Mh. Math. 84, 289—302 (1977)

Monatshefte für Mathematik


# Die Verbände mit nichteinfacher Funktionenalgebra

Von

**Günther Karigl**, Wien

*(Eingegangen am 30. November 1976)*

**Abstract**

**Simplicity of Function Algebras Over Lattices.** Let $\langle V; \cup, \cap \rangle$ be a lattice, then $F(V)$, the set of all functions from $V$ to $V$, becomes a lattice by defining the operations $\cup$ and $\cap$ pointwise. If we also consider the composition $\cdot$ of functions as an operation on $F(V)$, we get the function algebra $\langle F(V); \cup, \cap, \cdot \rangle$. In this paper we give a characterization of the lattices with non-simple function algebras. Moreover, the congruence lattice of these function algebras turns out to be a three-element chain.

Die vorliegende Arbeit gibt eine vollständige Antwort auf die Frage nach der Einfachheit von Funktionenalgebren über Verbänden, die schon von W. Philipp [3] behandelt, aber nur teilweise gelöst wurde. Ferner wird der Kongruenzverband dieser Algebren im Falle der Nichteinfachheit bestimmt.

Unter der Funktionenalgebra über einem Verband $V$ verstehen wir die Algebra $\langle F(V); \cup, \cap, \cdot \rangle$, also genauer die einstellige Funktionenalgebra mit Komposition über dem Verband $V$. Eine exakte Definition findet man z. B. bei W. Nöbauer und W. Philipp [2]. Ein wesentliches Hilfsmittel für diese Arbeit ist ein Satz von A. I. Mal'cev [1], in dem alle Kongruenzrelationen der Funktionenalgebra $\langle F(A); \cdot \rangle$ über einer beliebigen Menge $A$ bestimmt werden. Danach gibt es Kongruenzen vom Typ a) und vom Typ b); die letzteren werden weiter unten angegeben.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird der Kongruenzverband von $F(V)$ bestimmt. Wir lassen uns dabei von folgendem Gedanken leiten: Jede Kongruenzrelation von $\langle F(V); \cup, \cap, \cdot \rangle$ ist auch Kongruenz von $\langle F(V); \cdot \rangle$ und wird daher durch den Satz von Mal'cev charakterisiert. Weiters ist das folgende Ergebnis von Nöbauer und Philipp [2] von grundlegender Bedeutung:

**Satz 1:** *Enthält ein Verband $V$ eine zu sich gleichmächtige beschränkte Teilmenge $Q$, dann ist $F(V)$ einfach.*

Aus diesem Satz folgt insbesondere die Einfachheit von Funktionenalgebren über endlichen Verbänden, da diese selbst als Intervall geschrieben werden können. Für unendliche Verbände gilt zunächst folgender Hilfssatz von PHILLIPP [3]:

**Lemma 1:** *In der Funktionenalgebra $F(V)$ über einem unendlichen Verband $V$ ist die einzige Kongruenzrelation vom Typ a) (im Satz von MAL'CEV) die identische Relation.*

Es folgt nun, daß es höchstens eigentliche, d. h. nicht identische Kongruenzen vom Typ b) gibt. Nach dem Satz von MAL'CEV ist jede dieser Kongruenzen durch eine Kette von Kardinalzahlen

$$\aleph_0 \leqslant \xi_1 < \ldots < \xi_k \leqslant \eta_k < \ldots < \eta_1 < \eta_0 \leqslant \aleph_{\alpha+1} \tag{1}$$

bestimmt. Dabei ist $k \geqslant 0$ (im Fall $k=0$ bleibt nur $\aleph_0 \leqslant \eta_0 \leqslant \aleph_{\alpha+1}$), $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\aleph_{\alpha+1}$ die nächstgrößere Kardinalzahl zu $|V| = \aleph_\alpha$. Zwei Funktionen $\varphi, \psi \in F(V)$ sind genau dann kongruent, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\varphi = \psi$.
2. Die Ränge von $\varphi$ und $\psi$ sind beide $< \eta_k$.
3. Die Ränge von $\varphi$ und $\psi$ sind beide gleich $\varrho$ mit $\eta_{i+1} \leqslant \varrho < \eta_i$ $(0 \leqslant i < k)$; ist $X = \{a \in V \mid \varphi a \neq \psi a\}$ die Menge der Verschiedenheitsstellen von $\varphi$ und $\psi$, so gilt $|\varphi X| < \xi_{i+1}$ und $|\psi X| < \xi_{i+1}$.

Für den Rang einer Funktion $\varphi$ schreiben wir $|\varphi|$, $\varkappa_a$ bezeichne die konstante Funktion mit dem Wert $a$ und id stehe für die identische Funktion auf $V$. Für jedes Element $a \in V$ bezeichnen wir die Menge $\{b \in V \mid a \leqslant b\}$ mit $G(a)$, die Menge $\{b \in V \mid b \leqslant a\}$ mit $K(a)$ und die Menge der mit $a$ vergleichbaren bzw. nicht vergleichbaren Elemente mit $V(a)$ bzw. $U(a)$. Dabei ist $\leqslant$ die zum Verband gehörige Halbordnung.

*Definition 1:* Eine unendliche Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt *regulär*, wenn für jede Menge von Kardinalzahlen $\{m_n \mid n \in N\}$ mit $m_n < \aleph_\alpha$ für alle $n \in N$ und $|N| < \aleph_\alpha$ auch $\sum_{n \in N} m_n < \aleph_\alpha$ gilt. Andernfalls heißt $\aleph_\alpha$ singulär.

Ohne Beweis möchte ich erwähnen, daß die regulären Kardinalzahlen genau die Kardinalzahlen mit regulärer Anfangszahl sind, wie sie bei PHILIPP [3] vorkommen.

