Reiffen, H.-J. und U. Vetter
Math. Annalen 167, 338—350 (1966)

Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen

Hans-Jörg Reiffen und Udo Vetter

Einleitung

X sei eine analytische Menge in einem Gebiet eines komplexen Zahlenraumes. Mit Hilfe der zu X gehörigen Idealgarbe definiert Grauert in [1] und [2] eine Garbe Ω_a von Keimen holomorpher Pfaffscher Formen auf X. Während man diese Definition als „algebraisch" bezeichnen kann, gibt Rossi in [6] unter Benutzung des Tangentialraumes von X (s. [3], [6]) eine eher „geometrische" Definition einer Garbe Ω_g von Keimen holomorpher Pfaffscher Formen auf X.

Zwei weitere Möglichkeiten, Garben von Keimen holomorpher Pfaffscher Formen auf X einzuführen, sind die folgenden: $\mathcal{O}$ sei die Strukturgarbe von X und $\mathfrak{S}$ die Garbe der Keime holomorpher Vektorfelder auf X; mit Ω_h bezeichnen wir die Garbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{S}, \mathcal{O})$. Ist X_{sg} die Singularitätenmenge von X und $\Omega(X-X_{sg})$ die Garbe der Keime holomorpher Pfaffscher Formen auf der Mannigfaltigkeit $X-X_{sg}$, so bezeichnen wir die 0-te Bildgarbe von $\Omega(X-X_{sg})$ bzgl. der kanonischen Injektion von $X-X_{sg}$ in X mit Ω_b.

Es gilt

$$\Omega_a|X-X_{sg}=\Omega_g|X-X_{sg}=\Omega_h|X-X_{sg}=\Omega_b|X-X_{sg}=\Omega(X-X_{sg}).$$

Ferner erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \Omega_g \arrow[r, "\sigma"] & \Omega_h \arrow[dr, "\tau"] & \\ \Omega_a \arrow[ur, "\varrho"] \arrow[rrr, "\varepsilon"'] & & & \Omega_b \end{tikzcd}$$

mit kanonischen $\mathcal{O}$-Homomorphismen ϱ, σ, τ und ε; dabei ist ϱ stets surjektiv und τ stets injektiv. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung dieses Diagramms; mit dem Studium von σ wird speziell eine von Rossi in [6] gestellte Frage behandelt.

Eine Aussage über die Injektivität bzw. Bijektivität von ε liefern Sätze von Scheja (Satz I bzw. das Korollar zu Satz III in [7]), sofern es gelingt, die homologische Codimension von Ω_a in den singulären Punkten von X zu bestimmen. Für vollständige Durchschnitte geschieht dies in § 2. Damit erhält man:

X sei in $x\in X$ vollständiger Durchschnitt. Gilt $\operatorname{codim}_x X_{sg}\geqq 2$ *(bzw.* $\operatorname{codim}_x X_{sg}\geqq 3$*). so ist ε_x injektiv (bzw. bijektiv).*

Hieraus ergibt sich für den Fall $\operatorname{codim}_x X_{sg} \geqq 2$ die Bijektivität von ϱ_x und die Injektivität von σ_x und für den Fall $\operatorname{codim}_x X_{sg} \geqq 3$ die Bijektivität von ϱ_x, σ_x und τ_x.

In § 3 werden Beispiele angegeben, welche die Schärfe der Sätze in § 2 erweisen. Die in § 2 gewonnenen Aussagen über die Injektivität von σ sind allerdings zu schwach. In § 4 wird gezeigt:

Ist X eine Hyperfläche, so ist σ stets injektiv.

Den Autoren ist kein Beispiel bekannt, für das σ nicht injektiv ist.

Vermerkt sei noch, daß die in § 1 eingeführten Differentialformen sich auch für höhere Grade definieren lassen; für den Fall der holomorphen Differentialformen vom Grad 2 kann man darüber hinaus die Überlegungen des § 2 übertragen.

§ 1. Garben von Keimen holomorpher Pfaffscher Formen auf komplexen Räumen

In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen für holomorphe Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen. In diesem Paragraphen sollen vier mögliche Definitionen angegeben werden. Unseren Betrachtungen liegt dabei stets ein reduzierter komplexer Raum zugrunde. Von Grauert (vgl. [1], [2]) stammt die folgende Definition: A sei eine analytische Menge in einem Gebiet G des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von G, $\mathfrak{J}$ die Idealgarbe von A, und $\Omega(G)$ bezeichne die Garbe der Keime holomorpher Pfaffscher Formen auf G. Dann sei für $x \in G$

$$\mathfrak{K}_x := \Big\{\omega_x \in \Omega(G)_x\,;\; \omega_x = \sum_{\varrho=1}^{r} h_\varrho d f_\varrho + \sum_{\sigma=1}^{s} g_\sigma \varphi_\sigma, \qquad f_\varrho,\, g_\sigma \in \mathfrak{J}_x,\; h_\varrho \in \mathcal{O}_x,\; \varphi_\sigma \in \Omega(G)_x\Big\}.$$

Die Kollektion der $\mathfrak{K}_x$ definiert eine Untergarbe $\mathfrak{K}$ von $\Omega(G)$.

