Theorie der kathodischen Entladungsteile einer Niederdruckentladung. II.

Das Glimmlicht.

Von **W. Weizel**, **R. Rompe** und **M. Schön**.

(Eingegangen am 5. April 1939.)

Eine Theorie des Glimmlichtes wird aus folgendem Modell hergeleitet. Das Glimmlicht ist ein quasineutrales, fast feldfreies Plasma, das durch ein Bündel schneller Elektronen aus dem Fallraum ernährt wird. Aus ihm wandern durch Diffusion in den Fallraum eine große Zahl positiver Ionen ein, die den Hauptteil des Stromes an der Kathode bestreiten. Eine entsprechende Anzahl von Elektronen wandert unter dem Einfluß des kleinen Feldes zur Anode. Rekombination von Ionen und Elektronen bringt die Trägerbilanz ins Gleichgewicht. Die Trägerdichte wächst von kleinen Werten vom Glimmsaum ins Innere des Glimmlichtes, durchläuft ein Maximum und sinkt wieder auf kleine Werte ab. Steht die Anode im Glimmlicht, so ist die Trägerdichte eine elliptische Funktion des Ortes. Aus den abgeleiteten Gleichungen eröffnen sich Möglichkeiten zur experimentellen Bestimmung der Rekombination und der Bremsung schneller Elektronen im Plasma.

In dem II. Teil dieser Arbeit wollen wir die Theorie des negativen Glimmlichts entwickeln und hiermit die Theorie des Fallraums, die wir im Teil I aufgestellt haben[1]), ergänzen.

A. Modellvorstellung für das Glimmlicht.

Über das Glimmlicht machen wir folgende Annahmen.

Das Glimmlicht verdankt seinen Ursprung einem Bündel schneller Elektronen, die aus dem Fallraum kommen. Diese Elektronen können vermöge ihrer Geschwindigkeit auch noch ein beträchtliches feldfreies Gebiet durchsetzen und dort zahlreiche neue Träger erzeugen. Auf diese Weise entsteht ein Plasma, das negative Glimmlicht.

Die elektrische Feldstärke ist im Glimmlicht in der Regel sehr klein. Wir nehmen an, daß sie zu klein sei, um auf die Bewegung der positiven Ionen einen wesentlichen Einfluß zu nehmen. Sie möge aber groß genug sein, um eine solche Elektronenbewegung hervorzurufen, daß im Glimmlicht keine nennenswerte Raumladung entsteht[2]).

---

[1]) W. Weizel, R. Rompe, M. Schön, ZS. f. Phys. **112**, 339, 1939. — [2]) *Anmerkung bei der Korrektur:* Wir weisen auf eine soeben erschienene Arbeit von Scherzer (Arch. f. Elektrotechn. **33**, 207, 1939) hin, wo eine etwas andere Ansicht vertreten wird, die aber zu ähnlichen Gleichungen führt.

Wir fassen also das Glimmlicht als ein feldfreies, quasi neutrales Plasma auf. Kathodenseitig wird es durch den sich anschließenden Fallraum begrenzt, in dem eine schnell anwachsende Feldstärke besteht. Die positiven Ionen, auf die sich vornehmlich unsere Untersuchung erstreckt, bewegen sich im Fallraum mit Driftgeschwindigkeiten, die vielmals größer sind als im Glimmlicht. Hieraus geht hervor, daß umgekehrt die Ionendichte im Glimmlicht ein Vielfaches der Ionendichte im Fallraum sein muß. Wir idealisieren diesen Umstand noch ein wenig durch die Annahme, daß die Ionendichte n im Glimmlicht bei Annäherung an den Glimmsaum gegen Null konvergiert. Auf der von der Kathode abgewandten Seite kann das Glimmlicht durch die Anode, durch eine metallische oder nicht metallische Wand oder auch gar nicht begrenzt sein. Ist eine materielle Grenzfläche vorhanden, gleichgültig von welcher Beschaffenheit, so konvergiert die Ionendichte bei Annäherung an diese ebenfalls gegen Null.

Wir haben also zunächst zwei Randbedingungen für die Ionendichte gewonnen, nämlich

$$n = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \tag{1}$$

wenn die x-Achse senkrecht zur Kathode ist und die Stelle $x = 0$ in den Glimmsaum gelegt wird. Ferner die Randbedingung

$$n = 0 \quad \text{für} \quad x = c \text{ bzw. } \infty, \tag{2}$$

wenn im Abstand c vom Glimmsaum eine Wand vorhanden ist bzw. wenn das Glimmlicht sich frei ausdehnen kann.

