Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$.

Von

T. Carleman in Upsala.

Wir betrachten einen homogenen Körper (D), in dessen Innerem sich eine punktförmige Wärmequelle P von konstanter Ergiebigkeit befindet. Für die von einem Flächenelement $d\sigma$ in der Umgebung eines Punktes p der Begrenzungsfläche Ω pro Sekunde ausgestrahlte Wärmemenge schreiben wir

$$F(u)\,d\sigma,$$

wo u die absolute Temperatur bedeutet, und machen über die Funktion $F(u)$, die noch von p abhängen kann, folgende Voraussetzung:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} F'(u) > 0, \\ \lim\limits_{u=\infty} F(u) = \infty, \\ F(0) \leqq 0. \end{cases}$$

Wäre z. B. der Körper vollkommen schwarz, so hätte man nach dem Gesetz von Stefan-Boltzmann

$$F(u) = k u^4$$

zu setzen, vorausgesetzt, daß von außen her keine Einstrahlung stattfindet. Wenn man annimmt, daß im Innern des Körpers die Fourierschen Wärmeleitungsgesetze noch gelten, so würde man, um die Temperaturverteilung bei Wärmegleichgewicht zu bestimmen, auf das folgende mathematische Problem stoßen: Eine Lösung von $\Delta u = 0$ zu finden, die 1.) überall in (D) regulär ist außer in der Umgebung des Punktes P, wo sie die Form

$$\frac{1}{r_{Pq}} + \text{reg. Funktion}$$

haben soll, 2.) auf der Begrenzungsfläche Ω der Bedingung

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = F(u)$$

genügt, wo $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung von u längs der inneren Normalen bedeutet.

Es empfiehlt sich, zunächst das entsprechende eindimensionale Problem zu behandeln, welches sich folgendermaßen formulieren läßt: Eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq b$ stetige Lösung von $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ zu bestimmen, deren erste Ableitung 1. nur für $x = \xi$ $(0 < \xi < b)$ unstetig wird und zwar derart, daß

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi+0} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi-0} = -1,$$

und 2. in 0 und b die Randbedingungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = F_1(u); \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=b} = -F_2(u)$$

erfüllt, wo $F_1(u)$ und $F_2(u)$ den Bedingungen (1) genügen.

Setzt man

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \beta \qquad &&\text{für} \quad 0 \leqq x < \xi, \\ u &= \alpha_1(x-b) + \beta_1 \quad &&\;\;,, \quad\;\; \xi < x \leqq b, \end{aligned}$$

so ergeben sich für die Konstanten $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ die folgenden Bedingnngen

$$\left\{\begin{aligned} &(3) \quad \alpha\xi + \beta = \alpha_1(\xi - b) + \beta_1, \\ &(4) \quad \alpha_1 - \alpha + 1 = 0, \\ &(5) \quad \alpha = F_1(\beta), \\ &(6) \quad \alpha_1 = -F_2(\beta_1). \end{aligned}\right.$$

Wenn wir mittels der Gleichungen (3), (4), (5) $\alpha, \alpha_1, \beta_1$ als Funktionen von β darstellen, so finden wir, daß dieses System mit

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 = F_1(\beta) - 1, \\ &\beta_1 = \xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b, \\ &\alpha = F_1(\beta), \\ &F_1(\beta) + F_2(\xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b) - 1 = 0 \end{aligned}\right.$$

gleichbedeutend wird. Die letzte Gleichung in (7), deren linke Seite wir mit $\Phi(\beta)$ bezeichnen wollen, hat eine und nur eine positive Wurzel. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß der Ausdruck

$$\xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b$$

für einen positiven Wert β' verschwindet. Er ist nämlich für $\beta = 0$ negativ und für $\beta = \infty$ positiv. $\Phi(\beta)$ ist eine monoton wachsende Funktion, die für $\beta \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt, während für $\beta = \beta'$

$$\Phi(\beta') = F_1(\beta') + F_2(0) - 1 = -\frac{(\xi + \beta')}{b} + F_2(0) < 0.$$

Unser System besitzt also ein und nur ein Lösungssystem, für welches $\beta > 0$, $\beta_1 > 0$. Das betrachtete eindimensionale Problem hat also eine und nur eine Lösung.

