[Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung (Osram-Konzern).]

Über die Wärmeleitung in der Hochdrucksäule.

Von **R. Rompe** und **P. Schulz** in Berlin.

(Eingegangen am 31. März 1939.)

In der Hochdrucksäule wird die zugeführte elektrische Energie durch Strahlung und Wärmeleitung wieder nach außen abgegeben. In dem Wärmeleitungsanteil ist sowohl die „klassische" Wärmeleitung durch Übertragung von Translationsenergie als auch die durch Diffusion von angeregten Atomen, Lichtquanten, Ionen und Elektronen enthalten. Wie gezeigt wird, ist für die Quecksilberhochdrucksäule nur die Wärmeleitung durch Ionendiffusion im Vergleich zur „klassischen" Wärmeleitung von Bedeutung. Für Hochdruckentladungen mit konstanter Kanalbreite ($L > 500$ Watt/cm, $p > 10$ at) wird die Ionisationswärmeleitung durch ein Glied berücksichtigt, welches dieselbe Temperatur- und damit Leistungsabhängigkeit aufweist wie die Ausstrahlung. — Für Entladungen mit stromstärkeabhängigem Radius (20 bis 80 Watt/cm) gestattet die Berücksichtigung der Ionisationswärmeleitung die vollständige Deutung der Säule unter gleichzeitiger Berücksichtigung einer Konstanz des „klassischen" Wärmeleitungsanteils.

In der vorangehenden Arbeit (I) [1]) wurde eine Leistungsbilanz der Hochdruckentladung verwendet, welche sich formal aus der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung[2]) ableiten ließ. Das Wesentliche an dieser Bilanz war die Aufteilung der insgesamt verbrauchten Leistung in einen unreabsorbiert abgestrahlten und einen in der Form der klassischen Wärmeleitung abgeführten Anteil. Es soll im folgenden diskutiert werden, ob die Aufteilung in diese zwei Bestandteile für die Hg-Hochdrucksäule hinreichend ist.

Die in (I) benutzte Bilanzgleichung ist:

$$\pi R_0^2 S(T) G^2 = \pi R_0^2 F(T) + 2\pi R_0 \overline{\Delta T_0}\, \sigma(T). \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\pi R_0^2 S(T) G^2 = JG$ die zugeführte elektrische Leistung, $\pi R_0^2 F(T) = \mathfrak{S}$ die durch Strahlung abgeführte Leistung und $2\pi R_0 \overline{\Delta T_0}\sigma(T) = W$ die als Wärme abgeführte Leistung.

Das Glied $2\pi R_0 \overline{\Delta T_0}\, \sigma(T)$, welches den Wärmeleitungsanteil berücksichtigt, umfaßt zunächst die Wärmeleitung durch Übertragung kinetischer

[1]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **112**, 691, 1939. — [2]) W. Elenbaas, Physica **2**, 169, 1935; G. Heller, Physics **6**, 389, 1935.

Energie, die wir im folgenden als „klassische" Wärmeleitung bezeichnen wollen. Der Wärmeleitungskoeffizient $\sigma(T)$ ist in diesem Falle:

$$\sigma_{kl}(T) = \frac{2^{5/2} k^{3/2}}{\pi^{5/2} d^2 \sqrt{M}} T^{1/2}, \tag{2}$$

wobei d der gaskinetische Durchmesser der Hg-Atome, M die Masse ist. Da, wie in (I) gezeigt wurde, die Änderungen der Temperatur T mit dem Druck und der Leistung bzw. Stromstärke nur sehr gering sind, und zwar ungefähr logarithmisch mit den Parametern gehen, können wir $T^{1/2}$ in Gleichung (2) praktisch als konstant ansehen und damit σ ebenso als Konstante behandeln. Wir haben dieses in der Arbeit (I) bereits angenommen.

Der klassische Wärmeleitungskoeffizient ist in unseren Entladungen in der Umgebung der Achse von der Größenordnung $\sigma \sim 10^{-4}$ Watt/cm Grad. Weiterhin muß gemäß der in Gleichung (1) getroffenen Zweiteilung $\sigma(T)$ noch sämtliche anderen Möglichkeiten umfassen, durch welche Energie aus der Entladung herauskommen kann, und zwar auf dem Wege eines *Diffusionsvorgangs.*

Aus einer Hg-Hochdruckentladung kann Energie in folgenden Formen herausdiffundieren: 1. angeregte Atome, 2. Lichtquanten, 3. Ionen und Elektronen.

