

# Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten

VON HANS SAMELSON, Zürich

1. Eine Mannigfaltigkeit, deren Punkte die Elemente einer Gruppe bilden derart, daß die Gruppen-Operationen durch stetige Funktionen in der Mannigfaltigkeit vermittelt werden, heißt eine Gruppen-Mannigfaltigkeit (im folgenden auch kurz: Gruppe). Ist die Mannigfaltigkeit geschlossen, so darf man bekanntlich annehmen, daß die Mannigfaltigkeit analytisch ist und die Gruppenoperationen durch analytische Funktionen in der Mannigfaltigkeit dargestellt werden, daß also eine geschlossene Lie'sche Gruppe vorliegt. Die Frage, welche Mannigfaltigkeiten als Gruppen-Mannigfaltigkeiten auftreten können, kann man zunächst einmal auf die einfachsten geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die  $n$ -dimensionalen Sphären  $S_n$ , spezialisieren. Es gilt der Satz:

*Die einzigen Sphären, die Gruppen-Mannigfaltigkeiten sind, sind die  $S_1$  und die  $S_3$ .*

Das folgt aus einem allgemeinen Satz von Cartan, nach dem für jede geschlossene Gruppe, deren Dimension  $\geq 3$  ist, die dritte Betti'sche Zahl nicht verschwindet<sup>1)</sup>. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Cartan'schen Theorie der Integralinvarianten in Gruppen. Bei dem elementaren Charakter des Satzes über die Sphären dürfte aber ein elementarer Beweis von Interesse sein. Ein solcher wird in dieser Arbeit geliefert.

Da der Beweis im Rahmen der Homologietheorie geführt wird, wird der Begriff der Sphäre durch den allgemeineren der Homologiesphäre ersetzt; das bedeutet hier: geschlossene Mannigfaltigkeit (der Dimension  $n$ ), deren Betti'sche Zahlen außer der nullten und der  $n$ -ten verschwinden. (Bekanntlich können aus Gründen der Charakteristik nur Homologiesphären ungerader Dimension als Gruppen auftreten.) Der  $n$ -dimensionale projektive Raum werde mit  $P_n$  bezeichnet; für ungerade  $n$  ist  $P_n$  eine Homologiesphäre.

In der vorliegenden Arbeit werden wir dann den folgenden Satz beweisen:

*Satz A. Die Gruppen-Mannigfaltigkeit  $G$  sei eine Homologiesphäre; dann ist  $G$  entweder der  $S_1$  oder der  $S_3$  oder dem  $P_3$  homöomorph.*

Es sei hier daran erinnert, daß  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $P_3$  tatsächlich als Gruppen auftreten:  $S_1$  als multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1,  $S_3$  als multiplikative Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1,  $P_3$  als

multiplikative Gruppe der „homogenen“, d. h. bis auf einen reellen Faktor bestimmten, Quaternionen, oder (was dasselbe ist) als Gruppe der Kugeldrehungen.

Ferner sei bemerkt, daß man aus der Tatsache, daß von den Sphären nur die  $S_1$  und die  $S_3$  Gruppen sind, leicht einen Teil des bekannten Frobenius'schen Satzes über die Schiefkörper schließen kann, nämlich: Der Rang eines Schiefkörpers über den reellen Zahlen ist entweder 1 oder 2 oder 4.<sup>2)</sup>

Ein Anhang am Schluß der Arbeit enthält Varianten zu einigen Beweisen.

2. Wir stellen zunächst einige bekannte Tatsachen zusammen:

a)  $U$  sei eine Untergruppe der geschlossenen  $n$ -dimensionalen Lie'schen Gruppe  $G$ , d. h. eine Untergruppe im abstrakt-gruppentheoretischen Sinn, die eine abgeschlossene Punktmenge von  $G$  ist. Dann ist bekannt: Man kann in einer hinreichend kleinen, dem euklidischen  $R_n$  homöomorphen, Umgebung  $V$  des Einheitspunktes  $e$  von  $G$  ein Koordinatensystem so einführen, daß der Teil von  $U$ , der in  $V$  liegt, also der Durchschnitt  $U \cdot V$ , eine Ebene in  $V$  durch den Punkt  $e$  bildet<sup>3)</sup>; die Dimension dieser Ebene ist die Dimension der Untergruppe. Aus diesem lokalen Verhalten und der Kompaktheit von  $U$  schließt man leicht: Ist die Untergruppe  $U$  zusammenhängend, dann ist sie eine topologisch und sogar analytisch in  $G$  eingelagerte Mannigfaltigkeit; ist  $U$  nicht zusammenhängend, dann ist die Komponente  $U^1$ , die den Punkt  $e$  enthält, selbst eine zusammenhängende Untergruppe von  $G$ , also eine Mannigfaltigkeit in  $G$ , und  $U$  besteht aus endlich vielen Nebengruppen von  $U^1$ , die die Komponenten von  $U$  sind;  $U^1$  ist bekanntlich Normalteiler von  $U$ .

b) Die Gruppe  $G$  zerfällt in die (etwa linksseitigen) Nebengruppen  $aU$  der Untergruppe  $U$ , wobei  $a$  ein beliebiges Element von  $G$  bedeutet. Diese Zerlegung ist eine Faserung von  $G$  mit der Faser  $U$ .

