Zur Theorie der explosionsartigen Schauer in der kosmischen Strahlung. II.

Von **W. Heisenberg** in Leipzig.

(Eingegangen am 5. Mai 1939.)

Die Arbeit beabsichtigt eine ausführliche Untersuchung der Frage, ob und unter welchen Bedingungen Vielfachprozesse nach der Yukawaschen Theorie zu erwarten sind. I. Die allgemeinen Eigenschaften der Vielfachprozesse. a) Allgemeine Übersicht. b) Der Erwartungswert des ausgesandten Spektrums. c) Die quantentheoretischen Wirkungsquerschnitte. II. Anwendung auf die Yukawasche Theorie. a) Ausstrahlung beim Stoß. b) Die gegenseitige Streuung der Mesotronen. c) Die Streuung des Mesotrons an einem Proton. III. Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen. a) Die Wirkungsquerschnitte bei hohen Energien. b) Die Vielfachprozesse.

In einer früheren Arbeit [1]) des Verfassers wurde auseinandergesetzt, daß der Zusammenstoß von zwei Elemententeilchen nach der Theorie dann zur explosionsartigen Entstehung vieler Sekundärteilchen führen kann, wenn das (geeignet normierte) Wechselwirkungsglied in der Hamilton-Funktion einen Faktor enthält, der die Dimension: Potenz einer Länge hat. Dieses Ergebnis wurde damals auf die Fermische Theorie des β-Zerfalls angewendet und es wurde gezeigt, daß die Fermische Theorie in dieser Weise die Entstehung explosionsartiger Schauer voraussehen läßt. Inzwischen hat die Entdeckung des Mesotrons und der Nachweis seines radioaktiven Zerfalls zu einer weitgehenden Bestätigung der Yukawaschen Theorie geführt, so daß an den allgemeinen Grundlagen dieser Theorie kaum mehr gezweifelt werden kann. Es ist daher schon von verschiedenen Forschern die Frage untersucht worden, ob auch die Yukawasche Theorie die Möglichkeit der Explosionen ergibt [2]). Die Untersuchungen führten zunächst zu dem Ergebnis, daß es nach der Yukawaschen Theorie Prozesse geben müßte, bei denen viele Mesotronen auf einmal entstehen; jedoch kommt Bhabha [3]) in einer neueren Arbeit zu einem etwas anderen Resultat. Die folgende Arbeit soll in ihrem ersten Teil ganz allgemein und genauer als früher die Folgerungen einer Theorie von der in I beschriebenen Art besprechen, und zwar besonders die Folgerungen, die sich später direkt mit

---

[1]) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **101**, 533, 1936; im folgenden als I angeführt. — [2]) H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. London (A) **166**, 501, 1938; W. Heitler, ebenda S. 529; H. Yukawa, S. Sakata, M. Kobayasi u. M. Taketani, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **20**, 720, 1938. — [3]) H. J. Bhabha, Nature **143**, 276, 1939.

dem Experiment vergleichen lassen. Im zweiten Teil wird die Yukawasche Theorie unter den gewonnenen Gesichtspunkten betrachtet. Im dritten schließlich wird der Vergleich mit den Experimenten durchgeführt.

1. *Die allgemeinen Eigenschaften der Vielfachprozesse.*

a) Allgemeine Übersicht. Für die folgenden Überlegungen wird es zweckmäßig sein, wie in I die Energie E in Einheiten $\hbar c$ und die Feldstärken, z. B. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$, in Einheiten $\sqrt{\hbar c}$ zu messen. Wir setzen also $\varepsilon = \frac{E}{\hbar c}$; $\mathfrak{e} = \frac{1}{\sqrt{\hbar c}}\,\mathfrak{E}$ usw. Ferner ersetzen wir die Zeit t durch die Variable $\tau = tc$. Dann haben alle vorkommenden Größen die Dimension: Potenz einer Länge. Z. B. gilt dimensionsmäßig $\varepsilon \sim \mathrm{cm}^{-1}$, $\mathfrak{e} \sim \mathrm{cm}^{-2}$. Nach I sind in einer Theorie dann Vielfachprozesse beim Zusammenstoß der Elementarteilchen zu erwarten, wenn die Hamilton-Funktion oder die Lagrange-Funktion ein Wechselwirkungsglied enthält, das mit der Potenz einer universellen Länge multipliziert ist. Ein einfaches Beispiel für eine solche Theorie wäre etwa durch die Lagrange-Funktion [1])

$$L = \frac{1}{l^4}\sqrt{1 + l^4\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2\right]} \tag{1}$$

gegeben. φ ist dabei ein Skalar der Dimension cm^{-1}, l eine Konstante der Dimension cm. Die zu φ kanonisch konjugierte Wellenfunktion wird hier

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\left(1 + l^4\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2\right]\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und als Vertauschungsrelation folgt in der üblichen Weise

$$\pi(\mathfrak{r})\,\varphi(\mathfrak{r}') - \varphi(\mathfrak{r}')\,\pi(\mathfrak{r}) = -\,i\,\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}'). \tag{2}$$

Nun ist bekanntlich die konsequente Durchführung einer durch (1) und (2) festgelegten Theorie wegen der Divergenzschwierigkeiten bei der Selbstenergie unmöglich. Die Gleichungen (1) und (2) können also nur als korrespondenzmäßige Hinweise auf die zukünftige Theorie betrachtet werden. Wenn z. B. ein Zusammenstoß von Elementarteilchen geringer Energie ($\varepsilon \ll 1/l$) untersucht werden soll, so kann man die Lagrange-Funktion nach Potenzen der Wellenfunktion φ entwickeln und von den höheren Störungsgliedern nur die berücksichtigen, die nicht zu unendlichen Selbstenergien führen. Man kann dann z. B. den Wirkungsquerschnitt für die gegenseitige Streuung der Teilchen oder für die Entstehung neuer Teilchen

[1]) Vgl. hierzu M. Born, Proc. Roy. Soc. London (A) **143**, 410, 1933.

geringer Energie aus diesen Störungsgliedern ablesen[1]). Ein solches Verfahren wird aber sinnlos, wenn der Zusammenstoß zwischen Teilchen sehr hoher Energien ($\varepsilon \gg 1/l$) behandelt werden soll. Für diesen Fall war daher in I vorgeschlagen worden, die Lösungen von (1) ohne Berücksichtigung von (2), d. h. nach der klassischen Theorie aufzusuchen. Die beiden Elementarteilchen muß man dann durch Wellenpakete geeigneter Wellenlänge und geeigneten Energieinhalts ersetzen und untersuchen, was beim Zusammenstoß der Wellenpakete geschieht. Gerade dann, wenn bei dem Zusammenstoß viele Sekundärteilchen erzeugt werden, kann man erwarten, daß eine solche Behandlung des Zusammenstoßes nach der klassischen Theorie eine gute Näherung an die zukünftige Theorie ergibt. Denn der Grenzfall sehr vieler Teilchen entspricht häufig dem Grenzfall sehr hoher Quantenzahlen.

Die Zweckmäßigkeit und die Tragweite einer solchen „halb-klassischen" Methode ist neuerdings durch zwei wichtige Arbeiten von Bloch und Nordsieck[2]) über die Ausstrahlung des Elektrons beim Stoß deutlich gemacht worden. Bloch und Nordsieck zeigen zunächst, daß die Ausstrahlung beim Stoß in der klassischen Theorie etwa so zustande kommt, daß sich die Differenz zwischen dem Elektroneigenfeld vor und nach dem Stoß im Augenblick des Stoßes als Wellenpaket selbständig macht und als Strahlung in den Raum wandert. Sie zeigen weiter, daß das Spektrum, das nach der Quantentheorie beim Stoß ausgesandt wird, in seinem Erwartungswert mit dem nach der klassischen Theorie ausgesandten übereinstimmt und daß die Schwankungen um diesen Erwartungswert nach der Poissonschen Schwankungsformel erfolgen. Dies gilt allerdings nur bis auf die Einschränkungen, die durch Energie- und Impulssatz dem ganzen Stoßvorgang auferlegt werden — die aber dann praktisch keine Rolle spielen, wenn von der Rückwirkung der Strahlung auf das bewegte Elektron abgesehen werden kann. Diese Ergebnisse von Bloch und Nordsieck legen den Gedanken nahe, daß ganz allgemein auch in einer zukünftigen Theorie derartige Strahlungsvorgänge so behandelt werden können, daß zunächst ein „klassisches" Spektrum berechnet wird, das den Erwartungswert des quantentheoretischen Spektrums darstellt und um das die Schwankungen nach der Poissonschen Formel erfolgen. Man wird jedenfalls erwarten können, daß

---

[1]) Vgl. z. B. die Streuung von Licht an Licht bei H. Euler u. B. Kockel, Naturwissensch. **23**, 246, 1935. — [2]) F. Bloch u. A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54, 1937; A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 59, 1937. Die Grenzen dieser Behandlungsweise werden besprochen bei W. Pauli u. M. Fierz, Nuov. Cim. **15**, Nr. 3, 1938.

man durch ein derartiges Verfahren der zukünftigen Theorie sehr nahe kommt; nur in der Berechnung des „Erwartungswertes" der Strahlung wird die zukünftige Theorie von der halbklassischen vielleicht erheblich abweichen. Geht man von diesem Gesichtspunkt aus, so zerfällt die Behandlung der Vielfachprozesse in zwei getrennte Probleme. Man hat erstens durch Lösung der Wellengleichungen den betreffenden Stoßvorgang innerhalb der klassischen Theorie zu behandeln und das Spektrum des Wellenzuges zu berechnen, der sich vom Ort des Zusammenstoßes her ausbreitet. Man muß zweitens aus dem berechneten Spektrum die Wirkungsquerschnitte für die gesuchten Einzelprozesse nach der Quantentheorie ermitteln. Das erste Problem: Die Berechnung des Erwartungswertes des Spektrums, kann also einstweilen nur durch korrespondenzmäßige Analogien angegriffen werden. Erst in der zweiten Aufgabe spielt die Quantentheorie eine Rolle.