Definition 1. (nach Grauert-Kerner, Def. 1.2 in [2]). $\Omega_a(A) := \Omega(G)/\mathfrak{K}|A$ *heißt die Garbe der Keime von holomorphen Pfaffschen a-Formen auf A.* (Der Index a soll an die algebraische Konstruktion der Differentialformen erinnern.)

Grauert-Kerner zeigen (Satz 1.2 in [2]), daß $\Omega_a(A)$ unabhängig von der Einbettung von A definiert ist. Man kann daher für jeden komplexen Raum X die Garbe $\Omega_a(X)$ der Keime holomorpher Pfaffscher a-Formen definieren. $\Omega_a(X)$ ist eine kohärente analytische Garbe; ist X_{sg} die Singularitätenmenge von X, so stimmt $\Omega_a(X)$ über der Mannigfaltigkeit $X - X_{sg}$ mit der „klassischen" Garbe $\Omega(X - X_{sg})$ der Keime holomorpher Pfaffscher Formen überein.

Wir wenden uns nun einer von Rossi in [6] gegebenen Definition für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen zu. A sei wieder eine analytische Menge in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$. Wir definieren

$$S(A) := \Big\{(a_1, \ldots, a_n, z) \in C^{2n};\; z \in A,\; \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{J}_z\Big\}.$$

π sei die durch $(a_1, \ldots, a_n, z) \to z$ definierte Abbildung von $S(A)$ auf A; dann heißt der Vektorraum $S(A)_x := \pi^{-1}(x)$, $x \in A$, der Tangentialraum von A

in x und $(S(A), \pi)$ der Tangentialraum über A. $(S(A), \pi)$ ist unabhängig von der Einbettung von A, d. h.: Gibt es eine analytische Menge B in einem Gebiet H eines $\mathbf{C}^m$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi: A \to B$, so existiert ein biholomorpher Faserraumisomorphismus $\psi: S(A) \to S(B)$, dessen Beschränkung auf die Tangentialräume in den Punkten $x \in A$ linear ist. Folglich kann man für jeden komplexen Raum X den Tangentialraum $(S(X), \pi)$ definieren. $(S(X), \pi)$ ist ein linearer Raum über x im Sinne von [1]; $(S(X-X_{sg}), \pi)$ stimmt mit dem Tangentialbündel über der Mannigfaltigkeit $X - X_{sg}$ überein. Literatur zum Begriff des Tangentialraumes findet man bei KAUP [3] und ROSSI [6].

Definition 2. (nach ROSSI, Def. 4.2 in [6]). *Eine holomorphe Pfaffsche g-Form auf der offenen Menge $U \subset X$ ist eine holomorphe Funktion auf $S(U) = S(X)|U$, die auf den Fasern $S(X)_x$, $x \in U$, linear ist. $\Omega_g(X)$ bezeichnet die Garbe der Keime von holomorphen Pfaffschen g-Formen auf X.* (Der Index g erinnert an die geometrische Definition der Differentialformen.)

Es ist wieder $\Omega_g(X - X_{sg}) = \Omega(X - X_{sg})$. $\Omega_g(X)$ läßt die folgende Beschreibung zu (Theorem 4.3b in [6]): Eine Umgebung U von $x \in X$ sei biholomorph äquivalent zu einer analytischen Menge A in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$. Dann definieren wir für $y \in G$:

$\mathfrak{K}'_y := \{\omega_y \in \Omega(G)_y$; ist ω ein Repräsentant von ω_y über einer zusammenhängenden Umgebung V von y, so gilt $\omega|(S(A)|A \cap V) = 0\}$:

Die Kollektion der $\mathfrak{K}'_y$, $y \in G$, definiert eine kohärente analytische Untergarbe $\mathfrak{K}'$ von $\Omega(G)$ (Theorem 4.4 in [6]), und es ist $\Omega_g(X)|U$ isomorph zu $\Omega(G)/\mathfrak{K}'|A$. Mit $\mathfrak{K}'$ ist auch $\Omega_g(X)$ kohärent.

