Zeitschrift für Physik 169, 1—16 (1962)

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Zur Theorie des Elektrons VI *

Vierergeschwindigkeit und Selbstbeschleunigung

Von

WALTER WESSEL

(*Eingegangen am 29. Januar 1962*)

Dem in der vorangehenden Mitteilung abgeleiteten Massenoperator haftete noch eine sein Verhalten bei der Rauminversion betreffende Unstimmigkeit an. Es wird gezeigt, daß sie sich genau beheben läßt, wenn man eine noch bestehende Freiheit in der Bestimmung zweier Vierervektoren wahrnimmt. An Stelle der bisher hilfsweise benutzten $\varkappa_k$, ι_k treten dann die echte bzw. Pseudovierergeschwindigkeit U_k und u_k, mit denen diese Theorie begründet wurde. Es werden Darstellungen der U_k und u_k und die Spektren ihrer vierten Komponenten abgeleitet und im Zusammenhang mit den sog. run-away solutions diskutiert.

Die Lösung des im Vorangehenden angedeuteten Problems, auf das wir in §1 näher eingehen, hat insofern ein über das Formale hinausgehendes Interesse, als sie zu einer quantentheoretischen Definition der Vierergeschwindigkeit führt und damit das alte Problem der sog. run-away solutions vom quantenmechanischen Standpunkte beleuchtet. Wir meinen damit die schon von SCHOTT bemerkte[1], wiederholt neu entdeckte[2] und von zahlreichen Autoren[3] kritisch untersuchte Erscheinung, daß ein geladenes Teilchen sich auf Grund der Reaktionskraft der Strahlung theoretisch selbst beschleunigen kann. Über den gegenwärtigen Stand des Problems unterrichtet ein Artikel von ERBER[4].

Die „Selbstbeschleunigung" ist wohl ein Hauptanlaß, weshalb die schöne Arbeit DIRACS[5] aus dem Jahre 1938 nur von wenigen Autoren weiterentwickelt worden ist, obwohl sie für eine Quantisierung besonders geeignet erscheint, weil sie die Massenrenormierung bereits im klassischen Bereich vollzieht. ROHRLICH[6] hat neuerdings eine Integralgleichungsform für diese Theorie vorgeschlagen, die die unerwünschten Lösungen ausschließt und die Mechanik wieder „Newtonisch" macht in dem Sinne,

* G. HETTNER in dankbarer Erinnerung an Jenaer Assistentenjahre zum 70. Geburtstage gewidmet.

[1] SCHOTT, G.A.: Phil. Mag. **29**, 49 (1915).

[2] WESSEL, W.: Z. Physik **92**, 407 (1934). — DIRAC, P.A.M.: l. c.[5].

[3] Über die ältere Literatur referiert STEINWEDEL, H., Fortschr. Phys. **1**, 7 (1953).

[4] ERBER, TH.: Fortschr. Phys. **9**, 343 (1961).

[5] DIRAC, P.A.M.: Proc. Roy. Soc. Lond. A **167**, 148 (1938).

[6] ROHRLICH, F.: Ann. Physics **13**, 93 (1961).

daß man (praktisch) nur Anfangslage und -geschwindigkeit der Körper für ihre künftige Bewegung zu wissen braucht, obwohl die Diracschen Gleichungen von *dritter* Ordnung in der Zeit sind. Unser eigener Versuch bewegt sich in entgegengesetzter Richtung: wir ziehen aus dem Vorkommen von Ableitungen dritter Ordnung den Schluß, daß Koordinaten und Impulse *nicht* zur Beschreibung des Teilchens ausreichen, sondern daß weitere Variable eingeführt werden müssen. Hiermit nimmt die klassische Theorie sofort verschiedene Züge an, die man gewohnt ist erst in der Quantentheorie anzutreffen. Erstens kann man mit einem einfachen, die Ruhmasse betreffenden Trick die Erhöhung der Variablenzahl dadurch herbeiführen, daß man Geschwindigkeiten (u_k) und Impulse (p_k) als *unabhängige* Variable einführt. Das ist bekanntlich ein Hauptcharakteristikum der Diracschen Theorie des Elektrons, soweit sie überhaupt eine klassische Interpretation zuläßt. Ganz entsprechend wie bei DIRAC folgt daraus, daß der Drehimpuls $\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}$ auch in Zentralfeldern keine Konstante der Bewegung mehr ist (weil $\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{p} \neq 0$); man wird daher, um die Drehinvarianz der Theorie zu wahren, zur Einführung eines Spins (M_{ik}) genötigt[7]. In den u_k und M_{ik} zusammen mit den zwei Invarianten des schiefsymmetrischen Tensors M_{ik} und dem durch Verjüngung daraus entstehenden Vektor $U_i = M_{ik} u^k$ hat man dann neben Koordinaten und Impulsen schon in der klassischen Theorie einen Apparat von 16 Elementen (mit Nebenbedingungen), der genau der 16gliedrigen Algebra DIRACs entspricht[8].

Der mit diesem Apparat erzielte Fortschritt ist zunächst der, daß bei der kräftefreien Bewegung *Energie und Impuls konstant* bleiben, während die Selbstbeschleunigung nur die Vektoren u_k und U_k ergreift. Man kann nun weiter zeigen*, daß bei Vertauschung von u_k und U_k in der Bewegungsgleichung die exponentiell beschleunigte Bewegung in eine periodische übergeht, so daß man in der klassischen Theorie auch eine „Zitterbewegung" wiederfinden kann. In der Tat haben wir unsere relativistische Wellengleichung aus einer klassischen Theorie entwickelt, in der die u_k und U_k vertauscht sind. Der Grund für die hierdurch herbeigeführte Veränderung des Bewegungstyps ist der, daß der Vektor U_k raumartig ist (wegen $U_i = M_{ik} u^k$ und der zeitartigen Natur von u^k). Wenn man ihn also als eine Geschwindigkeit auffaßt, so handelt es sich dabei um eine Überlichtgeschwindigkeit; es entsprechen sich Unterlichtgeschwindigkeit mit aperiodischer und Überlichtgeschwindigkeit mit periodischer Beschleunigung. Zunächst erscheint es als keine sehr

---

* Siehe den Anhang zu dieser Arbeit.

[7] Über die Einzelheiten orientiert am kürzesten eine Arbeit des Verfassers mit S. J. CZYZAK, Phys. Rev. **91**, 986 (1953).