b) Der Erwartungswert des ausgesandten Spektrums. Wenn eine einfache Lagrange-Funktion vom Typus (1) vorgeschrieben ist, in der nur eine einzige Teilchensorte, d. h. nur eine Wellenfunktion vorkommt, so wird man energiereiche Stoßprozesse stets in der Weise behandeln, daß man wie in I die stoßenden Teilchen durch normierte Wellenpakete darstellt, die aufeinanderprallen. Diese Wellenpakete können eine Energie, die groß gegen $1/l$ ist, und in der Bewegungsrichtung eine Ausdehnung, die klein gegen l ist, besitzen, ohne daß deswegen der Ausdruck $l^4\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2\right]$ von der Größenordnung 1 oder größer werden müßte. Denn ein solches energiereiches Wellenpaket läßt sich durch einfache Lorentz-Transformation, die den Ausdruck $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2$ invariant läßt, aus einem Wellenpaket kleiner Energie gewinnen. Dagegen wird man den Durchmesser des Pakets senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht kleiner als l machen können, ohne gleichzeitig auch den Ausdruck $l^4\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2\right]$ bis zur Größenordnung 1 anwachsen zu lassen, d. h. ohne die nichtlinearen Abweichungen von der gewöhnlichen Wellengleichung wesentlich ins Spiel zu bringen. Ein Wellenpaket, dessen Querausdehnung kleiner als l ist, dürfte also überhaupt nicht mehr ein einziges Teilchen darstellen können. Man kann aus diesem Sachverhalt vielleicht schließen, daß der sonst in der Wellenmechanik gültige Satz, nach dem Wirkungsquerschnitte nicht größer werden können als das Quadrat der Wellenlänge der beteiligten Teilchen, hier nicht mehr zu gelten braucht. Es ist in einem Formalismus der Art (1) und (2) die Möglichkeit dafür geschaffen, daß die Gesamtwirkungsquerschnitte beim Stoß im Grenzfall beliebig hoher Energien der stoßenden Partner einem von der Energie unabhängigen Grenzwert der Größenordnung l^2 zustreben. Dieser Grenzwert kann jedenfalls nicht wesentlich größer als l^2 werden — ausgenommen natürlich den Fall, daß zwischen den stoßenden Teilchen weitreichende Kräfte (etwa von der Art der Coulombschen) wirksam sind, in dem ja auch der genannte wellenmechanische Satz nicht gilt. Diesen Grenzwert des gesamten Wirkungsquerschnitts könnte man etwa mit der anschaulichen Vorstellung „Größe des betreffenden Elementarteilchens" verknüpfen, nur muß man dabei beachten, daß der Wirkungsquerschnitt sich jeweils auf ein *Paar* von Teilchen, nicht auf ein einzelnes bezieht.

Behandelt man nun den Zusammenstoß zweier sehr energiereicher Wellenpakete nach der durch (1) vorgeschriebenen Wellengleichung, so werden, wie in I geschildert, dort, wo die Wellenpakete aufeinandertreffen, die nichtlinearen Glieder wesentlich werden und es wird eine turbulente Bewegung einsetzen, die das Spektrum des Wellenzuges verändert. Diese turbulente Bewegung wird erst dann wieder in eine eigentliche Wellenbewegung übergehen, wenn der Ausdruck $l^4\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 - (\operatorname{grad} \varphi)^2\right]$ im ganzen Gebiet klein gegen Eins geworden ist — was im allgemeinen erst eintreten wird, wenn sich der Wellenvorgang über einen größeren Raum ausgebreitet hat. Der Durchmesser dieses Raumes betrüge bei den Annahmen (1) nach den Abschätzungen in I Gleichung (8) bis (11) etwa $l\sqrt[3]{l/\lambda}$, wenn λ die Wellenlänge der stoßenden Teilchen vor dem Stoß bedeutet. Über einen Raum dieser Größe wäre also eine unregelmäßige Wellenbewegung ausgebreitet und es muß nun untersucht werden, wie das Spektrum dieser Bewegung aussieht.

Wenn es möglich wäre, den Wellenvorgang für kurze Zeit in einem Hohlraum dieser Größe l^4/λ zwangsweise festzuhalten, so würde sich bereits nach einer Zeit der Größenordnung l Temperaturgleichgewicht, d. h. eine Plancksche Verteilung[1]) einstellen. Die Temperatur dieser Verteilung läßt sich aus der Energiedichte ermitteln. Die Energiedichte hat die Größenordnung $\lambda^{-1}\Big/\frac{l^4}{\lambda} = l^{-4}$, die entsprechende Temperatur (im energetischen Maß) erhält also nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz die Größenordnung l^{-1}. Das entstehende Spektrum würde also dann nach großen Frequenzen ν hin wie $e^{-\nu l}$ abfallen und hätte sein Maximum bei $\nu \sim 1/l$.

[1]) Die Plancksche Verteilung ergibt sich in der Rechnung natürlich nur bei richtiger Anwendung der Quantentheorie.

In Wirklichkeit geht jedoch die Explosion zu rasch vor sich, um die Einstellung des Temperaturgleichgewichts zu ermöglichen. Es wird sich also wohl ein Spektrum einstellen, das zwar die meiste Energie in der Gegend $1/l$ enthält, das aber nach hohen Frequenzen hin langsamer abfällt als die Plancksche Verteilung. Eine befriedigende Integration der nichtlinearen Wellengleichung, die die Frage nach der spektralen Verteilung beantworten würde, ist mir auch in den einfachsten Fällen nicht gelungen. Numerische Rechnungen schienen zu zeigen, daß zwar die Größe grad φ im Wellengebiet auf Werte der Ordnung $1/l^2$ herabgedrückt wird, daß die zweiten Differentialquotienten, etwa $\Delta\varphi$, jedoch an einigen Stellen groß bleiben (etwa von der Ordnung $1/l^2\lambda$). Ein solches Verhalten würde zu einem Spektrum führen, das bei großen Frequenzen nach einem Potenzgesetz abfällt. Die Frage nach der genauen theoretischen Form des Spektrums muß also einstweilen offenbleiben und man muß vielleicht versuchen, aus dem Experiment in jedem einzelnen Fall Schlüsse auf das allgemeine Verhalten des Spektrums zu ziehen.

Unter „Spektrum" ist hier die Fourier-Zerlegung des Wellenvorganges gemeint, der sich nach dem Zusammenstoß ausbreitet und dessen spektrale Verteilung dann, wenn sich der Wellenzug über einen hinreichend großen Raum ausgebreitet hat, nicht mehr geändert wird. Aus dem Absolutquadrat des Fourier-Koeffizienten kann die spektrale Verteilung unmittelbar angegeben werden. Wir bezeichnen für die Rechnungen des folgenden Abschnitts mit

$$f(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k} = f(\mathfrak{k})\,k^2\,dk\,d\Omega \tag{3}$$

die Energie, die im Wellenzahlintervall dk (k soll die „Wellenzahl" $k = 2\pi/\lambda$ bedeuten) in den Raumwinkelbereich $d\Omega$ entsandt wird. Die Gesamtenergie des Wellenpakets wird dann

$$\varepsilon = \int f(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}. \tag{4}$$

c) Die quantentheoretischen Wirkungsquerschnitte. Die Arbeit von Bloch und Nordsieck zeigt, daß bei der Ausstrahlung eines durch einen Stoß wenig abgelenkten Elektrons der Erwartungswert des quantentheoretischen Spektrums mit dem „klassischen" Spektrum übereinstimmt und daß die Schwankungen um diesen Erwartungswert nach der Poissonschen Formel berechnet werden können[1]). Es liegt nahe, etwas Ähnliches auch für das hier gestellte Strahlungsproblem anzunehmen. Legen wir das Spektrum (3) und (4) zugrunde, so bedeutet dies, daß die Wahrscheinlichkeit $\alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}$ dafür, daß ein Elementarteilchen im Impulsbereich $d\mathfrak{k}$ gefunden

[1]) F. Bloch u. A. Nordsieck, l. c., S. 58, Gleichung (26).

wird, durch $\alpha(\mathfrak{k}) = f(\mathfrak{k})/k$ gegeben sein muß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *nur* dieses eine Teilchen emittiert wird, ist dann $N\alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}$.

Der Normierungsfaktor N bedeutet anschaulich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in allen anderen Impulsgebieten keine Teilchen emittiert werden und hat den Wert

$$N = e^{-\int \alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}}. \tag{5}$$

Allgemeiner wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen im Impulsbereich $d\mathfrak{k}_1$, ein zweites im Bereich $d\mathfrak{k}_2$ usw. emittiert wird, durch

$$dw_n = N\alpha(\mathfrak{k}_1)\,d\mathfrak{k}_1\,\alpha(\mathfrak{k}_2)\,d\mathfrak{k}_2\ldots\alpha(\mathfrak{k}_n)\,d\mathfrak{k}_n \tag{6}$$

gegeben sein. Die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, daß gerade n Teilchen emittiert werden, wird daher

$$w_n = \frac{N}{n!}\left(\int \alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}\right)^n, \tag{7}$$

wobei der Nenner $n!$ davon herrührt, daß bei der unabhängigen Integration über alle $\mathfrak{k}$ in (6) jeder Prozeß, bei dem n Teilchen ausgesandt werden, $n!$-fach gezählt wird.