B. Trägerbildung im Glimmlicht.

Wir untersuchen nun die Ionenbilanz in einer Schicht von der Dicke 1. In diese Schicht hinein bzw aus ihr heraus findet eine Diffusion der Ionen statt, die sich nach der räumlichen Verteilung der Ionendichte richtet. Die Schicht gewinnt

$$D \frac{d^2 n}{d x^2} \tag{3}$$

Ionen pro Sekunde auf diese Weise. Durch die aus dem Fallraum kommenden schnellen Elektronen werden durch Stoßionisation neue Ionen erzeugt. Ist die elektrische Stromdichte der Fallraumelektronen gleich i_1, so entstehen auf diese Weise in der Schicht

$$\frac{\alpha i_1}{e} \tag{4}$$

Ionen. Die schnellen Elektronen können aber auch auf einem etwas indirekteren Wege Ionen erzeugen. Sie werden nämlich durch die im

Plasma befindlichen langsamen Elektronen gebremst, wobei jene selbst beschleunigt werden. Die Folge dieser Beschleunigung besteht darin, daß sie nun ihrerseits ionisierend wirken. Diese indirekte Ionenerzeugung ist nicht nur i_1, sondern auch der Dichte der langsamen Elektronen n proportional. Auf diese Weise gewinnt die Schicht sekundlich

$$\frac{\beta\, i_1\, n}{e} \tag{5}$$

Ionen. Schließlich findet auf der anderen Seite eine Ionenvernichtung durch Rekombination statt[1]), wobei die frei werdende Ionisierungsenergie abgeführt werden muß. Die Rekombination kann entweder im Zweierstoß unter Ausstrahlung oder im Dreierstoß erfolgen. Ist der dritte Stoßpartner ein Neutralteilchen, oder erfolgt die Rekombination unter Ausstrahlung, so ist die Zahl der Rekombinationen

$$\varrho\, n^2. \tag{6}$$

Ist der dritte Partner hingegen ein Ion, oder was besonders wahrscheinlich ist, ein Elektron, so ist der Ionenverlust der Schicht

$$\tau\, n^3 \tag{7}$$

in der Sekunde. Im letzteren Falle entsteht bei der Rekombination ein schnelles Elektron, das zu einer erneuten Stoßionisation befähigt ist. Findet tatsächlich eine nachfolgende Stoßionisation statt, so ist die vorausgegangene Rekombination unwirksam gemacht. Findet dagegen eine Anregung statt, so ist ein wirklicher Ionenverlust eingetreten. In τ ist nur die Zahl der wirksamen Rekombinationen, nicht aber die Zahl der tatsächlich stattfindenden enthalten.

Soll Gleichgewicht bestehen, so muß

$$D\,\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\,x^2} + \frac{\alpha\, i_1}{e} + \frac{\beta\, i_1\, n}{e} - \varrho\, n^2 - \tau\, n^3 = 0 \tag{8}$$

sein.

Hier ist nun zu berücksichtigen, daß die Reichweite der aus dem Fallraum kommenden schnellen Elektronen keineswegs immer dieselbe ist, sondern daß das Elektronenstrahlenbündel allmählich schwächer wird, wenn man sich vom Glimmsaum in das Innere des Glimmlichts entfernt. i_1 ist eine uns allerdings nicht bekannte Funktion von x. Kann sich das Glimmlicht nach rückwärts frei ausdehnen, so gelangen wir schließlich in Gebiete, wo i_1 verschwindet, d. h. wo keine Neuerzeugung von Trägern mehr stattfindet. Alle dort vorhandenen Träger sind durch Diffusion

[1]) H. Fischer, Ann. d. Phys. (5) **27**, 81, 1936.

eingewandert. In solchen Fällen muß man darauf Rücksicht nehmen, daß bei dem kleinen herrschenden Konzentrationsgefälle auch die Feldstärke sich an der Bewegung der Ionen beteiligt, d. h. man wird hier am besten den ambipolaren Diffusionskoeffizienten in Ansatz bringen.

C. Diskussion einer einfachen Versuchsanordnung.

Von der Schwierigkeit, die die Ortsabhängigkeit von i_1 mit sich bringt, machen wir uns frei, indem wir einen besonders einfachen Spezialfall in Angriff nehmen. Das Glimmlicht sei durch eine der Kathode gegenübergestellte Metallplatte, die wir der Einfachheit halber als Anode bezeichnen wollen, die aber elektrisch nicht unbedingt die Funktion der Anode auszuüben braucht, auf einen so kleinen Raum beschränkt, daß alle Fallraumelektronen das Glimmlicht völlig durchsetzen. In diesem Falle können wir

$$i_1 = \text{const}$$

setzen.