[8] Siehe etwa SCHWEBER-BETHE-DE HOFFMANN: Mesons and Fields, Vol. I, 4a. New York: Evanston 1955.

glückliche Alternative, aus der Kalamität der Selbstbeschleunigung in eine Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit auszuweichen; es ist aber zu bedenken, daß man damit nicht gegen elementare physikalische Forderungen verstößt, weil man der oszillatorischen Bewegung jedenfalls nicht mit einem Inertialsystem folgen kann, und daß man hier einmal einer grundsätzlichen Schwierigkeit mit einer Abhilfe von grundsätzlicher Einfachheit begegnet. Im übrigen kommt es ja für die Quantentheorie nicht sowohl auf diese „anschaulichen" Eigenschaften der klassischen Bewegung als auf die spektralen und Transformationseigenschaften der damit eingeführten Operatoren an.

Was diese betrifft, so waren sie bisher noch nicht endgültig festgelegt. Eine Vierergeschwindigkeit genügt ja per definitionem der Gleichung $u_k u^k = -1$; mindestens sollte ihre Norm, da man noch eine Skalentransformation der Eigenzeit zulassen kann, negativ definit sein. Ebenso war $U_k U^k = +1$ definiert. Solche Nebenbedingungen sind mit Operatoren nicht ganz leicht zu verwirklichen und waren es in den vorangehenden Arbeiten nicht; wir konnten sie dort auf den noch in anderer Hinsicht ungeklärten Massenoperator abwälzen. Dementsprechend hatten die Spektren der betreffenden Operatoren (ι_k und $\varkappa_k$) keine Ähnlichkeit mit dem einer Vierergeschwindigkeit; insbesondere war das von ι_4 diskret.

Inzwischen ließ sich das Problem des Massenoperators weitgehend klären, wofür auf die vorangehende Mitteilung[9] verwiesen werden muß. Der mit ihm begründeten Gleichung haftete jedoch noch eine ihr Verhalten bei Rauminversionen betreffende Unstimmigkeit an, auf die wir in § 1 zurückkommen. Wir können nun zeigen, daß sie sich gerade dadurch beheben läßt, daß man von den hilfsweise gebrauchten Vektoren ι_k und $\varkappa_k$ *wieder zu den u_k, U_k zurückkehrt und auf der Definitheit ihrer Normen besteht.* Die u_k transformieren sich dann nämlich wie die Komponenten eines Pseudovektors, während U_k ein echter Vektor wird, wie er es wegen seiner Verknüpfung mit der Stromdichte sein muß. Die Vertauschung wird also hier zwingend. Im übrigen findet man für die Spektren der Operatoren u_4 und U_4 genau den Wertebereich, den die betreffenden Komponenten in der klassischen Theorie haben, nämlich von $-\infty$ bis $+\infty$, mit Ausschluß des Intervalles von -1 bis $+1$ für u_4. Während nun für die *Energie* der *Ausschluß* dieses Bereiches bzw. des Intervalles von $-m_0 c^2$ bis $+m_0 c^2$ entscheidend wichtig ist und natürlich auch in unserer Formulierung bestehen bleibt, liegt, soviel wir sehen, kein Bedenken gegen den *Einschluß* dieses Bereichs für die vierte Komponente der Geschwindigkeit vor. Die Überwindung der run-away-Schwierigkeit würde dann darin liegen, daß, klassisch-anschaulich

[9] WESSEL, W.: Z. Naturforsch. **14**a, 1005 (1959); weiterhin als V zitiert. Dort auch ein Verzeichnis der vorangehenden Arbeiten, die wir ebenso wie in V zitieren werden.

gesprochen, die Teilchen ständig mit Überlichtgeschwindigkeit, jedoch in einer Zitterbewegung laufen.

Die Terminologie betreffend werden wir im folgenden U_k als ,,Geschwindigkeit'' schlechthin bezeichnen, während für den Vektor u_k die Bezeichnung ,,Pseudogeschwindigkeit'' passend erscheint, die zugleich auf seine Eigenschaft als Pseudovektor hinweist.

§ 1. Wellengleichung und Vierergeschwindigkeit

Die in der letzten Mitteilung[9] abgeleitete Wellengleichung läßt sich auf die Form bringen

$$\varkappa^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - l^2 K \iota_k \psi (\psi^* \varkappa^k \psi) = 0 \tag{1.1}$$

mit

$$l^2 = e^2 \hbar / m_0^2 c^3 . \tag{1.2}$$

Man erhält sie durch Variation der dort angegebenen Lagrange-Funktion (2.8) mit den Werten (4.37) a. a. O. für die $c_1 \ldots c_3$. Die Variationsableitungen von $L_1 \ldots L_3$ sind a. a. O. (2.3), (2.5) und (2.7) bereits ausgerechnet; man beachte, daß sie noch mit $e\hbar/2m_0^2 c^3$ zu multiplizieren sind. Das Massenglied $m_I(K)$ in V(2.1), das wir bisher in Ermangelung einer befriedigenderen Lösung mitführen mußten, ist nunmehr ausgeschieden und durch das letzte Glied von V(2.3) ersetzt, wo wir $\partial F^{il}/\partial x^l$ nach V(2.9) durch den Strom des ψ-Feldes ausdrücken. Weggelassen sind ferner alle noch explizit vorkommenden A_j und F_{ik}, indem wir annehmen (s. §3), daß diese sich in einer Wechselwirkungsdarstellung berücksichtigen lassen, für die (1.1) den Materieteil der ,,feldfreien'' Gleichungen darstellt. Schließlich haben wir in (1.1) gemäß V(1.3) noch den Faktor $\varkappa^j M_{jk}$ von V(2.3) durch das etwas bequemere $K\iota_k$ ersetzt, das wie alle Produkte nichtkommutierender Terme symmetrisiert zu denken ist.

Die Gl. (1.1) ist, wie schon erwähnt, nicht invariant gegen Rauminversionen (die Paritätsoperation). Man bemerke dazu folgendes: unsere Matrizen zerfallen nach der l. c. V eingeführten Terminologie in solche vom $\mathfrak{M}$-Typ und vom $\mathfrak{P}$-Typ. Die letzteren gehen in ihr Negatives über, wenn man sie mit einer Matrix R transformiert, die im Schema der Fig. 1 l. c. V (ι^4-Darstellung) die Gestalt

$$R = \begin{array}{c|ccccc} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \cdots \\ \hline \frac{3}{2} & 1 & & & & \\ \frac{5}{2} & & -1 & & & \\ \frac{7}{2} & & & 1 & & \\ \frac{9}{2} & & & & -1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array} = (-1)^{\iota_4 + \frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