**Lemma 2:** *Gilt $|G(a)| < \aleph_\alpha$ und $|K(a)| < \aleph_\alpha$ für ein Element $a \in V$, dann ist $F(V)$ einfach.*

*Beweis:* (i) Sei zunächst $\aleph_\alpha$ regulär. Wir betrachten die Abbildung $f: c \to a \cup c$ von $V$ auf $G(a)$ und behaupten, es existiert ein $b_1 \in G(a)$ mit $|f^{-1}(b_1)| = \aleph_\alpha$. Wäre nämlich $|f^{-1}(b)| < \aleph_\alpha$ für alle $b \in G(a)$, dann folgt auf Grund der Regularität von $\aleph_\alpha$

$$|V| = |\bigcup_{b \in G(a)} f^{-1}(b)| = \sum_{b \in G(a)} |f^{-1}(b)| < \aleph_\alpha,$$

ein Widerspruch zu $|V| = \aleph_\alpha$. Betrachten wir die Abbildung $g: c \to a \cap c$ von $f^{-1}(b_1)$ in $K(a)$, gibt es nach derselben Überlegung ein $b_2 \in K(a)$ mit $|g^{-1}(b_2)| = \aleph_\alpha$. Für alle $c \in g^{-1}(b_2) \subseteq f^{-1}(b_1)$ gilt nun

$$b_2 = a \cap c \leqslant c \leqslant a \cup c = b_1$$

und nach Satz 1 ist $F(V)$ einfach.

(ii) Ist $\aleph_\alpha$ singulär, behaupten wir unter den Voraussetzungen des Satzes: Zu jeder Kardinalzahl $m < \aleph_\alpha$ gibt es Elemente $b_1 \in G(a)$, $b_2 \in K(a)$ und eine Menge $U \subseteq U(a)$, so daß $b_2 \leqslant U \leqslant b_1$ und $|U| \geqslant m$ gilt. Zum Beweis beachte man zunächst, daß wegen $|G(a)| < \aleph_\alpha$ und $|K(a)| < \aleph_\alpha$ nun $|U(a)| = \aleph_\alpha$ sein muß. Wegen $m < \aleph_\alpha$ gilt $\max(m, |K(a)|) < \aleph_\alpha$, und weil $\aleph_\alpha$ singulär und daher Limeszahl ist, gibt es eine Kardinalzahl $n$ mit

$$\max(m, |K(a)|) < n < \aleph_\alpha.$$

Wir betrachten wieder die Abbildung $f: c \to a \cup c$ von $U(a)$ in $G(a)$ und behaupten, es existiert ein $b_1 \in G(a)$ mit $|f^{-1}(b_1)| \geqslant n$. Aus der Annahme $|f^{-1}(b)| < n$ für alle $b \in G(a)$ folgt nämlich

$$\aleph_\alpha = |U(a)| = |\bigcup_{b \in G(a)} f^{-1}(b)| \leqslant |G(a)| \cdot n < \aleph_\alpha,$$

ein Widerspruch. Betrachten wir analog die Abbildung $g: c \to a \cap c$ von $f^{-1}(b_1)$ in $K(a)$, so existiert ein $b_2 \in K(a)$ mit $|g^{-1}(b_2)| \geqslant m$. Wäre nämlich $|g^{-1}(b)| < m$ für alle $b \in K(a)$, folgt

$$n \leqslant |f^{-1}(b_1)| = |\bigcup_{b \in K(a)} g^{-1}(b)| \leqslant |K(a)| \cdot m < n,$$

ein neuerlicher Widerspruch. Daher gilt für alle $c \in U = g^{-1}(b_2) \subseteq$ $\subseteq f^{-1}(b_1) \subseteq U(a)$ die Beziehung $b_2 = a \cap c \leqslant c \leqslant a \cup c = b_1$, w. z. z. w.

(iii) Zum Nachweis der Einfachheit von $F(V)$ für singuläres $\aleph_\alpha$ betrachten wir eine beliebige eigentliche Kongruenz $\theta$ von $F(V)$. $\theta$ ist durch eine Kette (1) festgelegt und wir können drei Fälle unterscheiden: ($\alpha$) $\eta_k < \aleph_\alpha$, ($\beta$) $\eta_k = \aleph_\alpha$ und ($\gamma$) $\eta_k > \aleph_\alpha$. Im Fall

($\alpha$) gibt es nach (ii) eine Menge $U \subseteq U(a)$ und Elemente $b_1 \in G(a)$, $b_2 \in K(a)$ mit $b_2 \leqslant U \leqslant b_1$ und $|U| \geqslant \eta_k$. Sei nun $\varphi$ folgende Funktion von $F(V)$:

$$\varphi c = \begin{cases} c & \text{für } c \in U \\ u & \text{sonst} \end{cases},$$

wo $u$ ein beliebiges Element von $U$ ist. Dann gilt

$$\varkappa_{b_1} \equiv \varkappa_{b_2} \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_{b_1} = \varkappa_{b_1} \cup \varphi \equiv \varkappa_{b_2} \cup \varphi = \varphi \bmod \theta .$$

Die beiden Funktionen $\varkappa_{b_1}$ und $\varphi$ können jedoch nach dem Satz von Mal'cev nicht kongruent sein, da $|\varkappa_{b_1}| < \eta_k$ und $|\varphi| = |U| \geqslant \eta_k$ ist. Wir erhalten also einen Widerspruch. Im Fall ($\beta$) betrachten wir wieder die Abbildung $f: c \to a \cup c$ von $U(a)$ in $G(a)$. Ist $S = f(U(a))$ die Bildmenge dieser Abbildung, dann ist $\{f^{-1}(s) \mid s \in S\}$ eine Partition von $U(a)$. Wegen $|V| = |U(a)| = \aleph_\alpha$ gibt es eine bijektive Funktion $\psi$ von $V$ auf $U(a)$; daher ist $\{\psi^{-1}(f^{-1}(s)) \mid s \in S\}$ eine Partition von $V$ und wir können die folgende Funktion $\varphi \in F(V)$ definieren:

$$\varphi c = s \Leftrightarrow c \in \psi^{-1}(f^{-1}(s)).$$

Wegen $|\varphi| = |S| \leqslant |G(a)| < \aleph_\alpha = \eta_k$ und $|\varkappa_a| < \eta_k$ folgt:

$$\varkappa_a \equiv \varphi \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_a \cap \psi \equiv \varphi \cap \psi \bmod \theta .$$

