z) = f_1(z)\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\bar{a}_\nu z - 1}{z - a_\nu},$$

$$f_2^*(z) = f_2(z)\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\bar{b}_\nu z - 1}{z - b_\nu},$$

die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} |f_1^*(z)| &> |f_1(z)|, \\ |f_2^*(z)| &> |f_2(z)|, \end{aligned}\right\} \qquad (|z| < 1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} |f_1^*(z)| &= |f_1(z)|, \\ |f_2^*(z)| &= |f_2(z)|. \end{aligned}\right\} \qquad (|z| = 1)$$

Wenn nun

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} |f_1^*(z)|\cdot|f_2^*(z)|\, r\,dr\,d\theta \leqq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|f_1^*(e^{i\Theta})|\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}|f_2^*(e^{i\Theta})|\,d\theta,$$

so ist a fortiori (11) erfüllt.

Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ für $|z| < 1$ von Null verschieden, so gibt es solche im Einheitskreise reguläre Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$, daß

$$f_1(z) = \varphi_1(z)^2, \quad f_2(z) = \varphi_2(z)^2.$$

Setzt man

$$\varphi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu,$$

$$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

$$c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \ldots + a_\nu b_0,$$

so ergibt sich

$$(12)\left\{\begin{aligned} S &= \int_0^1\int_0^{2\pi} |\varphi_1(z)\,\varphi_2(z)|^2\, r\,dr\,d\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu\Theta}\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{c}_\nu r^\nu e^{-i\nu\Theta}\Big) r\,dr\,d\theta \\ &= \pi\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|c_\nu|^2}{\nu+1}, \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \int_0^{2\pi}|f_1(e^{i\Theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu\Theta}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{a}_\nu r^\nu e^{-i\nu\Theta}\,d\theta = 2\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2,$$

$$(14)\quad \int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\Theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu r^\nu e^{i\nu\Theta} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_\nu r^\nu e^{-i\nu\Theta}\,d\theta = 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2.$$

Nach einer bekannten Ungleichung haben wir

$$|c_\nu|^2 = |a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \ldots + a_\nu b_0|^2$$
$$\leqq (|a_0|^2 |b_\nu|^2 + |a_1|^2 |b_{\nu-1}|^2 + \ldots + |a_\nu|^2 |b_\nu|^2)(\nu+1).$$

Folglich ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|c_\nu|^2}{\nu+1} \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} (|a_0|^2 \cdot |b_\nu|^2 + |a_1|^2 |b_{\nu-1}|^2 + \ldots + |a_\nu|^2 |b_0|^2)$$
$$= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2\right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2\right).$$

Unter Berücksichtigung von (12), (13), (14) ergibt sich hieraus die zu beweisende Ungleichung

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1(z)| \cdot |f_2(z)|\, r\,dr\,d\theta \leqq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(e^{i\Theta})|\,d\theta \int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\Theta})|\,d\theta.$$

Hiermit ist die Ungleichung (1) für nicht ebene Minimalflächen bewiesen.

Damit in der Formel (11) das Gleichheitszeichen gelten soll, ist notwendig und hinreichend, daß

$$|a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \ldots + a_0 b_\nu|^2$$
$$= [|a_\nu|^2 |b_0|^2 + |a_{\nu-1}|^2 |b_1|^2 + \ldots + |a_0|^2 |b_\nu|^2](\nu+1)$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann müssen alle Glieder in dem Ausdruck

$$a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \ldots + a_0 b_\nu$$

einander gleich sein, d. h.

$$\begin{aligned} a_1 b_0 &= a_0 b_1, \\ a_2 b_0 &= a_1 b_1 = a_0 b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu b_0 &= a_{\nu-1} b_1 = \ldots = a_0 b_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Daraus erhält man, indem man

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0} = q$$

setzt,

$$a_n = a_0 q^n,$$
$$b_n = b_0 q^n,$$

also

$$\varphi_1(z) = \frac{a_0}{1-qz}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{b_0}{1-qz},$$

$$f_1(z) = \frac{a_0^2}{(1-qz)^2}, \qquad f_2(z) = \frac{b_0^2}{(1-qz)^2}.$$

Setzen wir diese Werte von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in (9) bzw. (10) ein, so ergibt sich nach Division der beiden Gleichungen

$$\varphi(z)^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2}.$$

Folglich muß $\varphi(z)$ gleich einer Konstanten sein. Das ist aber unmöglich, wenn C keine ebene Kurve ist. Dies Resultat, in Verbindung mit der gewöhnlichen isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, ergibt die zweite Hälfte des am Anfang ausgesprochenen Satzes.

Wir können aber mittels der hier angewandten Methode auch das ebene isoperimetrische Problem einfach behandeln. Es sei C eine geschlossene, analytische[4]), sich selbst nicht durchschneidende Kurve von der Länge L, die ein Gebiet D vom Flächeninhalt S umschließt. Bedeutet $\varphi(z)$ eine Funktion, die das Innere des Einheitskreises in der z-Ebene ($z = re^{i\theta}$) auf D konform abbildet, so gelten die Formeln

$$L = \int_0^{2\pi} |\varphi'(z)|\, d\theta,$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\varphi'(z)|^2\, r\, dr\, d\theta.$$

Folglich besteht infolge (11) die Relation

$$S \leqq \frac{1}{4\pi} L^2.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann auftreten, wenn

$$\varphi'(z) = \frac{a^2}{(1-qz)^2},$$

wo a und q Konstanten sind. In diesem Falle ist aber $\varphi(z)$ eine lineare gebrochene Funktion von z, d. h. C ist ein Kreis.

---

[4]) Der Beweis läßt sich auch dann durchführen, wenn die Randkurve bloß als rektifizierbar vorausgesetzt wird.

(Eingegangen am 24. September 1920.)

Nachtrag.

Nachdem diese Arbeit zur Veröffentlichung eingereicht war, hat Herr W. Blaschke in einem Brief an Herrn Polya, der ihm meinen Satz mitgeteilt hatte, einen unter gewissen Einschränkungen gültigen sehr kurzen Beweis meines Satzes angedeutet. Wenn man die in der Überlegung von Herrn Blaschke vorkommende konvexe Hülle der gegebenen Raumkurve C durch eine geeignete Kegelfläche ersetzt, so läßt sich dieser Beweis wie folgt darstellen.

Es sei T^* irgendeine Kegelfläche, die C zur Leitlinie hat und deren Spitze auf C liegt. Weil T^* auf eine Ebene abwickelbar ist, so genügt der Flächeninhalt S^* dieser Fläche der Ungleichung

$$S^* \leqq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Wenn nun der Minimalfläche wirklich das Minimum des Flächeninhaltes entspricht, so gilt ferner

$$S \leqq S^*.$$

Folglich ist

$$S \leqq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Damit hier das Gleichheitszeichen gelte, muß T^* mit T zusammenfallen. Hieraus folgt der zweite Teil des Satzes, weil eine Minimalfläche, die zugleich abwickelbar ist, eine ebene Fläche sein muß.

Die Allgemeingültigkeit dieses Beweises wird dadurch eingeschränkt, daß nicht jedes Minimalflächenstück einem Minimum des Flächeninhaltes entspricht[1]).

[1]) Vgl. H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 234 u. S. 151–167.

(Eingegangen am 4. Dezember 1920.)