Mh. Math. 94, 33—44 (1982)

Monatshefte für Mathematik

Durchschnitte von Pjateckij–Shapiro-Folgen

Von

Dieter Leitmann, Clausthal-Zellerfeld

(Eingegangen am 19. Oktober 1981)

Abstract. Intersections of Pjateckij–Shapiro-Sequences. The distribution of integers and prime numbers in sequences of the form $F_{c_1} \cap F_{c_2}$ is investigated. Here $F_c = \{[n^c] : n \in \mathbb{N}\}$ with $c > 1$.

1. Einleitung

In der grundlegenden Arbeit [5] untersuchte Pjateckij–Shapiro die Primzahlverteilung in der Folge $F_c = \{[n^c] : n \in \mathbb{N}\}$[1] $(c > 1)$ — die wir als Pjateckij–Shapiro-Folge bezeichnen — und bewies

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in F_c}} 1 \sim \frac{x^\gamma}{\log x} \tag{1}$$

mit $\gamma = 1/c$ für $1 < c < 12/11$. Da einerseits $\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in F_c}} 1 = x^\gamma + O(1)$ und

andererseits die Wahrscheinlichkeit, daß eine natürliche Zahl $\leqslant x$ auch prim ist, nach dem Primzahlsatz asymptotisch $1/\log x$ ist, kann (1) leicht heuristisch begründet werden. Sehr viel schwieriger ist dies allerdings, wenn man Durchschnitte von Pjateckij–Shapiro-Folgen betrachtet. Es ist durchaus nicht trivial, zu sehen, daß $F_{c_1} \cap F_{c_2}$ für $c_1 > c_2 > 1$ unendlich viele Elemente enthält. Diese Arbeit ist nun der Untersuchung solcher Durchschnitte gewidmet. Wir studieren die Verteilung der natürlichen und primen Zahlen in solchen Durchschnitten. Unser Ziel ist der Beweis der folgenden Sätze.

[1] $[t]$ bezeichnet für reelles t die größte ganze Zahl, die $\leqslant t$ ist.

0026—9255/82/0094/0033/$ 02.40

Satz 1. *Für* $1 < c_1 < c_2 < 2$, $\gamma_i = 1/c_i$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 11/6$ *gilt*

$$S_{c_1, c_2}(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} 1 = \tag{2}$$
$$= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} + O\left(x^{(7/9)(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) + 5/27} \log^{8/9} x\right).$$

Satz 2. *Für* $1 < c_1 < c_2 < 2$, $\gamma_i = 1/c_i$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 55/28$ *gilt*

$$\psi_{c_1, c_2}(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} \Lambda(n)^2 = \tag{3}$$
$$= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} + O\left(x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} e^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} 1 = \gamma_1 \gamma_2 \int_2^x \frac{t^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2}}{\log t} dt + O\left(x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} e^{-c\sqrt{\log x}}\right), \tag{4}$$

mit einer absoluten Konstanten $c > 0$.

Bemerkung. Durch partielle Integration sieht man leicht, daß

$$\gamma_1 \gamma_2 \int_2^x \frac{t^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2}}{\log t} dt \sim \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \frac{x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}{\log x} \text{ ist.}$$

Herrn Professor LUCHT danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

2. Hilfssätze

Lemma 1.

(a) $m = [n^c] \Rightarrow \{m^\gamma\}$[3] $= 0 \vee 1 - \gamma(m-1)^{\gamma - 1} < \{m^\gamma\} < 1$.

(b) $\{n^\gamma\} = 0 \vee 1 - \gamma(m+1)^{\gamma - 1} < \{m^\gamma\} < 1 \Rightarrow m = [n^c]$.

Dies ist Lemma 1 in PJATECKIJ–SHAPIRO [5].

Lemma 2. *Zu jedem* $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta, L \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < 4L < 1$ *und* $2L < \beta - \alpha < 1 - 2L$ *gibt es eine Funktion* $\chi: \mathbb{R} \to [0, 1]$ *mit*

(a) $\chi(t+1) = \chi(t)$,

---

[2] $\Lambda(n)$ bezeichnet die von Mangoldt-Funktion.

[3] $\{t\} = t - [t]$ für $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\chi(t) = 1$ *für* $\alpha + L \leqslant t \leqslant \beta - L$,

(c) $\chi(t) = 0$ *für* $\beta + L \leqslant t \leqslant 1 + \alpha - L$

und der Fourier-Entwicklung

(d) $\chi(t) = \beta - \alpha + \sum_{|h|=1}^{\infty} a_h e(ht)$[4], *wobei*

(e) $|a_h| \leqslant 2 \min(\beta - \alpha, (1/\pi |h|)(r/2\pi |h| L)^r)$.