Es gilt nun $\varphi \cap \psi = \psi$. Zu jedem $c \in V$ gibt es nämlich ein $s \in S$ mit $c \in \psi^{-1}(f^{-1}(s))$. Daraus folgt $f(\psi c) = a \cup \psi c = s$, also $\psi c \leqslant s$, und weiter $(\varphi \cap \psi)c = s \cap \psi c = \psi c$. Die obige Kongruenz lautet nun $\varkappa_a \cap \psi \equiv \psi \bmod \theta$. Wegen $|\varkappa_a \cap \psi| \leqslant |K(a)| < \eta_k$ und $|\psi| = \eta_k$ ergibt sich jedoch ein Widerspruch zum Satz von Mal'cev. Als letzte Möglichkeit bleibt noch der Fall ($\gamma$). In diesem Fall ist $\theta$ die Allrelation, denn je zwei Funktionen von $F(V)$ sind nach Punkt 2 kongruent. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Wir untersuchen nun alle Äquivalenzen vom Typ b) und überprüfen, ob sie Kongruenzen von $F(V)$ sind, d. h. ob sie mit den Operationen $\cup$ und $\cap$ verträglich sind. Dabei können wir nach Lemma 2 o. B. d. A. $|G(a)| = \aleph_\alpha$ für ein $a \in V$ annehmen. Im Fall $|K(a)| = \aleph_\alpha$ führen die dualen Überlegungen zum gewünschten Ziel. Nehmen wir nun an, eine solche Äquivalenz $\theta$ ist Kongruenz von $F(V)$ und durch eine Kette (1) bestimmt. Wir werden alle möglichen Fälle diskutieren:

*Fall 1:* $k = 0$. In diesem Fall reduziert sich die Kette (1) zu $\aleph_0 \leqslant \eta_0 \leqslant \aleph_{\alpha+1}$. Für $\eta_0 = \aleph_{\alpha+1}$ erhält man die Allrelation, in jedem anderen Fall $\eta_0 \leqslant \aleph_\alpha$ erhält man keine Kongruenz. Denn wäre $\theta$ Kongruenz von $F(V)$, dann gilt für zwei verschiedene Elemente $a, b \in V$:

$$\varkappa_a \equiv \varkappa_b \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varkappa_b \cup \mathrm{id} \bmod \theta .$$

Wegen $\varkappa_a \cup \mathrm{id} \neq \varkappa_b \cup \mathrm{id}$ kann die letzte Kongruenz nur durch $|\varkappa_a \cup \mathrm{id}| = |G(a)| < \eta_0 \leqslant \aleph_\alpha$ erfüllt werden; das ist aber ein Widerspruch zu $|G(a)| = \aleph_\alpha$.

*Fall 2:* $k \geqslant 1$, $\xi_1 < \eta_k$. Wir werden zeigen, daß auch dieser Fall keine Kongruenz von $F(V)$ beinhaltet. Wegen $\xi_1 < \eta_k \leqslant \aleph_\alpha = |G(a)|$ existieren disjunkte Teilmengen $S \subseteq G(a)$ und $T \subseteq G(a) - S$ mit der Kardinalzahl $|S| = |T| = \xi_1$. Da $S$ und $T$ gleichmächtig sind, gibt es eine bijektive Abbildung $s \to \bar{s}$ von $S$ auf $T$. O. B. d. A. können wir annehmen

$$s \ngeq \bar{s} \text{ für alle } s \in S .$$

Trifft das nicht zu, so sei $S' = \{s \in S \mid s > \bar{s}\}$. Gilt $|S'| < \xi_1$, wählt man $S - S'$ und $T - \{\bar{s} \in T \mid s \in S'\}$ statt $S$ und $T$; im Fall $|S'| = \xi_1$ leisten $S'$ und $\{\bar{s} \in T \mid s \in S'\}$ das Gewünschte, nur mit vertauschten Rollen. Weiters sei $\varphi \in F(V)$ wie folgt definiert:

$$\varphi s = \begin{cases} \bar{s} \text{ für } s \in S \\ a \text{ sonst} \end{cases} .$$

Wegen $|\varkappa_a| < \eta_k$ und $|\varphi| = |T \cup \{a\}| = \xi_1 < \eta_k$ gilt nach Punkt 2:

$$\varkappa_a \equiv \varphi \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varphi \cup \mathrm{id} \bmod \theta .$$

Die Menge der Verschiendenheitsstellen von $\varkappa_a \cup \mathrm{id}$ und $\varphi \cup \mathrm{id}$ ist $S$, denn $(\varkappa_a \cup \mathrm{id})s = a \cup s = (\varphi \cup \mathrm{id})s$ für $s \notin S$ und aus $(\varkappa_a \cup \mathrm{id})s = (\varphi \cup \mathrm{id})s$ für $s \in S$ folgt $s = a \cup s = \bar{s} \cup s$ und $\bar{s} \leqslant s$, ein Widerspruch. Die Kongruenz $\varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varphi \cup \mathrm{id} \bmod \theta$ kann also nicht nach Punkt 1 gelten. Würde sie nach Punkt 2 gelten, dann folgt

$$\aleph_\alpha = |\varkappa_a \cup \mathrm{id}| < \eta_k < \eta_0 \leqslant \aleph_{\alpha+1} .$$

Das ist aber unmöglich, da $\aleph_{\alpha+1}$ die nächstgrößere Kardinalzahl zu $\aleph_\alpha$ ist. Gilt die Kongruenz schließlich nach Punkt 3, dann ist $\varrho = \aleph_\alpha$ und daher $i = 0$. Statt $|(\varkappa_a \cup \mathrm{id})S| < \xi_{i+1} = \xi_1$ erhält man jedoch $|(\varkappa_a \cup \mathrm{id})S| = |S| = \xi_1$. Es ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch, womit sich die Annahme, $\theta$ sei Kongruenz, als falsch erwiesen hat.