Dabei versteht man unter der Faserung einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit der Faser (-Mannigfaltigkeit)  $F$  folgendes<sup>4) 5)</sup>:  $M$  ist zerlegt in Mannigfaltigkeiten, die alle zu  $F$  homöomorph sind und „Fasern“ heißen; durch jeden Punkt von  $G$  geht eine und nur eine Faser; und jede Faser besitzt eine Umgebung in  $M$ , die fasertreu homöomorph mit dem topologischen Produkt  $E \times F$  ist; dabei ist  $E$  ein Element (Vollkugel); für die Dimensionen  $d(M)$ ,  $d(F)$ ,  $d(E)$  gilt:  $d(E) = d(M) - d(F)$ ; „fasertreu homöomorph“ heißt: jede Faser ist topologisch abgebildet auf eine der Mannigfaltigkeiten  $p \times F$  in  $E \times F$ , wo  $p$  ein Punkt von  $E$  ist.

Faßt man die Fasern als Punkte eines Raumes auf, mit dem natürlichen Umgebungsbegriff, so erhält man den Faser- oder Basisraum  $B$ , der auch

mit  $\frac{M}{F}$  bezeichnet wird; er ist offenbar eine Mannigfaltigkeit. Ordnet man jedem Punkt von  $M$  die Faser zu, auf der er liegt, so erhält man eine stetige Abbildung von  $M$  auf  $B$ , die Projektion  $P$ . Für jede hinreichend kleine Umgebung  $V$  eines beliebigen Punktes von  $B$  ist dann die Menge  $P^{-1}(V)$ , die ganz aus Fasern besteht, fasertreu homöomorph dem topologischen Produkt  $V \times F$ . Es gilt der Satz von Feldbau<sup>6)</sup>:

*Ist  $E$  ein Element im Faserraum  $B$ , dann ist die Menge  $P^{-1}(E)$  fasertreu homöomorph dem Produkt  $E \times F$ .*

Daß die Zerlegung einer Gruppe  $G$  in die Nebengruppen einer Untergruppe  $U$  eine Faserung von  $G$  mit der Faser  $U$  ist, ist ganz leicht zu sehen. Der Faserraum wird dann auch Nebengruppenraum genannt.

Die Definition und die genannten Eigenschaften der Faserungen bleiben gültig, wenn die einzelne Faser statt aus einer (zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit aus endlich vielen Mannigfaltigkeiten besteht. Dies ist der Fall bei der Nebengruppen-Zerlegung von  $G$  nach einer Untergruppe  $U$ , die nicht zusammenhängend ist.

c) Es ist bekannt, daß die einzige zusammenhängende geschlossene Abel'sche Gruppe der Dimension  $m$  die toroidale Gruppe, oder kurz: das Toroid,  $T_m$  ist. Dabei ist  $T_m$  folgendermaßen definiert:

$K$  sei die Kreislinie  $S_1$ , in natürlicher Weise als Gruppe aufgefaßt, also etwa als die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1; dann ist

$$T_m = K \times K \times \cdots \times K$$

das direkte Produkt von  $m$  Exemplaren der Gruppe  $K$ ; die Mannigfaltigkeit  $T_m$  ist also das topologische Produkt von  $m$  Kreislinien.

Das folgt aus den Untersuchungen von Pontrjagin oder aus einfachen Sätzen der Lie'schen Theorie.

d) Bei den eindimensionalen oder einparametrischen Untergruppen verzichtet man ausnahmsweise auf die Forderung der Abgeschlossenheit. Demgemäß gibt es zwei Arten von einparametrischen Untergruppen: Erstens die geschlossenen; diese sind der Gruppe  $K$  isomorph; zweitens die offenen; diese sind der additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorph, also einer Geraden homöomorph. Beide Arten sind Abelsch. Die abgeschlossene Hülle einer offenen einparametrischen Untergruppe ist eine zusammenhängende geschlossene Abelsche Untergruppe, also ein Toroid  $T_m$ ; und zwar ist  $m > 1$ . Daraus entnimmt man sofort: Da es in  $G$  einparametrische Untergruppen gibt (s. u.), so gibt es mindestens eine geschlossene.

Man führe in der Umgebung des Einheitspunktes  $e$  von  $G$  ein differen-

zierbares Koordinatensystem ein; die einparametrischen Untergruppen sind dann dort differenzierbare Kurven durch  $e$ . Es gilt der Existenz- und Eindeutigkeitsatz: Zu jeder Geraden durch  $e$  gibt es genau eine einparametrische Untergruppe, die die Gerade im Punkte  $e$  berührt. Mit dem dadurch nahegelegten Umgebungsbegriff bilden also die einparametrischen Untergruppen einen  $(n - 1)$ -dimensionalen projektiven Raum  $P_{n-1}$ , wenn  $n$  die Dimension von  $G$  ist.