hat (zuerst in III angegeben); die vom $\mathfrak{M}$-Typ gehen damit in sich über. Nun gehören $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ zum $\mathfrak{M}$-Typ, $\varkappa_4$ zum $\mathfrak{P}$-Typ; der Ausdruck $\varkappa^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j}$ geht also bei der Inversion ($\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}'$), wenn man $\psi(-\mathfrak{r}', x^4) = R\psi'(\mathfrak{r}', x^4)$ und $R\varkappa_j R = \varkappa_j'$ setzt, nach Linksmultiplikation mit R in sein Negatives über. Kurz gesprochen transformiert sich der Vierervektor $\varkappa_k$ wie ein *Pseudovektor*: es ist $R\vec{\varkappa}R = \vec{\varkappa}$, $R\varkappa^4 R = -\varkappa^4$. Entsprechend ist K, als vom $\mathfrak{P}$-Typ, ein *Pseudoskalar*, und das gilt auch für den bisher benutzten Massenoperator, der eine ungerade Funktion von K war, sowie für die in (1.1) nicht hingeschriebenen Glieder mit A_j und F_{ik}, wie man aus der Lagrange-Funktion mit Rücksicht auf V(1.3), (1.4) unschwer ersehen kann. I ist entsprechend seiner Eigenschaft als Mindestspin eine Invariante. Die bisher benutzte Gleichung war daher im ganzen pseudoskalar*. Der Vierervektor ι_k ist aber auf Grund entsprechender Betrachtungen ein echter Vektor, $K\iota_k$ ein Pseudovektor, und demgemäß das Glied mit l^2 in (1.1) als Produkt zweier Pseudovektoren eine *Invariante*. Die Inkonsequenz tritt durch Gl. V(2.9) ein, wo die linke Seite ein Vektor, die rechte dagegen ein Pseudovektor ist.

Wir können nun auch die Vorzeichenumkehr in der bisher benutzten Gleichung bzw. in dem ersten Gliede von (1.1) beheben, indem wir sie als Ganzes mit einer ungeraden Funktion von K multiplizieren, das lorentzinvariant ist, aber bei der R-Operation umkehrt. Statt die Gleichung einseitig mit einer Matrixfunktion zu multiplizieren, wobei die Hermitezität der eingehenden Matrizen verloren geht, wird man natürlich lieber versuchen, sie mit einem solchen Faktor zu *symmetrisieren*, und das ist nun durch die physikalische Interpretation sehr nahe gelegt. In der Tat sind die ι_k, $\varkappa_k$ in (1.1) nur Hilfsgrößen ohne unmittelbare physikalische Bedeutung. An ihrer Stelle standen ursprünglich die Vierergeschwindigkeit

$$u_k = \frac{\iota_k}{\sqrt{I^2 + K^2}}\,, \tag{1.4}$$

wobei I und K die schon erwähnten Invarianten des Momententensors bedeuten, und ein entsprechend gebildeter raumartiger Vektor

$$U_k = \frac{\varkappa_k}{\sqrt{I^2 + K^2}}\,, \tag{1.5}$$

die wegen $\iota_k \iota^k = -\varkappa_k \varkappa^k = -(I^2 + K^2)$ die Beziehungen $u_k u^k = -1$, $U_k U^k = +1$ erfüllen. Diese Vektoren, die in dieser Form klassisch eingeführt waren, ließen sich nicht ohne weiteres als Matrizenfunktionen auffassen, weil ihre Zähler und Nenner nicht vertauschbar sind. Wir multiplizierten daher die ganze Gleichung vor dem Übergange zur

* Wenn wir sie früher als „invariant" gegen Rauminversionen bezeichneten, so bedeutete das, daß dabei *sämtliche* Glieder ihr Vorzeichen umkehrten.

Matrizentheorie mit $(I^2+K^2)^{\frac{1}{2}}$, womit diese Größe im Massenoperator erschien, dessen Hermitezität dadurch nicht beeinträchtigt wurde, und rechneten mit den ι_k, $\varkappa_k$ weiter. Die *quantentheoretischen* ι_k, $\varkappa_k$ haben aber keine definiten Normen mehr, sondern erfüllen die Relationen [vgl. V(1.5) und (1.6)]

$$\iota_k \iota^k = -(I^2+K^2)+1 \tag{1.6}$$

und

$$\varkappa_k \varkappa^k = I^2+K^2-1\,, \tag{1.7}$$

wobei die rechten Seiten positiv und negativ sein können. Der Versuch liegt sehr nahe, die oben erwähnte Symmetrisierung so vorzunehmen, daß

$$u_k = \tfrac{1}{2}(f\iota_k + \iota_k f) \tag{1.8}$$

und

$$U_k = \tfrac{1}{2}(f\varkappa_k + \varkappa_k f) \tag{1.9}$$

wieder *definite* Normen bekommen, und das läßt sich in der Tat mit einem in K ungeraden, mithin pseudoskalaren f erreichen. Danach transformiert sich also u_k wie ein Pseudovektor, d.h. es ist $Ru_kR=u_k$ für $k=1, 2, 3$ und $Ru_4R=-u_4$, und U_k wie ein Vektor: $RU_kR=-U_k$ für $k=1, 2, 3$, $RU_4R=U_4$.

Für das Folgende benötigen wir verschiedene Eigenschaften der ι- und $\varkappa$-Matrizen. Unter ihren Vertauschungsrelationen[10] findet sich das Tripel

$$[\iota_4\varkappa_4]=iK \qquad [K\iota_4]=i\varkappa_4 \qquad [\varkappa_4 K]=-i\iota_4, \tag{1.10}$$

das zu ergänzen ist durch die Beziehung[11]

$$(\varkappa_4)^2+K^2-(\iota_4)^2+\sigma(\sigma+1)=0 \tag{1.11}$$

(σ = Spinmatrix, a. a. O. als $\varkappa$ bezeichnet). Für die Behandlung dieser Relationen geht man besser von der bisher benutzten ι_4-Darstellung zu einer K-Darstellung über [in III entwickelt], worin $\iota^4(=-\iota_4)$ und $\varkappa^4(=-\varkappa_4)$ die Form von Differenzenoperatoren annehmen:

$$\left.\begin{matrix}\iota^4\\ \varkappa^4\end{matrix}\right\}\psi(K)=(\sigma-iK)(\sigma+1+iK)\,\psi(K-i)\pm\tfrac{1}{4}\psi(K+i)\,. \tag{1.12}$$

Die Größe K, die wie alle unsere Matrizen hermitesch ist, ist hier wie eine reelle Zahl mit dem Wertebereich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu behandeln. Es ist nicht schwer, das Bestehen der Relationen (1.10) und (1.11) durch Einsetzen von (1.12) direkt zu verifizieren. Ähnliche Relationen bestehen in der Form

$$\left.\begin{matrix}\vec{\iota}\\ \vec{\varkappa}\end{matrix}\right\}\psi(K)=\mathfrak{A}_\sigma(K)\,\psi(K-i)\pm\mathfrak{B}_\sigma\,\psi(K+i) \tag{1.13}$$

für ι_1, ι_2, ι_3 und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, wofür wir auf III verweisen.