Aus (5) und (7) folgt

$$\sum_0^\infty w_n = 1.$$

Die Größe

$$\int \alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k} = \int \frac{f(\mathfrak{k})}{k}\,d\mathfrak{k} = \bar{n} \tag{8}$$

bedeutet die mittlere Anzahl der ausgesandten Teilchen. In dem von Bloch und Nordsieck behandelten Falle wird die mittlere Teilchenzahl $\bar{n}$ wegen der Divergenz des Integrals (8) unendlich. Aus diesem Umstand entstehen jedoch keine weiteren Schwierigkeiten, da man das Gebiet der kleinen Frequenzen so behandeln kann, wie Bloch und Nordsieck angegeben haben und da wegen der Unabhängigkeit der Schwankungen in den verschiedenen Spektralbereichen die Formeln (5) bis (8) dann auf das Spektralgebiet oberhalb eines bestimmten endlichen Wertes von k beschränkt werden können. Außerdem werden wir im folgenden die Formeln (5) bis (8) in erster Linie auf die Emission der Mesotronen anwenden, die eine endliche Ruhmasse $M_{\mathrm{Mes}} = \varkappa\hbar/c$ besitzen und bei denen daher die Energie durch die Gleichung

$$k_0^2 = \varkappa^2 + \mathfrak{k}^2$$

gegeben ist. Für die mittlere Anzahl gilt dann

$$\bar{n} = \int \frac{f(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}}{k_0}; \quad \alpha(\mathfrak{k}) = \frac{f(\mathfrak{k})}{k_0}; \tag{9}$$

$\bar{n}$ bleibt hier naturgemäß stets endlich.

Die Gültigkeit der Formeln (5) bis (9) wird dadurch eingeschränkt, daß ja die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls der ausgesandten Teilchen durch den Anfangszustand fest vorgegeben sind. Dieser Umstand hat zur Folge, daß aus der Verteilung (6) gewissermaßen eine mikrokanonische Verteilung herausgegriffen wird, bei der Gesamtenergie und Gesamtimpuls einen vorgegebenen Wert haben. Die hierdurch bedingte Abänderung der Verteilung (6) ist mathematisch nicht ganz leicht zu überblicken. In vielen Fällen ist diese Abänderung aber gering. Immer dann, wenn die nach (6) berechnete mittlere Schwankung der Gesamtenergie und des Impulses klein ist gegen die Gesamtenergie selbst, wird auch die Verteilung mit vorgegebener Energie nicht allzuviel von der Verteilung (6) abweichen.

Für die mittlere Energie gilt

$$\varepsilon = \int k_0 \alpha (\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k} = \int f(\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k},$$

ferner folgt durch eine einfache Rechnung aus (6):

$$\overline{\varepsilon^2} = \int k_0^2\, \alpha (\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k} + \varepsilon^2,$$

also für das mittlere Schwankungsquadrat:

$$\overline{\varDelta \varepsilon^2} = \int k_0^2\, \alpha (\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k} = \int k_0 f(\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k}, \tag{10}$$

ebenso für die Schwankung des Gesamtimpulses $\mathfrak{K}$:

$$\overline{\varDelta \mathfrak{K}^2} = \int \mathfrak{k}^2 \alpha (\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k} = \int \frac{\mathfrak{k}^2}{k_0} f(\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k}. \tag{11}$$

Gleichung (10) zeigt, daß es zur Erfüllung der Forderung $\varDelta \varepsilon \ll \varepsilon$ nicht genügt, wenn die Teilchenzahl $\bar{n}$ sehr groß ist. Auch bei unendlicher Teilchenzahl, wie in dem von Bloch und Nordsieck behandelten Falle, kann die Schwankung der Energie groß sein, weil auch einzelne relativ energiereiche Teilchen ausgesandt werden können. Zur Befriedigung von $\varDelta \varepsilon \ll \varepsilon$ ist vielmehr nach (10) notwendig, daß die Energie auf viele Teilchen relativ geringer Energie verteilt wird, wie auch anschaulich einleuchtet.

Es wird in vielen Fällen gar nicht auf die Verteilung bei einer bestimmten vorgegebenen Energie ankommen, sondern schon durch die Fragestellung wird eine Mittelung über gewisse Energiebereiche vorgeschrieben. In solchen Fällen kann man dann meist unmittelbar mit der Verteilung (6) rechnen. Z. B. wird man bei der Ausstrahlung des Elektrons beim Stoß etwa nach dem Wirkungsquerschnitt dafür fragen, daß das stoßende Teilchen in einer bestimmten Richtung abgelenkt wird, ohne daß man die Energie, mit der es fortfliegt, festlegen müßte. Bei dieser Fragestellung wird von vornherein über gewisse Energiebereiche gemittelt.

Aus den vorstehenden Überlegungen wird klar, daß ganz allgemein wie bei Bloch und Nordsieck die Frage nach den Wirkungsquerschnitten für bestimmte Einzelprozesse nicht einfach durch korrespondenzmäßige Vergleiche beantwortet werden kann. Einfache Fragen haben dagegen stets die Form: was ist der Wirkungsquerschnitt für einen bestimmten Vorgang, *gleichgültig was sonst etwa noch bei diesem Vorgang geschieht.* Auf solche Fragen können korrespondenzmäßige und anschauliche Überlegungen Antwort geben. So ist z. B. in den oben durchgeführten Betrachtungen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen im Impulsbereich $d\mathfrak{k}$ ausgesandt wird, durch $\frac{f(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}}{k_0}$ gegeben, wie anschaulich sofort einleuchtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *nur* dieses Teilchen emittiert wird, ist dagegen $\frac{f(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}}{k_0}\,e^{-\int \alpha(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}}$, eine Formel, die offenbar in der klassischen Theorie kein Analogon hat. Man wird daher erwarten, daß auch in einer endgültigen Theorie die Gesamtwirkungsquerschnitte für Prozesse der erstgenannten Art eine wichtigere Rolle spielen und einfacher zu ermitteln sind als die Wirkungsquerschnitte für bestimmte Einzelvorgänge — im Gegensatz zur bisherigen Theorie, in der die Wirkungsquerschnitte für Einzelprozesse aus den Matrixelementen der Störungsenergie berechnet werden, während Gesamtwirkungsquerschnitte erst durch relativ komplizierte Summationen aus ihnen hervorgehen. Eine besonders einfache Größe wäre also in der zukünftigen Theorie etwa der Wirkungsquerschnitt dafür, daß überhaupt ein Stoß der beiden Elementarteilchen stattfindet. Dieser Wirkungsquerschnitt wird jedoch in manchen Fällen unendlich groß; dies ist nämlich dann möglich, wenn Teilchen ohne Ruhmasse emittiert werden können, wie bei dem von Bloch und Nordsieck untersuchten Vorgang. Eine ebenso einfache Größe wäre etwa der Wirkungsquerschnitt dafür, daß beim Stoß neue Materie (d. h. Teilchen mit endlicher Ruhmasse) entsteht. Dieser Wirkungsquerschnitt ist stets endlich und dürfte sich bei wachsender Energie der stoßenden Teilchen in vielen Fällen einem von der Energie unabhängigen Grenzwert der Größenordnung l^2 nähern.

2. *Anwendung auf die Yukawasche Theorie.*

a) Ausstrahlung beim Stoß. Die genaue Form der Wechselwirkung zwischen den Yukawaschen Teilchen und der übrigen Materie ist einstweilen noch nicht bekannt. Für die folgenden Überlegungen genügt es aber, ein vereinfachtes Modell der Yukawaschen Theorie zugrunde zu legen [1]).

[1]) Vgl. H. J. Bhabha, Nature a. a. O.

In dieser vereinfachten Theorie soll es nur neutrale Yukawa-Teilchen geben, die mit Protonen in Wechselwirkung stehen. Die Potentiale des Yukawa-Feldes, die einen Vierervektor bilden, sollen (in den in 1a besprochenen Einheiten) $\mathfrak{u}$ und u_0 heißen, die Feldstärken seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$. Die Wellenfunktion der Protonen sei ψ. Die Lagrange-Funktion des gesamten Feldes, aus der die Wellengleichungen hervorgehen, lautet dann

$$L = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2) + \frac{\varkappa^2}{2}(u_0^2 - \mathfrak{u}^2) + i\,\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - i\,\psi^* \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}\psi + \psi^* \beta \psi K. \quad (12)$$

Hierzu kommen die Beziehungen:

$$\mathfrak{g}_k = \mathrm{rot}_k\,\mathfrak{u} - l\,\psi^* \beta\, \sigma_k\, \psi; \qquad \mathfrak{f}_k = -\dot{\mathfrak{u}}_k - \mathrm{grad}_k\, u_0 - i\, l\, \psi^* \beta\, \alpha_k\, \psi.$$

In diesen Formeln bedeuten $\varkappa$ und K die in cm^{-1} gemessenen Ruhmassen des Mesotrons und des Protons; es gilt also $\varkappa = \frac{M_{\mathrm{Mes}} \cdot c}{\hbar}$; $K = \frac{M_{\mathrm{Prot}} \cdot c}{\hbar}$. Über gleiche Indizes wird von 1 bis 3 summiert. Die Konstante l hat die Dimension einer Länge und hängt mit der sonst an dieser Stelle gebräuchlichen Wechselwirkungskonstanten g_2 durch die Beziehung

$$l = \frac{g_2 \sqrt{4\pi}}{\sqrt{\hbar c}} \cdot \frac{\hbar}{M_{\mathrm{Mes.}} \cdot c}$$

zusammen. Empirisch hat also l etwa die Größenordnung $l \sim 1/\varkappa$, wenn man die Verhältnisse der Yukawa-Theorie auf das vereinfachte Modell übertragen will. Die der Konstanten g_1 entsprechende Wechselwirkung ist zur Vereinfachung weggelassen.

Vergleicht man das Yukawasche Feld mit einem elektromagnetischen, so bedeutet Gleichung (12), daß die Protonen ein „magnetisches Moment" der Größe $l\sqrt{\frac{\hbar c}{4\pi}}$ besitzen. Dieses Moment hat zur Folge, daß um ein ruhendes Proton herum ein Yukawasches Dipolfeld besteht.