Wir gehen nun zur Behandlung des allgemeinen dreidimensionalen Problems über und beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Lösung. Gäbe es zwei den Bedingungen des Problems genügende Funktionen u und u', so wäre $v = u - u'$ eine in D reguläre harmonische Funktion, für welche auf Ω die Relation

$$\frac{\partial v}{\partial n} = F(u) - F(u') = vF'(u' + \Theta(u - u'))$$

($\Theta =$ eine zwischen Null und Eins gelegene, auf Ω veränderliche Größe) bestände. Berücksichtigen wir noch die Gleichung

$$\iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz + \int\limits_\Omega v\frac{\partial v}{\partial n}\,ds = 0,$$

so ergibt sich

$$\iiint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz + \int\limits_\Omega [v^2 F'(u' + \Theta(u - u'))]\,d\sigma = 0,$$

woraus, wegen $F'(u) > 0$, $v = 0$ folgt, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Wir führen nun in die Randbedingung einen Parameter h $(0 \leqq h \leqq 1)$ ein, indem wir schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u + h(F(u) - u). \tag{8}$$

Die Funktion $u + h[F(u) - u]$ genügt für alle h zwischen 0 und 1 den Bedingungen (1).

Man nehme an, das Problem sei für einen gewissen Wert h_0 $(0 < h_0 < 1)$ durch eine Funktion u_0 lösbar, die auf Ω zwischen zwei positiven Größen c_1 und c_2 liegt. Wir machen noch die Voraussetzung, daß $F(u)$ eine reguläre analytische Funktion von u in jedem Punkt der Strecke $0 < u < \infty$ sei, und suchen eine Lösung für $h = h_0 + \alpha$ als eine Potenzreihe in α

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots$$

zu bestimmen. Es müssen $u_1, u_2, \dots, u_\nu \dots$ reguläre harmonische Funktionen in D sein, die noch gewisse Randbedingungen erfüllen müssen, welche sich ergeben, wenn wir den Ausdruck

$$
(9)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial n} - u - h\,\Phi(u) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left(\dfrac{\partial u_\nu}{\partial n} - u_\nu\right)\alpha^\nu - (h_0 + \alpha)\,\Phi\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu u_\nu\right) = \\[2ex]
= \dfrac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 - h_0\,\Phi(u_0) + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left\{\dfrac{\partial u_\nu}{\partial n} - (1 + h_0\,\Phi'(u_0))\,u_\nu\right\}\alpha^\nu - \\[2ex]
- \alpha\,\Phi'(u_0)\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\,\alpha^\nu - \alpha\,\Phi(u_0) - \\[2ex]
- (h_0 + \alpha)\sum\limits_{p=2}^{\infty}\dfrac{\Phi^{(p)}(u_0)}{p!}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\,\alpha^\nu\right)^p,
\end{cases}
$$

wo

$$F(u) - u = \Phi(u),$$

nach Potenzen von α entwickeln und die so erhaltenen Koeffizienten gleich Null setzen. Man erhält folgende Gleichungen:

$$
(10)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 - h_0\,\Phi(u_0) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial u_1}{\partial n} - (1 + h_0\,\Phi'(u_0))\,u_1 = \Phi(u_0), \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial n} - [1 + h_0\,\Phi'(u_0)\,u_2 = \Phi'(u_0)\,u_1 + h_0\,\dfrac{\Phi''(u_0)}{2}\,u_1^2, \\[2ex]
\dfrac{\partial u_3}{\partial n} - [1 + h_0\,\Phi'(u_0)]\,u_3 = \Phi'(u_0)\,u_2 + h_0\,u_1\,u_2\,\Phi''(u_0) \\[1ex]
\qquad\qquad\qquad + h_0\,\dfrac{\Phi^{(3)}(u_0)}{3!}\,u_1^3 + \dfrac{\Phi''(u_0)}{2}\,u_1^2, \\[1ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Aus der Theorie der dritten Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ folgt, daß immer eine der Randbedingung

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial n} - [1 + h_0\,\Phi'(u_0)]\,u = f$$

genügende in D reguläre harmonische Funktion existiert. In denjenigen Punkten auf Ω, wo u sein Maximum u_M oder Minimum u_m erreicht, muß gelten $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \leqq 0$ bzw. $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \geqq 0$. Aus (11) ergibt sich dann

$$u_M \cdot \mathrm{Min}\,[1 + h_0\Phi'(u_0)] \leqq \mathrm{Max}\,|f|,$$
$$u_m \cdot \mathrm{Min}\,[1 + h_0\Phi'(u_0)] \geqq -\mathrm{Max}\,|f|.$$