Zu jeder Halbgeraden oder jedem Vektor im Punkt  $e$  gehört eine orientierte einparametrische Untergruppe, d. h. eine einparametrische Untergruppe, deren Mannigfaltigkeit — Kreis oder Gerade — auf eine der beiden möglichen Weisen orientiert ist. Die Mannigfaltigkeit der orientierten einparametrischen Untergruppen ist also eine  $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre  $S_{n-1}$ ; sie ist in evidentester Weise als zweiblättrige Überlagerung der Mannigfaltigkeit  $P_{n-1}$  der einparametrischen Untergruppen aufzufassen.

3. Unter dem Rang  $\lambda(G)$  einer (geschlossenen Lie'schen) Gruppe  $G$  versteht man die größte der Dimensionen der Abel'schen Untergruppen von  $G$  (es läßt sich übrigens zeigen, daß  $\lambda(G)$  auch gleich der Dimension eines jeden maximalen Toroids in  $G$  ist, also eines solchen, das in keinem größeren Toroid enthalten ist).<sup>7)</sup>

Mit Hilfe dieser Definition zerlegen wir den zu beweisenden Satz A in zwei Teile:

*Satz B.* Ist die Gruppe  $G$  eine Homologiesphäre, dann ist  $\lambda(G) = 1$ .

*Satz C.* Die einzigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die als Gruppenmannigfaltigkeiten vom Range 1 auftreten, sind  $S_1, S_3, P_3$ .

Offenbar folgt Satz A aus Satz B und Satz C.

4. Den Satz B beweisen wir hier nicht; er ist aber richtig, als ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes über Gruppen-Mannigfaltigkeiten:

*Satz B'.* Hat die Gruppe  $G$  dieselben Betti'schen Zahlen wie das topologische Produkt von  $l$  Sphären ungerader Dimensionen, so ist  $\lambda(G) = l$ .

Denn für eine Homologiesphäre ist die Voraussetzung von B' mit  $l = 1$  erfüllt.

Für den Beweis des Satzes B' verweisen wir auf den Anhang dieser Arbeit, Abschnitt a. Außerdem wird im Anhang, Abschnitt b, ein gänzlich anderer Beweis des Satzes B skizziert, der auf der Theorie der Faserungen beruht.

Der Satz B ist auch ein Korollar des Cartan'schen Satzes:

*Die Summe der Betti'schen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Rang  $\lambda$  ist gleich  $2^\lambda$ .*<sup>8)</sup>

Da aber der Cartan'sche Beweis dieses Satzes dieselben Hilfsmittel aus der Theorie der Integralinvarianten benutzt wie der Beweis des in Nr. 1 genannten Satzes über die dritte Betti'sche Zahl, wollen wir uns aus Gründen der Methode nicht auf ihn berufen.

5. Wir kommen jetzt zum Hauptteil der Arbeit, nämlich zum Beweis des Satzes C: Aus  $\lambda(G) = 1$  folgt  $G = S_1$  oder  $= S_3$  oder  $= P_3$ .

Es sei also  $G$  eine Gruppe mit  $\lambda(G) = 1$ ; die Dimension von  $G$  sei  $n$ . Wir dürfen annehmen, daß  $n$  von 2 verschieden ist; denn bekanntlich ist die einzige geschlossene zweidimensionale Gruppe das Toroid  $T_2$ , also vom Rang 2; diese Tatsache läßt sich auch leicht aus  $B'$  folgern.

Wir betrachten eine geschlossene einparametrische Untergruppe von  $G$  (solche gibt es immer, vgl. Nr. 2, d); sie heiße  $L$ .

Mit  $N$  bezeichnen wir den Normalisator von  $L$ , d. h. die Gruppe derjenigen Elemente  $a$  von  $G$ , für die

$$aLa^{-1} = L$$

gilt, die also die Untergruppe  $L$  in sich transformieren.  $N$  enthält  $L$ . Wir behaupten:

*Der Normalisator  $N$  von  $L$  ist eindimensional und besteht aus einer (endlichen) Anzahl Nebengruppen von  $L$ :*

$$N = L + a_1L + a_2L + \cdots + a_{r-1}L.$$

Weil  $N$  natürlich abgeschlossen ist, ist das gleichbedeutend mit der Behauptung: Die Komponente  $N^1$  von  $N$ , die den Einheitspunkt  $e$  von  $G$  enthält (und die infolgedessen auch  $L$  enthält), fällt mit  $L$  zusammen.

Beweis: Jedes Element  $a$  des Normalisators  $N$  bewirkt einen Automorphismus von  $L$  durch die Zuordnung  $p \rightarrow apa^{-1}$ , wo  $p$  die Gruppe  $L$  durchläuft. Die Automorphismen von  $L$ , also die der Gruppe  $K$  (Nr. 2, c), kennt man aber: Neben der Identität gibt es noch genau einen, der jedem Element  $p$  sein Inverses  $p^{-1}$  zuordnet, die Inversion von  $L$  (oder  $K$ ). (In der Darstellung durch die komplexen Zahlen vom Betrag 1 bedeutet die Inversion den Übergang zur konjugiert-komplexen Zahl.) Die Automorphismengruppe ist also diskret, sogar endlich. Ist nun  $b$  ein Punkt von  $N$ , der der  $e$ -Komponente  $N^1$  angehört, dann läßt sich der von  $b$  bestimmte Automorphismus von  $L$  stetig in die Identität überführen: man lasse  $b$  in  $N^1$  nach  $e$  wandern. Also ist dieser Automorphismus die Identität, und das heißt:  $b$  ist mit jedem Element von  $L$  vertauschbar.