Wir betrachten nun den Zusammenstoß eines Protons mit irgendeinem anderen Elementarteilchen. Im Moment des Zusammenstoßes wird, wie bei den von Bloch und Nordsieck behandelten Stoßprozessen, die Differenz des Yukawa-Eigenfeldes vor und nach dem Stoß als Wellenpaket ausgestrahlt werden. Dieses Wellenpaket entspricht, wenn man seine spektrale Verteilung untersucht, zunächst nur einigen wenigen Mesotronen. Wenn insbesondere die der gewöhnlichen Elektrodynamik entsprechende Wechselwirkung, die mit der Konstante g_1 verknüpft ist, nicht fortgelassen wird, so kann man die Resultate von Bloch und Nordsieck fast wörtlich übernehmen. Integriert man die Energie über alle Richtungen, so wird dort

$\int f(\mathfrak{k})\, d\Omega \sim \frac{\text{const}}{k^2}$ für alle Frequenzen, die klein sind gegen eine durch die Stoßzeit bestimmte Frequenz k_{max}. Für höhere Frequenzen nimmt die Intensität sehr rasch gegen Null ab. Die zwischen k und $k + dk$ enthaltene Energie wird also für kleinere Frequenzen nahezu von k unabhängig. Überträgt man diese Ergebnisse auf die Yukawa-Theorie, so wird man nur für sehr kleine Frequenzen der Ordnung $\varkappa$ Abweichungen erwarten, die von der endlichen Ruhmasse der Mesotronen herrühren. Man kann diese Abweichungen ganz grob dadurch berücksichtigen, daß man das Spektrum erst bei der Frequenz $k_0 = \varkappa$ beginnen läßt, von hier ab aber mit der gleichen Verteilung wie bei den Lichtquanten rechnet. Die mittlere Anzahl der ausgesandten Mesotronen wird dann ungefähr

$$\bar{n} \approx \int\limits_{\varkappa}^{k_{max}} \frac{f(\mathfrak{k})\, d\mathfrak{k}}{k} \approx \text{const} \int\limits_{\varkappa}^{k_{max}} \frac{dk}{k} = \text{const}\, \lg \frac{k_{max}}{\varkappa}. \tag{13}$$

Die mittlere Anzahl wächst also nur logarithmisch mit k_{max} und mit der ausgestrahlten Gesamtenergie. Die Konstante vor dem Logarithmus hat bis auf einen Faktor der Größenordnung 1 den Wert $g_1^2/\hbar c$. Wenn also das beim Stoß frei werdende Wellenpaket einfach als Mesotronenstrahlung in den Raum hinaus wanderte, so wären zwar nach (13) Mehrfachprozesse bei sehr hohen Anfangsenergien zu erwarten [1]), aber die mittlere Teilchenzahl bliebe stets klein.

Eine solche einfache Ausbreitung des Wellenpakets ist aber nach der Yukawa-Theorie nicht zu erwarten, da die einzelnen Teile des Wellenpakets sich gegenseitig stören wegen der Wirkungen, die man in der Elektronentheorie unter der Bezeichnung „Streuung von Licht an Licht" zusammenfaßt, und die in der Yukawaschen Theorie eine viel wichtigere Rolle spielen als in der Elektrodynamik.

Die in dem Wellenpaket auf sehr kleinem Raum vereinigten Mesotronen werden — im Gegensatz zu den entsprechenden elektrodynamischen Vorgängen — aneinander gestreut werden und dabei neue Mesotronen erzeugen, so daß eben solche Vorgänge eintreten, wie sie in 1 b besprochen wurden. Um dies näher zu begründen, soll die gegenseitige Streuung von Mesotronen, deren Energie kleiner als die Ruhmasse des Protons ist, nach dem in der Elektrodynamik üblichen Verfahren abgeleitet werden [2]).

---

[1]) Vgl. H. J. Bhabha, a. a. O. — [2]) Für das Folgende vgl. W. Heisenberg u. H. Euler, ZS. f. Phys. **98**, 714, 1935 und V. Weinkopf, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. **14**, 6, 1936.

b) Die gegenseitige Streuung der Mesotronen. Die Streuung der Mesotronen kommt im Formalismus dadurch zustande, daß z. B. ein Mesotron virtuell ein negatives Proton und ein Neutron erzeugt, daß das andere Mesotron an einem dieser Teilchen gestreut wird, worauf die beiden Teilchen wieder zu einem neuen Mesotron zerstrahlen. In unserer vereinfachten Theorie mit neutralen Yukawa-Teilchen kommt in dieser Kette die virtuelle Erzeugung eines Protons und eines negativen Protons in Betracht.

Wenn nur Mesotronen kleiner Energie ($k_0 \ll K$) betrachtet werden sollen, so kann, gemessen an Frequenzen der Ordnung K, das Yukawasche Feld als in Raum und Zeit langsam veränderlich betrachtet werden[1]). In diesem Falle müssen, wenn keine Protonen vorhanden sind, die besetzten Zustände negativer Energie adiabatisch dem äußeren Feld folgen. Man kann also in den zur Lagrange-Funktion (12) gehörigen Wellengleichungen einfach die Summation über alle Zustände negativer Energie ausführen und erhält damit die Wellengleichungen für das Yukawa-Feld allein. Diese Summation über die Zustände negativer Energien liefert allerdings ein divergentes Resultat. Wie in der Diracschen Theorie des Positrons müssen also gewisse unendliche Glieder von der Lagrange-Funktion und der Hamilton-Funktion abgezogen werden. Entwickelt man die Energie der besetzten Zustände nach Potenzen der Feldstärken, so treten aber nur bei den niedrigen Potenzen der Feldstärken solche unendlichen Summen auf. In der Diracschen Theorie nur noch bei den in der Feldstärke quadratischen Gliedern, in der Yukawa-Theorie — wie die folgenden Rechnungen zeigen werden — noch in den Gliedern vierter Ordnung. Bei diesen Gliedern niedriger Ordnung muß man also die abzuziehenden unendlichen Terme etwa aus den Erhaltungssätzen bestimmen. Bei den höheren Gliedern dagegen wird man die aus der Summation gewonnenen endlichen Resultate ohne subtraktive Glieder direkt verwenden können. Wir wenden uns daher der Berechnung dieser Glieder zu.

In der Wellengleichung der Yukawa-Teilchen kommen die Ausdrücke $\psi^* \beta \alpha_k \psi$ und $\psi^* \beta \sigma_k \psi$ vor. Nach Gleichung (12) müssen also die Erwartungswerte der Ausdrücke $\psi^* \beta \alpha_k \psi$ und $\psi^* \beta \sigma_k \psi$ bei gegebenen Feldern $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ bestimmt werden für den Fall, daß keine Protonen vorhanden sind. Bezeichnet man mit v_n die Eigenfunktionen der Zustände des Protons in dem äußeren Feld $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, so muß also $\Sigma v_n^* \beta \alpha_k v_n$ bzw. $\Sigma v_n^* \beta \sigma_k v_n$

[1]) Da zeitlich konstante Yukawa-Felder stets im Raum exponentiell abfallen müssen, so beruht die oben vorausgesetzte Idealisation auf der Gleichung $\varkappa \ll K$, die freilich empirisch nicht besonders gut erfüllt ist ($\varkappa \approx \frac{1}{10} K$).

berechnet werden, wobei die Summen über alle Zustände negativer Energie zu erstrecken sind. Diese Ausdrücke sind offenbar die partiellen Ableitungen des Energiedichte-Ausdrucks

$$S = \sum_{\text{neg. En.}} \left\{ i\, v_n^* \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_n - v_n^* \beta v_n K + l \left[i\, \mathfrak{f}_k v_n^* \beta \alpha_k v_n - \mathfrak{g}_k v_n^* \beta \sigma_k v_n \right] \right\} \quad (14)$$

nach den Feldstärken. Da die Feldstärken als langsam veränderlich angesehen werden sollen, kann man in erster Näherung S durch seinen räumlichen Mittelwert über ein Normierungsvolumen V ersetzen, wobei V klein sein muß gegen die Gebiete, in denen sich $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ erheblich ändern, aber groß gegen Gebiete der Ausdehnung K^{-3}. Bei der Ableitung des Ausdrucks $\frac{1}{V}\int S\, \mathrm{d}V$ nach den Feldstärken kann man nun auch die Eigenfunktionen v_n mitvariieren, denn der Energieausdruck hat die Extremaleigenschaft, bei geringen Änderungen der Eigenfunktion unter Beibehaltung der Normierung nicht geändert zu werden. Daraus folgt, daß $\frac{1}{V}\int S\, \mathrm{d}V$ hier einfach ersetzt werden kann durch die Summe der negativen Eigenwerte des Protons in den Feldern $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$. Fügt man also zu den aus (12) folgenden Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} + \varkappa^2 u_0 = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{g} - \varkappa^2 \mathfrak{u} = 0$$

noch die weiteren Beziehungen:

$$\dot{\mathfrak{u}}_k + \operatorname{grad}_k u_0 = -\frac{\partial \overline{L}}{\partial \mathfrak{f}_k}; \quad \operatorname{rot}_k \mathfrak{u} = -\frac{\partial \overline{L}}{\partial \mathfrak{g}_k},$$

so unterscheidet sich diese Lagrange-Funktion $\overline{L}$ des Yukawa-Feldes bei Nichtvorhandensein von Protonen von $\frac{1}{2}(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)$ um die *Energiedichte* der besetzten Zustände negativer Energie und um einige näher zu bestimmende divergente Ausdrücke.