Dies ist Lemma 12 in Chapter I aus VINOGRADOV [8].

Lemma 3. *Es sei $b \geqslant a + 1$, f auf (a, b) reell und zweimal stetig differenzierbar mit $0 < \lambda_2 \leqslant |f''(x)| \leqslant h\lambda_2$. Dann ist*

$$\sum_{a < n \leqslant b} e(f(n)) \ll h(b - a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

Dies ist Theorem 5.9 in TITCHMARSH [6].

Lemma 4. *Es sei $b \geqslant a + 1$, f auf (a, b) reell und dreimal stetig differenzierbar mit $0 < \lambda_3 \leqslant |f'''(x)| \leqslant h\lambda_3$. Dann ist*

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(f(n)) \ll h^{1/2}(b - a)\lambda_3^{1/6} + (b - a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}.$$

Dies ist Theorem 5.11 in TITCHMARSH [6].

Lemma 5. *Es sei $1 > \gamma_1 > \gamma_2 > 0$, ξ, η reell mit $\xi\eta \neq 0$ und $3 \leqslant a < b \leqslant (1 + 1/\log a)a$. Dann gilt mit $V = |\xi| a^{\gamma_1} + |\eta| a^{\gamma_2}$*

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(\xi n^{\gamma_1} + \eta n^{\gamma_2}) \ll \\ \ll_{\gamma_1,\gamma_2} \log^{1/2} a (V^{1/2} + a V^{-1/2} + a^{1/2} V^{1/6} + a V^{-1/6}). \tag{5}$$

Beweis. Setzen wir $f(x) = \xi x^{\gamma_1} + \eta x^{\gamma_2}$, so ist für $a \leqslant x \leqslant b$

$$|f''(x)| \leqslant \gamma_1(1 - \gamma_1)|\xi| a^{\gamma_1 - 2} + \gamma_2(1 - \gamma_2)|\eta| a^{\gamma_2 - 2} \text{ und}$$

$$|f'''(x)| \leqslant \gamma_1(1 - \gamma_1)(2 - \gamma_1)|\xi| a^{\gamma_1 - 3} + \gamma_2(1 - \gamma_2)(2 - \gamma_2)|\eta| a^{\gamma_2 - 3}.$$

Um Lemma 3 bzw. Lemma 4 anwenden zu können, unterscheiden wir drei Fälle.

[4] $e(x) = \exp(2\pi i x)$.

Fall 1. $\xi\eta > 0$. Bezeichnet S die abzuschätzende Summe, so liefert nun Lemma 3 mit $\lambda_2 = \gamma_1(1-\gamma_1)|\xi|a^{\gamma_1-2} + \gamma_2(1-\gamma_2)|\eta|a^{\gamma_2-2}$ und $h = \max(2^{2-\gamma_1}, 2^{2-\gamma_2}) = 2^{2-\gamma_2}$ die Abschätzung

$$S \ll a(|\xi|a^{\gamma_1-2} + |\eta|a^{\gamma_2-2})^{1/2} + (|\xi|a^{\gamma_1-2} + |\eta|a^{\gamma_2-2})^{-1/2}. \tag{6}$$

Ist $\xi\eta < 0$, so können wir wegen $|S| = |\tilde{S}|$ o. B. d. A. von $\xi > 0$ und $\eta < 0$ ausgehen. Es gelte nun der

Fall 2. $\xi > 0$, $\eta < 0$ und

$$a^{\gamma_1-\gamma_2} \geqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\frac{-\eta}{\xi}\,\frac{1+1/\log a}{1-1/\log a}. \tag{7}$$

Die Ungleichung

$$f''(x) \leqslant \log^{-1} a\,(-\xi\gamma_1(1-\gamma_1)x^{\gamma_1-2} + \eta\gamma_2(1-\gamma_2)x^{\gamma_2-2})$$

ist offenbar gleichwertig mit

$x^{\gamma_1-\gamma_2} \geqslant \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\dfrac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\dfrac{-\eta}{\xi}\,\dfrac{1+1/\log a}{1-1/\log a}$, was wegen $x^{\gamma_1-\gamma_2} \geqslant a^{\gamma_1-\gamma_2}$ und (7) aber erfüllt ist. Somit ist

$$|f''(x)| \geqslant \frac{2^{\gamma_2-2}}{\log a}(\gamma_1(1-\gamma_1)\xi a^{\gamma_1-2} - \gamma_2(1-\gamma_2)\eta a^{\gamma_2-2}) = \lambda_2.$$