U sei eine offene Teilmenge des komplexen Raumes X. Unter einem holomorphen Vektorfeld v über U verstehen wir einen holomorphen Schnitt in dem Faserraum $(S(U), \pi)$. Mit $\mathfrak{S}(X)$ bezeichnen wir die Garbe der Keime von holomorphen Vektorfeldern über X.

Definition 3. *$\mathcal{O}(X)$ sei die Strukturgarbe von X. Dann heißt*

$$\Omega_h(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathfrak{S}(X), \mathcal{O}(X))$$

die Garbe der Keime holomorpher Pfaffscher h-Formen auf X.

$\mathfrak{S}(X)$ ist eine kohärente analytische Garbe (Theorem 3.5 in [6]), also auch $\Omega_h(X)$ (vgl. Proposition 6, § 2, in [9]). Nach Proposition 5, § 2, in [9] ist der kanonische Homomorphismus

$$\Omega_h(X)_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)_x}(\mathfrak{S}(X)_x, \mathcal{O}(X)_x)$$

für alle $x \in X$ bijektiv. Es gilt wieder $\Omega_h(X - X_{sg}) = \Omega(X - X_{sg})$.

Definition 4. *U durchlaufe die offenen Teilmengen von X. Die durch das Garbendatum der Moduln $H^0(U - X_{sg}, \Omega(X - X_{sg}))$ definierte Garbe $\Omega_b(X)$ (i.e. die 0-te Bildgarbe von $\Omega(X - X_{sg})$ bzgl. der kanonischen Injektion von $X - X_{sg}$ in X) heißt Garbe der Keime von holomorphen Pfaffschen b-Formen auf X.*

Für $\Omega_b(X)$ gilt ebenfalls $\Omega_b(X - X_{sg}) = \Omega(X - X_{sg})$.

Zwischen Ω_a, Ω_g, Ω_h und Ω_b existieren kanonische Homomorphismen, die wir jetzt angeben wollen. Es sei x ein Punkt des komplexen Raumes X und U eine Umgebung von x, die biholomorph äquivalent zu einer analytischen Menge A in einem Gebiet G des komplexen Zahlenraumes $\mathbf{C}^n$ ist. Dann gilt für jedes $y \in G$ $\mathfrak{K}_y \subset \mathfrak{K}'_y$, wie man sich sofort überlegt. Somit kann man in kanonischer Weise einen surjektiven analytischen Garbenhomomorphismus

$$\varrho' : \Omega_a(U) \to \Omega_g(U)$$

definieren, und man überlegt sich, daß ϱ' nicht von der Einbettung von U abhängt; damit ist ein analytischer Garbenhomomorphismus

$$\varrho : \Omega_a(X) \to \Omega_g(X)$$

definiert. ϱ ist surjektiv. U sei wieder eine offene Teilmenge von X und ω eine holomorphe Pfaffsche g-Form auf U. Dann läßt sich für jedes offene $V \subset U$ eine $H^0(V, \mathcal{O}(X))$-lineare Abbildung $\omega_V : H^0(V, \mathfrak{S}(X)) \to H^0(V, \mathcal{O}(X))$ definieren vermöge

$$\omega_V(v)(x) := \omega(v(x)), \qquad v \in H^0(V, \mathfrak{S}(X)), \qquad x \in V.$$

Die Kollektion dieser ω_V definiert eindeutig ein Element $\omega' \in H^0(U, \Omega_h(X))$. Die Zuordnung $\omega \to \omega'$ induziert einen analytischen Garbenhomomorphismus

$$\sigma : \Omega_g(X) \to \Omega_h(X).$$

Ist $\omega \in H^0(U, \Omega_h(X))$, so wird durch $\omega | U - X_{sg}$ in eindeutiger Weise ein Element aus $H^0(U - X_{sg}, \Omega(X - X_{sg}))$ definiert, wodurch ein kanonischer analytischer Garbenhomomorphismus

$$\tau : \Omega_h(X) \to \Omega_b(X)$$

gegeben ist. τ ist injektiv, wie man sofort sieht. Analog definiert man den kanonischen analytischen Garbenhomomorphismus

$$\varepsilon : \Omega_a(X) \to \Omega_b(X).$$

Wir erhalten damit das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_g(X) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dl, "\varrho"'] & \Omega_h(X) \arrow[dr, "\tau"] & \\
\Omega_a(X) \arrow[rrr, "\varepsilon"'] & & & \Omega_b(X).
\end{tikzcd}$$

Die folgenden Paragraphen sind dem Studium der Abbildungen ε, ϱ, σ gewidmet. Die Aussagen über σ geben dabei eine Antwort auf eine von Rossi gestellte Frage (letzte Zeile von § 4 in [6]).