*Fall 3:* $k=1$, $\xi_1=\eta_1<\aleph_\alpha$. (i) Wir behaupten zunächst die Existenz einer Teilmenge $S$ von $G(a)$ mit $|S|=\eta_1$, die nach oben beschränkt ist. Wären nämlich alle Teilmengen $S$ mit $|S|=\eta_1$ nicht nach oben beschränkt, dann auch alle Teilmengen einer größeren Mächtigkeit als $\eta_1$. Sei nun $T\subseteq G(a)$ mit $|T|=\eta_1$; da $T$ nicht nach oben beschränkt ist, gibt es zu jedem Element $b\in G(a)$ ein Element $t\in T$ mit $b<t$. Daraus folgt

$$G(a)=\bigcup_{t\in T}[a,t],$$

wo $[a,t]$ wie üblich die Menge $\{c\in V\,|\,a\leqslant c\leqslant t\}$ bezeichnet. Alle Intervalle $[a,t]$ sind beschränkte Teilmengen von $G(a)$ und haben daher eine Mächtigkeit $<\eta_1$. Es folgt

$$|G(a)|\leqslant\sum_{t\in T}|[a,t]|\leqslant|T|\cdot\eta_1=\eta_1^2<\aleph_\alpha,$$

und man erhält einen Widerspruch zu $|G(a)|=\aleph_\alpha$.

(ii) Sei nun $\theta$ Kongruenz und $S$ wie in (i); weiters sei $a\leqslant S\leqslant b$ mit $b\in G(a)$. Wir definieren nun folgende Funktion $\varphi\in F(V)$:

$$\varphi s=\begin{cases} s \text{ für } s\in S \\ a \text{ sonst}\end{cases}.$$

Dann gilt:

$$\varkappa_a\equiv\varkappa_b \bmod \theta\Rightarrow\varkappa_a=\varkappa_a\cap\varphi\equiv\varkappa_b\cap\varphi=\varphi \bmod \theta.$$

Wegen $|\varkappa_a|=1$ und $|\varphi|=|S\cup\{a\}|=\eta_1$ steht diese Kongruenz mit jeder der drei Bedingungen des Satzes von MAL'CEV im Widerspruch. Daher enthält auch dieser Fall keine Kongruenzrelation von $F(V)$.

*Fall 4:* $k=1$, $\xi_1=\eta_1=\aleph_\alpha$. Dieser Fall ist das letzte Glied einer vollständigen Fallunterscheidung aller Möglichkeiten, die für eine Kongruenz vom Typ b) nach dem Satz von MAL'CEV gegeben sind. Er umfaßt nur eine einzige Relation $\theta$. Diese ist eindeutig durch die Kette

$$\aleph_0\leqslant\xi_1=\eta_1=\aleph_\alpha<\eta_0=\aleph_{\alpha+1} \tag{2}$$

bestimmt. Wir betrachten hier nur den Fall, daß die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ singulär ist.

(i) Nehmen wir zunächst weiter an, es gäbe eine Teilmenge $S$ von $G(a)$ mit $|S|<\aleph_\alpha$, die nicht nach oben beschränkt ist. Dann existiert zu jedem Element $b \in V$ ein Element $s \in S$ mit $b \notin G(s)$. Sei nun $\varphi \in F(V)$ jene Abbildung, die jedem $b \in V$ ein solches $s \in S$ mit $b \notin G(s)$ zuordnet. Wegen $|\varphi| \leqslant |S| < \aleph_\alpha = \eta_k$ folgt nun

$$\varkappa_a \equiv \varphi \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varphi \cup \mathrm{id} \bmod \theta. \tag{3}$$

Ist $Y$ die Menge der Verschiedenheitsstellen von $\varkappa_a \cup \mathrm{id}$ und $\varphi \cup \mathrm{id}$, dann ist $G(a) \subseteq Y$. Wäre nämlich $G(a) - Y \neq \emptyset$, dann gilt für jedes $b \in G(a) - Y$

$$b = a \cup b = (\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, b = (\varphi \cup \mathrm{id})\, b = \varphi b \cup b,$$

also $b \in G(\varphi b)$, ein Widerspruch zur Definition von $\varphi$. Wir erhalten daher folgende Kette

$$\aleph_\alpha = |G(a)| = |(\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, G(a)| \leqslant |(\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, Y| \leqslant \aleph_\alpha;$$

darin sind nun alle Kardinalzahlen gleich und nach Definition von $\theta$ ergibt sich ein Widerspruch mit (3). Da $\theta$ einzige mögliche Kongruenz war, ist $F(V)$ in diesem Fall einfach.

(ii) Wir können nun annehmen, daß jede Teilmenge $S$ von $G(a)$ mit $|S| < \aleph_\alpha$ nach oben beschränkt ist. Weiters können wir $|G(b)| = \aleph_\alpha$ für alle $b \in V$ voraussetzen. Wäre nämlich $|G(b)| < \aleph_\alpha$ für ein Element $b \in V$, so folgt

$$\varkappa_a \equiv \varkappa_b \bmod \theta \Rightarrow \varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varkappa_b \cup \mathrm{id} \bmod \theta,$$

und wegen $|\varkappa_a \cup \mathrm{id}| = |G(a)| = \aleph_\alpha$ und $|\varkappa_b \cup \mathrm{id}| = |G(b)| = \aleph_\alpha$ ergibt sich daraus ein Widerspruch. Da $\aleph_\alpha$ singulär ist, gibt es nach Definition eine Menge von Kardinalzahlen $\{m_\eta \mid \eta \in N\}$ mit $m_\eta < \aleph_\alpha$ für alle $\eta \in N$ und $|N| < \aleph_\alpha$, so daß $\sum\limits_{\eta \in N} m_\eta = \aleph_\alpha$ ist. Die Menge $N$ sei wohlgeordnet und ihre Ordinalzahl sei $\beta$; dann können wir o. B. d. A. $N = W(\beta)$ annehmen.