Nun erhält man aus Lemma 3 (mit $h = 2^{2-\gamma_2}\log a$) die Abschätzung

$$S \ll (\log a)^{1/2} a(|\xi|a^{\gamma_1-2} + |\eta|a^{\gamma_2-2})^{1/2} + \log^{1/2} a\,(|\xi|a^{\gamma_1-2} + |\eta|a^{\gamma_2-2})^{-1/2}. \tag{8}$$

Fall 3. $\xi > 0$, $\eta < 0$ und

$$a^{\gamma_1-\gamma_2} < \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\frac{-\eta}{\xi}\,\frac{1+1/\log a}{1-1/\log a}. \tag{9}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Ungleichung

$$f'''(x) \leqslant \log^{-1} a\,(-\xi\gamma_1(1-\gamma_1)(2-\gamma_1)x^{\gamma_1-3} + \eta\gamma_2(1-\gamma_2)(2-\gamma_2)x^{\gamma_2-3})$$

gleichwertig ist mit

$$x^{\gamma_1-\gamma_2} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\frac{2-\gamma_2}{2-\gamma_1}\,\frac{-\eta}{\xi}\,\frac{1-1/\log a}{1+1/\log a}.$$

Dies läßt sich wegen $x \leqslant b$, $\gamma_1 > \gamma_2$ und (9) leicht verifizieren:

$$x^{\gamma_1-\gamma_2} \leqslant b^{\gamma_1-\gamma_2} \leqslant (1+1/\log a)\, a^{\gamma_1-\gamma_2} < \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\frac{-\eta}{\xi}\,\frac{(1+1/\log a)^2}{1-1/\log a} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}\,\frac{2-\gamma_2}{2-\gamma_1}\,\frac{-\eta}{\xi}\,\frac{1-1/\log a}{1+1/\log a}.$$

Dabei ist die letzte Ungleichung in dieser Kette gleichwertig mit $\dfrac{(1+1/\log a)^3}{(1-1/\log a)^2} \leqslant \dfrac{2-\gamma_2}{2-\gamma_1}$, was wegen $\dfrac{2-\gamma_2}{2-\gamma_1} > 1$ für $a \geqslant a_0 = a_0(\gamma_1, \gamma_2)$ erfüllt ist. Also gilt

$$|f'''(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^{\gamma_2-3}}{\log a}\left(\gamma_1(1-\gamma_1)(2-\gamma_1)\,\xi\, a^{\gamma_1-3} - \gamma_2(1-\gamma_2)(2-\gamma_2)\,\eta\, a^{\gamma_2-3}\right) = \lambda_3.$$

Lemma 4 liefert nun (mit $h = 2^{3-\gamma_2}\log a$)

$$\begin{aligned} S \ll\; & (\log a)^{1/3}\, a\, (|\xi|\, a^{\gamma_1-3} + |\eta|\, a^{\gamma_2-3})^{1/6} + \\ & + (\log a)^{1/6}\, a^{1/2}\, (|\xi|\, a^{\gamma_1-3} + |\eta|\, a^{\gamma_2-3})^{-1/6}. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (6), (8) und (10) folgt nun (5).

Bemerkung. Auch im folgenden werden die O-, $\ll$-Konstanten im allgemeinen von γ_1 und γ_2 abhängen.

Lemma 6. *Für* $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ *und* $q \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} z_k\Big|^2 \leqslant \frac{m+q-1}{q} \sum_{h=-q}^{q} \left(1 - \frac{|h|}{q}\right) \sum_{1 \leqslant k,\, k+h \leqslant m} z_k \bar{z}_{k+h}.$$

Dies ist Lemma 3 aus Chapter IV in Cassels [1].

Durch die Vaughansche Identität werden Exponentialsummen über Primzahlpotenzen auf zweidimensionale Exponentialsummen zurückgeführt. Der elegante und völlig elementar geführte Beweis kann bei Vaughan [7] nachgelesen werden. Durch das nun folgende Vaughansche Lemma werden die sonst auftretenden kombinatorischen Argumente vermieden.