[10] WESSEL, W.: Phys. Rev. **76**, 1512 (1949).
[11] WESSEL, W.: Z. Naturforsch. 4a, 645 (1949).

Beim Einsetzen dieser Darstellungen in (1.8) und (1.9) erhält man nach etwas weitläufigeren Rechnungen, zu denen man die Eigenschaften der $\mathfrak{A}_\sigma(K)$ und $\mathfrak{B}_\sigma$ heranziehen muß [n.b.: $\mathfrak{B}_\sigma$ hängt nicht von K ab!]

$$U_j U^j = -u_j u^j = \tfrac{1}{8}\left((K-i)^2 + I^2\right)\left(f(K) + f(K-i)\right)^2 \qquad (1.14)$$
$$+ \text{ konjugiert kompl. Term}$$

als Bestimmungsgleichung für die Funktion $f(K)$. Sie muß natürlich aus Hermitezitätsgründen reell sein. Die Invariante I ist der Mindestspin $(\sigma \geqq I)$.

Betrachten wir zunächst den Fall $I = \frac{1}{2}$, weil hierfür die Differenzengleichung eine sehr einfache Lösung hat. Setzen wir nämlich

$$f\left(K + \frac{i}{2}\right) + f\left(K - \frac{i}{2}\right) = g(K), \qquad (1.15)$$

so wird für $I = \frac{1}{2}$ die Gl. (1.14)

$$\left.\begin{aligned} &\left(K - \frac{i}{2}\right)\left(K - \frac{3i}{2}\right) g^2\left(K - \frac{i}{2}\right) + \\ &\quad + \left(K + \frac{i}{2}\right)\left(K + \frac{3i}{2}\right) g^2\left(K + \frac{i}{2}\right) = 8\, U_j U^j \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

und es ergibt sich

$$g(K) = \frac{2}{K}\left(U_j U^j \frac{K^2 + \frac{1}{2}}{K^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.17)$$

Man könnte also die Forderung $U_j U^j = +1$, $u_j u^j = -1$ ohne weiteres in Strenge erfüllen, indem man eben diesen Wert in (1.17) einsetzte. Für die folgenden Rechnungen ist aber der Ausdruck (1.17) zu kompliziert, und für $I \neq \frac{1}{2}$ wird schon die Lösung der (1.16) entsprechenden Gleichung schwierig. Es wäre sehr erwünscht, wenn man den irrationalen Faktor in (1.17) durch seinen Grenzwert 1 (für große K) ersetzen könnte. Nun ist ein Faktor in der Normierung einer Vierergeschwindigkeit physikalisch nicht wesentlich, weil man ihn immer durch eine Parameter-Transformation der Eigenzeit abändern kann; wesentlich ist, daß ihre Norm definit ist, und hierfür genügt es in der Tat, den irrationalen Faktor wegzulassen und

$$g(K) = \frac{2}{K} \qquad (1.18)$$

zu setzen. Geht man nämlich hiermit über (1.15) in (1.14) ein, so erhält man

$$U_j U^j = \frac{K^4 + (I^2 + \frac{3}{4}) K^2 + \frac{1}{4}(1 - I^2)}{(K^2 + \frac{1}{4})^2}, \qquad (1.19)$$

also jedenfalls für $I = 0$, $\frac{1}{2}$ und 1 etwas Positives.

Mit der Annahme (1.18) ist auch die Differenzengleichung (1.15) leicht aufzulösen: man erhält

$$f(K) = 2K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{K^2 + (n + \frac{1}{2})^2} = \int_0^{\infty} dt \frac{\sin Kt}{\cosh t/2}, \tag{1.20}$$

also, wie gewünscht, eine ungerade Funktion von K. Diese Funktion ist übrigens durch eine weiter unten [Formeln (2.3) und (2.4)] folgende Eigenschaft noch besonders ausgezeichnet. Schließlich haben auch die *Spektren* der Operatoren (1.8), (1.9) genau den zu erwartenden Bereich, wie wir im folgenden Abschnitt für die vierten Komponenten zeigen werden.

§ 2. Spektren und Eigenfunktionen von u^4 und U^4

Es wird genügen, die Analyse für (1.9) durchzuführen und für (1.8) nur das Resultat anzugeben. Die Komponente U^4 nimmt in Anwendung auf ein ψ nach (1.9) und (1.12) die Form

$$\left.\begin{aligned} U^4\psi(K) = \tfrac{1}{2}\{&(\sigma - iK)(\sigma + 1 + iK)\big(f(K) + f(K-i)\big)\psi(K-i) - \\ &- \tfrac{1}{4}\big(f(K) + f(K+i)\big)\psi(K+i)\} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

an. Wie man sieht, erscheint die Funktion f nur in einer Verbindung, in der sie sich nach (1.15) durch g ausdrücken läßt; man erhält daher mit (1.18) unter Erweiterung mit einem Faktor i in Zähler und Nenner leicht

$$U^4\psi(K) = i\left\{\frac{(\sigma - iK)(\sigma + 1 + iK)}{\frac{1}{2} + iK}\psi(K-i) + \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2} - iK}\psi(K+i)\right\}. \tag{2.2}$$

Wir merken hier noch die aus (2.2) mit Rücksicht auf (1.12) abzuleitende Formel

$$\tfrac{1}{2}(KU^4 + U^4K)\psi(K) = \varkappa^4\psi(K) \tag{2.3}$$

an; *die Symmetrisierung mit K macht also die Symmetrisierung mit f gerade wieder rückgängig*. Ebenso gilt

$$\tfrac{1}{2}(Ku^4 + u^4K) = \iota^4, \tag{2.4}$$

was wir später benutzen werden. Beide Formeln bleiben auch für die übrigen Komponenten von U_k und u_k richtig.