(iii) Wir behaupten den folgenden Hilfssatz: Zu jeder Ordinalzahl $\eta < \beta$ existieren Elemente $a_\eta$ und $b_\eta$ von $G(a)$ und eine Teilmenge $S_\eta$ von $G(a)$, so daß die Eigenschaften

$$a_\eta \leqslant S_\eta \leqslant b_\eta,\ |S_\eta| = m_\eta,\ b_\iota < a_\eta \text{ für alle } \iota < \eta$$

erfüllt sind. Der Beweis erfolgt durch transfinite Induktion: Sei zunächst $\eta = 0$. Wegen $m_0 < \aleph_\alpha = |G(a)|$ gibt es eine Menge $S_0 \subseteq G(a)$ mit $|S_0| = m_0$, und nach Voraussetzung von (ii) ist diese nach oben beschränkt. Es gilt also $a_0 \leqslant S_0 \leqslant b_0$, wo $a_0 = a$ und $b_0 \in G(a)$ ist. Sei nun $\eta$ eine beliebige Ordinalzahl $< \beta$ und die

Behauptung gelte für alle $\iota < \eta$; wir zeigen, dann gilt sie auch für $\eta$. Betrachten wir die Menge $\{b_\iota \mid \iota < \eta\}$; die Mächtigkeit dieser Menge ist $|\eta| \leqslant |\beta| < \aleph_\alpha$ und nach (ii) gibt es daher ein Element $a_\eta \in G(a)$ mit $b_\iota \leqslant a_\eta$ für alle $\iota < \eta$. Wieder nach (ii) hat $G(a_\eta)$ die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, und so kann o. B. d. A. $b_\iota < a_\eta$ für alle $\iota < \eta$ angenommen werden. Wegen $m_\eta < \aleph_\alpha = |G(a_\eta)|$ existiert eine Menge $S_\eta \subseteq \subseteq G(a_\eta) \subseteq G(a)$ mit $|S_\eta| = m_\eta$. Diese ist wieder nach oben beschränkt, so daß $a_\eta \leqslant S_\eta \leqslant b_\eta$ für ein $b_\eta \in G(a)$ gilt. Damit gilt die Behauptung für alle $\eta < \beta$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

(iv) Wenden wir nochmals denselben Schluß wie oben an, ergibt sich wegen $|\{b_\eta \mid \eta < \beta\}| < \aleph_\alpha$ die Existenz eines Elementes $c \in V$ mit $b_\eta \leqslant c$ für alle $\eta < \beta$. Nach (iii) gilt nun

$$a \leqslant a_\eta \leqslant S_\eta \leqslant b_\eta \leqslant c \text{ für alle } \eta < \beta,$$

d. h. $S_\eta \subseteq [a,c]$ für alle $\eta < \beta$, und daher auch $\bigcup_{\eta<\beta} S_\eta \subseteq [a,c]$. Wegen der Bedingung $b_\iota < a_\eta$ für $\iota < \eta$ sind alle Mengen $S_\eta$ paarweise disjunkt und es folgt

$$\aleph_\alpha = \sum_{\eta<\beta} m_\eta = \Big|\bigcup_{\eta<\beta} S_\eta\Big| \leqslant |[a,c]| \leqslant \aleph_\alpha,$$

also $|[a,c]| = \aleph_\alpha$. Nach Satz 1 ist $F(V)$ einfach.

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat:

**Satz 2:** *Ist $V$ ein Verband mit regulärer Kardinalzahl $\aleph_\alpha$, so besteht der Kongruenzverband von $F(V)$ für nicht einfaches $F(V)$ genau aus den beiden trivialen Kongruenzen und einer einzigen weiteren Kongruenz, die nach dem Satz von* Mal'cev *durch die Kette*

$$\aleph_0 \leqslant \xi_1 = \eta_1 = \aleph_\alpha < \eta_0 = \aleph_{\alpha+1}$$

*bestimmt ist. Ist die Kardinalzahl von $V$ jedoch endlich oder singulär, dann ist $F(V)$ stets einfach.*

Die Frage nach dem Kongruenzverband der Funktionenalgebra $F(V)$ für einen beliebigen Verband $V$ ist damit beantwortet. Folgendes Problem ist jedoch noch offen: Für welche Verbände $V$ mit regulärer Kardinalzahl ist $F(V)$ einfach? Damit beschäftigt sich der zweite Teil dieser Arbeit. Ich möchte bemerken, daß dieser Teil vollkommen unabhängig vom ersten Teil der Arbeit ist, d. h. es werden keine Ergebnisse aus dem vorhergehenden Abschnitt weiter verwendet.

Es sei $V$ ein Verband mit regulärer Kardinalzahl $\aleph_\alpha$, und $\theta$ sei die durch (2) (siehe Fall 4) festgelegte Äquivalenzrelation auf $F(V)$.

**Lemma 3:** *Zwei Funktionen $\varphi, \psi \in F(V)$ sind genau dann äquivalent* $\operatorname{mod} \theta$, *wenn $|\varphi X| < \aleph_\alpha$ und $|\psi X| < \aleph_\alpha$ gilt. Dabei ist $X$ die Menge der Stellen, an denen $\varphi$ und $\psi$ verschieden sind.*

*Beweis:* Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen für $\varphi \equiv \psi \operatorname{mod} \theta$ ist unmittelbar aus dem Satz von MAL'CEV zu sehen. Daß die Bedingungen auch hinreichend sind, kann man sich folgendermaßen überlegen: Es gilt $|\varphi| = \aleph_\alpha \Leftrightarrow |\psi| = \aleph_\alpha$, denn $|\varphi| = \aleph_\alpha$ impliziert wegen $|\varphi X| < \aleph_\alpha$

$$\aleph_\alpha = |\varphi(V - X)| = |\psi(V - X)| \leqslant |\psi|,$$

also $|\psi| = \aleph_\alpha$, und umgekehrt. Ist nun $|\varphi| = \aleph_\alpha$, dann auch $|\psi| = \aleph_\alpha$, und es gilt $\varphi \equiv \psi \operatorname{mod} \theta$ nach Punkt 3 (im Satz von MAL'CEV). Ist jedoch $|\varphi| < \aleph_\alpha$, dann auch $|\psi| < \aleph_\alpha$, und die beiden Funktionen sind nach Punkt 2 äquivalent.