Der Wärmeleitungskoeffizient ist für derartige Vorgänge gegeben durch:

$$\sigma_\varepsilon(T) = \varepsilon N D_T \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial T}. \tag{3}$$

Hier bedeuten N die Zahl der Partikel, welche die Energie ε annehmen können, A_ε die relative Wahrscheinlichkeit der Energie ε, D_T den Diffusionskoeffizienten, den wir

$$D_T = \tfrac{1}{3} \lambda \bar{v} \tag{4}$$

setzen, wo λ die freie Weglänge, $\bar{v}$ die mittlere ungestörte Fluggeschwindigkeit bedeuten.

Für den Wärmeleitungskoeffizienten der angeregten Atome hat man über sämtliche relativen Wahrscheinlichkeiten und deren Energien zu summieren. Die relativen Wahrscheinlichkeiten können bei den vorliegenden Drucken (> 1 at) und Temperaturen ($< 10000^0$) mit ausreichender Genauigkeit aus der Gleichung:

$$A_\varepsilon = g_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{5}$$

berechnet werden. Hierin ist g_ε das Gewichtsverhältnis des Terms ε zum Grundterm. Wir können diese vereinfachte Formel benutzen, weil bei so hohen Drucken und Temperaturen unter 10000^0 praktisch alle Atome im Grundzustand sind[1]). Damit geht Gleichung (3) über in:

$$\sigma_\varepsilon(T) = -\varepsilon N D_T \frac{\varepsilon}{k T^2} A_\varepsilon = -\left(\frac{\varepsilon}{k T}\right)^2 \cdot k D_T N_\varepsilon, \tag{6}$$

wo $N_\varepsilon = N \cdot A_\varepsilon$ die Zahl der Atome im Zustand ε bedeutet.

Die Gleichung (6) läßt sich mit Hilfe der Gleichung (4) umformen. Wenn berücksichtigt wird, daß die freie Weglänge $\lambda \sim \frac{1}{N \cdot q}$ geht, erhält man:

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left(\frac{\varepsilon}{k T}\right)^2 k \bar{v} \frac{1}{3 q} A_\varepsilon. \tag{7}$$

q ist der Stoßquerschnitt, welcher für den Diffusionsvorgang der angeregten Atome bestimmend ist. Offensichtlich hat man hierfür den Wirkungsquerschnitt für einen Stoß zweiter Art einzusetzen, da nach einem solchen Stoß die Anregungsenergie auf den anderen Stoßpartner übertragen und in einer beliebigen anderen Richtung weitertransportiert wird. Der Querschnitt für Stöße zweiter Art kann aus der Eigendruckverbreiterung von Spektrallinien abgeschätzt werden[2]).

Es ist mit ausreichender Genauigkeit:

$$\gamma/2 \sim N q \bar{v}, \tag{8}$$

wenn $\gamma = 2 \pi c \delta$ die Halbwertsbreite in Kreisfrequenz bedeutet. Die Eigendruckbreite des $2\,{}^1P_1$-Terms beträgt bei einer Dichte von $1{,}85 \cdot 10^{19}$ Atome/cm³ und etwa 8000^0 $\delta = 28\,\mathrm{cm}^{-1}$ [3]). Daraus erhält man, da $\bar{v} \sim 10^5$ cm/sec, einen Stoßquerschnitt von $1{,}4 \cdot 10^{-12}$ cm². Wir können nunmehr $\sigma_{2\,{}^1P_1}$ abschätzen und erhalten:

$$\sigma_{2\,{}^1P_1} < 3 \cdot 10^{-9}\ \text{Watt/cm Grad.}$$

Entsprechend ergibt sich für die Wärmeleitung der $2\,{}^3P_{210}$-Terme:

$$\sigma_{2\,{}^3P_{210}} < 2 \cdot 10^{-7}\ \text{Watt/cm Grad.}$$

Die höheren Atomterme tragen wegen der exponentiellen Abhängigkeit von A_ε von der Anregungsenergie nur verschwindend wenig zur Wärmeleitung bei. Man kann deshalb die Wärmeleitung durch Diffusion von Anregungsenergie insgesamt gegenüber der klassischen Wärmeleitung $\sigma_{kl} \sim 10^{-4}$ Watt/cm Grad vernachlässigen.

---

[1]) K. H. Riewe u. R. Rompe, ZS. f. Phys. **111**, 79, 1938. — [2]) W. Furssow u. A. Wlassow, Phys. ZS. d. Sowjetunion **10**, 378, 1936; P. Schulz, Phys. ZS. **39**, 412, 1938. — [3]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **108**, 654, 1938; **110**, 223, 1938; P. Schulz, ZS. f. techn. Phys. **19**, 585, 1938; Phys. ZS. **39**, 899, 1938.