Führen wir nun die Ionenstromdichte i_i

$$i_i = -eD\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

ein, so wird

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = -\frac{i_i}{De}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}$$

und (8) geht in

$$\frac{i_i}{De^2}\frac{\mathrm{d}i_i}{\mathrm{d}n} + \frac{\alpha i_1}{e} + \frac{\beta i_1 n}{e} - \varrho n^2 - \tau n^3 = 0 \tag{9}$$

über.

Jetzt läßt sich einmal integrieren, und wir erhalten

$$\frac{i_i^2}{2De^2} + \frac{\alpha i_1 n}{e} + \frac{\beta i_1 n^2}{2e} - \frac{\varrho n^3}{3} - \frac{\tau n^4}{4} = A. \tag{10}$$

Bezeichnen wir den Ionenstrom, der am Glimmsaum in den Fallraum eintritt, mit i_0, so ergibt sich für $n = 0$

$$A = \frac{i_0^2}{2De^2}. \tag{11}$$

Genau ebenso groß wie i_0, nur mit entgegengesetzter Richtung, ist natürlich der Ionenstrom, der auf die Anode fällt.

Setzen wir für A seinen Wert ein, so bekommen wir

$$i_i = \pm\sqrt{i_0^2 - 2De\alpha i_1 n - De\beta i_1 n^2 + \frac{2De^2\varrho}{3}n^3 + \frac{2De^2\tau}{4}n^4} = -eD\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}. \tag{12}$$

Durch nochmalige Integration entsteht

$$x = e\,D \int_0^n \frac{\mathrm{d}\,n}{\sqrt{i_0^2 \ldots \frac{2\,D\,c^2\,\tau}{4}\,n^4}}. \tag{13}$$

In der Mitte zwischen Glimmsaum und Anode muß die Ionendichte am größten sein, es muß $\mathrm{d}\,n/\mathrm{d}\,x$ und damit die Wurzel (12) verschwinden. Hieraus erhalten wir

$$\frac{c}{2} = e\,D \int_0^{n_{\max}} \frac{\mathrm{d}\,n}{\sqrt{}}. \tag{14}$$

Die Integration ist bis zum kleinsten Wert von n zu erstrecken, für den der Nenner verschwindet.

Die Gleichung (13) zeigt, daß n eine elliptische Funktion der Ortskoordinate x ist. Die Gleichung (14) liefert, nach i_0 aufgelöst, dieses als eine Funktion von c, i_1 und den Koeffizienten D, α, β, ϱ, τ usw. Setzen wir noch

$$i_1 = i - i_0, \tag{15}$$

so haben wir eine Beziehung zwischen der Stromdichte i und dem Ionenstrom, der aus dem Glimmlicht in den Fallraum eintritt. Diese Beziehung liefert zusammen mit der Gleichung (28) des Teiles I:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= -\left(\frac{6\,\pi\,J}{\varkappa_i}\right)^{2/3} \alpha^{-5/3} \int_{z_d}^{z_0} \frac{\{P(z) - P(z_d)\}^{2/3}}{1-z}\,\mathrm{d}\,z \\ &= -\left(\frac{6\,\pi\,i}{k_i}\right)^{2/3} \alpha^{-5/3} \int_{z_d}^{z_0} \frac{\{P(z) - P(z_d)\}^{2/3}}{1-z}\,\mathrm{d}\,z \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}\,(28)$$

durch Elimination von i_0 die Charakteristik der Entladung.

D. Experimentelle Auswertung der Theorie.

Grundsätzlich haben wir in der Gleichung (8) und den Randbedingungen eine vollständige Beschreibung des Glimmlichts. Zusammen mit den Gleichungen (19, 20, 21, 28) des Teiles I haben wir damit eine geschlossene Theorie der kathodischen Entladungsteile einer Niederdruckentladung. Für eine besonders einfache Versuchsanordnung kann (8) integriert werden und liefert die Ionendichte als eine elliptische Funktion des Ortes, wobei allerdings eine Reihe von schwer zugänglichen Größen eingehen, die aber schon mit den Elementarprozessen verbunden sind. Damit haben wir unser Programm ausgeführt.

Unbefriedigend bleibt, daß die verwendeten Größen

$$\alpha,\ k_i,\ i_0,\ i_i,\ D,\ \beta,\ \varrho,\ \tau$$

nicht oder wenigstens ungenügend bekannt sind. Dies macht uns unmöglich, eine Entladung mit vorgegebener Stromdichte durchzurechnen, um neben der räumlichen Verteilung der Trägerdichte und Raumladung etwa den Kathodenfall wirklich *numerisch* auszurechnen. Hierin besteht auch nicht die Aufgabe der Theorie, da diese Dinge einer Messung leicht zugänglich sind. Die Aufgabe der Theorie sehen wir vielmehr umgekehrt darin, einen Weg zur Ermittlung der Werte jener Größen zu eröffnen.