§ 2. Ein Satz über die Injektivität bzw. Bijektivität von ε

In diesem Abschnitt wird eine Aussage über ε im Fall von „vollständigen Durchschnitten" bewiesen.

Ein komplexer Raum heißt ein *vollständiger Durchschnitt im Punkte* $x \in X$, wenn eine Umgebung U von x biholomorph äquivalent zu einer analytischen

Menge A in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$ ist und der Halm $\mathfrak{J}_x$ der zu A gehörigen Idealgarbe $\mathfrak{J}$ von $n-\dim_x X$ holomorphen Funktionskeimen erzeugt wird. Gilt $n-\dim_x X=1$, so heißt X eine *Hyperfläche in* x. Ist X in jedem Punkt $x\in X$ ein vollständiger Durchschnitt (bzw. eine Hyperfläche), so nennen wir X einen vollständigen Durchschnitt (bzw. eine Hyperfläche).

Zum Beweis des angekündigten Satzes benötigen wir die Begriffe der *homologischen Dimension* hd und der *homologischen Codimension* codh. Dazu sei auf die Standardliteratur der homologischen Algebra verwiesen (z. B. [5]). Wir bemerken, daß man sich bei der Berechnung der homologischen Dimension des Halmes $\mathfrak{G}_x$ einer über einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$ kohärenten analytischen Garbe $\mathfrak{G}$ auf freie Auflösungen beschränken kann (§ 4 in [7]). Ferner machen wir im weiteren Gebrauch von der folgenden Aussage: Ist $\mathfrak{G}$ eine über einer analytischen Menge X in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$ $\mathcal{O}(X)$-kohärente Garbe, dann ist die triviale Fortsetzung $\hat{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ nach G $\mathcal{O}(G)$-kohärent, und für alle $x\in X$ gilt (Theorem 28, Kapitel 9 in [5]):

$$\text{(0)}\qquad \operatorname{codh}_x\mathfrak{G}=\operatorname{codh}_x\hat{\mathfrak{G}}=n-\operatorname{hd}_x\hat{\mathfrak{G}}\,.$$

Satz 1. *Der komplexe Raum X sei ein vollständiger Durchschnitt im Punkte $x\in X$. Ist* $\operatorname{codim}_x X_{sg}:=\dim_x X-\dim_x X_{sg}\geqq 2$, *so ist* $\varepsilon_x:\Omega_a(X)_x\to\Omega_b(X)_x$ *injektiv; gilt* $\operatorname{codim}_x X_{sg}\geqq 3$, *so ist* ε_x *bijektiv.*

Beweis. Satz 1 wird mit Hilfe von Satz I und dem Korollar zu Satz III aus [7] bewiesen. Wir dürfen dabei offenbar folgende Annahmen machen:

(a) *X ist eine k-dimensionale analytische Menge in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$;*

(b) *Ist $\mathcal{O}(G)$ die Strukturgarbe von G, so existieren $n-k$ Elemente $f_1,\dots,f_{n-k}$ aus $H^0(G,\mathcal{O}(G))$, welche in jedem Punkt $x'\in X$ den Halm $\mathfrak{J}_{x'}$ der Idealgarbe $\mathfrak{J}$ von X erzeugen;*

(c) *in jedem Punkt $x'\in X$ ist* $\operatorname{codim}_{x'}X_{sg}\geqq 2$ (bzw. $\geqq 3$).

Im weiteren schreiben wir statt $\mathcal{O}(G)$ einfach $\mathcal{O}$. Es sei $x\in X_{sg}$. Das Ideal $\mathfrak{J}_x$ besitzt eine Syzygienauflösung kleinster Länge:

$$\text{(1)}\qquad 0\to\mathcal{O}_x^{q_d}\xrightarrow{\varphi^{(d)}}\mathcal{O}_x^{q_{d-1}}\to\cdots\xrightarrow{\varphi^{(1)}}\mathcal{O}_x^{q_0}\xrightarrow{\varphi^{(0)}}\mathfrak{J}_x\to 0\,.$$

d ist dann die homologische Dimension von $\mathfrak{J}_x: d=\operatorname{hd}_x\mathfrak{J}$. Mit Hilfe der Sequenz (1) konstruieren wir eine Syzygienauflösung von $\mathfrak{K}_x$.