Für die Wärmeleitung durch Strahlungsdiffusion wollen wir eine Abschätzung geben, welche zum mindesten für die beiden Resonanzlinien richtig sein dürfte. Wir gehen wieder von Gleichung (6) aus und führen einen Diffusionskoeffizienten für die Strahlung ein, indem wir an Stelle der freien Flugdauer der Atome die mittlere Verweilzeit der Strahlungsquanten verwenden. Die freie Ausbreitung des Lichtes kann man in Dimensionen der freien Weglänge als praktisch zeitlos ansehen. Die mittlere Fluggeschwindigkeit $\bar{v}$ ist also λ/τ, wobei λ die freie Weglänge des Lichtquants, τ die Verweilzeit ist. Die freie Weglänge setzen wir gleich $1/N\,q$, wobei q der Wirkungsquerschnitt für die Absorption eines Lichtquants darstellt. Aus der Dispersionstheorie ist bekannt, daß ein gebundenes Elektron aus einer einfallenden Strahlung ebensoviel herausabsorbiert, wie ein schwarzes Scheibchen der Fläche $\pi\,\frac{c^2}{\nu^2}$, wobei ν die Eigenfrequenz des Elektrons ist. Sinngemäß ist dieser Ausdruck mit der Oszillatorenstärke f zu multiplizieren. In unserem Falle ist infolge der Linienverbreiterung der Querschnitt für die Absorption eines Lichtquants bestimmter Frequenz kleiner, und zwar größenordnungsmäßig um das Verhältnis γ/Γ, wobei γ die natürliche, Γ die tatsächlich vorliegende Breite der Linie ist.

Wir erhalten also für den Absorptionsquerschnitt der Linie 1848 Å mit $f_{1848} = 1{,}3$:

$$q_{1848} = \pi\,\frac{c^2}{\nu^2}\,\frac{\gamma}{\Gamma}\cdot f = 1{,}2\cdot 10^{-10}\cdot\frac{\gamma}{\Gamma}\,. \tag{9}$$

In unseren Entladungen ist $\frac{\gamma}{\Gamma}\sim 10^{-3}-10^{-4}$ [1]), d. h.

$$q_{1848}\sim 10^{-13}-10^{-14}\ \mathrm{cm}^2.$$

Der Wärmeleitungskoeffizient für Strahlungsdiffusion ist also nach Gleichung (6):

$$\sigma_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{\varepsilon}{k\,T}\right)^2 k\,\frac{1}{3}\,\frac{\lambda^2}{\tau}\,N\,A_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{k\,T}\right)^2 k\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{N\cdot q_{\mathrm{opt}}^2}\cdot\frac{1}{\tau}\,A_\varepsilon. \tag{10}$$

Dieses vergleichen wir mit Gleichung (7) und bilden den Quotienten:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{Atom}}}{\sigma_{\mathrm{Strahlung}}} = \frac{N\cdot q_{\mathrm{opt}}^2\cdot\tau\cdot\bar{v}}{q_{\mathrm{Atom}}}\,. \tag{11}$$

Wir erhalten hieraus für die bei uns vorliegenden Bedingungen für den Quotienten in Gleichung (11) größenordnungsmäßig 1. Wenn wir jetzt die entsprechende Abschätzung für die Linie 2537 Å ausführen, so ist zu

[1]) R. Rompe u. P. Schulz, l. c.

berücksichtigen, daß für diese der f-Wert $^1/_{40}$ von dem der Linie 1848 Å beträgt. q_{opt} ist aber nach Gleichung (9) proportional f, $\tau \sim 1/f$, q_{Atom} ist ebenfalls proportional f, so daß die Gleichung (11) unabhängig von der f-Zahl wird und also auch für die Linie 2537 gilt.

Für höhere Linien ist diese Abschätzung nicht anwendbar. Die Strahlung der höheren Linien ist jedoch wenig reabsorbiert, so daß sie außerhalb dieser Überlegung bleiben kann.

Wir stellen also fest, daß auch die Wärmeleitung durch Strahlungsdiffusion keinen Einfluß auf die Leistungsbilanz der Hg-Entladung hat.

Der Wärmeleitungskoeffizient für die Ionisation ist kürzlich explizite berechnet worden[1]), er ist:

$$\sigma(T) = \frac{k^{1/2}\, p\, \varepsilon\,(5/2 + \varepsilon/k\,T)}{3\pi^{3/2}\, m^{1/2}\, d^2\,(p+S)^{3/2}} \sqrt{\frac{S}{T}}, \tag{9}$$

wobei

$$S = C\,e^{-\frac{\varepsilon}{k\,T}}\,T^{5/2} = p\,\frac{x^2}{1-x^2}$$

(x Ionisationsgrad) ist. In Formel (9) bedeutet C die Konstante der Saha-Formel; $\varepsilon = e\,v_i$ die Ionisierungsenergie; p den Druck; m die Elektronenmasse.