Zunächst müssen also die Eigenwerte des Protons in den Feldern $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ berechnet werden. Wir nehmen zu diesem Zweck speziell an, daß $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ beide im ganzen Raum konstant sind und nur eine Komponente in der z-Richtung $\mathfrak{f}_3 = f$, $\mathfrak{g}_3 = g$ besitzen. Zu einem Impuls $\mathfrak{p}$ des Protons mit den Komponenten p_1, p_2, p_3 (in Einheiten cm^{-1}) gehört dann ein Energiewert ε, der nach (12) durch die Gleichung

$$\varepsilon_{1,2}^2 = K^2 + \mathfrak{p}^2 + l^2 (g^2 + f^2) \pm 2\, l \sqrt{K^2 g^2 + (f^2 + g^2)(p_1^2 + p_2^2)} \quad (15)$$

gegeben ist; die beiden Vorzeichen der Quadratwurzel beziehen sich auf die beiden möglichen Spinrichtungen. Die unendliche Energiedichte, die von den besetzten Zuständen negativer Energie herrührt, wird also

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathfrak{p}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

und damit die Lagrange-Funktion des Yukawa-Feldes

$$\overline{L} = \frac{1}{2}(\mathfrak{f}^2-\mathfrak{g}^2) - \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathfrak{p}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \text{Subtraktionsglieder.} \tag{16}$$

Zur Auswertung dieses Ausdrucks entwickeln wir ε nach Potenzen der Feldstärken $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$. Setzt man $K^2+\mathfrak{p}^2 = p_0^2$, so wird

$$\varepsilon_{1,2} = p_0\left(1+\frac{l^2(f^2+g^2)}{p_0^2} \pm \frac{2l}{p_0^2}\sqrt{K^2g^2+(f^2+g^2)(p_1^2+p_2^2)}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Also wird

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = 2p_0\sum_{n,m}\left(\frac{l^2(f^2+g^2)}{p_0^2}\right)^n\left(\frac{4l^2}{p_0^4}[K^2g^2+(f^2+g^2)(p_1^2+p_2^2)]\right)^m \frac{(1/2)!}{(1/2-n-2m)!\;n!\;(2m)!}. \tag{18}$$

Man erkennt aus (18), daß der Beitrag der Glieder sechster und höherer Ordnung in f und g zur Lagrange-Funktion endlich ist, während die Glieder niederer Ordnung divergieren. Wir können daher annehmen, daß die Glieder niederer Ordnung durch die Subtraktionsglieder korrigiert und endlich gemacht werden, während die Glieder höherer Ordnung direkt aus (18) übernommen werden können.

Führt man die Integration aus und ordnet die Glieder nach Potenzen von f und g, so erhält man nach etwas umständlichen Rechnungen:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathfrak{p}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{\mu,\nu}\frac{l^{2(\mu+\nu)}}{K^{2(\mu+\nu-2)}}f^{2\mu}g^{2\nu}(-1)^{\mu+1} \frac{(2\mu+2\nu-5)!\;(2\mu+2\nu-3)}{2\mu+2\nu-1}\,\frac{(2\mu-1)(2\nu-1)}{(2\mu)!\;(2\nu)!}. \tag{19}$$

Man erkennt aus (19), daß sich die Energiedichte als Potenzreihe in den beiden Ausdrücken f^2-g^2 und $(fg)^2$ darstellen läßt. Dies muß der Fall sein, weil diese Energiedichte und die Lagrange-Funktion relativistisch invariant sind. Man kann daher bei Feldern mit allgemeinen gegenseitigen Richtungen die Ausdrücke f^2-g^2 und $(fg)^2$ in (19) einfach durch die entsprechenden

Invarianten: $(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)$ und $(\mathfrak{f}\mathfrak{g})^2$ ersetzen. Z. B. erhält man aus (19) für die Glieder sechster Ordnung der Lagrange-Funktion:

$$\frac{1}{240\,\pi^2}\,\frac{l^6}{K^2}\left[12\,(\mathfrak{f}\mathfrak{g})^2\,(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2) + (\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)^3\right]. \tag{20}$$

Die Reihe (19) kann (wenn man ihre ersten unendlichen Glieder wegläßt) auch aufsummiert werden. Setzt man $w = (g + i\,f)\frac{l}{K}$, so wird der Zusatz zu $\overline{L}$:

$$\frac{K^4}{\pi^2}\,\Re e \left\{\frac{13}{48}\,w^2 - \frac{13}{288}\,w^4 + \frac{5}{36}\,f\,g\,i\,w^2 + \left[-\frac{1}{16} - \frac{w^2}{8} + \frac{w^4}{48}\right.\right.$$
$$\left.\left. + f\,g\,i\left(\frac{1}{4} - \frac{w^2}{12}\right)\right]\lg\,(1 - w^2) + (-\,w^2 + f\,g\,i)\,\frac{1}{6\,w}\lg\frac{1+w}{1-w}\right\}. \tag{21}$$

Die Glieder zweiter und vierter Ordnung in den Feldstärken können nach diesem Verfahren nicht ermittelt werden. Die subtraktiven Ausdrücke in (16) müssen dafür sorgen, daß keine Zusatzglieder zweiter Ordnung auftreten, da sonst schon bei sehr kleinen Feldern die Wellengleichungen verändert wären. Die Glieder vierter Ordnung kann man aber wohl nur durch Benutzung der Erhaltungssätze in plausibler Weise festlegen, was hier nicht versucht werden soll.

Es ist lehrreich, das Ergebnis (19) mit den entsprechenden Formeln der Positronentheorie [1]) zu vergleichen. In beiden Fällen kann man die Zusätze zur Lagrange-Funktion darstellen als das Produkt von drei Gliedern: Einem Ausdruck zweiten Grades in den Feldstärken, einer dimensionslosen Konstanten und einer Potenzreihe in dem Verhältnis der Feldstärke zu einer charakteristischen kritischen Feldstärke. Die dimensionslose Konstante ist, soweit sie von den universellen Konstanten abhängt, in der Positronentheorie $e^2/\hbar c$, in der Yukawa-Theorie $l^2 K^2$, also (bis auf die reinen Zahlenfaktoren) etwa 10^4mal größer als in der Positronentheorie. Die kritische Feldstärke ist in der Positronentheorie

$$\frac{m^2\,c^3}{e\,\hbar} = \frac{e^2}{\hbar\,c}\,\frac{e}{(e^2/m\,c^2)^2},$$

also der 137. Teil der „Feldstärke am Rande des Elektrons", in der Yukawa-Theorie K/l. Dieser Wert entspricht, wenn man die Selbstenergie des zu l gehörigen Dipolfeldes etwa der Masse des Protons gleichsetzt, ungefähr dem zehnten Teil der „Feldstärke am Rande des Protons". Bei sehr großen Feldstärken nimmt der dritte Faktor, die Potenzreihe, in der Positronen-

[1]) W. Heisenberg u. H. Euler, a. a. O.

theorie nur logarithmisch zu, der ganze Zusatz zur Maxwellschen Lagrange-Funktion bleibt also wegen des Faktors $e^2/\hbar c$ bei allen vorkommenden Feldstärken relativ klein. In der Yukawa-Theorie nimmt die Potenzreihe bei großen Feldstärken mit dem Quadrat der Feldstärke (multipliziert mit einem Logarithmus) zu; der Zusatz überwiegt daher gegenüber der gewöhnlichen Lagrange-Funktion.

Sobald also die Feldstärke Werte der Ordnung K/l überschreitet, müssen die nichtlinearen Zusätze zur Wellengleichung die Lösungen entscheidend beeinflussen, es setzt dann eine Durchmischung der verschiedenen Teile des Spektrums ein. Diese Rechnungen zeigen, daß in einem vom Proton beim Stoß ausgesandten Wellenpaket stets eine Durchmischung des Spektrums eintritt — ähnlich wie dies in 1b geschildert wurde —, sofern nur die im wesentlichen durch die Stoßzeit bestimmte Grenzfrequenz $k_{\max}$ Werte der Ordnung $\sqrt{K/l}$ erheblich überschreitet, was bei allen Stößen mit großer Energieübertragung der Fall ist. Schreibt man in relativistisch invarianter Form die Bedingung dafür auf, daß bei dem vom Proton sich ablösenden Wellenpaket die nichtlinearen Glieder (20) und (21) wesentlich werden, so erhält man eine Gleichung der Form [1] ($\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{I}}^0$ Impuls und Energie des Protons vor dem Stoß, $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}, p_{\mathrm{II}}^0$ Impuls und Energie nach dem Stoß)

$$(p_{\mathrm{I}}^0 - p_{\mathrm{II}}^0)^2 - (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})^2 > \varkappa^2 Z,$$

wobei der Zahlenfaktor Z noch von dem Massenverhältnis Proton/Mesotron, von $g^2/\hbar c$ und vom „Radius" des Protons im Verhältnis zu l abhängt. Allerdings kann die Durchmischung des Spektrums aus (20) und (21) nur geschlossen werden für das Spektralgebiet, das unterhalb der Frequenz K liegt. Denn für höhere Frequenzen treffen die den Rechnungen dieses Abschnitts zugrunde liegenden Voraussetzungen nicht mehr zu.

Aber selbst, wenn der Wirkungsquerschnitt für die gegenseitige Streuung der Mesotronen mit wachsender Energie etwa mit $1/k$ wieder abnimmt, wie die große experimentelle Reichweite der Mesotronen hoher Energie vermuten läßt [2], so würde die Durchmischung des Spektrums dadurch wohl nicht verhindert, da bei sehr energiereichen Stoßprozessen auch die Größe des entstehenden Wellenpaketes (wegen der Lorentz-Kontraktion) entsprechend gering ist.

[1]) Schon G. Wataghin, ZS. f. Phys. **88**, 92 u. **92**, 547, 1934 hat versucht, den Formalismus der Quantenelektrodynamik durch Abschneidevorschriften ähnlicher Form konvergent zu machen. Es dürfte aber wohl richtiger sein, ein grundsätzliches Versagen des Formalismus bei großen Energieübertragungen anzunehmen. Vgl. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **110**, 251, 1938. — [2]) H. Euler u. W. Heisenberg, Erg. d. exakt. Naturw. **17**, 61 u. f., 1938.

Es muß hervorgehoben werden, daß der Schluß auf diese Durchmischung des Spektrums, also auf die explosionsartigen Vielfachprozesse, nur dann gerechtfertigt ist, wenn man die nichtlinearen Wellengleichungen in der korrespondenzmäßigen Weise verwenden darf, wie dies in I und in Abschnitt 1, b versucht worden ist. Einen zwingenden Schluß auf diese Möglichkeit läßt der bisherige Formalismus nicht zu, da ja eine Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen bisher nicht durchgeführt werden konnte.