Wir fragen nun nach den Eigenwerten und Eigenfunktionen von U^4, die wir mit U bzw. φ_U bzeichnen wollen, d.h. wir untersuchen die Gleichung $U^4\varphi_U = U\varphi_U$. Von hier an wollen wir uns auf den Fall

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \tag{2.5}$$

beschränken. Wir machen dann den Ansatz $[\Pi(x) = \Gamma(x+1)]$

$$\varphi_U(K) = 2^{-iK}\Pi(\tfrac{1}{2} - iK)[\cosh\pi K]^{\frac{1}{2}}\chi_U(K). \tag{2.6}$$

Beim Einsetzen in (2.2) beachte man, daß, wenn man $[\cosh\pi(K+i)]^{\frac{1}{2}} = i[\cosh\pi K]^{\frac{1}{2}}$ setzt, im gleichen Blatte der Riemannschen Fläche $[\cosh\pi(K-i)]^{\frac{1}{2}} = -i[\cosh\pi K]^{\frac{1}{2}}$ wird. Anderseits kann man auch, im andern Blatte, die umgekehrten Vorzeichen wählen, so daß schließlich

$$\pm\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{3}{2}+iK}{\frac{1}{2}+iK}\chi_U(K-i) - \frac{\frac{3}{2}-iK}{\frac{1}{2}-iK}\chi_U(K+i)\right\} = U\chi_U(K) \tag{2.7}$$

wird. Im folgenden lassen wir das doppelte Vorzeichen weg, indem wir stillschweigend festhalten, daß U positiv und negativ sein kann. Die Differenzengleichung (2.7) lösen wir wie üblich[12] durch den Ansatz

$$\chi_U(K) = \oint g_U(t)\, t^{iK-\frac{1}{2}}\, dt, \tag{2.8}$$

wobei der Integrationsweg von $t=\infty$ kommend und dahin zurückkehrend den Verzweigungspunkt $t=0$ im positiven Sinne umlaufen soll. Es gilt auch auf Grund einer partiellen Integration, unter der gleich zu erfüllenden Voraussetzung, daß g im Unendlichen stärker als $t^{-\frac{1}{2}}$ verschwindet,

$$\chi_U(K) = \frac{-1}{\frac{1}{2}+iK}\oint g'_U(t)\, t^{iK+\frac{1}{2}}\, dt. \tag{2.9}$$

Man erhält dann mittels der bekannten Schlußweise[12] für g die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(t^3 - 2Ut^2 - t)\, g' + \frac{g}{t} = 0. \tag{2.10}$$

Das Verhalten ihrer Lösungen für große t ist durch eine charakteristische Gleichung mit den Wurzeln 0 und -2 gegeben; die Lösung

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n-2}, \tag{2.11}$$

in der sich die Koeffizienten durch die Rekursionsformel

$$(n+1)(n+3)\, a_{n+1} - 2U\cdot(n+1)(n+2)\, a_n - n(n+2)\, a_{n-1} = 0 \tag{2.12}$$

bestimmen, genügt also dem Erfordernis, stärker als $t^{-\frac{1}{2}}$ zu verschwinden. Sie ist nach $t=0$ analytisch fortzusetzen und der Integrationsweg in (2.8) um ihre Singularitäten herumzuführen.

Für $U=0$ ist (mit $a_0=1$)

$$g(t) = \frac{2t}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\psi\, d\psi}{(t^2-\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}; \tag{2.13}$$

für $U\neq 0$ sind die a_n abwechselnd gerade und ungerade Polynome in U.

[12] Siehe etwa Meschkowski, H.: Differenzengleichungen. Göttingen 1959. Es handelt sich einfach um die ϱ-Darstellung von l. c. III.

Die Differentialgleichung (2.10) führt zu einer Orthogonalitätsrelation für die Ableitung. Sie sei so normiert, daß

$$\int g_U^{*\prime} g_V' t^2 \, dt = \delta_{UV}/2\pi^2 \tag{2.14}$$

wird. Hieraus folgt mit der Formel

$$\Pi\left(\tfrac{1}{2} + iK\right) \Pi\left(\tfrac{1}{2} - iK\right) = \pi \frac{K^2 + \frac{1}{4}}{\cosh \pi K} \tag{2.15}$$

für die Funktion $\varphi_U(K)$ von (2.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_U^* \varphi_V \, dK = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(K^2 + \tfrac{1}{4}\right) \chi_U^* \chi_V \, dK \tag{2.16}$$

und mit Rücksicht auf (2.9) und (2.14)

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_U^* \varphi_V \, dK &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} dK \iint ds\, dt\, g_U^{*\prime}(s)\, g_V'(t)\, s^{-iK+\frac{1}{2}} t^{iK+\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi^2 \int t^2 g_U^{*\prime} g_V' \, dt = \delta_{UV}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Die Funktionen (2.6) mit (2.9) und (2.11) bilden also in der Tat ein Orthogonalsystem. Das ist nicht ganz selbstverständlich, weil an sich die Lösungen einer homogenen Differenzengleichung nur bis auf eine periodische Funktion bestimmt sind. Wir könnten z.B. den cosh-Faktor in (2.6) auch in den Nenner setzen. Er würde aber dann rechterhand in (2.16) erscheinen und in (2.17) die Reduktion des Dreifachintegrals vereiteln. Die Funktionen (2.6) sind also eindeutig.

Was nun den für U zulässigen Wertebereich betrifft, so schließen wir aus Gl. (2.7), daß für $K \to \infty$ asymptotisch

$$\tfrac{1}{2}\{\chi_U(K - i) - \chi_U(K + i)\} = U \chi_U(K) \tag{2.18}$$

sein muß. Hier ist offenbar die Lösung

$$\chi_U(K) = e^{i\lambda K} \tag{2.19}$$

genauer, mit Rücksicht auf die Konvergenz von (2.16), $\chi_U(K) = e^{i\lambda K}/K$, was bei der Differenzengleichung für $K \to \infty$ keinen Unterschied macht. Durch Einsetzen ergibt sich

$$U = \sinh \lambda. \tag{2.20}$$

Hier kann λ jeden reellen Wert annehmen, jedoch, wieder mit Rücksicht auf die Konvergenz von (2.16), nicht komplex werden. Durch ganz ähnliche Rechnungen ergibt sich für u^4, wenn wir seine Eigenwerte mit u bezeichnen,

$$u = \pm \cosh \lambda, \tag{2.21}$$

bei beliebigem, reellem λ. *Die Eigenwerte von U^4 und u^4 verhalten sich also gerade so, wie man es klassisch erwarten sollte,* nämlich u wie $\pm 1/\sqrt{1 - \beta^2}$,

$\beta \leqq 1$ und U wie $\pm 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$, $\beta \geqq 1$. In der Tatsache, daß U gleich Null werden kann, spiegelt sich die Möglichkeit von $\beta = \infty$.

Die Singularitäten der Differentialgleichung (2.10) liegen, wenn man U nach (2.20) durch λ ausdrückt, bei $t = 0$, e^{λ} und $-e^{-\lambda}$. Mit Rücksicht darauf liegt es nahe, (2.13) in der Form

$$g(t) \simeq \frac{2t}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{(t - e^{\lambda}\sin\psi)^{\frac{3}{2}}\,(t + e^{-\lambda}\sin\psi)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.22}$$

zu einer Näherungslösung für alle U zu erweitern. In der Tat ergeben sich bei der Entwicklung für große t die Koeffizienten von (2.12) jeweils bis auf einige Prozent (zu klein).