Für Quecksilber liegt eine numerische Ausrechnung vor, allerdings mit $\varepsilon = 10{,}4$ e-Volt. Wie wir wissen, beträgt in Hg-Hochdruckentladungen die Ionisierungsspannung nur etwa 9,2 Volt[2]). Die Werte von $\sigma(T)$ sind also etwa um den Faktor 3 zu vergrößern. Es ergibt sich, daß die Ionisationswärmeleitung für 1 at Druck bei etwa 8000^0 abs. etwa sechs- bis zehnmal größer ist als die klassische, und bei 10 at Druck immer noch gut von der Größenordnung der klassischen Wärmeleitung ist. Es liegt nun in der Art der Berechnung des Wärmeleitungskoeffizienten, und zwar in der Annahme des lokalen termischen Gleichgewichts begründet, daß die Gleichung (9) wohl als untere Grenze des Wärmeleitungskoeffizienten angesprochen werden kann. Eine exakte Durchrechnung erscheint durchaus möglich, liegt aber bis heute noch nicht vor. In unserer Arbeit wollen wir lediglich feststellen, daß man mit dieser Art Wärmeleitung zu rechnen hat, und zwar bei kleinen Drucken mehr als bei höheren.

---

1) K. H. Riewe u. R. Rompe, ZS. f. Phys. **105**, 478, 1937. — 2) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **110**, 223, 1938; A. Unsöld, Ann. d. Phys. **33**, 607, 1938; R. Rompe, P. Schulz u. W. Thouret, ZS. f. Phys. **112**, 369, 1939.

In unserer Gleichung (1) haben wir also für die gesamte Wärmeableitung ein Glied einzuführen, welches lautet:

$$2\pi\, R_0\, \overline{\Delta\, T}_0\, (\sigma + \mathrm{const}\, p^{-1/2}\, e^{-\frac{e\, V_i}{2\, k\, T}}), \tag{10}$$

wobei σ die klassische Wärmeleitfähigkeit darstellt und von uns als Konstante angesehen wird (siehe oben).

Für den Fall, daß wir es mit einer, wie wir in Arbeit (I) gesagt haben, konvektionsstabilisierten Entladung zu tun haben, ist $R_0 = \mathrm{const}$ und dementsprechend auch $R_0 \overline{\Delta\, T}_0\, \sigma = \mathrm{const} = B$. Die Leistungsbilanz nimmt also folgende Form an:

$$L = \pi\, R_0^2\, F\,(T) + \mathrm{const}\, 2\pi\, R_0\, \overline{\Delta\, T}_0\, p^{-1/2}\, e^{-\frac{e\, V_i}{2\, k\, T}} + B, \tag{11}$$

da wir $R_0 \overline{\Delta\, T}_0$ als konstant ansehen können, lassen sich die beiden ersten Glieder in ähnlicher Weise zusammenfassen, wie die Emission der einzelnen Linien in $F\,(T)$ zusammengefaßt wird zu:

$$F\,(T) = \mathrm{const}\, e^{-\frac{e\, \overline{V}_A}{k\, T}}, \tag{12}$$

wobei $\overline{V}_A$ die mittlere Anregungsspannung ist.

Wir erhalten also eine Aufteilung der Gesamtleistung in einen konstanten Anteil B und einen exponentiell mit T anwachsenden, der jedoch nicht mehr ausschließlich auf Strahlung zurückgeht.

Wir werden jetzt untersuchen, in welcher Weise sich die Gleichungen für den Fall der stromstärkeabhängigen Kanalbreite verändern. Wir müssen auch für diesen Fall die Konstanz der klassischen Wärmeleitung beibehalten; dies ist angesichts des von Elenbaas [1]) aus Gesamtstrahlungsmessungen in dem uns jetzt interessierenden Leistungsbereich von 15 bis 80 Watt/cm festgestellten konstanten Wärmeleitungsanteil erforderlich und wird auch durch die von Kern und Schulz [2]) gefundene Abhängigkeit der Ausstrahlung von der Leistung bestätigt.

Der Anteil der Ionisationswärmeleitung darf hingegen nicht als konstant angesehen werden. Wir wollen diesen durch die Größe:

$$2\, \pi R_0\, s \overline{\Delta\, T}_s$$

bezeichnen.