Es gibt also, wie leicht ersichtlich, eine von h_0 und u_0 $(0 \leqq h_0 \leqq 1)$ unabhängige nur von c_1 und c_2 abhängige Konstante k von solcher Beschaffenheit, daß die Lösung der Randwertaufgabe (11) der Ungleichung

$$(12)\qquad |u| < k\,\mathrm{Max}\,|f|$$

genügt. Es gibt ferner zwei nur von c_1 und c_2 abhängige Konstanten A und ϱ, derart daß

$$\left|\frac{\Phi^{(\nu)}(u_0)}{|\underline{\nu}}\right| < A\varrho^{\nu}. \tag{13}$$

Man sieht aus (10) daß $\frac{\partial u_\nu}{\partial n} - (1 + h_0\,\Phi'(u_0))\,u_\nu$ gleich einem gewissen Polynom mit positiven Koeffizienten in $u_1, u_2 \ldots u_{\nu-1}$ und eine endliche Anzahl von den Größen $\frac{\Phi^{(\nu)}(u_0)}{|\underline{\nu}}$ ist. Genau dasselbe Polynom erhält man für u_ν, wenn man eine Funktion u als eine Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \alpha^p$ aus der Gleichung

$$u - \alpha\,\Phi'(u_0)\,u - \alpha\,\Phi(u_0) - (h_0 + \alpha)\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(p)}(u_0)}{|\underline{p}}\,u^p = 0$$

bestimmen will.

Bei Berücksichtigung von (12) und (13) folgert man nun, daß die aus den Gleichungen (10) rekursiv bestimmten Funktionen $u_1\, u_2 \ldots u_\nu \ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten derjenigen Potenzreihe

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \alpha^\nu,$$

die der Gleichung

$$\frac{z}{k} - \alpha A\varrho z - \alpha A - (1+\alpha)\sum_{p=2}^{\infty} A\varrho^p z^p = 0$$

genügt.

Weil diese Gleichung sicher eine in der Umgebung von $\alpha = 0$ reguläre Lösung besitzt, so ist hiermit die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d$, wo d eine nur von c_1 und c_2 abhängige positive Größe bedeutet, bewiesen.

Es sei N die innere in einem beliebigen Punkte Q auf Ω errichtete Normale. Der Abstand eines Punktes auf N von Q möge l heißen. Wir wollen zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial u_\nu}{\partial l}\,\alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d_1 < d$ auf der Strecke $Q'Q$ (Q' ist ein solcher in D gelegener Punkt, daß $Q'Q$ gänzlich D angehört) sowohl in bezug auf l wie auch in bezug auf α im Gebiete $|\alpha| < d_1$ gleichmäßig konvergiert.

Es gibt, wie die Theorie der zweiten Randwertaufgabe der Potentialgleichung lehrt, eine solche Konstante B, daß

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial l}\right| < B \operatorname{Max}\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| \quad \text{auf } \Omega.$$

Aus den Gleichungen (10) findet man nun

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| < \operatorname{Max}|1 + h_0 \Phi(u_0)| \cdot \operatorname{Max}|u_\nu| + \frac{a_\nu}{k}, \quad \left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| < C \cdot a_\nu,$$

wo C eine Konstante bedeutet, und somit

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial l}\right| < C' \cdot a_\nu \qquad (C' \text{ Konstante}),$$

woraus die Behauptung folgt.

Weil also

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \sum u_\nu \alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d$ gleich der dort konvergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} \alpha^\nu$$

ist, so genügt infolge der Relationen (10)

$$\sum u_\nu \alpha^\nu \quad \text{für} \quad |h - h_0| < d$$

der Randbedingung (8).

Für $h = 0$ reduziert sich die Randbedingung (8) auf eine lineare, für welche wie bekannt unser Problem lösbar ist. Aus dem soeben Bewiesenen geht dann hervor, daß eine Potenzreihe $u(p, h)$ existiert, die das Problem noch für ein positives Intervall $0 \leqq h \leqq d'$ löst. Es folgt auch, daß diese Potenzreihe sicher längs der ganzen Strecke $0 \leqq h \leqq 1$ (den Punkt 1 einbegriffen) analytisch fortsetzbar ist, wenn der folgende Satz wahr ist: *Man kann a priori zwei positive von h unabhängige Konstanten γ_1 und γ_2 angeben, die so beschaffen sind, daß für jedes h $(0 \leqq h \leqq 1)$ eine Lösung u des Problems, wenn sie nur existiert, auf Ω die Ungleichung*