Lemma 7. *Es sei* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *und* $1 < u, v \leqslant N$. *Dann ist*

$$\sum_{v < n \leqslant N} \Lambda(n) f(n) = \int_1^N T(t)\,(dt/t) - S_2 - S_3 \textit{ mit}$$

$$T(t) = \sum_{d \leqslant \min(u, N/t)} \mu(d) \sum_{t < n \leqslant N/d} f(dn),$$

$$S_2 = \sum_{d \leqslant u} \mu(d) \sum_{n \leqslant v} \Lambda(n) \sum_{r \leqslant N/dn} f(dnr),$$

$$S_3 = \sum_{m > u} d_m \sum_{v < n \leqslant N/m} \Lambda(n) f(mn),$$

wobei $d_m = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \leqslant u}} \mu(d)$ und somit $|d_m| \leqslant \tau(m)$ ist.

3. Rückführung auf Exponentialsummen

Für $0 \leqslant \varrho(n) \ll \log n$, $1 < c_1 < c_2 < 2$, hinreichend großes A und $B \leqslant 2A$ betrachten wir $\Sigma = \sum_{\substack{A < n \leqslant B \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} \varrho(n)$. Nach Lemma 1 (b) ist dann

$$\Sigma \geqslant \sum_{A < n \leqslant B}{}' \varrho(n) \geqslant \sum_{A < n \leqslant B}{}'' \varrho(n) - O(\log B),$$

wobei der Strich besagt, daß über alle n mit

$$(\{n^{\gamma_1}\} = 0 \vee 1 - \gamma_1 (n+1)^{\gamma_1 - 1} < \{n^{\gamma_1}\}) \wedge$$
$$\wedge (\{n^{\gamma_2}\} = 0 \vee 1 - \gamma_2 (n+1)^{\gamma_2 - 1} < \{n^{\gamma_2}\})$$

summiert wird. Der Doppelstrich besagt, daß über alle n mit

$$(\{n^{\gamma_1}\} = 0 \vee 1 - \gamma_1 B^{\gamma_1 - 1} < \{n^{\gamma_1}\}) \wedge (\{n^{\gamma_2}\} = 0 \vee 1 - \gamma_2 B^{\gamma_2 - 1} < \{n^{\gamma_2}\})$$

summiert wird. Es sei $16 \leqslant M \ll A$. Setzen wir nun

$$r = [\log A], \quad K_i = M r \gamma_i A^{1-\gamma_i}, \quad L_i = 2r/K_i = (2/M) \gamma_i A^{\gamma_i - 1}, \tag{11}$$

$\alpha_i = -\gamma_i B^{\gamma_i - 1} + L_i$ und $\beta_i = -L_i$, so ist

$$\beta_i - \alpha_i = \gamma_i B^{\gamma_i - 1} - 2L_i = \gamma_i A^{\gamma_i - 1} - 2L_i + O((B-A) A^{\gamma_i - 2}). \tag{12}$$

Wegen $\gamma_i B^{\gamma_i - 1} \leqslant \gamma_i < 1$ und $\gamma_i B^{\gamma_i - 1} \geqslant \gamma_i (A^{\gamma_i - 1}/2) \geqslant 4 L_i$ sind die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt. Die dort angegebenen Funktionen $\chi_i(t)$ verschwinden jedenfalls für $0 \leqslant t \leqslant 1 + \alpha_i - L_i = 1 - \gamma_i B^{\gamma_i - 1}$. Wegen $0 \leqslant \chi_i(t) \leqslant 1$ haben wir

$$\Sigma \geqslant \sum_{A < n \leqslant B} \varrho(n) \chi_1(n) \chi_2(n) - O(\log A), \text{ wobei}$$

$$\chi_i(t) = \beta_i - \alpha_i + \sum_{|h|=1}^{\infty} a_h^{(i)} e(ht) =$$
$$= \beta_i - \alpha_i + \sum_{1 \leqslant |h| \leqslant K_i} a_h^{(i)} e(ht) + O((4\pi)^{-r}/r),$$

denn aus Lemma 2 (c) folgt

$$\sum_{h>K_i+1} |a_h| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{K_i}^{\infty} \left(\frac{r}{2\pi L_i}\right)^r \frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{2}{\pi r} \left(\frac{r}{2\pi L_i K_i}\right)^r = \frac{2}{\pi r (4\pi)^r}.$$