**Lemma 4:** *Die Äquivalenz $\theta$ ist genau dann Kongruenz, wenn für alle $a, b \in V$ und alle $\chi \in F(V)$ gilt:*

$$\varkappa_a \cup \chi \equiv \varkappa_b \cup \chi \operatorname{mod} \theta \text{ und } \varkappa_a \cap \chi \equiv \varkappa_b \cap \chi \operatorname{mod} \theta.$$

*Beweis:* Offensichtlich sind die beiden Bedingungen notwendig, denn es gilt stets $\varkappa_a \equiv \varkappa_b \operatorname{mod} \theta$. Den Nachweis für die Umkehrung führen wir in zwei Schritten:

(i) Seien $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ beliebige Funktionen von $F(V)$ mit $\varphi \equiv \psi \operatorname{mod} \theta$. Die Relation $\theta$ ist genau dann Kongruenz, wenn daraus $\varphi \cup \chi \equiv \psi \cup \chi \operatorname{mod} \theta$ und $\varphi \cap \chi \equiv \psi \cap \chi \operatorname{mod} \theta$ folgt. Gilt $\varphi \equiv \psi \operatorname{mod} \theta$ nach Punkt 1, d. h. $\varphi = \psi$, ist nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen nun an, $\varphi \equiv \psi \operatorname{mod} \theta$ gilt nach Punkt 2, also $|\varphi| < \aleph_\alpha$ und $|\psi| < \aleph_\alpha$. Für jedes $a \in \varphi V$ und $b \in \psi V$ definieren wir

$$Y_{ab} = Y \cap \varphi^{-1}(a) \cap \psi^{-1}(b);$$

dabei ist $Y$ die Menge der Stellen, an denen $\varphi \cup \chi$ und $\psi \cup \chi$ verschieden sind. Nach Voraussetzung gilt $\varkappa_a \cup \chi \equiv \varkappa_b \cup \chi \operatorname{mod} \theta$ und nach Lemma 3 folgt $|(\varkappa_a \cup \chi) Z| < \aleph_\alpha$ und $|(\varkappa_b \cup \chi) Z| < \aleph_\alpha$, wo $Z = \{c \in V \mid a \cup \chi c \neq b \cup \chi c\}$ ist. Nun ist $Y_{ab} \subseteq Z$, denn ist $c \in Y_{ab}$, d. h. $(\varphi \cup \chi) c \neq (\psi \cup \chi) c$, $\varphi c = a$ und $\psi c = b$, dann gilt $a \cup \chi c \neq b \cup \chi c$, d. h. $c \in Z$. Daher folgt weiter

$$|(\varphi \cup \chi) Y_{ab}| = |(\varkappa_a \cup \chi) Y_{ab}| \leqslant |(\varkappa_a \cup \chi) Z| < \aleph_\alpha$$

und genauso $|(\psi\cup\chi)\,Y_{ab}|<\aleph_\alpha$. Wegen $Y=\bigcup\limits_{\substack{a\in\varphi V\\ b\in\psi V}} Y_{ab}$ erhalten wir schließlich

$$|(\varphi\cup\chi)\,Y|=|(\varphi\cup\chi)\bigcup_{\substack{a\in\varphi V\\ b\in\psi V}} Y_{ab}|\leqslant\sum_{\substack{a\in\varphi V\\ b\in\psi V}}|(\varphi\cup\chi)\,Y_{ab}|<\aleph_\alpha,$$

da $|\varphi|<\aleph_\alpha$, $|\psi|<\aleph_\alpha$, $|(\varphi\cup\chi)\,Y_{ab}|<\aleph_\alpha$ für alle $a,b$ und die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ regulär ist. Genauso gilt $|(\psi\cup\chi)\,Y|<\aleph_\alpha$ und daher $\varphi\cup\chi\equiv\psi\cup\chi \bmod \theta$ nach Lemma 3. Analog beweist man die duale Bedingung für den Durchschnitt.

(ii) Es bleibt noch die Möglichkeit, $\varphi\equiv\psi \bmod \theta$ gilt nach Punkt 3, d. h. $|\varphi|=|\psi|=\aleph_\alpha$ und $|\varphi X|<\aleph_\alpha$, $|\psi X|<\aleph_\alpha$. Wir werden diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Dazu definieren wir Funktionen $\varphi'$ und $\psi'$ von $F(V)$ wie folgt:

$$\varphi' a=\begin{cases}\varphi a & \text{für } a\in X\\ a_0 & \text{sonst}\end{cases} \quad\text{und}\quad \psi' a=\begin{cases}\psi a & \text{für } a\in X\\ a_0 & \text{sonst}\end{cases};$$

dabei ist $a_0$ ein beliebiges Element von $V$. Dann ist $|\varphi'|\leqslant|\varphi X|+1<\aleph_\alpha$ und $|\psi'|\leqslant|\psi X|+1<\aleph_\alpha$, also $\varphi'\equiv\psi' \bmod \theta$ nach Punkt 2. Nach (i) folgt $\varphi'\cup\chi\equiv\psi'\cup\chi \bmod \theta$, und weiter nach Lemma 3 $|(\varphi'\cup\chi)\,Y'|<\aleph_\alpha$ und $|(\psi'\cup\chi)\,Y'|<\aleph_\alpha$, wo $Y'=\{a\in V\,|\,(\varphi'\cup\chi)a\neq(\psi'\cup\chi)a\}$. Nun ist $Y\subseteq X$ und $Y'\subseteq X$; die Funktionen $\varphi\cup\chi$ und $\varphi'\cup\chi$, sowie $\psi\cup\chi$ und $\psi'\cup\chi$ stimmen auf $X$ überein, daher auch auf den Teilmengen $Y$ und $Y'$. Weiters gilt $Y=Y'$, denn ist $a\in Y$, d. h. $(\varphi\cup\chi)a\neq(\psi\cup\chi)a$, dann gilt auch $(\varphi'\cup\chi)a\neq(\psi'\cup\chi)a$, d. h. $a\in Y'$, und umgekehrt. Schließlich erhalten wir

$$|(\varphi\cup\chi)\,Y|=|(\varphi\cup\chi)\,Y'|=|(\varphi'\cup\chi)\,Y'|<\aleph_\alpha$$

und genauso $|(\psi\cup\chi)\,Y|<\aleph_\alpha$, also $\varphi\cup\chi\equiv\psi\cup\chi \bmod \theta$. Die duale Bedingung ergibt sich analog.

Die beiden letzten Lemmata hat schon PHILIPP in [3] implizit verwendet. Der wesentliche Schritt zur Charakterisierung der Einfachheit von $F(V)$ ergibt sich erst durch die folgende

*Definition 2:* Seien $A$ und $B$ Teilmengen einer unendlichen Menge $M$. Dann heißen $A$ und $B$ *fast gleich* (in Zeichen $A\simeq B$), wenn $|A\Delta B|<|M|$ gilt. Dabei steht $\Delta$ für die symmetrische Differenz zweier Mengen.