§ 3. Neuformulierung des Massenoperators

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß die nach (1.8), (1.9) und (1.12), (1.13) mit (1.20) gebildeten U_k und u_k vernünftige quantenmechanische Operatoren der Vierer- bzw. Pseudo-Vierergeschwindigkeit sind, ist es nicht nur formal, sondern auch physikalisch sehr naheliegend, im Sinne von § 1 dieser Arbeit überall $\varkappa_j$ durch U_j und ι_j durch u_j zu ersetzen. Das frühere L_0 [Formel (2.1) l. c.[9]] wird also z.B., wenn wir den Massenterm gleich weglassen,

$$L_0 = -\frac{1}{2}\psi^* U^j\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j} + \frac{e}{c}A_j\psi\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^j} + \frac{e}{c}A_i\psi^*\right)U^j\psi \tag{3.1}$$

und als Folge davon an Stelle von (2.9) ebendort

$$\frac{\partial F^{jl}}{\partial x^l} = e\,\psi^* U^j\psi\,, \tag{3.2}$$

wo nun beide Seiten Vektoren gleicher Art sind. In den Ausdrücken $L_1 \ldots L_3$ l. c.[9] verwandelt sich $\varkappa^j M_{jk} = K\iota_k$ durch Symmetrisierung mit f, das mit K und M_{jk} kommutiert, in $U^j M_{jk} = K u_k$, genauer, da die Faktoren dieser Produkte nicht vertauschbar sind, in $\frac{1}{2}(U^j M_{jk} + M_{jk} U^j) = \frac{1}{2}(K u_k + u_k K)$, das ist aber nach (2.4) gleich ι_k. Es wird also z.B.

$$L_1 \sim -\frac{\hbar}{2i}\left\{\psi^*\iota_k F^{kl}\frac{\partial\psi}{\partial x^l} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^l}F^{kl}\iota_k\psi\right\}. \tag{3.3}$$

Man muß sich natürlich fragen, ob diese Substitution die Ergebnisse von l. c.[9] aufrecht erhält, d.h. ob damit der Anomaliefaktor und die Feinstruktur richtig bleiben. Hierfür braucht man nur anzunehmen, entsprechend der früheren Voraussetzung S. 1008 l. c.[9], daß der gleich zu bildende Massenoperator, wenn wir ihn etwa wieder $m_I(K)$ nennen, so beschaffen ist, daß $(U^4)^{-1} m_I(K)/m_0$ die Eigenwerte ± 1 hat; dann läuft die Rechnung wie früher ab, da alle Formeln homogen in ι und $\varkappa$ sind mit Faktoren ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ oder K), die sich mit $f(K)$ vertauschen lassen.

Die Formel (1.1) nimmt nun, indem sich $\varkappa^j$, $\varkappa^k$ in U^j, U^k verwandeln und $K\iota_k$, das ist genauer $\frac{1}{2}(K\iota_k + \iota_k K)$, zunächst in $\frac{1}{2}(Ku_k + u_k K)$ und dann nach (2.4) in ι_k übergeht, die noch einfachere Gestalt

$$U^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - l^2 \iota_k \psi (\psi^* U^k \psi) = 0 \tag{3.4}$$

an, in der sie nun also auch inversionsfest ist. Dabei sind wieder alle explizit vorkommenden A_j und F_{ik} zugunsten der durch die Stromkomponenten ausgedrückten $\partial F^{il}/\partial x^l$ fortgelassen. Man kann dazu geltend machen, daß jedenfalls für Lichtquanten die unendlichen Beiträge zur Selbstenergie, die wir mit unserem Verfahren endlich zu machen hoffen, *bei hohen Frequenzen* auftreten, wo die Ableitungen der Feldstärken als zweite Ableitungen der Potentialkomponenten sehr groß gegen diese und noch groß gegen die Feldstärken selber sind.

Die Analyse dieser Gleichung wird sicher noch sehr viel Mühe kosten, doch glauben wir nicht, daß die Mühe etwa noch größer sein wird als bei der sehr ähnlich aussehenden HEISENBERGS[13], obwohl die eingehenden Matrizen durchweg unendlich sind. Man muß dazu nur bedenken, daß die Variable K, durch die der Massenoperator hauptsächlich bestimmt wird, ein kontinuierliches Spektrum mit dem Wertebereich von $-\infty$ bis $+\infty$ hat. Sie wirkt damit wie eine fünfte Koordinate, d.h. wenn man in einer K-Darstellung arbeitet, wie wir das im Vorangehenden durchweg getan haben, so erscheint die ψ-Funktion einfach als eine Funktion der fünf Variablen x, y, z, t und K. Das liegt in der Natur der Sache, denn es war ja gerade unser Ausgangspunkt, die Rückwirkung eines geladenen Teilchens auf sich selbst durch eine endliche Erhöhung der Variablenzahl — ursprünglich den Vektor u_k — zu erfassen. Zu K hinzu treten noch der Spin σ und seine diagonale Komponente μ, die sich von ihren Repräsentanten in der gewöhnlichen Theorie nur dadurch unterscheiden, daß auch σ durch eine unendliche Zahlenfolge dargestellt wird, nämlich durch I, $I+1$, $I+2$ ... (I ganz oder halbganz), und daß μ dementsprechend größer als $\frac{1}{2}$ sein kann.

Die Quantelung des Strahlungsfeldes wird damit nicht überflüssig gemacht; sie tritt jedoch erst in den A_j und F_{ik} in Erscheinung, die wir in (3.1) und (3.3) noch mitgeführt, jedoch in (3.4) weggelassen haben. Wir stellen uns dabei vor, daß sie nur noch Wechselwirkungen mit „äußeren" Feldern — eventuell denen anderer Teilchen — umfassen, während der eigentliche Rückkopplungseffekt durch den Term dritter Ordnung in (3.4) wiedergegeben sein sollte.

[13] DÜRR, H.-P., W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI: Z. Naturforsch. **14**a, 441 (1959).

Das Auftreten einer fünften Koordinate bringt es mit sich, daß man in (3.4) alle räumlichen Ableitungen gleich Null setzen, also eine Art Schwerpunktssystem einführen, und auch die Zeitabhängigkeit rein periodisch wählen kann, ohne daß das Eigenwertproblem seinen Sinn verliert. Es bleibt immer noch eine keineswegs einfache Differenzengleichung im K-Raume. Wir wollen sie zum Schluß im „klassischen" Sinne, d.h. ohne Quantisierung des Materiefeldes untersuchen. Neben der Einsicht in die analytischen Zusammenhänge ergibt sich dabei das interessante Resultat, daß das Eigenwertproblem unter dieser Voraussetzung zur Masse Null führt — jedenfalls in der betrachteten Näherung — so daß eine endliche Masse ein reiner Quanteneffekt wäre.