Aus (12) folgt sofort $\beta_i - \alpha_i \ll A^{\gamma_i - 1}$. Mit $(4\pi)^{-r} \ll A^{-2}$ ergibt sich nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Sigma \geqslant\ & (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) + \\ & + (\beta_1 - \alpha_1) \sum_{1\leqslant |k| \leqslant K_2} a_k^{(2)} \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(k n^{\gamma_2}) + \\ & + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{1\leqslant |h| \leqslant K_1} a_h^{(1)} \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(h n^{\gamma_1}) + \\ & + \sum_{1\leqslant |h| \leqslant K_1} a_h^{(1)} \sum_{1\leqslant |k| \leqslant K_2} a_k^{(2)} \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(h n^{\gamma_1} + k n^{\gamma_2}) + \\ & + O(M r (A^{-2}/r) A \log(2A) + \log A). \end{aligned}$$

Hierbei wurde $|a_h^{(i)}| \leqslant 2(\beta_i - \alpha_i) \ll A^{\gamma_i - 1}$ ausgenutzt.

Die Abschätzung von Σ nach oben verläuft völlig analog unter Verwendung von Lemma 1 (a) und Lemma 2 mit $\alpha_i = -\gamma_i A^{\gamma_i - 1} - L_i$ und $\beta_i = L_i$. (Vergleiche auch den Beweis von Lemma 3.3 in [2].) Zusammenfassend ergibt sich mit (12)

$$\begin{aligned} \Sigma = \gamma_1 \gamma_2 A^{\gamma_1+\gamma_2-2} (1 + O(1/M + (B-A)/A)) \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) + \\ + O(F_1 + F_2 + D + \log A) \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$F_1 = A^{\gamma_1+\gamma_2-2} \sum_{h\leqslant K_1} \Big| \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(h n^{\gamma_1}) \Big|, \tag{14}$$

$$F_2 = A^{\gamma_1+\gamma_2-2} \sum_{k\leqslant K_2} \Big| \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(k n^{\gamma_2}) \Big|, \tag{15}$$

$$D = A^{\gamma_1+\gamma_2-2} \sum_{1\leqslant |h| \leqslant K_1} \sum_{1\leqslant |k| \leqslant K_2} \Big| \sum_{A<n\leqslant B} \varrho(n) e(h n^{\gamma_1} + k n^{\gamma_2}) \Big|. \tag{16}$$

4. Beweis von Satz 1

Wir setzen in (13) $\varrho(n) = 1$ und schätzen F_1, F_2 mit Hilfe von Lemma 3 ab.

$$F_i \ll A^{\gamma_1+\gamma_2-2} \sum_{h \leqslant K_i} (h^{1/2} A^{\gamma_i/2} + h^{-1/2} A^{1-\gamma_i/2})$$

$$\ll A^{\gamma_1+\gamma_2-2} (K_i^{3/2} A^{\gamma_i/2} + K_i^{1/2} A^{1-\gamma_i/2}) \ll (M \log A)^{3/2} A^{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_i-1/2}$$

$$\ll (M \log A)^{3/2} A^{\gamma_1 - 1/2}.$$

Zur Abschätzung von D spalten wir das Intervall $(A, B]$ in $O(\log A)$ Intervalle der Form $(a, b]$ mit $A \leqslant a < b \leqslant (1 + 1/\log a)\, a \leqslant 2A$ auf. Lemma 5 liefert nun mit $V = |h|\, A^{\gamma_1} + |k|\, A^{\gamma_2}$

$$\sum_{A < n \leqslant B} e(h n^{\gamma_1} + k n^{\gamma_2}) \ll \log^{3/2} A\, (V^{1/2} + A V^{-1/2} + A^{-1/2} V^{1/6} + A V^{-1/6}).$$

Nach (11) ist $V \ll A M \log A$ und somit

$$D \ll A^{\gamma_1+\gamma_2-2} M^{1/2} \log^2 A \sum_{h \leqslant K_1} \sum_{k \leqslant K_2} (A^{2/3} + A^{4/3} (h A^{\gamma_1} + k A^{\gamma_2})^{-1/2}) \ll$$

$$\ll A^{2/3} M^{5/2} \log^4 A + A^{5/6} M^2 \log^{7/2} A \ll A^{5/6} M^{5/2} \log^4 A.$$

Wegen $\gamma_1 > 1$ schließt man nun mit (13)

$$\sum_{\substack{A < n \leqslant B \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} 1 = \gamma_1 \gamma_2 A^{\gamma_1+\gamma_2-2} (1 + O(1/M + (B-A)/A))(B-A) + \\ + O(A^{5/6} M^{5/2} \log^4 A). \tag{17}$$