Sei nun  $L'$  eine beliebige einparametrische Untergruppe von  $N^1$ . Dann ist, wie eben gezeigt, jedes Element von  $L'$  mit jedem Element von  $L$  vertauschbar. Also ist die abgeschlossene Hülle der von  $L$  und  $L'$  er-

zeugten Gruppe eine (zusammenhängende) Abel'sche Gruppe, ein Toroid  $T'_m$ .

Nun ist  $\lambda(G) = 1$ , d. h. die Toroide in  $G$  sind höchstens eindimensional. Das Toroid  $T'_m$ , das ja die Gruppe  $L$  enthält, muß also mit  $L$  zusammenfallen, und das ist nur möglich, wenn auch  $L'$  mit  $L$  zusammenfällt.  $L$  ist also die einzige einparametrische Untergruppe von  $N^1$ ; dann ist aber  $N^1$  mit  $L$  identisch. Damit ist die Behauptung über  $N$  bewiesen.

Es wird sich später noch zeigen, daß für  $n > 1$  die Anzahl  $r$  der Komponenten von  $N$  gleich zwei ist (Nr. 7).

## 6. Wir betrachten den Nebengruppenraum

$$W = \frac{G}{N}$$

(vgl. Nr. 2, b). Die Punkte von  $W$  sind also die Nebengruppen  $aN$  von  $N$ . Weil  $N$  eindimensional ist, ist  $W$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; dabei ist  $n$  die Dimension  $d(G)$  von  $G$ .

Bekanntlich entsprechen nun die Nebengruppen des Normalisators  $N_U$  einer Untergruppe  $U$  einer Gruppe eineindeutig den zu  $U$  konjugierten Untergruppen, nämlich dadurch, daß jede Nebengruppe  $aN_U$  von  $N_U$  genau aus denjenigen Elementen der Gruppe besteht, die  $U$  in eine bestimmte konjugierte Untergruppe, in  $aUa^{-1}$ , transformieren.

Im vorliegenden Fall haben wir  $U = L$  und  $N_U = N$ . Die zu  $L$  konjugierten Untergruppen bilden eine Teilmenge der Menge aller geschlossenen einparametrischen Untergruppen, und diese Menge bildet den in Nr. 2, d, eingeführten  $(n - 1)$ -dimensionalen projektiven Raum  $P_{n-1}$ ; denn da die abgeschlossene Hülle einer offenen einparametrischen Untergruppe ein Toroid  $T_m$  mit  $m > 1$  ist (Nr. 2, d), andererseits aber  $\lambda(G) = 1$  ist, so gibt es in  $G$  keine offenen einparametrischen Untergruppen. Die — eineindeutige — Zuordnung der Nebengruppen von  $N$  zu den zu  $L$  konjugierten Untergruppen ist offenbar eine stetige Abbildung des Nebengruppenraumes  $W$  in den von den einparametrischen Untergruppen gebildeten  $P_{n-1}$ , also eine topologische Abbildung. Aber aus der Tatsache, daß die  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $W$  topologisch in den  $P_{n-1}$  abgebildet ist, folgt nach bekannten Sätzen (Abbildungsgrad), daß  $W$  und  $P_{n-1}$  homöomorph sind. Wir haben also gezeigt:

*$G$  sei eine Gruppe der Dimension  $n$  und vom Rang 1. Dann ist der Nebengruppenraum  $\frac{G}{N}$ , der zu dem Normalisator  $N$  einer geschlossenen einparametrischen Untergruppe  $L$  gehört, dem projektiven Raum  $P_{n-1}$  homöomorph.*

## 7. Wir ziehen jetzt den Nebengruppenraum

$$\overline{W} = \frac{G}{L}$$

heran, dessen Punkte die Nebengruppen  $aL$  von  $L$  sind. Wegen

$$N = L + a_1L + a_2L + \cdots + a_{r-1}L$$

(Nr. 4) besteht jede Nebengruppe  $aN$  von  $N$  aus  $r$  Nebengruppen von  $L$ , die die Komponenten von  $aN$  sind; andererseits ist jede Nebengruppe von  $L$  in einer Nebengruppe von  $N$  enthalten. Ordnet man jeder Nebengruppe von  $L$  die Nebengruppe von  $N$  zu, in der sie liegt, so erhält man eine Abbildung von  $\overline{W}$  auf  $W$ , bei der auf jeden Punkt von  $W$  genau  $r$  Punkte von  $\overline{W}$  abgebildet werden. Man sieht ganz leicht, daß diese Abbildung im kleinen topologisch ist. (Zwei Nebengruppen von  $L$ , die hinreichend nahe beieinander liegen, gehören zu verschiedenen Nebengruppen von  $N$ .) Also ist  $\overline{W}$  eine  $r$ -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $W$ , also auch von  $P_{n-1}$ .