Wir setzen also in (3.4) $U^j\,\partial\psi/\partial x^j = U^4\,\partial\psi/\partial c t$ und machen für ψ den Ansatz

$$\psi = l^{-\frac{3}{2}}\, e^{-i m c^2 t/\hbar}\, \Psi(K)\,. \tag{3.5}$$

Die hiermit eingeführte Masse m denken wir uns in Vielfachen der Elektronenmasse m_0 ausgedrückt:

$$m = \mu\, m_0\,. \tag{3.6}$$

Der Faktor l ist willkürlich so gewählt. Durch Einsetzen in (3.4) folgt

$$\mu\, U^4 \Psi - i\,\lambda/l \cdot \iota_k \Psi(\Psi^* U^k \Psi) = 0\,, \tag{3.7}$$

wobei λ die Compton-Wellenlänge $\hbar/m_0 c$ bedeutet und l durch (1.2) gegeben ist:

$$\lambda/l = \sqrt{137}\,. \tag{3.8}$$

Um die Diskussion zu vereinfachen, begnügen wir uns in (3.7) mit den niedrigsten Gliedern in σ. Das bedeutet, daß sich die Formeln (1.13) auf

$$\left.\begin{matrix}\vec{\iota}\\ \vec{\varkappa}\end{matrix}\right\} = -\frac{I\,\mathfrak{M}}{\sigma(\sigma+1)}\cdot\left\}\begin{matrix}\varkappa^4\\ \iota^4\end{matrix}\right. \tag{3.9}$$

reduzieren, wie man auf Grund der Angaben in Teil III dieser Mitteilungen[9] nachrechnen kann. [Die Λ-Glieder fallen dort fort.] Nun ist für den tiefsten σ-Term jedenfalls $I/\sigma = 1$, ferner, wenn wir nun an den Elektronenspin denken, $\sigma = \frac{1}{2}$, der Faktor $\mathfrak{M}/(\sigma+1)$ höchstens vom Zahlwerte $\frac{1}{3}$. Hiervon tritt in (3.7) nur das Quadrat auf (weil sich $\mathfrak{U}$ durch $\varkappa$ ausdrückt). Es macht keine übermäßigen Schwierigkeiten, diese Terme (d.h. $k = 1, 2, 3$) mitzuführen, doch wollen wir hier im Sinne einer orientierenden Näherung auch sie noch weglassen und uns nur mit

$$\mu\, U^4 \Psi - i\,\lambda/l \cdot \iota_4 \Psi(\Psi^* U^4 \Psi) = 0 \tag{3.10}$$

beschäftigen. Unter dem eingeklammerten Terme wäre in einer ι^4-Darstellung eine Summation über ι^4 von $\frac{3}{2}$ bis ∞ zu verstehen, nebst ergänzenden Summationen über σ und seine Diagonal-Komponente. Wenn wir wieder zur K-Darstellung übergehen [die Transformation ist in PR 2, vgl. [9], angegeben], wird daraus

$$(\Psi^* U^4 \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(K)\, U^4 \Psi(K)\, dK = J^4. \tag{3.11}$$

Dieser Größe wird nach (3.10) der Masseneigenwert proportional; wir setzen daher

$$\mu = \eta \cdot \frac{\hat{\lambda}}{l} \cdot J^4 \tag{3.12}$$

und haben dann nur noch (beachte $\iota_4 = -\iota^4$)

$$\eta U^4 \Psi + i\, \iota^4 \Psi = 0 \tag{3.13}$$

zu behandeln, wo nun die Operatoren durch (2.2) — mit $\sigma = \frac{1}{2}$ — und (1.12) vollständig gegeben sind.

Wir machen wieder den Ansatz (2.6), modifiziert, mit Rücksicht auf eine übersichtlichere Schreibung des Integrals J^4, wie folgt:

$$\Psi(K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [\coth \pi K]^{\frac{1}{2}} 2^{-iK} \Pi\left(\frac{1}{2} - iK\right) \sinh \frac{\pi K}{2}\, \Theta^{-1}\left(\frac{1}{2}, K\right) \Phi(K). \tag{3.14}$$

Dabei bedeutet $\Theta(I, K)$ die schon früher (in IV) benutzte reelle Funktion

$$\Theta(I, K) = \frac{2\Pi\left(\frac{I+iK}{2}\right)\Pi\left(\frac{I-iK}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{I+iK-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{I-iK-1}{2}\right)}, \tag{3.15}$$

die der Funktionalgleichung

$$\Theta(K)\,\Theta(K+i) = (I - iK + 1)(I + iK) \tag{3.16}$$

und ihrer Konjugierten genügt. Hiermit wird

$$J^4 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* U^4 \Psi\, dK = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(K)\, \{\Phi(K-i) - \Phi(K+i)\}\, dK \tag{3.17}$$

und als Folge von (3.13)

$$(\eta + \tfrac{1}{2} - iK)\, \Phi(K+i) = (\eta + \tfrac{1}{2} + iK)\, \Phi(K-i). \tag{3.18}$$

Zur Lösung setzen wir wieder wie in (2.8) und mit dem gleichen Integrationswege

$$\Phi(K) = \oint h(t)\, t^{iK-\frac{1}{2}}\, dt. \tag{3.19}$$

Hiermit wird nach (3.17)

$$J^4 = 2\pi \oint dt\, h^2(t) \left(t - \frac{1}{t}\right), \tag{3.20}$$

und $h(t)$ muß nach (3.18) der Differentialgleichung

$$(1+t^2)\,h' + \left((1-\eta)\,t + \frac{\eta}{t}\right) h = 0 \tag{3.21}$$

genügen. Aus dieser folgt aber

$$2\eta\, h^2 \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\,(1+t^2)\,h^2, \tag{3.22}$$

d.h. das Integral (3.20), das ja über einen geschlossenen Weg zu erstrecken ist, verschwindet, was zu beweisen war, denn hiermit verschwindet μ nach (3.12). Wir haben uns davon überzeugt, daß auch bei Mitführung der durch (3.9) gegebenen Terme dieses Resultat erhalten bleibt.

Zur Weiterführung der Theorie muß man also zur Quantisierung des ψ-Wellenfeldes übergehen. Wir denken dabei etwa an die Methode von Nambu und Lasinio[14]. Der Gebrauch des K-Raumes wirft aber noch einige Interpretationsfragen auf, die eine genauere Untersuchung erfordern.