Zum Beweis von (2) setzen wir

$$x_\nu = x/(1 + 1/M)^\nu \, (\nu = 0, 1, \ldots, m+1),$$

wobei m so gewählt wird, daß $x_{m+1} < z \leqslant x_m$ ist. Hierbei ist $3 \leqslant z \leqslant x$ ein noch festzulegender Parameter. Offenbar ist

$$m = \left[\frac{\log(x/z)}{\log(1 + 1/M)}\right] \leqslant 2M \log(x/z).$$

Mit

$$\Sigma_\nu = \sum_{\substack{x_{\nu+1} < n \leqslant x_\nu \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} 1 \quad \text{ist} \quad S_{c_1, c_2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Sigma_\nu + O(z).$$

Wegen $x_\nu - x_{\nu+1} = (1/M)\, x_{\nu+1}$ und $x_\nu \leqslant x$ folgt aus (17) schließlich

$$\Sigma_\nu = \gamma_1 \gamma_2 x_{\nu+1}^{\gamma_1+\gamma_2-2} (1 + O(1/M)) \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} dt + O(x^{5/6} M^{5/2} \log^4 x) =$$

$$= \gamma_1 \gamma_2 (1 + O(1/M)) \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} t^{\gamma_1+\gamma_2-2}\, dt +$$

$$+ O\left(x_{\nu+1}^{\gamma_1+\gamma_2-3}\,(x_{\nu+1}^2/M) + x^{5/6} M^{5/2} \log^4 x\right)$$

und damit

$$S_{c_1,c_2}(x) = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}\,(1+O(1/M))\,(x^{\gamma_1+\gamma_2-1} - x_n^{\gamma_1+\gamma_2-1}) + O(z) +$$
$$+ O\left(x^{\gamma_1+\gamma_2-1}\log(x/z)/M + x^{5/6} M^{7/2} \log^4 x \log(x/z)\right).$$

Wegen $x_n = (1+1/M)\,x_{n+1} \leqslant 2z$ folgt mit der Wahl $z = x^{1/2}$ und $M = x^{(2/9)(\gamma_1+\gamma_2-11/6)}/\log^{8/9} x$ die Gleichung (2).

5. Beweis von Satz 2

Zum Beweis von (3) verwenden wir (13) mit $\varrho(n) = \Lambda(n)$. Zur Abschätzung von F_i benutzen wir die bekannte Ungleichung von Kolesnik (Satz 2 in [3]).

$$F_i \ll A^{\gamma_1+\gamma_2-2} \sum_{h \leqslant K_i} (A^{1-\gamma_i}/h + 1)\, A^{9/10} M \log^{7,5} A \ll$$
$$\ll A^{\gamma_1+\gamma_2-1/10-\gamma_i} M^2 \log^{8,5} A \ll A^{\gamma_1-1/10} M^2 \log^{8,5} A\,.$$

Zur Abschätzung von D verwenden wir Lemma 7 mit $N = B$,

$$f(n) = \begin{cases} e(h\,n^{\gamma_1} + k\,n^{\gamma_2}) & \text{für } A < n \leqslant B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $u = A^{10\varepsilon}$, $v = A^{2\varepsilon}$ mit $\varepsilon = 1/28$. S_2 läßt sich in $O(\log^3 A)$ Summen der Gestalt

$$\Sigma_2 = \sum_{Y<m\leqslant Y'} a_m \sum_{\substack{X<n\leqslant X' \\ A<mn\leqslant B}} e(h\,(m\,n)^{\gamma_1} + k\,(m\,n)^{\gamma_2}) \quad \text{mit}$$

$$a_m = \sum_{\substack{d \geqslant u \\ k \leqslant v \\ dk=m}} \mu(d)\,\Lambda(k) \ll \sum_{k\mid m} \Lambda(k) = \log m,\ X' \leqslant (1+1/\log X)\,X,$$

$Y' \leqslant 2\,Y \leqslant 2\,u\,v = 2\,A^{12\varepsilon}$ und $A/4 \leqslant X\,Y \leqslant 2\,A$ aufspalten. Auf die innere Summe in Σ_2 wenden wir Lemma 5 an und erhalten

$$\Sigma_2 \ll Y \log^{3/2} A\,\big((h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{1/2} + X\,(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{-1/2} +$$
$$+ X^{1/2}\,(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{1/6} + X\,(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{-1/6}\big) \ll$$
$$\ll M^{1/2} \log^2 A\,(A^{1/2+12\varepsilon} + A^{2/3+6\varepsilon} + A^{4/3}\,(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{-1/2}.$$

Dies liefert zu D den Beitrag $D_2 \ll M^{5/2} \log^7 A \,(A^{1/2+12\varepsilon} + A^{5/6})$. $T(t)$ kann man wie S_2 behandeln und für den entsprechenden Beitrag zu D gilt $D_1 \ll M^{5/2} \log^7 A \,(A^{1/2+10\varepsilon} + A^{5/6})$.