$$\gamma_1 < u < \gamma_2 \tag{14}$$

erfüllt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die zu D gehörige Greensche Funktion G_p, welche in P wie $\frac{1}{r}$ unendlich wird. Das Maximum u' von u auf Ω möge in einem Punkte p' erreicht werden. Ebenso das Minimum u'' in einem Punkte p''. Die harmonischen Funktionen

$$u' + G_p - u \quad \text{und} \quad u - u'' - G_p$$

sind beide in D positiv und verschwinden in p' bzw. p''. Hieraus folgt, daß die normalen Ableitungen in diesen Punkten $\geqq 0$ sind. Somit

$$\left(\frac{\partial G_p}{\partial n}\right)_{p'} - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p'} \geqq 0; \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p''} - \left(\frac{\partial G_p}{\partial n}\right)_{p''} \geqq 0.$$

Bezeichnen wir mit ω_1 und ω_2 die untere bzw. obere Grenze von $\frac{\partial G_p}{\partial n}$ (ω_1 und ω_2 sind beide positiv), so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p'} \leqq \omega_2; \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p''} \geqq \omega_1.$$

Somit infolge (8)

$$(15) \qquad \begin{aligned} u' + h\,[F(u') - u'] &\leqq \omega_2, \\ u'' + h\,[F(u'') - u''] &\geqq \omega_1. \end{aligned}$$

Wir können γ_2 als die obere Grenze für $0 \leqq h \leqq 1$ der positiven Wurzel u' der Gleichung

$$(16) \qquad u' + h\,[F(u') - u'] = \omega_2$$

und γ_1 als die untere Grenze der positiven Wurzel u'' von

$$(17) \qquad u'' + h\,[F(u'') - u''] = \omega_1$$

wählen.

Hiermit ist die Lösbarkeit der Aufgabe, wenn $F(u)$ eine für $0 < u < \infty$ analytische Funktion ist, für welche ferner $F'(u) > 0$, bewiesen. Wir können leicht durch einen Grenzübergang zeigen, daß es genügt, $F(u)$ als stetig und zunehmend vorauszusetzen. Zu diesem Zwecke führe man eine Folge von auf der reellen Achse regulär analytischen Funktionen mit positiver Ableitung $F_1(u), F_2(u), \ldots$ ein, die in einem beliebig großen Intervall $0 < u < l$ gleichmäßig gegen $F(u)$ konvergieren[1]). Es sei l größer als die aus (16) bestimmte Zahl γ_2. Die zu $F_\nu(u)$ gehörige Lösung des Wärmeleitungsproblems nennen wir u_ν. Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl $\left(\text{z. B. } \frac{\gamma_1}{2}\right)$, so kann eine Zahl n_0 so bestimmt werden, daß

$$(18) \qquad -\varepsilon + \gamma_1 < u_\nu < \gamma_2 + \varepsilon$$

für $\nu > n_0$, wo γ_1 und γ_2 die aus (16) und (17) bestimmten Größen sind.

Es sei $G_2(p, q)$ die zur zweiten Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ gehörige Greensche Funktion für Punkte p und q, die auf der

[1]) Man kann z. B.

$$F_n(u) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (u-t)^2 + 1}\, \Phi_l(t)\, dt$$

setzen, wo

$$\Phi_l(t) = F(t), \ 0 \leqq t \leqq l;$$

$$\Phi_l(t) = F(l), \ t \geqq l; \quad \Phi_l(t) = \Phi_l(0), \ t < 0.$$

Fläche Ω liegen. Man kann die Differenz $u_\nu(p') - u_\nu(p'')$, wo p' und p'' zwei auf Ω gelegene Punkte sind, folgendermaßen ausdrücken:

$$(19)\quad \begin{cases} u_\nu(p') - u_\nu(p'') \\ = \frac{1}{r_{Pp'}} - \frac{1}{r_{Pp''}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega [G_2(p',q) - G_2(p'',q)]\left[\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right)_q - \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{Pq}}}{\partial n}\right)_q\right] d\sigma \\ = \frac{1}{r_{Pp'}} - \frac{1}{r_{Pp''}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega [G_2(p',q) - G_2(p'',q)]\left[F_\nu(u_\nu) - \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{Pp}}}{\partial n}\right)_p\right] d\sigma_q. \end{cases}$$