---

[1]) W. Elenbaas, Physica **4**, 413, 1937. — [2]) J. Kern u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **111**, 454, 1939; ZS. f. techn. Phys. **20**, 148, 1939.

Es ist jetzt zu begründen, ob diese Festsetzung keinen Widerspruch bedeutet zu der Annahme

$$A = 2\pi R_0 \sigma \overline{\Delta T_0} = \text{const},$$

d. h. da $\sigma = \text{const}$, $R_0 \overline{\Delta T_0} = \text{const}$.

Hierzu kann man folgendes feststellen. Wir haben, wie in (I) gezeigt wurde, den Ausdruck

$$2\pi R_0 \sigma \overline{\Delta T_\sigma}$$

gewonnen durch Integration des Wärmeleitungsgliedes der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung unter Annahme eines bekannten Temperaturverlaufes. Nach diesem Vorgehen sollte man erwarten, daß bei Vorhandensein der Ionisationswärmeleitung der gesamte Wärmeleitungsanteil sich ergibt zu:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\{\sigma + s\}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r, \tag{13}$$

wobei die Integrationsgrenzen durch das Verhalten der Entladung in der Achse und an der Wand gegeben werden.

Gegen diese Art der Berücksichtigung der Ionisationswärmeleitung spricht, daß erstens nicht gesagt ist, daß ein Wärmetransport mit einem exponentiell, d. h. außerordentlich stark von der Temperatur abhängenden Wärmeleitkoeffizienten, sich durch einen Diffusionsansatz mit der ersten Ableitung der Temperatur nach der Koordinate darstellen läßt, wenn der Temperaturabfall so steil ist, wie in den vorliegenden Entladungen.

Sodann ist offensichtlich die untere Integrationsgrenze für die Erfassung des Ionenanteiles durch Mittelwerte sicher an einen Ort zu verlegen, wo noch Wärmeleitung dieser Art vorhanden ist, d. h. sicher nicht an die Wand.

Unseres Erachtens erscheint es deshalb als durchaus gerechtfertigt, den Ionisationsanteil durch einen anderen mittleren Temperaturgradienten $\overline{\Delta T_s}$ zu kennzeichnen, wobei das entsprechende Glied, durch welches die Berücksichtigung in der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung erfolgen soll, offen bleiben kann.

Wir können nunmehr ohne weiteres

$$2\pi R_0 \sigma \overline{\Delta T_\sigma}$$

als die experimentell ermittelte Konstante B ansehen, und ohne Widerspruch

$$2\pi R_0 s \overline{\Delta T_s}$$

als den mit der Leistung veränderlichen Anteil der Wärmeleitung. Die Ergebnisse der Arbeit I sind dann folgendermaßen zu deuten:

R_0 ergab sich als proportional $J^{1/2}$.

$\overline{\Delta T_0}$ muß jetzt als $s\,\overline{\Delta T_s}$ angesprochen werden, so daß also der Wärmeleitungsanteil der Stromstärke proportional wird. Für die gesamte Leistungsbilanz unseres Falles II erhalten wir somit:

$$L = \mathfrak{S} + aJ + B \tag{14}$$

oder, wenn wir näherungsweise $G =$ const setzen:

$$\mathfrak{S} = L - aL - B. \tag{15}$$

Das ist in der Tat genau die Abhängigkeit der Gesamtstrahlung von der Leistung, wie sie von Elenbaas (l. c.) in zahlreichen Messungen im Bereich von 15 bis 80 Watt/cm sichergestellt wurde.

Elenbaas gibt an:

$$\mathfrak{S} = f\,(L - A), \tag{16}$$

wobei für Hg $f = 0{,}72$ und $A = 10$ Watt/cm ist. Schreiben wir diese Gleichung um in

$$\mathfrak{S} = L - (1 - f)\,L - f A, \tag{17}$$

so haben wir, wenn wir $a = (1 - f)$ und $f A = B$ setzen, die aus unserem Modell folgende Abhängigkeit der Ausstrahlung von der Leistung.

Wir glauben daher, daß die Berücksichtigung der Ionisationswärmeleitung in den untersuchten relativ niedrigen Druckbereich geeignet ist, die offensichtlich durch die Feststellung der Konstanz von A und die Abhängigkeit von R_0 von J entstehenden Deutungsschwierigkeiten zu beseitigen.

Andererseits dürfte damit ein sehr schwerwiegender Hinweis auf das Vorkommen derartiger Wärmeleitungsvorgänge in Hochdruckentladungen gegeben sein, die völlig analog sind der für Niederdruckentladungen wichtigen Trägerdiffusion.