Anhang: Vertauschung von u_k und U_k

Die in Rede stehende Vertauschung wurde schon in der IV. Mitteilung[9] vorgenommen unter Berufung auf eine Arbeit von Czyzak[15]. Sie wurde a. a. O. nur mit einigen Worten begründet, weil es sich eben nur um einen klassischen, heuristischen Gesichtspunkt handelte. Nachdem nun die „run-away solutions" fortfahren, die Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen, möchten wir sie doch einmal genauer diskutieren.

Die gewöhnliche Bewegungsgleichung für ein Teilchen unter dem Einflusse der Strahlungskraft lautet, wenn man

$$2e^2/3c^2 = \varepsilon \tag{A.1}$$

setzt:

$$m u_j' = \varepsilon\,(u_j'' - u_j\,(u_k' u'^k)). \tag{A.2}$$

Dabei ist m die Ruhmasse, und die Striche bedeuten Ableitungen nach der Weltlinie (s). Ihre Lösungen sind die „run-away solutions". Unser inzwischen eliminierter „Massentrick" bestand darin, die ausgesandte Energie in der Ruhmasse mitzuzählen und dazu

$$m' = \varepsilon\,(u_k' u'^k) \tag{A.3}$$

zu setzen. Die Analyse dieser Gleichungen ist bei Czyzak durchgeführt mit dem Ergebnis, daß man zwei ganz verschiedene Lösungstypen hat, je nach der Natur des Impulses (p_k), der als Integrationskonstante auftritt. Wählt man p_k zeitartig, so erhält man eine aperiodische Bewegung [Formel (24) bei Czyzak l. c.], die *einmal* (a. a. O. bei $s=0$) die Lichtgeschwindigkeit erreicht und vorher und nachher darunter bleibt; wählt man p_k raumartig, so wird die Bewegung periodisch [Formel (23) l. c.] und erreicht sie die Lichtgeschwindigkeit in Abständen $\pi\varepsilon/m_0$, wobei m_0 eine Konstante ist. Der erste Fall ist offenbar unphysikalisch, weil er einen Punkt der Weltlinie auszeichnet; der zweite Fall wäre als „Zitterbewegung" annehmbar, wenn nicht der raumartige Impuls unmöglich wäre.

---

[14] Nambu, Y., and G. Jona-Lasinio: Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
[15] Czyzak, S. J.: Amer. Phys. **22**, 335 (1954).

Diese Verhältnisse kehren sich gerade um, wenn man in den Bewegungsgleichungen die u_k durch die U_k ersetzt. Man muß dabei mit Rücksicht auf $U_k U^k = +1$ schreiben

$$m U_j' = \varepsilon (U_j'' + U_j (U_k' U'^k)) \tag{A.4}$$

und

$$m' = -\varepsilon (U_k' U'^k) \tag{A.5}$$

setzen, um einen Massen*zuwachs* zu haben ($U_k' U'^k < 0$). Gl. (A.2) wird damit wieder zu einem vollständigen Differential nach der Weltlinie

$$d/ds (m U_j - \varepsilon U_j') = 0 \tag{A.6}$$

und

$$p_j = c (m U_j - \varepsilon U_j') \tag{A.7}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit, aus Dimensionsgründen) konstant. Diese Größe ist als *Energie-Impuls-Vektor* zu interpretieren, weil sie sich beim Vorhandensein äußerer Felder entsprechend ändert. Damit ist also wieder die Konstanz dieses Vektors im feldfreien Falle gewahrt, wie immer die *Geschwindigkeit* sich ändern mag.

Die weitere Integration verläuft ganz analog wie bei CZYZAK. Wir beschränken uns auf zeitartige Impulse. Setzt man $p_k p^k = -(m_0 c)^2$, womit die Elektronenmasse m_0 eingeführt wird, und $U^k/U^4 = V^k/c$, $k = 1, 2, 3$, so gilt in Raumvektoren

$$\frac{\mathfrak{V}}{c} = \frac{\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{Z} \sin m_0 s/\varepsilon}{U_0^4 - Z^4 \sin m_0 s/\varepsilon}\,. \tag{A.8}$$

Dabei ist $Z_k = p_k/m_0 c$, also $\mathfrak{Z}, Z^4$ ein konstanter Vektor mit der Norm -1, während $\mathfrak{U}_0$, U_0^4 weitere Integrationskonstanten sind, die einen Vektor der Norm $+1$ bilden. Beide stehen noch aufeinander senkrecht, was in Raumvektoren

$$\mathfrak{U}_0 \mathfrak{Z} = U_0^4 Z^4 \tag{A.9}$$

bedeutet. Formel (A.8) stellt noch keine „Zitterbewegung" dar, da sich ja nur die Geschwindigkeit, nicht der Ort periodisch ändert. Nimmt man aber noch an, daß $\mathfrak{U}_0$ ein Einheitsvektor ist, so folgt $U_0^4 = 0$ und aus (A.9), daß $\mathfrak{U}_0$ *senkrecht zur Impulsrichtung* $\mathfrak{Z}$ ist. Formel (A.8) ergibt dann

$$\frac{\mathfrak{V}}{c} = \frac{\mathfrak{Z}}{Z^4} - \frac{\mathfrak{U}_0}{Z^4} \operatorname{cosec} m_0 s/\varepsilon\,. \tag{A. 10}$$

Hier ist $\mathfrak{Z}/Z^4$ gerade die Geschwindigkeit, in Einheiten von c, die dem Impulse $\mathfrak{p}$ nach dem gewöhnlichen Zusammenhange entsprechen würde; dieser überlagert sich transversal eine rein periodische. Diese Zusatzgeschwindigkeit wird nun freilich periodisch unendlich; man darf daher der ganzen Bewegung nicht allzuviel physikalische Bedeutung beilegen. In der Tat beruht sie ganz auf unserem „Massentrick", der die Sache ungebührlich vereinfacht; könnte man sie mit unserem gegenwärtigen, realistischen Massenoperator durchrechnen, so würde sich wohl etwas Endliches ergeben. Aber gerade in dieser primitiven Form erscheint uns die Betrachtung *heuristisch* recht aufschlußreich als ein *Modell*, an dem man sehr übersichtlich erkennen kann, wie sich durch Einführung von neuen Variablen die Erhaltung von Energie und Impuls wahren läßt. Hierin sehen wir die eigentliche Überwindung der run-away-Schwierigkeit. Die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit, die sich dabei für die klassische Beschreibung ergibt und an der sich natürlich auch mit dem realistischen Massenoperator nichts ändern würde, scheint uns nicht absurd zu sein, wenn sie sehr schnell um einen Mittelwert oszilliert und dieser Mittelwert, wie in dem ersten Gliede von (A.10), dem Werte von $\mathfrak{p}$ entspricht: das Teilchen „zittert" dann um den mit Unterlichtgeschwindigkeit fortschreitenden Schwerpunkt.