S_3 spalten wir in $O(\log^3 A)$ Summen der Gestalt

$$\Sigma_3 = \sum_{X<n\leqslant X'} d_n \sum_{\substack{Y<m\leqslant Y'\\ A<mn\leqslant B}} \Lambda(m)\, e\left(h\,(n\,m)^{\gamma_1} + k\,(n\,m)^{\gamma_2}\right)$$

mit $X' \leqslant (1 + 1/\log X)\,X,\ Y' \leqslant 2\,Y,\ A/4 \leqslant X\,Y \leqslant 2\,A,\ u \leqslant X \leqslant B/v,$

$$A^{2\varepsilon} = v \leqslant Y \leqslant B/u \leqslant 2\,A^{1-10\varepsilon} \quad \text{und} \quad |d_n| \leqslant \tau(n)$$

auf. Aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und Lemma 6 folgt nun für $Q \leqslant Y$

$$|\Sigma_3|^2 \ll X \log^3 X \sum_{X<n\leqslant X'} \Big| \sum_{\substack{Y<m\leqslant Y'\\ A<mn\leqslant B}} \Lambda(m)\, e\left(h\,(m\,n)^{\gamma_1} + k\,(m\,n)^{\gamma_2}\right)\Big|^2 \ll$$

$$\ll X \log^3 A \sum_{X<n\leqslant X'} \frac{Y}{Q} \sum_{q=-Q}^{Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{Y<m,\, m+q\leqslant Y'\\ A<mn,\,(m+q)n\leqslant B}} g(m,n,q)\, \Lambda(m)\, \Lambda(m+q) \ll$$

$$\ll (A/Q) \log^3 A \,\Big(X\,Y \log Y + \sum_{\substack{q=-Q\\ q\neq 0}}^{Q} \sum_{Y<m,\, m+q\leqslant Y'} \Lambda(m)\, \Lambda(m+q)\, \Big| \sum_{\substack{X<n\leqslant X'\\ A<mn,\,(m+q)n\leqslant B}} g(m,n,q)\Big|\Big),$$

wobei

$$g(m,n,q) = e\left(h\,(m^{\gamma_1} - (m+q)^{\gamma_1})\, n^{\gamma_1} + k\,(m^{\gamma_2} - (m+q)^{\gamma_2})\, n^{\gamma_2}\right).$$

Auf die innere Summe über n wenden wir Lemma 5 an und erhalten wegen $q\,Y^{\gamma_i - 1} \ll m^{\gamma_i} - (m+q)^{\gamma_i} \ll q\,Y^{\gamma_i - 1}$ mit $V = h\,q\,Y^{\gamma_1 - 1} X^{\gamma_1} + k\,q\,Y^{\gamma_2 - 1} X^{\gamma_2}$

$$|\Sigma_3|^2 \ll (A/Q) \log^4 A \,\Big(A + \sum_{q\leqslant Q} Y \log Y \log^{1/2} X \,(V^{1/2} + X\,V^{-1/2} + X^{1/2}\,V^{1/6} + X\,V^{-1/6})\Big) \ll$$

$$\ll \frac{A}{Q} \log^{5,5} A \left(A + Y^{1/2} Q^{3/2} A^{1/2} + \frac{Y^{1/2} Q^{1/2} A}{(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{1/3}} + Y^{1/3} Q^{7/6} A^{2/3} + \frac{Y^{1/6} Q^{5/6} A^{4/3}}{(h\,A^{\gamma_1} + k\,A^{\gamma_2})^{1/2}}\right) M^{1/2} \log^{1/2} A.$$

Setzen wir $Q = A^{2\varepsilon} \leqslant Y \leqslant 2A^{1-10\varepsilon}$, so ergibt sich schließlich

$$|\Sigma_3|^2 \ll M^{1/2} \log^6 A \left(A^{2-2\varepsilon} + A^{2-4\varepsilon} + \frac{A^{5/2-6\varepsilon}}{(h A^{\gamma_1} + k A^{\gamma_2})^{1/2}} + A^{2-3\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{A^{15/6-2\varepsilon}}{(h A^{\gamma_1} + k A^{\gamma_2})^{1/2}} \right).$$

Der Beitrag zu D ist

$$D_3 \leqslant M^{1/4} \log^6 A \left(A^{1-\varepsilon} M^2 \log^2 A + M^{7/4} \log^{7/4} A \left(A^{1-\varepsilon} + A^{1-3\varepsilon}\right)\right).$$

Zusammenfassend ergibt sich $D \ll M^{5/2} \log^8 A\, A^{27/28}$.