**Lemma 5:** *Gilt $G(a)\simeq G(b)$ für zwei Elemente $a,b\in V$, dann existieren Teilmengen $E_a$ und $E_b$ von $V$ mit $|E_a|<\aleph_\alpha$ und $|E_b|<\aleph_\alpha$, so daß gilt:*

$$G(a)=E_a\cup G(a\cup b) \text{ und } G(b)=E_b\cup G(a\cup b).$$

*Die Mengen $E_a$, $E_b$ und $G(a \cup b)$ sind paarweise disjunkt. Ebenso gilt die duale Aussage dieses Satzes.*

*Beweis:* Zunächst gilt $G(a) \cap G(b) = G(a \cup b)$, denn $c \geqslant a$ und $c \geqslant b$ ist äquivalent zu $c \geqslant a \cup b$. Definieren wir $E_a = G(a) - G(a \cup b)$ und $E_b = G(b) - G(a \cup b)$, erhalten wir $G(a)$ und $G(b)$ als disjunkte Vereinigungen, wie oben behauptet. Weiters gilt $E_a \cap E_b = \emptyset$, denn aus $c \in E_a \cap E_b$ folgt $c \in G(a) \cap G(b) = G(a \cup b)$, ein Widerspruch. Schließlich ist

$$E_a = G(a) - G(a \cup b) \subseteq G(a) \cup G(b) - G(a) \cap G(b) = G(a) \varDelta G(b)$$

und analog $E_b \subseteq G(a) \varDelta G(b)$. Aus $G(a) \simeq G(b)$ folgt nun $|E_a| < \aleph_\alpha$ und $|E_b| < \aleph_\alpha$. Damit ist alles gezeigt.

**Lemma 6:** *(i)* $G(a) \simeq G(b)$ *und* $K(a) \simeq K(b) \Rightarrow V(a) \simeq V(b)$.

*(ii) Enthält der Verband $V$ keine zu sich selbst gleichmächtige beschränkte Teilmenge, dann gilt auch die Umkehrung von (i).*

*(iii)* $V(a) \simeq V(b) \Leftrightarrow U(a) \simeq U(b)$.

*Beweis:* (i) Angenommen, es gilt nicht $V(a) \simeq V(b)$, dann folgt

$$|V(a) \varDelta V(b)| = |(V(a) - V(b)) \cup (V(b) - V(a))| = \aleph_\alpha$$

und weiter $|V(a) - V(b)| = \aleph_\alpha$ oder $|V(b) - V(a)| = \aleph_\alpha$. O. B. d. A. gelte die erste Gleichung. Wegen

$$|V(a) - V(b)| = |(G(a) - V(b)) \cup (K(a) - V(b))| = \aleph_\alpha$$

folgt wieder $|G(a) - V(b)| = \aleph_\alpha$ oder $|K(a) - V(b)| = \aleph_\alpha$. Im ersten Fall ist dann $|G(a) \varDelta G(b)| \geqslant |G(a) - G(b)| \geqslant |G(a) - V(b)| = \aleph_\alpha$, ein Widerspruch zu $G(a) \simeq G(b)$. Der zweite Fall führt analog auf einen Widerspruch zu $K(a) \simeq K(b)$.

(ii) Für jedes Element $c \in G(a) \cup G(b)$ gilt entweder ($\alpha$) $a \leqslant c$ oder ($\beta$) $b \leqslant c$. Im Fall ($\alpha$) ist dann entweder $a \cup b \leqslant c$ oder nicht $b \leqslant c$, also $c < b$ oder $c$ ist mit $b$ nicht vergleichbar; daher gilt

$$c \in G(a \cup b) \cup [a, b] \cup (V(a) - V(b)).$$

Dabei sei $[a, b] = \emptyset$, falls $a \nleqq b$. Im Fall ($\beta$) erhält man analog $c \in G(a \cup b) \cup [b, a] \cup (V(b) - V(a))$. Daraus folgt

$$G(a) \cup G(b) \subseteq G(a \cup b) \cup [a, b] \cup [b, a] \cup (V(a) \varDelta V(b))$$

und

$$G(a) \varDelta G(b) \subseteq [a, b] \cup [b, a] \cup (V(a) \varDelta V(b)).$$

Schließlich erhält man

$$|G(a) \Delta G(b)| \leqslant |[a,b]| + |[b,a]| + |V(a) \Delta V(b)| <$$
$$< \aleph_\alpha + \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

also $G(a) \simeq G(b)$. Genauso beweist man $K(a) \simeq K(b)$.

(iii) Die behauptete Äquivalenz folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$V(a) \Delta V(b) = (V(a) - V(b)) \cup (V(b) - V(a)) =$$
$$= (U(b) - U(a)) \cup (U(a) - U(b)) = U(a) \Delta U(b).$$

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Nach diesen mengentheoretischen Vorbemerkungen kommen wir nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts. Darin werden zwei Charakterisierungen der Einfachheit von $F(V)$ gegeben.

**Satz 3:** *Ist $V$ ein Verband mit regulärer Kardinalzahl $\aleph_\alpha$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(i) $F(V)$ ist nicht einfach;*

*(ii) Für alle $a, b \in V$ gilt $G(a) \simeq G(b)$ und $K(a) \simeq K(b)$;*

*(iii) $V$ enthält keine zu sich selbst gleichmächtige beschränkte Teilmenge und für alle $a, b \in V$ gilt $U(a) \simeq U(b)$.*

*Beweis:* (i)$\Rightarrow$(ii) Wäre (ii) falsch, so folgt o. B. d. A. $|G(a) \Delta G(b)| = \aleph_\alpha$. Weiters können wir o. B. d. A. $|G(a) - G(b)| = \aleph_\alpha$ annehmen. Sei nun $\Lambda$ eine beliebige eigentliche Kongruenz von $F(V)$; dann gilt

$$\varkappa_a \equiv \varkappa_b \bmod \Lambda \Rightarrow \varkappa_a \cup \mathrm{id} \equiv \varkappa_b \cup \mathrm{id} \bmod \Lambda. \tag{4}$$