Es ist in diesem Zusammenhang wichtig, zu beachten, daß die korrespondenzmäßige Verwendung der Wellengleichungen in vielen Fällen zu völlig anderen Ergebnissen führt, als die gewöhnliche, quantentheoretische Störungstheorie. Ein besonders einfaches Beispiel hierfür bildet die Streuung eines Mesotrons an einem Proton, also das Analogon zum Compton-Effekt oder zur gewöhnlichen Rayleighschen Streuung. Diese Streuung soll daher zur Erläuterung der Tragweite der bisherigen Theorie besprochen werden.

c) Die Streuung des Mesotrons an einem Proton. Die Streuung des Mesotrons am Proton ist in verschiedenen Arbeiten behandelt worden [1]. Die Untersuchungen stimmen überein in dem Ergebnis, daß der Wirkungsquerschnitt für diese Streuung — im Gegensatz zum Wirkungsquerschnitt für die Rayleighsche Streuung — in erster Näherung nicht von der Masse des Protons abhängt, sondern daß er, selbst wenn das Proton als unendlich schwer angenommen würde, einen endlichen Wert behielte. Damit hängt es zusammen, daß für Frequenzen der Yukawa-Wellen $\varkappa \lesssim k$ der Wirkungsquerschnitt wesentlich größer wird, als man nach Analogie zur Elektrodynamik erwarten sollte.

Diese Ergebnisse müssen bedeuten, daß gewisse Freiheitsgrade des Protons bei Einwirkung eines äußeren Yukawa-Wellenfeldes trägheitslos mitschwingen, oder daß dies wenigstens im Formalismus angenommen wird. Die nähere Untersuchung zeigt, daß der von der Masse des Protons unabhängige Streuquerschnitt von zwei Prozessen herrührt: Von der Streuung der transversalen Wellen auf Grund der Wechselwirkungsglieder in (12) und von der Streuung der longitudinalen Wellen auf Grund der von g_1 abhängigen — der gewöhnlichen Elektrodynamik nachgebildeten — Austausch-Wechselwirkung. Im ersten Falle ist der Spin des Protons der trägheitslos mitschwingende Freiheitsgrad. Im zweiten Falle ist es

---

[1]) H. Yukawa u. S. Sakata, Proc. Phys. math. Soc. Japan **19**, 1084, 1937; H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. London (A) **166**, 501, 1938; W. Heitler, ebenda S. 529.

die spinartige Koordinate, die Proton und Neutron unterscheidet. Bei einer Theorie ohne Austausch tritt der hohe Wirkungsquerschnitt für die Streuung der longitudinalen Wellen nicht auf.

Wir wollen nun zeigen, daß im ersten der beiden Fälle, der sich nach Gleichung (12) behandeln läßt, dieses trägheitslose Mitschwingen der Spinkoordinate wahrscheinlich auf einer falschen Anwendung des Formalismus beruht, daß jedenfalls die korrespondenzmäßige Verwendung der Gleichung (12) zu ganz anderen Ergebnissen führt. Es zeigt sich nämlich, daß das Eigenfeld des Protons, das nach (12) bestimmt werden kann, zu einer erheblichen Trägheit der Spinbewegung führt, die so groß ist, daß der Wirkungsquerschnitt für die Streuung vollständig verändert wird.

Bei dieser Rechnung kann man sich mit der unrelativistischen Näherung begnügen; wir nehmen also an, daß die Masse des Protons sehr groß und daß die Geschwindigkeit des Protons stets sehr klein gegen c ist.

Aus (12) bestimmen wir die Hamilton-Funktion

$$H = \int d\mathfrak{r} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{u}}_k} \dot{\mathfrak{u}}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_0} \dot{u}_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - L \right]$$

$$= \int d\mathfrak{r} \left[- \mathfrak{f}\dot{\mathfrak{u}} - \frac{1}{2}(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2) - \frac{\varkappa^2}{2}(u_0^2 - \mathfrak{u}^2) + i\psi^* \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^* \beta \psi K \right]. \quad (22)$$

Ferner folgt aus (12) zur Bestimmung von u_0

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} + \varkappa^2 u_0 = 0. \quad (23)$$

Aus (22) und (23) ergibt sich

$$H = \int d\mathfrak{r} \left[\frac{1}{2}(\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2) + i l \mathfrak{f}_k \psi^* \beta \alpha_k \psi + \frac{\varkappa^2}{2}(u_0^2 + \mathfrak{u}^2) + i \psi^* \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^* \beta \psi K \right]. \quad (24)$$

Da nur ein Proton vorhanden sein soll, können seine Koordinaten statt der Wellenfunktion des Protons als Variable eingeführt werden. Dann wird

$$H = \int d\mathfrak{r} \left[\frac{1}{2}(\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2) + \frac{\varkappa^2}{2}(u_0^2 + \mathfrak{u}^2) + i l \mathfrak{f}_k \beta \alpha_k \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_P) - \alpha_k p_k - \beta K \right]. \quad (25)$$

Wir machen nun Gebrauch von der Annahme, daß die Geschwindigkeit des Protons stets klein gegen c sei. Dies bedeutet, daß die Terme mit α_k in (25) klein sind gegen die Terme mit σ_k und daß $\beta \approx 1$ gesetzt werden kann. Für die zeitliche Änderung der Spinkoordinate erhalten wir also wegen $\mathfrak{g} = \operatorname{rot} \mathfrak{u} - l \sigma \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_P)$ die Gleichung

$$\dot{\sigma} = i(H\sigma - \sigma H) \approx 2l \int d\mathfrak{r}\, \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_p) [\operatorname{rot} \mathfrak{u}, \sigma]. \quad (26)$$

Wir ersetzen nunmehr, um von der Quantentheorie zu einem klassischen Modell überzugehen, den Spinvektor σ durch einen Einheitsvektor $\mathfrak{s}$; ferner die Funktion $\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_p)$ durch eine „verwaschene“ δ-Funktion $D(\mathfrak{r})$, wobei außerdem $\mathfrak{r}_p = 0$ angenommen werden kann, da die Bewegung des Protons ja nur in der Spindrehung bestehen soll. Es ist notwendig, die δ-Funktion durch $D(\mathfrak{r})$ zu ersetzen, um endliche Resultate zu erhalten. Es gelten also in dem klassischen Modell die Gleichungen:

$$\dot{\mathfrak{s}} = 2\,l \int d\mathfrak{r}\, D(\mathfrak{r})\,[\mathfrak{g}\mathfrak{s}], \tag{27}$$

ferner nach (12) (in der gleichen Näherung wie oben), wenn $\operatorname{div}\mathfrak{u} = u_0 = 0$ gesetzt wird — was wir annehmen wollen, da wir nur die Streuung der transversalen Wellen betrachten wollen —

$$\Delta\mathfrak{u} - \ddot{\mathfrak{u}} - \varkappa^2\mathfrak{u} = -\,l \operatorname{rot}(\mathfrak{s}\,D(\mathfrak{r})). \tag{28}$$

Zur Lösung führt man zweckmäßig einen Hertzschen Vektor durch die Beziehung $\mathfrak{u} = \operatorname{rot}\mathfrak{Z}$ ein; es gilt dann:

$$\Delta\mathfrak{Z} - \ddot{\mathfrak{Z}} - \varkappa^2\mathfrak{Z} = -\,l\mathfrak{s}\,D(\mathfrak{r}). \tag{29}$$

Es soll nun eine transversale Welle der Form

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a}\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - k_0\tau)} \quad (\mathfrak{a} \perp \mathfrak{k}) \tag{30}$$

an dem Proton gestreut werden.

Triebe man Störungstheorie und vernachlässigte (was sicher un- unberechtigt ist) das Eigenfeld des Protons, so würde die Streuung folgendermaßen berechnet:

Man setzt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{s}_1;$$

$\mathfrak{s}_0$ ist die ungestörte Lage des Spins, $\mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{Z}_0$ sind die ungestörten ebenen Wellen. Aus (27) schließt man

$$\dot{\mathfrak{s}}_1 \approx 2\,l\,i \int d\mathfrak{r}\, D(\mathfrak{r}) \Big[[\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{s}_0\Big]\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - k_0\tau)} \approx 2\,i\,l\, e^{-ik_0\tau}\Big[[\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{s}_0\Big],$$

$$\mathfrak{s}_1 \approx -\frac{2\,l}{k_0}\Big[[\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{s}_0\Big]\, e^{-ik_0\tau},$$

also aus (29)

$$\mathfrak{Z}_1 = -\,l\,\frac{2\,l}{k_0}\Big[[\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{s}_0\Big]\frac{e^{i(kr - k_0\tau)}}{4\pi r}$$

und

$$\mathfrak{u}_1 = -\frac{2\,i\,l^2}{k_0}\left[\frac{k\mathfrak{r}}{r}\Big[[\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{s}_0\Big]\right]\frac{e^{i(kr - k_0\tau)}}{4\pi r}.$$

Nimmt man etwa speziell $\mathfrak{s}_0 \| \mathfrak{a}$ an, so wird also die gestreute Welle

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{2 i l^2}{k_0} a k [\mathfrak{k}\mathfrak{r}] \frac{e^{i(kr - k_0 \tau)}}{4 \pi r^2}$$

und daraus der Wirkungsquerschnitt für die Streuung:

$$Q = \frac{2 l^4 k^4}{3 \pi k_0^2}.$$

Dieser Wert entspricht den Ergebnissen der quantentheoretischen Störungsrechnung bei Bhabha und Heitler (a. a. O.).