Da  $P_{n-1}$  nur ein- oder zweiblättrige Überlagerungen besitzt, ist  $r$  entweder 1 oder 2. Das heißt: Entweder ist  $N = L$ , oder  $N$  besteht aus zwei Komponenten, also  $N = L + a_1L$  mit einem gewissen Element  $a_1$ . Für  $n = 1$  ist bekanntlich  $G = K$ ; dann liegt der erste Fall vor. Wir behaupten: Für  $n > 1$  tritt der zweite Fall ein, also  $N = L + a_1L$ ; und die Elemente von  $a_1L$  haben die Eigenschaft: der von ihnen erzeugte Automorphismus von  $L$  ist nicht die Identität, sondern die Inversion von  $L$  (vgl. Nr. 5).

Sei also  $n > 1$  (wegen  $n \neq 2$  ist dann sogar  $n > 2$ ). Wir erteilen der Gruppe  $L$  eine beliebige, aber feste Orientierung (vgl. Nr. 2, d). Es sei  $a$  ein beliebiges Element von  $G$ ; wir betrachten die zu  $L$  konjugierte Gruppe  $aLa^{-1}$ . Durch die Orientierung von  $L$  ist dann auch eine Orientierung von  $aLa^{-1}$  bestimmt. Man sieht sofort: sind  $a, a'$  zwei Elemente von  $G$ , die zu derselben Komponente einer Nebengruppe  $bN$  von  $N$  gehören, dann bestimmen sie dieselbe Orientierung der zu  $bN$  gehörenden, zu  $L$  konjugierten, Untergruppe  $bLb^{-1}$ . Das bedeutet: Jede Komponente der Nebengruppe  $bN$  bestimmt eine der beiden Orientierungen der Gruppe  $bLb^{-1}$ , also eine der beiden orientierten einparametrischen Untergruppen, die die Untergruppe  $bLb^{-1}$  im Sinn von Nr. 2, d, überlagern.

Wäre jetzt  $N = L$ , also  $N$  einkomponentig, dann hätte man eine eindeutige und offenbar stetige Zuordnung der Nebengruppen von  $N$  zu den orientierten, zu dem orientierten  $L$  konjugierten, Untergruppen; d. h. man hätte eine topologische Abbildung der  $(n - 1)$ -dimensionalen

Mannigfaltigkeit  $W = \frac{G}{N}$  in die von den orientierten einparametrischen Untergruppen gebildete Sphäre  $S_{n-1}$ ; also wären  $W$  und  $S_{n-1}$  homöomorph, da  $S_{n-1}$  für  $n > 1$  eine (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit ist. Aber nach Nr. 6 ist  $W$  dem projektiven Raum  $P_{n-1}$  homöomorph; und  $P_{n-1}$  und  $S_{n-1}$  sind nicht homöomorph, da die Dimension  $n$  von  $G$  von 2 verschieden ist (Nr. 5). Also ist  $r = 2$ , also  $N = L + a_1 L$  mit einem gewissen  $a_1$ ;  $\overline{W}$  ist dann eine zweiblättrige Überlagerung von  $P_{n-1}$ , also der  $S_{n-1}$  homöomorph.

Genau wie eben schließt man jetzt, daß die zwei Komponenten, aus denen eine beliebige Nebengruppe  $aN$  besteht, verschiedene Orientierungen der zu  $aN$  gehörenden, zu  $L$  konjugierten, Gruppe  $aLa^{-1}$  bestimmen; sonst hätte man wieder eine eineindeutige Zuordnung der Nebengruppen von  $N$  zu den orientierten einparametrischen Untergruppen von  $G$ . Speziell muß die zweite Komponente  $a_1 L$  von  $N$  selbst die Orientierung von  $L$  umkehren, und das bedeutet: der von ihren Elementen bestimmte Automorphismus von  $L$  ist die Inversion von  $L$  (vgl. Nr. 5).

Faßt man jetzt die geschlossenen orientierten einparametrischen Untergruppen als (eindimensionale) Zyklen im Sinne der Homologietheorie (mit den ganzen Zahlen als Koeffizienten) auf, dann liefert das zuletzt Bewiesene die Gleichung:

$$a_1 L a_1^{-1} = -L,$$

d. h. man erhält den Zyklus  $a_1 L a_1^{-1}$  aus dem Zyklus  $L$ , indem man die Orientierung von  $L$  umkehrt. Andererseits sind  $a_1 L a_1^{-1}$  und  $L$  homolog, sogar homotop in  $G$ : man bilde  $bLb^{-1}$  und lasse  $b$  in  $G$  von  $e$  nach  $a_1$  laufen. Also gilt:

$$L \sim -L.$$

Damit können wir folgendes Ergebnis formulieren:

*$G$  sei eine Gruppe der Dimension  $n (> 2)$  und vom Rang  $\lambda(G) = 1$ ;  $L$  sei eine geschlossene einparametrische Untergruppe. Dann ist der Nebengruppenraum  $\frac{G}{L}$  der  $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre  $S_{n-1}$  homöomorph; für die als ganzzahliger Zyklus aufgefaßte Untergruppe  $L$  gilt die Homologie:*

$$2L \sim 0 \text{ in } G.$$

8. Die Nebengruppenzerlegung ist ein spezieller Fall von Faserung (Nr. 2, b); und  $L$  ist dem Kreis  $S_1$  homöomorph. Auf Grund des eben erhaltenen Satzes ist daher der Satz C bewiesen, wenn wir den folgenden Fasersatz beweisen:

$M$  sei eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ( $\geq 3$ );  $M$  sei gefasert mit der Faser  $S_1$ ; der Faserraum  $\frac{M}{S_1}$  sei der  $S_{n-1}$  homöomorph; und für die Faser gelte die Homologie  $2S_1 \sim 0$ . Dann ist  $M$  dreidimensional, und zwar ist  $M$  entweder der  $S_3$  oder dem  $P_3$  homöomorph.

Der Beweis dieses Satzes wird in naheliegender Weise mit Hilfe eines „Additionssatzes der kombinatorischen Topologie“ erbracht.<sup>9)</sup>

Der Faserraum, die  $S_{n-1}$ , wird durch eine Äquatorsphäre  $S_{n-2}$  in zwei Elemente  $E'$  und  $E''$  zerlegt:

$$S_{n-1} = E' + E'' , \quad S_{n-2} = E' \cdot E'' .$$

Die Randsphäre von  $E'$  heiße  $S'$ , die von  $E''$  heiße  $S''$ ; in  $S'$  und  $S''$  hat man also zwei Exemplare der Äquatorsphäre  $S_{n-2}$ .

$P$  sei die Projektion von  $M$  auf  $S_{n-1}$  (vgl. Nr. 2, b). Nach dem Satz von Feldbau kann man die Urbildmenge  $P^{-1}(E')$ , die  $M'$  genannt werde, als das topologische Produkt  $E' \times S_1$  auffassen. Entsprechend kann man die Menge  $M'' = P^{-1}(E'')$  als  $E'' \times S_1$  darstellen.  $M$  ist überdeckt mit  $M'$  und  $M''$ :

$$M = M' + M'' .$$

Der Durchschnitt  $D = M' \cdot M''$  ist das Urbild  $P^{-1}(S_{n-2})$  der Äquator- $S_{n-2}$ . Man erkennt unmittelbar, daß  $D$  zusammenfällt mit dem Rand  $S' \times S_1$  von  $M' = E' \times S_1$  und ebenso mit dem Rand  $S'' \times S_1$  von  $M'' = E'' \times S_1$ .

Wir betrachten jetzt eine feste Faser  $S_1$  von  $M$ , und zwar eine solche, die in  $D$  liegt; sie repräsentiert dann die Homologiekategorie  $p \times S_1$  von  $D$ , wo  $p$  den einfach gezählten Punkt von  $S'$  oder auch von  $S''$  bedeutet. Daher ist  $2S_1$ , die doppelt gezählte Faser, nicht homolog 0 in  $D$ . Dagegen ist nach Voraussetzung  $2S_1 \sim 0$  in  $M$ . Einem einfachen „Additionssatz“<sup>10)</sup> entnimmt man jetzt: Weil der in  $D$  liegende Zyklus  $2S_1$  in  $M$  homolog 0 ist, läßt er sich darstellen als Summe  $z_1 + z_2$  zweier in  $D$  liegender Zyklen  $z_1, z_2$ , wobei  $z_1$  in  $M'$  und  $z_2$  in  $M''$  homolog 0 ist. Da, wie man leicht bestätigt,  $2S_1$  weder in  $M'$  noch in  $M''$  homolog 0 ist, kann weder  $z_1$  noch  $z_2$  in  $D$  homolog 0 sein. Betrachtet man  $D$  als Rand  $S' \times S_1$  von  $M' = E' \times S_1$ , dann sieht man: die Zyklen von  $D$ , die in  $M'$  (aber nicht in  $D$ ) homolog 0 sind, sind die Linearkombinationen von  $D$  selbst und der Sphäre  $S' \times q$ , wo  $q$  ein Punkt von  $S_1$  ist.

Entsprechend sind die Zyklen von  $D$ , die in  $M''$  homolog 0 sind, die Linearkombinationen von  $D$  und  $S'' \times q$ . Also muß sich schließlich  $2S_1$  in  $D$  darstellen lassen als lineare Verbindung von  $D$ ,  $S' \times q$ ,  $S'' \times q$ . Die

Dimension von  $D$  ist  $n - 1$ , die von  $S' \times q$  und  $S'' \times q$  ist  $n - 2$ . Wegen  $n > 2$  muß sich also der eindimensionale Zyklus  $2S_1$  schreiben lassen als lineare Verbindung von  $S' \times q$  und  $S'' \times q$ ; daraus folgt:  $n - 2 = 1$ , also  $n = 3$ . Damit ist der erste Teil der Behauptung über  $M$  bewiesen.