Ziemlich leicht können wir i_0 gewinnen. Bei einer Versuchsanordnung, wie wir sie in Abschnitt C voraussetzten, bei der aber die Gegenelektrode im Glimmlicht nicht Anode, sondern eine Hilfselektrode ist, fällt auf diese, genau wie auf die Kathode, der Ionenstrom i_0 und kann leicht gemessen werden. Die Hilfselektrode muß hierzu nur so nahe an den Glimmsaum herangebracht werden, daß alle Strahlelektronen noch bis zu ihr gelangen. Dann ist bei negativer Hilfselektrode der positive Strom an ihr

$$i_0 - i_1,$$

während er an der Kathode

$$i_0 + i_1$$

ist. Damit ist i_0 bestimmt.

Einer Messung zugänglich ist bei der gleichen Versuchsanordnung der Maximalwert der Trägerdichte in der Mitte des Glimmlichts. Dort muß i_i verschwinden und damit

$$O = i_0^2 - 2\,D\,e\,\alpha\,i_i\,n_{\max} - D\,e\,\beta\,i_i\,n_{\max}^2 + \frac{2\,D\,e^3}{3}\,\varrho\,n_{\max}^3 + \frac{D\,e^2\,\tau}{2}\,n_{\max}^4 \qquad (16)$$

sein. Dies ist eine Gleichung zwischen den Größen

$$i_i,\ D,\ \alpha,\ \beta,\ \varrho,\ \tau.$$

Eine zweite Gleichung ist die Beziehung (14), die allerdings erst dann zweckmäßig verwendet werden kann, wenn alle unbekannten Größen bis auf eine eliminiert sind.

Für i_1 kann man wohl ohne großen Fehler $i - i_0$ setzen. Der Koeffizient der direkten Ionisierung durch die Elektronenstrahlen α ist einigermaßen bekannt. Für den Diffusionskoeffizienten D wird man ebenfalls ungefähr richtige Werte angeben können. Sehr unsicher bleiben zunächst die Werte der Größen

$$\beta,\ \varrho \text{ und } \tau.$$

Würde man Gründe dafür beibringen können, daß in speziellen Fällen ϱ klein ist und vernachlässigt werden kann, so könnte aus unseren beiden Gleichungen β und τ bestimmt werden. Theoretisch könnte man natürlich aus einer genauen Ausmessung des räumlichen Verlaufes der Ionendichte alle Koeffizienten bestimmen. Wir versprechen uns aber davon nicht viel, da solche Messungen bekanntlich nicht so genau sein können, daß sie eine so scharfe Auswertung vertragen. Es besteht jedoch eine gewisse Aussicht, manche der unbekannten Größen, etwa ϱ, σ oder β einzeln an einem sonst gut bekannten Plasma zu messen oder theoretisch abzuschätzen. Dann könnte man aus Messungen am Glimmlicht zusammen mit unserer Theorie schließlich alle Größen ermitteln.

E. Die Energiebilanz im Glimmlicht.

Unsere bisherige Theorie des Glimmlichts ist nur eine Theorie der elektrischen Vorgänge. Diese hängen aber über die Konstanten, z. B. β, mit Elementarprozessen zusammen, die nicht unmittelbar auf die Trägerbilanz einwirken. Wir wollen auch diese Vorgänge etwas näher untersuchen, indem wir die Energiebilanz einer Schicht aufstellen.

Die Energiebilanz der Schicht $\mathrm{d}x$ läßt sich genau wie die Ionenbilanz aufbauen. Jedes Trägerpaar repräsentiert eine Energie $e V_i$. Die Schicht gewinnt also durch Diffusion

$$e V_i D \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d} x^2} \mathrm{d} x$$

Energieeinheiten. Hierbei brauchen wir nur die Ionenbilanz zu beachten, da die Elektronenbewegung stets so erfolgen soll, daß das Plasma quasineutral bleibt. Durch die direkte Ionisation der Elektronenstrahlen entstehen neue Träger, wodurch die Schicht die Energie

$$\alpha i_1 V_i \, \mathrm{d} x$$

erhält.