Mit $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + r(x)$ folgt nun aus (13)

$$\sum_{\substack{A < n \leqslant B \\ n \in F_{c_1} \cap F_{c_2}}} \Lambda(n) = \gamma_1 \gamma_2 A^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2} (1 + O(1/M + (B - A)/A))$$

$$(B - A + r(B) - r(A)) + O(A^{27/28} M^{5/2} \log^8 A).$$

Wie beim Beweis von (2) folgert man nun

$$\psi_{c_1, c_2}(x) = \frac{\gamma_1 \psi_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} x^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} (1 + O(1/M)) +$$

$$+ O(x^{27/28} M^{7/2} \log^8 x + \max_{\sqrt{x} \leqslant y \leqslant x} |y^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2} r(y)|),$$

denn mit den Bezeichnungen aus **4.** gilt für $z = x^{1/2}$, $\beta = \gamma_1 + \gamma_2 - 2$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x_{\nu+1}^{\beta} (r(x_\nu) - r(x_{\nu+1})) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} r(x_\nu)(x_{\nu+1}^{\beta} - x_\nu^{\beta}) + x^\beta r(x) - x_n^\beta r(x_n) =$$

$$= - \sum_{\nu=0}^{n-1} r(x_\nu) \beta \xi_\nu^{\beta-1} x_{\nu+1}/M + O(\max_{z \leqslant y \leqslant x} |y^\beta r(y)|) \ll$$

$$\ll (n/M + 1) \max_{z \leqslant y \leqslant x} |y^\beta r(y)| \leqslant \max_{z \leqslant y \leqslant x} |y^\beta r(y)|.$$

Nach dem Primzahlsatz ist für ein $c > 0$ $r(y) \ll y e^{-c\sqrt{\log y}}$, so daß mit $M = e^{c\sqrt{\log x}}$ sofort (3) folgt. Durch partielle Summation folgt aus (3) sofort (4).

6. Weitere Resultate

Da beim Beweis von Lemma 5 nur die zweite und dritte Ableitung betrachtet werden, lassen sich die Primzahlsätze (3) und (4) auf arithmetische Progressionen verallgemeinern. (Siehe dazu den Beweis von Lemma 4 in [4].) Geht man vor wie beim Beweis von Theorem 1.1 in [2], so kann man sowohl den Satz von Siegel–Walfisz übertragen, als auch ein Analogon zum Bombieri-Primzahlsatz herleiten.

Zusatz bei der Korrektur. Durch sorgfältigeres Vorgehen lassen sich die Grenzen 11/6 und 55/28 aus Satz 1 bzw. Satz 2 durch 5/3 bzw. 43/22 ersetzen.

Literatur

[1] CASSELS, J. W. S.: An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge: University Press. 1965.

[2] LEITMANN, D.: The distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$. Proc. London Math. Soc. (3) **35**, 448—462 (1977).

[3] LEITMANN, D.: Abschätzung trigonometrischer Summen. J. Reine Angew. Math. **317**, 209—219 (1980).

[4] LEITMANN, D., WOLKE, D.: Primzahlen der Gestalt $[n^{\Gamma}]$ in arithmetischen Progressionen. Arch. Math. **25**, 492—494 (1974).

[5] PJATECKIJ-SHAPIRO, I. I.: Über die Verteilung von Primzahlen in Folgen der Form $[f(n)]$. (Russisch.) Math. Sb. **33**, 559—566 (1953).

[6] TITCHMARSH, E. C.: The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford: University Press. 1951.

[7] VAUGHAN, R. C.: Sommes trigonométriques sur les nombres premiers. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **285**, 981—983 (1977).

[8] VINOGRADOV, I. M.: The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. New York: Interscience. 1954.

D. LEITMANN
Institut für Mathematik der TU
Erzstraße 1
D-3392 Clausthal-Zellerfeld, Bundesrepublik Deutschland