Wir setzen $Y = \{c \in V \mid a \cup c \neq b \cup c\}$; dann ist $G(a) - G(b) \subseteq Y$, denn wäre $c \in G(a) - G(b)$ und $c \notin Y$, folgt $c = a \cup c = b \cup c$, d. h. $c \in G(b)$, ein Widerspruch. Weiters gilt

$$G(a) - G(b) = (\varkappa_a \cup \mathrm{id})(G(a) - G(b)) \subseteq (\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, Y$$

und daher $|(\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, Y| = \aleph_\alpha$. Die Kongruenz auf der rechten Seite von (4) kann nur vom Typ b), Punkt 2 oder Punkt 3 sein. Gilt sie nach Punkt 2, so ergibt sich $\aleph_\alpha = |\varkappa_a \cup \mathrm{id}| < \eta_k$; daraus folgt $k = 0$ und $\eta_0 = \aleph_{\alpha+1}$, $\Lambda$ ist die Allrelation. Gilt (4) jedoch nach Punkt 3, erhalten wir

$$\aleph_\alpha = |(\varkappa_a \cup \mathrm{id})\, Y| < \xi_{i+1} \leqslant \eta_1 < \eta_0 \leqslant \aleph_{\alpha+1},$$

einen Widerspruch. Die einzige eigentliche Kongruenz ist also die Allrelation und $F(V)$ ist einfach.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) Für jede beschränkte Teilmenge $Q$ von $V$ gilt

$$Q \subseteq [a,b] \subseteq (G(a) - G(b)) \cup \{b\} \subseteq (G(a) \Delta G(b)) \cup \{b\}$$

mit geeigneten Elementen $a, b \in V$. Daraus folgt $|Q| < \aleph_\alpha$, wenn $G(a) \simeq G(b)$. Die behauptete Äquivalenz ergibt sich nun aus Lemma 6.

(ii)$\Rightarrow$(i) Wir müssen zeigen, daß die Relation $\theta$ Kongruenz ist. Dazu wählen wir gemäß Lemma 4 beliebige Elemente $a, b \in V$ und eine Funktion $\chi \in F(V)$; weiters sei $Y = \{c \in V \mid a \cup \chi c \neq b \cup \chi c\}$. Wegen $G(a) \simeq G(b)$ existieren nach Lemma 5 zwei Mengen $E_a$, $E_b \subseteq V$ mit $|E_a| < \aleph_\alpha$, $|E_b| < \aleph_\alpha$ und $G(a) = E_a \cup G(a \cup b)$, $G(b) = E_b \cup G(a \cup b)$. Für jedes $c \in Y$ ist $a \cup \chi c \in G(a)$ und $b \cup \chi c \in G(b)$; daher gilt genau einer der folgenden Fälle:

($\alpha$) $a \cup \chi c \in G(a \cup b)$ und $b \cup \chi c \in G(a \cup b)$,
($\beta$) $a \cup \chi c \in G(a \cup b)$ und $b \cup \chi c \in E_b$,
($\gamma$) $a \cup \chi c \in E_a$ und $b \cup \chi c \in G(a \cup b)$,
($\delta$) $a \cup \chi c \in E_a$ und $b \cup \chi c \in E_b$.

Im Fall ($\alpha$) folgt $(a \cup \chi c) \cup (b \cup \chi c) \leqslant a \cup \chi c$; also $b \cup \chi c \leqslant a \cup \chi c$; genauso folgt $a \cup \chi c \leqslant b \cup \chi c$ und daraus $a \cup \chi c = b \cup \chi c$, ein Widerspruch zu $c \in Y$. Betrachten wir nun den Fall ($\beta$): Es sei $E_\beta = \{a \cup \chi c \in G(a \cup b) \mid b \cup \chi c \in E_b\}$; wegen $a \cup \chi c \leqslant a \cup (b \cup \chi c)$ gilt $E_\beta \subseteq \bigcup_{e \in E_b} [a \cup b, a \cup e]$. Jedes Intervall hat nach (iii) eine Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$, $|E_b| < \aleph_\alpha$ und daher folgt

$$|E_\beta| \leqslant \sum_{e \in E_b} |[a \cup b, a \cup e]| < \aleph_\alpha,$$

da $\aleph_\alpha$ regulär ist. Ganz analog zeigt man im Fall ($\gamma$), daß für $E_\gamma = \{b \cup \chi c \in G(a \cup b) \mid a \cup \chi c \in E_a\}$ die Beziehung $|E_\gamma| < \aleph_\alpha$ gilt. Zusammenfassend ergibt sich nun $|(\varkappa_a \cup \chi) Y| \leqslant |E_a| + |E_\beta| < \aleph_\alpha$, und $|(\varkappa_b \cup \chi) Y| \leqslant |E_b| + |E_\gamma| < \aleph_\alpha$. Nach Lemma 3 gilt $\varkappa_a \cup \chi \equiv \varkappa_b \cup \chi$ mod $\theta$. Ebenso zeigt man die duale Bedingung für den Durchschnitt. Nach Lemma 4 ist $\theta$ Kongruenz, womit alles bewiesen ist.

Beide Voraussetzungen von (ii) sowie von (iii) sind voneinander unabhängig. Es gibt nämlich Beispiele für Verbände, die $K(a) \simeq K(b)$ für alle $a, b$ erfüllen, aber nicht $G(a) \simeq G(b)$, und umgekehrt. Genauso ist es möglich, daß ein Verband eine zu sich selbst gleichmächtige beschränkte Teilmenge enthält, die Bedingung $U(a) \simeq U(b)$ jedoch für alle $a, b$ erfüllt ist; oder ein Verband enthält keine solche Teilmenge, erfüllt aber die letzte Bedingung nicht.

## Literatur

[1] MAL'CEV, A. I.: Symmetrische Gruppoide (Russisch). Mat. Sbornik **73**, 136—151 (1952).

[2] NÖBAUER, W., und W. PHILIPP: Über die Einfachheit von Funktionenalgebren. Mh. Math. **66**, 441—452 (1962).

[3] PHILIPP, W.: Über die Einfachheit von Funktionenalgebren über Verbänden. Mh. Math. **67**, 259—268 (1963).

Dr. G. KARIGL
Institut für Algebra und Mathematische Strukturtheorie
Technische Universität
Argentinierstraße 8
A-1040 Wien, Österreich