Jetzt folgt weiter:  $M'$  und  $M''$  sind dreidimensionale Volltorusse.  $M$  entsteht aus  $M'$  und  $M''$  durch eine gewisse Identifizierung der Randflächen. Das bedeutet:  $M$  besitzt ein Heegaard-Diagramm vom Geschlecht 1. Daher ist  $M$  bekanntlich ein Linsenraum.<sup>11)</sup>

Nun läßt sich die erste Betti'sche Gruppe von  $M$  leicht bestimmen. Weil  $E'$  und  $E''$  zweidimensionale Elemente sind, läßt sich jeder eindimensionale Zyklus in  $M$  so deformieren, daß er in  $D$  liegt. Faßt man  $D$  als Randtorus des Volltorus  $M'$  auf und beachtet, daß der Meridiankreis  $S' \times q$  von  $D$  homolog 0 in  $M'$  ist, so erhält man: jeder eindimensionale Zyklus in  $M$  ist in  $M$  homolog einem Vielfachen der Faser  $S_1$ , des Breitenkreises  $p \times S_1$  auf dem Torus  $D$ .

Ist  $S_1 \sim 0$  in  $M$ , dann ist also die erste Betti'sche Gruppe von  $M$  die Nullgruppe. Der einzige solche Linsenraum ist aber die  $S_3$ .

Ist  $S_1$  nicht  $\sim 0$  in  $M$ , dann ist wegen der Voraussetzung  $2S_1 \sim 0$  die erste Betti'sche Gruppe von  $M$  zyklisch von der Ordnung 2. Der einzige solche Linsenraum ist der  $P_3$ .

Damit ist der am Anfang dieser Nr. 8 genannte Fasersatz, also auch der Satz C, also auch der Satz A bewiesen.

### Anhang.

a) Der Beweis des Satzes  $B'$ , von dem unser Satz  $B$  ein Spezialfall ist (Nr. 4), beruht auf der Betrachtung der Abbildungen  $p_k(x) = x^k$  von  $G$  in sich, die jedem Element  $x$  seine  $k$ -te Potenz zuordnet; der Grad von  $p_k$  sei  $\gamma_k$ . Dann ist  $B'$  eine Konsequenz der folgenden beiden Sätze<sup>12)</sup>:

*Satz I.* Der Homologie-Ring der geschlossenen Gruppe  $G$  sei dem Ring des topologischen Produktes von  $l$  Sphären ungerader Dimensionen dimensions-treu isomorph; dann ist  $\gamma_k = k^l$ .

*Satz II.* Die geschlossene Gruppe  $G$  enthalte eine  $\lambda$ -dimensionale Abel'sche Untergruppe, und es gebe keine höher-dimensionale Abel'sche Untergruppe von  $G$ ; dann ist  $\gamma_k = k^\lambda$ .

Für  $B'$  genügt der Beweis von I und II für eine einzige Zahl  $k > 1$ , z. B.  $k = 2$ .

Zu dem Beweis von II im § 2 der Arbeit von Hopf<sup>7)</sup> haben wir nichts hinzuzufügen; der Beweis von I aber läßt sich in unserem Falle, also im

Fälle  $l = 1$ , wesentlich einfacher führen, wenn man sich auf  $k = 2$  beschränkt. Dann hat man also zu zeigen: Ist die Gruppe  $G$  eine Homologiesphäre, dann hat die Abbildung  $p_2(x) = x^2$  von  $G$  in sich den Grad 2. Zum Beweis benützen wir einen bekannten Fixpunktsatz<sup>13)</sup>, nach dem für eine Abbildung  $f$  einer Homologiesphäre  $G$  in sich die Summe der Fixpunktindizes gleich  $(-1)^n + c_f$  ist, wo  $c_f$  der Abbildungsgrad von  $f$  ist. Bei der Abbildung  $p_2(x)$  einer Gruppe in sich ist nun der Einheitspunkt  $e$  der einzige Fixpunkt ( $x^2 = x$  hat  $e$  als einzige Lösung), und der Fixpunktindex ist, wie man sieht, wenn man kanonische Parameter einführt, gleich 1. Also ist  $c_{p_2} = 1 - (-1)^n$ . Beachtet man noch, daß die Dimension einer Gruppen-Homologiesphäre ungerade ist, so folgt die Behauptung  $c_{p_2} = 2$ .

b) Ein anderer Beweis für Satz  $B$  beruht auf der Theorie der Faserungen; und zwar auf dem folgenden Satz: Die  $(2r + 1)$ -dimensionale Homologiesphäre  $G$  sei gefasert mit der Faser  $S_1$ ; dann hat der Faserraum  $\frac{G}{S_1}$  dieselben Betti'schen Zahlen wie der komplexe projektive Raum  $K$ , der (komplexen) Dimension  $r$ ; insbesondere hat die Charakteristik den Wert  $r + 1$ . (Dieser Satz war als Vermutung samt einer Beweisskizze von Herrn H. Hopf ausgesprochen worden; eine allgemeinere Theorie, die den Satz enthält, wird in der Dissertation von Herrn W. Gysin dargestellt werden.) Damit läßt sich nun leicht zeigen: Eine Gruppen-Homologiesphäre hat kein Toroid  $T_2$  als Untergruppe.