In Wirklichkeit aber ist ja das ruhende Proton auch ohne äußere Welle schon von einem starken Felde $\mathfrak{g}_0$, dem Eigenfeld, umgeben. Die Stärke dieses Feldes richtet sich nach der räumlichen Ausdehnung der Funktion $D(\mathfrak{r})$. Im Grenzfall $D(\mathfrak{r}) \to \delta(\mathfrak{r})$ wird das Feld im Bereich des Protons unendlich groß. Man kann leicht zeigen, daß im Falle einer zentral-symmetrischen Funktion $D(\mathfrak{r})$ der Mittelwert des Eigenfeldes

$$\bar{\mathfrak{g}}_0 = \int \mathfrak{g}_0 D(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r} \tag{31}$$

parallel zu $\mathfrak{s}_0$ steht. Nun lautet die Bewegungsgleichung für $\mathfrak{s}$:

$$\dot{\mathfrak{s}} = 2 l [\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{s}]. \tag{32}$$

Das Eigenfeld gibt also keinen Beitrag zur Bewegung von $\mathfrak{s}$, solange es parallel zu $\mathfrak{s}$ steht. Allerdings haben $\mathfrak{s}$ und Eigenfeld bei zeitlich veränderlichem $\mathfrak{s}$ nicht mehr genau die gleiche Richtung. Je schneller das Spinmoment schwingt, um so mehr wird das Eigenfeld hinter der Spinrichtung zurückbleiben. Um dies zu verfolgen, nehmen wir wieder $\mathfrak{a} \| \mathfrak{s}_0 \|$ z-Achse an. $\mathfrak{a} = (0, 0, a)$; $\mathfrak{s}_0 = (0, 0, 1)$. Die einfallende Welle soll sich in der x-Richtung fortpflanzen $[\mathfrak{k} = (k, 0, 0)]$. Versuchsweise setzen wir die Lösung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{e}\, e^{-i k_0 \tau} \tag{33}$$

an, wobei $\mathfrak{e} \perp \mathfrak{s}_0$ und $|\mathfrak{e}| \ll 1$ sein soll. Die inhomogene Gleichung (29) hat die Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1; \quad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{s}_0 l \int \frac{D(\mathfrak{r}')\, e^{-\varkappa |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}}{4 \pi |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d\mathfrak{r}', \\ \mathfrak{Z}_1 &= \mathfrak{e}\, l\, e^{-i k_0 \tau} \int \frac{D(\mathfrak{r}')\, e^{i k |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}}{4 \pi |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ferner führen wir ein:

$$\mathfrak{Z}_1^{(\varkappa)} = \mathfrak{e}\, l\, e^{i k_0 \tau} \int \frac{D(\mathfrak{r}')\, e^{-\varkappa |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}}{4 \pi |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d\mathfrak{r}'.$$

Zu $\mathfrak{Z}$ gehört das Feld $\mathfrak{g} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{Z} - l\,\mathfrak{s}\,D(\mathfrak{r})$. Also wird:

$$\bar{\mathfrak{g}}_0 = l\int d\mathfrak{r}\,D(\mathfrak{r})\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\mathfrak{s}_0\int\frac{D(\mathfrak{r})\,e^{-\varkappa|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}}{4\pi|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,d\mathfrak{r}'\right) - l\,\mathfrak{s}_0\,D(\mathfrak{r}) = \mathfrak{s}_0\,g_0(\varkappa);$$

$$\bar{\mathfrak{g}}_1^{(\varkappa)} = \mathfrak{s}_1\,g_0(\varkappa);\ \bar{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{s}_1\,g_0(-ik). \quad (35)$$

Der Vektor $\bar{\mathfrak{g}}_0 + \bar{\mathfrak{g}}_1^{(\varkappa)}$ hat die gleiche Richtung wie $\mathfrak{s}$. Die Bewegungsgleichung für $\mathfrak{s}$ wird daher, wenn man zu dem Feld (34) noch das Feld $\mathfrak{g}_{eb}$ der ebenen Welle (30) hinzufügt:

$$\dot{\mathfrak{s}} = 2l[\mathfrak{g}_{eb} + \bar{\mathfrak{g}}_1 - \bar{\mathfrak{g}}_1^{(\varkappa)}, \mathfrak{s}].$$

In dieser Gleichung kann man $\mathfrak{s}_1$ gegen $\mathfrak{s}_0$ vernachlässigen. Man erhält schließlich zur Bestimmung von $\mathfrak{e}$ die Gleichung:

$$-ik_0\mathfrak{e} = \left[i\,[\mathfrak{k}\mathfrak{a}] + \mathfrak{e}\left(g_0(-ik) - g_0(\varkappa)\right), \mathfrak{s}_0\right]. \quad (36)$$

Die Lösung lautet:

$$\mathfrak{e}_x = -\frac{2lkk_0a}{4l^2\left(g_0(-ik) - g_0(\varkappa)\right)^2 - k_0^2};\quad \mathfrak{e}_y = \frac{4il^2ka\left(g_0(-ik) - g_0(\varkappa)\right)}{4l^2\left(g_0(-ik) - g_0(\varkappa)\right)^2 - k_0^2}$$

und daher nach (35):

$$Q = \frac{2k^4l^4\left(k_0^2 + 4l^2\,|g_0(-ik) - g_0(\varkappa)|^2\right)}{3\pi\,|4l^2\left(g_0(-ik) - g_0(\varkappa)\right)^2 - k_0^2|^2}. \quad (37)$$

Bei niedriger Frequenz des äußeren Feldes wird $-ik = \sqrt{\varkappa^2 - k_0^2} \sim \varkappa$, also $l\,|g_0(-ik) - g_0(\varkappa)| \ll k_0$ und der Wirkungsquerschnitt (37) geht in den nach der Störungstheorie berechneten über. Bei höherer Frequenz aber — jede ebene Welle im eigentlichen Sinn gehört wegen $k_0 > \varkappa$ in dieses Frequenzgebiet — wird der Ausdruck $|g_0(-ik) - g_0(\varkappa)|$ gegenüber k_0 überwiegen. Der Wert von $g_0(-ik) - g_0(\varkappa)$ läßt sich nicht ohne genauere Angaben über die Funktion $D(\mathfrak{r})$ berechnen. Man kann etwa fordern, die Funktion $D(\mathfrak{r})$ müsse so gewählt werden, daß die Selbstenergie des Protons, die aus (25) bei gegebenem $D(\mathfrak{r})$ folgt, in der Größenordnung mit der Masse des Protons übereinstimmt. Es kann dann der Wechselwirkungsausdruck $-l\,\mathfrak{s}\,\bar{\mathfrak{g}}$ etwa gleich der negativen Protonenmasse gesetzt werden, woraus $g_0(\varkappa) \sim \frac{K}{l}$ folgen würde. Solange $\varkappa$ und k klein gegen K sind, kann man $g_0(\varkappa)$ nach Potenzen von $\varkappa$ entwickeln und erhält

$$g_0(-ik) - g_0(\varkappa) = -(ik + \varkappa)\frac{\partial g_0(0)}{\partial\varkappa} - \frac{1}{2}(\varkappa^2 + k^2)\frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial\varkappa^2} + \cdots$$

Da nach (35) $\frac{\partial g_0(0)}{\partial\varkappa}$ verschwindet, bleibt also

$$g_0(-ik) - g_0(\varkappa) = -\frac{k_0^2}{2}\frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial\varkappa^2} + \cdots$$

Den Ausdruck $\frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial \varkappa^2}$ kann man abschätzen, wenn man einen mittleren Radius r_0 der Funktion $D(\mathfrak{r})$ einführt. Dann ist das mittlere Feld des Magnetpols von der Stärke $l: \bar{g}_0 \sim \frac{l}{r_0^3}$, also

$$\frac{l}{r_0^3} \sim \frac{K}{l}; \quad r_0 \sim \sqrt[3]{\frac{l^2}{K}}. \quad \text{Daher } \frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial \varkappa^2} \sim \frac{l}{r_0} \sim \sqrt[3]{K\,l}.$$

Schließlich ergibt sich hieraus für den Wirkungsquerschnitt

$$Q \sim \frac{2\,l^2}{3\pi}\left(\frac{k}{k_0}\right)^4 (K\,l)^{-2/3}.$$

Der Wirkungsquerschnitt wird also für höhere Frequenzen erheblich kleiner als nach der unrichtigen Störungstheorie zu erwarten wäre, und hat die Eigenschaft, mit wachsender Masse des Protons abzunehmen, wie auch anschaulich zu vermuten war. Das Eigenfeld des Protons bewirkt indirekt eine Trägheit der Spinbewegung, die in den bisherigen quantentheoretischen Rechnungen nicht berücksichtigt war. Bei der Streuung des longitudinalen Yukawa-Feldes dürften die Verhältnisse ähnlich liegen, doch soll dieser Frage nicht weiter nachgegangen werden.

Aus (37) wird man schließen müssen, daß die üblichen quantentheoretischen Störungsrechnungen für die Streuung des Mesotrons an Protonen vollständig falsche Ergebnisse liefern[1]), daß man jedoch mit korrespondenzmäßigen Betrachtungen von der klassischen Wellentheorie aus noch einen Zugang zu dem Gebiet besitzt, in dem die bisherige Quantenmechanik versagt. Ferner, daß der Wirkungsquerschnitt für die Streuung der Mesotronen an Protonen viel kleiner ist, als bisher angegeben wurde. Dies scheint auch zwangsläufig aus den Experimenten zu folgen. Denn die beobachtete große Reichweite der Mesotronen ist mit den bisher angegebenen großen Streuquerschnitten nicht vereinbar.

3. *Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen.*

a) Die Wirkungsquerschnitte bei hohen Energien. Die in den Abschnitten 1 und 2 durchgeführten Überlegungen können in erster Linie dazu benutzt werden, um die Fragen aufzufinden, nach denen man zweckmäßig die experimentellen Ergebnisse ordnet, und deren Beantwortung eine Klärung der theoretischen Zusammenhänge erhoffen ließe.

---

[1]) Vgl. hierzu eine Reihe von Arbeiten, die die Begrenzung der Quantentheorie betreffen, z. B. A. March, ZS. f. Phys. **104**, 93, 1936 u. f.; G. Wataghin, a. a. O.; W. Heisenberg, a. a. O.