Hieraus folgert man unter Anwendung von (18), daß es zu jedem positiven ε eine positive von ν unabhängige Größe δ gibt, so daß

$$(20)\qquad |u_\nu(p') - u_\nu(p'')| < \varepsilon,$$

sobald

$$r_{p'p''} < \delta.$$

Wir können infolge (18) mit Hilfe des sogenannten Diagonalverfahrens aus $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, eine solche Teilfolge $u_{n_1} u_{n_2}, \ldots, u_{n_\nu}, \ldots$ auswählen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} u_{n_\nu}$$

in abzählbar unendlich vielen auf Ω überall dicht liegenden Punkten existiert. Dann existiert aber infolge (20) dieser Grenzwert überall auf Ω, und zwar gleichmäßig. Hieraus erhält man nach bekannten Sätzen, daß $u_{n_1} u_{n_2}, \ldots, u_{n_\nu}, \ldots$ innerhalb Ω (eine beliebig kleine Umgebung des Punktes P ausgenommen) und auf dieser Fläche selbst gleichmäßig gegen eine in D harmonische Funktion u konvergieren, die in P die Singularität $\frac{1}{r_{Pp}}$ hat. Aus der Gleichung

$$\int\limits_\Omega F_{n_\nu}(u_{n_\nu})\, d\sigma = 4\pi$$

erhalten wir

$$\int\limits_\Omega F(u)\, d\sigma = 4\pi.$$

Es sei v eine in P wie $\frac{1}{r_{Pp}}$ singuläre Lösung von $\Delta u = 0$, die noch auf Ω der Bedingung

$$(21)\qquad \frac{\partial v}{\partial n} = F(u)$$

genügt. Wir zeigen, daß v sich von u nur um eine Konstante unterscheiden kann. Es ist, falls p' und p'' ihre frühere Bedeutung haben,

$$v(p') - v(p'') = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega (G_2(p',q) - G_2(p'',q))\, F(u)\, d\sigma_q,$$

$$u_{n_\nu}(p') - u_{n_\nu}(p'') = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega (G_2(p',q) - G_2(p'',q))\, F_{n_\nu}(u_\nu)\, d\sigma_q,$$

$$v(p') - u_{n_\nu}(p') - (v(p'') - u_{n_\nu}(p'')) =$$
$$= -\int_\Omega [G_2(p', q) - G_2(p'', q)][F(u) - F_{n_\nu}(u_\nu)]\, d\sigma_q.$$

Durch Grenzübergang $\nu \to \infty$ ergibt sich nun

$$v(p') - u(p') = v(p'') - u(p''),$$

woraus die Behauptung folgt. Es ist also infolge (21)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = F(u).$$

Hiermit ist also unsere Randwertaufgabe auch unter den oben angeführten allgemeineren Voraussetzungen über $F(u)$ gelöst. Das gewonnene Resultat fassen wir folgendermaßen zusammen: *Es sei $F(u)$ eine stetige zunehmende Funktion von u, die noch den Bedingungen*

$$F(0) \leqq 0; \quad \lim_{u=\infty} F(u) = \infty$$

genügt. Dann gibt es eine und nur eine positive Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die in einem Punkte P innerhalb einer geschlossenen stetig gekrümmten Fläche Ω wie $\frac{1}{r_P}$ singulär wird, aber sonst regulär verläuft, und auf Ω der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = F(u)$$

genügt.

Es ist physikalisch evident, daß eine Vergrößerung von $F(u)$ eine Erniedrigung der Temperatur u zur Folge hat. Dieses läßt sich folgendermaßen analytisch beweisen. Es sei u_1 die zur Ausstrahlungsfunktion $F_1(u)$

$$(F_1(u) > F(u)) \tag{22}$$

gehörige Temperatur. Wir zeigen, daß das Minimum von $u - u_1$ positiv ist. In dem Punkte p, wo dieses Minimum erreicht wird, würden wir nach einer bekannten Eigenschaft der harmonischen Funktionen

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geqq \frac{\partial u_1}{\partial n} \quad \text{haben.}$$

Folglich

$$F(u) \geqq F_1(u_1).$$

Also nach (22)

$$F(u) \geqq F_1(u_1) > F(u_1),$$
$$u - u_1 > 0.$$

(Eingegangen am 17. Januar 1920.)