Beweis: Ist ein  $T_2$  Untergruppe einer beliebigen Gruppe  $G$ , dann ist  $T_2$  direktes Produkt  $K' \times K''$  zweier geschlossener einparametriger Untergruppen  $K'$ ,  $K''$  von  $G$ . Jede Nebengruppe  $aT_2$  von  $T_2$  in  $G$  ist gefasert in Nebengruppen von  $K''$ , und der zugehörige Nebengruppenraum ist mit  $K'$ , also mit  $S_1$  homöomorph (die Faserung von  $aT_2$  entsteht aus der Zerlegung von  $T_2$  in Nebengruppen von  $K''$  durch Multiplikation mit  $a$ ). Man betrachte nun den Nebengruppenraum  $\frac{G}{K''}$ . Faßt man alle Punkte von  $\frac{G}{K''}$ , die — als Nebengruppen von  $K''$  in  $G$  betrachtet — in derselben Nebengruppe von  $T_2$  liegen, zu einer Faser zusammen, so erhält man eine Faserung von  $\frac{G}{K''}$  mit der Faser  $S_1$ . Daraus folgt, daß  $\frac{G}{K''}$  die Charakteristik 0 hat; denn eine in Kreise gefaserte Mannigfaltigkeit besitzt stetige, fixpunktfreie Deformationen in sich. Nach dem oben genannten Fasersatz ist also  $G$  keine Homologiesphäre.

c) Aus den in Nr. 6 und 7 bewiesenen Tatsachen:  $\frac{G}{N} = P_{n-1}$ ,

$N = L + a_1 L$ , und  $2L \sim 0$  in  $G$  läßt sich die Behauptung „ $n = 3$ “ auch mit Hilfe der Theorie von Hurewicz<sup>14)</sup> ableiten. Aus dieser Theorie ergibt sich nämlich leicht die Richtigkeit folgender Behauptung: *Die zweite Homotopiegruppe von  $\frac{G}{N} = P_{n-1}$  ist nicht die Nullgruppe; dann muß  $n = 3$  sein, denn  $P_{n-1}$  hat dieselben Homotopiegruppen wie  $S_{n-1}$ . Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir für die bei Hurewicz mit  $H$  bezeichnete Untergruppe die Gruppe  $N$  ein; die Zahl  $n$  im Satz XII bei Hurewicz setzen wir gleich 2 ( $n$  bezeichnet also von hier an nicht mehr die Dimension von  $G$ ). Dann ist nach diesem Satz eine gewisse Faktorgruppe von  $\pi_2\left(\frac{G}{N}\right)$  isomorph mit einer Untergruppe der Fundamentalgruppe  $\pi_1(N)$  von  $N$ ; und zwar besteht diese Untergruppe aus denjenigen Elementen der Fundamentalgruppe von  $L$  (das ist die Gruppe  $(H_0)^{S_{n-1}}$  bei Hurewicz), die in  $G$  nullhomotop sind (mit  $(G^{S_{n-1}})_0$  ist bei Hurewicz die Klasse der zusammenziehbaren Abbildungen von  $S_{n-1}$  in  $G$  bezeichnet); sie ist nicht die Nullgruppe, denn nach Nr. 7 ist  $2L \sim 0$  in  $G$ , also  $2L$  auch homotop 0 in  $G$  (weil die Fundamentalgruppe der Gruppe  $G$  kommutativ ist).*

#### L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

<sup>1)</sup> E. Cartan, La Topologie ... des Groupes de Lie [L'Enseignement Math. 35 (1936), S. 197].

<sup>2)</sup> O. Taubky, Analytical methods in hypercomplex systems [Comp. Math. 3 (1936), Nr. 3].

<sup>3)</sup> L. Pontrjagin, Topological Groups (Princeton 1939), Th. 50, vgl. insbesondere S. 200, Formel (20).

<sup>4)</sup> J. Feldbau, C. R. 208 (1939), S. 1621.

<sup>5)</sup> H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume [Acta math. 60 (1932)]. Wir bemerken, daß bei den von uns betrachteten Faserungen keine „Ausnahme-fasern“ im Sinne von Seifert vorkommen.

<sup>6)</sup> A. a. O.<sup>4)</sup>, Th. A.

<sup>7)</sup> H. Hopf, Über den Rang geschlossener Lie'scher Gruppen [Comment. Math. Helvet. 13 (1941), S. 119].

<sup>8)</sup> A. a. O.<sup>1)</sup>, S. 197.

<sup>9)</sup> Vgl. auch die Betrachtungen a. a. O.<sup>5)</sup>.

<sup>10)</sup> Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), Kap. VII, § 2, Nr. 3. Man beachte dort: Liegt  $Z$  in  $K_1 \cdot K_2$ , dann auch die beiden Zyklen  $\check{C}_1$  und  $\check{C}_2$ .

<sup>11)</sup> Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie (Leipzig 1934), S. 220.

<sup>12)</sup> A. a. O.<sup>7)</sup>, Nr. 2.

<sup>13)</sup> A. a. O.<sup>10)</sup>, Kap. XIV, § 3, Nr. 1, Satz I und § 1, Nr. 4, d).

<sup>14)</sup> W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen I [Proc. Amsterdam 38 (1935), insbesondere Satz XII].

(Eingegangen den 18. September 1940.)