Die Größen, die in einer späteren Theorie wohl die wichtigste Rolle spielen werden, sind die Gesamtwirkungsquerschnitte im Grenzfall hoher Energien. Die einfachste derartige Größe ist der Wirkungsquerschnitt dafür, daß beim Stoß neue Materie entsteht. Dieser Wirkungsquerschnitt wird im Grenzfall hoher Energien einem konstanten Grenzwert zustreben, wenn die stoßenden Teilchen nicht von weitreichenden Kraftfeldern umgeben sind. Wenn solche weitreichenden Kraftfelder vorhanden sind, so kann der Wirkungsquerschnitt mit wachsender Energie zunehmen, und zwar wird man aus den bisherigen Beispielen dieser Art schließen, daß er logarithmisch zunimmt. Dieser logarithmisch zunehmende Anteil wird als unmittelbare Wirkung des weitreichenden Feldes auch leicht von dem Rest getrennt behandelt werden können. Der konstante Rest bedeutet etwas Ähnliches, wie die „Größe" des Elementarteilchens in einer anschaulichen Theorie und man kann vielleicht hoffen, daß für ihn sehr einfache Gesetzmäßigkeiten bestehen, die die Analogie zum anschaulichen Begriff „Größe" deutlich hervortreten lassen.

Das einfachste Beispiel für einen derartigen Wirkungsquerschnitt ist der für den Zusammenstoß eines Lichtquants mit einem Proton. Dieser Wirkungsquerschnitt scheint bei großen Energien des Lichtquants nach Untersuchungen von Nordheim[1]) und Euler[2]) einem konstanten Wert der Größenordnung $10^{-26}\,\mathrm{cm}^2$ zuzustreben. Der vom Coulombschen Feld des Protons herrührende Anteil wird hier durch die Abschirmung des Protons im Wasserstoffatom gehindert, logarithmisch mit der Energie anzuwachsen und bleibt offenbar klein gegen den von anderen Ursachen herrührenden Teil. In den über die Erzeugung von Mesotronen aus Lichtquanten bisher veröffentlichten Untersuchungen[3]) wird wohl mit Recht angenommen, daß der wichtigste primäre Prozeß hier in einer Wechselwirkung des Lichtquants mit dem das Proton umgebenden statischen Yukawaschen Feld besteht. Es kann sich dabei um die Absorption des Lichtquants durch die virtuellen Yukawa-Teilchen, also um eine Art Photoeffekt an diesen an das Proton gebundenen Teilchen oder — was bei hohen Energien vielleicht häufiger eintritt — um einen Compton-Effekt der Lichtquanten an diesen Teilchen handeln. Auf jeden Fall ist dieser Prozeß im allgemeinen verbunden mit einer plötzlichen Änderung des Yukawa-Feldes in der Umgebung des Protons und sollte daher zur Ausbildung eines Wellen-

1) L. Nordheim, Journ. Frankl. Inst. **226**, 575, 1938. — 2) H. Euler, ZS. f. Phys., im Erscheinen. — 3) W. Heitler, a. a. O.; H. Yukawa, S. Sakata, M. Kobayasi, u. M. Taketani, a. a. O.

paketes führen, das als Mesotronenstrahlung gleichzeitig das Proton verläßt. Die Größe und der Energieinhalt des Wellenpaketes werden von dem Rückstoß abhängen, den das Proton erfährt.

Die gleichzeitige Aussendung des Wellenpaketes hat zur Folge, daß der beschriebene Prozeß nicht einfach als Umkehrung aufgefaßt werden kann für den Prozeß, bei dem ein Mesotron von einem Proton absorbiert wird und dabei ein Lichtquant erzeugt. Es ergeben sich hier ganz ähnliche Verhältnisse, wie etwa beim Photoeffekt der Röntgenstrahlen an Atomen, der ja auch nicht als Umkehrung des Prozesses aufgefaßt werden kann, bei dem ein schnelles Elektron das Atom trifft und ein Lichtquant emittiert. Denn das schnelle Elektron trifft auf ein Atom mit vollbesetzten Schalen, der Wirkungsquerschnitt für diesen Stoßprozeß hat also nichts zu tun mit dem beim Photoeffekt, bei dem das wegfliegende Elektron das Atom ja in angeregtem Zustand hinterläßt. Es ist daher durchaus möglich, daß der Wirkungsquerschnitt für den Zusammenstoß eines Mesotrons mit einem Proton und die gleichzeitige Erzeugung eines Lichtquants eine ganz andere Größenordnung hat als der Wirkungsquerschnitt für den Zusammenstoß von Proton und Lichtquant.

Der empirische Wert $10^{-26}\,\mathrm{cm}^2$ für den Wirkungsquerschnitt Lichtquant—Proton im Grenzfall hoher Energie paßt gut zu der räumlichen Ausdehnung des das Proton umgebenden Yukawa-Feldes. Der Wirkungsquerschnitt Mesotron—Proton ist empirisch sehr viel kleiner, er kann bei hohen Energien wohl nur den hundersten Teil des erstgenannten Wirkungsquerschnitts betragen. Nach den Überlegungen von 2, c ist es verständlich, daß die einfache Streuung des Mesotrons am Proton nur einen kleinen Wirkungsquerschnitt liefert. Auch für die Streuung des Mesotrons an den virtuellen Yukawa-Teilchen, die das Proton umgeben, folgen aus (20) und (21) bei geringen Energien des Mesotrons hinreichend kleine Werte, bei großen Energien können die Formeln nicht angewandt werden. Eine genauere Ableitung dieses kleinen Wirkungsquerschnitts kann einstweilen nicht gegeben werden.

b) Die Vielfachprozesse. Da mit jedem Stoß schwerer Teilchen, bei dem viel Energie übertragen wird, auch die Aussendung eines Wellenpaketes von Mesotronen verbunden ist, dessen Spektrum sich im Verlauf der Aussendung wahrscheinlich durchmischt, so ist bei energiereichen Stößen wohl stets mit Vielfachprozessen zu rechnen. Die Größe, die den Vielfachprozeß bestimmt und nach der man daher beim Experiment fragen soll, ist das Spektrum des Wellenpaketes nach seiner Zerstreuung. Dieses

Spektrum wird nach hohen Frequenzen hin näherungsweise nach einem Potenzgesetz abfallen und es ist daher zweckmäßig, zu untersuchen, wie weit sich das experimentelle Material in dieser Weise darstellen läßt. Euler[1]) hat gezeigt, daß eine Intensitätsverteilung nach dem Gesetz

$$J(k_0)\,\mathrm{d}k_0 = \frac{a}{k_0}\,\mathrm{d}k_0, \quad a = \mathrm{const} \tag{38}$$

in groben Zügen zu den Beobachtungsdaten passen würde. Wir untersuchen daher an diesem Beispiel, welche Folgerungen aus einer solchen Formel (38) zu ziehen wären. Die beim Stoß zur Verfügung stehende Gesamtenergie ε müßte mit der Konstanten a in der Beziehung stehen

$$\varepsilon \approx \int\limits_{\varkappa}^{\varepsilon} J(k_0)\,\mathrm{d}k_0 \approx a \lg \frac{\varepsilon}{\varkappa}\,. \tag{39}$$

Für die mittlere Teilchenzahl ergäbe sich daher:

$$\bar{n} = \int\limits_{\varkappa}^{\varepsilon} \frac{J(k_0)\,\mathrm{d}k_0}{k_0} \approx \frac{a}{\varkappa} \approx \frac{\varepsilon}{\varkappa \lg \frac{\varepsilon}{\varkappa}}\,. \tag{40}$$

Die mittlere Teilchenzahl würde also ungefähr proportional der zur Verfügung stehenden Energie anwachsen. Die mittlere Energie der emittierten Teilchen wäre $\varkappa \lg \frac{\varepsilon}{\varkappa}$, also nahezu konstant. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nur ein Teilchen emittiert wird, wäre $\bar{n} e^{-\bar{n}}$ und daher im allgemeinen sehr klein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen mehr als die Hälfte der verfügbaren Energie erhält, wird nach (6) und (38)

$$1 - e^{-\frac{1}{\lg \frac{\varepsilon}{\varkappa}}} \sim \frac{1}{\lg \frac{\varepsilon}{\varkappa}};$$

es ist also bei der Verteilung (38) ziemlich wahrscheinlich, daß auch ein Teilchen relativ hoher Energie ausgesandt wird.

Die Begründung einer Verteilung vom Typus (38) wäre wohl nur möglich durch die Lösung der nichtlinearen Wellengleichung — ähnlich, wie dies in 1, b geschildert wurde. Wieweit die Verteilung von der speziellen Form der nichtlinearen Glieder abhängt, ist einstweilen unbekannt.

---

[1]) H. Euler, ZS. f. Phys., im Erscheinen.

Bei dem Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Experimenten, die ja bisher nur sehr wenig Material zur Beurteilung der Vielfachprozesse zur Verfügung gestellt haben [1]), ist auch zu beachten, daß mit jedem Wellenpaket von Mesotronen im allgemeinen ein Wellenpaket von Lichtquanten verknüpft sein wird. Denn jeder Stoß auf das Proton führt auch zu einer plötzlichen Änderung des Coulombschen Feldes. Die in Lichtquanten ausgesandte Energie wird sich dabei zu der in Mesotronen ausgestrahlten wie $e^2/\hbar c$ zu $g^2/\hbar c$, also etwa wie $1:30$ verhalten — es sei denn, daß durch den Primärprozeß die Aussendung eines Lichtquants besonders begünstigt ist. Aber auch dieser relativ kleine Bruchteil an Energie, der als elektromagnetisches Feld ausgesandt wird, kann die Ausbildung von Kaskaden veranlassen, die mit dem Vielfachprozeß verknüpft sind und die z. B. bei den Stößen in Blei vielleicht nicht viel weniger Teilchen liefern als der Vielfachprozeß selbst. Nur bei leichten Elementen sollten die Wirkungen dieser Kaskaden zurücktreten. Die Vielfachprozesse der Mesotronen dürften also in vielen Fällen nur schwer von den Kaskaden zu trennen sein. Es ist daher wichtig, besonders die großen Schauer, die hinter dicken Schichten leichten Materials beobachtet werden, auf ihren Gehalt an durchdringenden Teilchen zu untersuchen.

---

[1]) Zusammengestellt bei H. Euler u. W. Heisenberg, Erg. d. exakt. Naturwiss. **17**, 49 u. f., 1938.