Außerdem bezieht die Schicht von den Strahlelektronen noch Energie durch Beschleunigung der langsamen Elektronen. Dieser Energiegewinn hängt aber nicht ganz so einfach mit der Zahl der auf indirektem Wege erzeugten Träger zusammen wie bei der direkten Ionisierung. Nach Engel-Steenbeck[1]) gibt der Strahl die Energie

$$\frac{i_1 \bar{\varepsilon}}{e S} \mathrm{d} x$$

[1]) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen, Bd. II, S. 18ff., Berlin 1934.

ab. Hier bedeutet $\bar{\varepsilon}$ die kinetische Energie des Strahlelektrons, S seine Relaxationsstrecke im Plasma. Es ist

$$S = \frac{m_e^2 v_e^4}{216 \pi c^2 n}, \tag{17}$$

wobei m_e die Elektronenmasse, v_e die Geschwindigkeit der schnellen Elektronen, n die Zahl der langsamen Elektronen ist, so daß sich schließlich der Energiegewinn der Schicht mit

$$\frac{108 \pi c\, i_1 \cdot n}{m_e \cdot v_e^2} \cdot \mathrm{d}\, x \tag{18}$$

ergibt.

Jetzt müssen wir noch den Energieverlust durch Strahlung und Wärmeleitung erfassen. Die Wärmeleitung führt diejenige Energie ab, die auf die Atome als Translationsenergie übertragen wurde. Für sie erhalten wir

$$-\, n N v\, q_1 \frac{m v^2}{2 M}, \tag{19}$$

wenn v die ungeordnete Geschwindigkeit der langsamen Plasmaelektronen, N die Zahl der Atome pro cm^3, M ihre Masse und q_1 den Wirkungsquerschnitt für elastische Stöße bedeutet. q_1 kann gleich dem gaskinetischen Querschnitt gesetzt werden.

Den Strahlungsverlust versuchen wir durch die Annahme zu ermitteln, daß jede Anregung eines Atoms tatsächlich zur Ausstrahlung der Anregungsenergie führt. Wir vernachlässigen also die Reabsorption der Strahlung und die Stöße zweiter Art, setzen also voraus, daß die effektive Lebensdauer[1] der angeregten Atome kurz ist gegen die Zeit zwischen zwei anregenden Stößen. Die Vernachlässigung der Stöße zweiter Art wird, wie man aus den Untersuchungen von Mierdel[2] entnehmen kann, im Glimmlicht allenfalls einen Fehler innerhalb der Größenordnung hervorrufen. Für den Strahlungsverlust erhalten wir dann den Ausdruck

$$n N v q_2 e V_a, \tag{20}$$

wenn V_a die mittlere Anregungsenergie und q_2 der Anregungsquerschnitt ist.

Als Energiebilanz ergibt sich dann eine zu (8) ganz analoge Gleichung

$$e V_i D \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\, x^2} + \alpha\, i_1 V_i + \frac{i_1 \bar{\varepsilon}\, n}{e\,(S n)} - \frac{n N m v^3 q_1}{2 M} - n N v\, q_2 e V_a = 0, \tag{21}$$

[1]) R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **108**, 265, 1938. — [2]) G. Mierdel, Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemenskonzern **17**, 71—84, 1938.

Diese Gleichung muß bis auf die Glieder mit n^2 und n^3, die wir bei der Energiebilanz vernachlässigt haben, mit Gleichung (8) übereinstimmen. Nach Division mit $e V_i$ ergibt der Vergleich der in n linearen Glieder

$$\frac{i_1 \bar{\varepsilon}}{e^2 V_i (S n)} - \frac{N m v^3 q_1}{2 M e V_i} - \frac{N v q_2 V_a}{V_i} = \frac{\beta i_1}{e}. \tag{22}$$

Hiermit haben wir noch eine Gleichung gewonnen, die uns die Größen i_1 und β mit den Anregungsquerschnitten und Stoßquerschnitten der Plasmaelektronen, mit der mittleren Energie und Relaxationsstrecke der Strahlelektronen und der Elektronentemperatur im Plasma in Verbindung bringt.

Die Gleichung (22) kann also dazu dienen, eine der ungenügend bekannten Größen zu berechnen oder die Theorie zu prüfen. Man muß sich allerdings darüber klar sein, daß man hier keine große Genauigkeit erwarten darf.

Die Elektronentemperatur ist einer direkten Sondenmessung zugänglich. Die Wirkungsquerschnitte können vielleicht aus anderen Quellen gewonnen werden, sind z. T. sogar bekannt. Die Relaxationsstrecke (oder genauer Sn) ergibt sich aus (18), die mittlere Anregungsenergie kann abgeschätzt werden, die mittlere Energie der Strahlelektronen kann aus Teil I berechnet werden.

Bonn, Institut für theoretische Physik.

Berlin, Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.