Die Komponenten der Abbildung $\varphi^{(i)}$, $1\leqq i\leqq d$, bezeichnen wir mit $\varphi_1^{(i)},\dots,\varphi_{q_{i-1}}^{(i)}$. Es sei $h_{\nu_0}:=\varphi^{(0)}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, $1\leqq\nu_0\leqq q_0$; dabei nehme die 1 die ν_0-te Stelle ein. Für ein Element $\eta\in\mathfrak{K}_x$ gilt dann

$$\eta=\sum_{\mu=1}^{n-k}g_\mu df_\mu+\sum_{\nu_0=1}^{q_0}h_{\nu_0}\alpha_{\nu_0},\qquad g_\mu\in\mathcal{O}_x,\qquad \alpha_{\nu_0}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\nu_0\lambda}dz_\lambda,\qquad a_{\nu_0\lambda}\in\mathcal{O}_x,$$

Es sei $p_0:=(n-k)+nq_0$, und die Abbildung $\Phi^{(0)}:\mathcal{O}_x^{p_0}\to\mathfrak{K}_x$ sei definiert durch die Zuordnung

$$(g_\mu,a_{\nu_0\lambda})\to\sum_{\mu=1}^{n-k}g_\mu df_\mu+\sum_{\nu_0=1}^{q_0}h_{\nu_0}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\nu_0\lambda}dz_\lambda\right).$$

$\Phi^{(0)}$ ist surjektiv. Wir berechnen den Kern von $\Phi^{(0)}$; es sei also $\Phi^{(0)}(g_\mu,a_{\nu_0\lambda})=0$. Dann gilt auf X $\sum_{\mu=1}^{n-k}g_\mu df_\mu=0$. Da die df_μ in den gewöhnlichen Punkten von

X linear unabhängig sind, folgt $g_\mu \in \mathfrak{J}_x$, $1 \leqq \mu \leqq n-k$. Somit besitzen die g_μ eine Darstellung

$$g_\mu = \sum_{\nu_0=1}^{q_0} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} h_{\nu_0}, \qquad {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} \in \mathcal{O}_x .$$

Die folgenden drei Gleichungen sind äquivalent:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n-k} \sum_{\nu_0=1}^{q_0} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} h_{\nu_0} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} + \sum_{\nu_0=1}^{q_0} h_{\nu_0} a_{\nu_0 \lambda} \right) dz_\lambda = 0 ,$$

$$\sum_{\nu_0=1}^{q_0} h_{\nu_0} \left(\sum_{\mu=1}^{n-k} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} + a_{\nu_0 \lambda} \right) = 0 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq n),$$

$$\begin{pmatrix} a_{1\lambda} \\ a_{2\lambda} \\ \vdots \\ a_{q_0\lambda} \end{pmatrix} + \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} \begin{pmatrix} {}_\mu A_1^{(1)} \\ {}_\mu A_2^{(1)} \\ \vdots \\ {}_\mu A_{q_0}^{(1)} \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}({}_\lambda B_1^{(1)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_1}^{(1)}),$$

$({}_\lambda B_1^{(1)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_1}^{(1)}) \in \mathcal{O}_x^{q_1}$, $1 \leqq \lambda \leqq n$. Es sei $p_1 := (n-k)\,q_0 + n q_1$. Dann liefert die Zuordnung

$$({}_\mu A_{\nu_0}^{(1)}, {}_\lambda B_{\nu_1}^{(1)}) \to$$
$$\left(\sum_{\nu_0=1}^{q_0} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} h_{\nu_0}, \; -\sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} + \varphi_{\nu_0}^{(1)}({}_\lambda B_1^{(1)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_1}^{(1)}) \right)$$
$$= \left(\varphi^{(0)}({}_\mu A_1^{(1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_0}^{(1)}), \; -\sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} {}_\mu A_{\nu_0}^{(1)} + \varphi_{\nu_0}^{(1)}({}_\lambda B_1^{(1)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_1}^{(1)}) \right)$$

einen surjektiven Homomorphismus $\Phi^{(1)}: \mathcal{O}_x^{p_1} \to \operatorname{Kern} \Phi^{(0)}$. Wir berechnen den Kern von $\Phi^{(1)}$. Es sei also $\Phi^{(1)}({}_\mu A_{\nu_0}^{(1)}, {}_\lambda B_{\nu_1}^{(1)}) = 0$ $(1 \leqq \lambda \leqq n)$. Dann folgt $\varphi^{(0)}({}_\mu A_1^{(1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_0}^{(1)}) = 0$ für alle μ, und das bedeutet:

$$\begin{pmatrix} {}_\mu A_1^{(1)} \\ \vdots \\ {}_\mu A_{q_0}^{(1)} \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}({}_\mu A_1^{(2)}, {}_\mu A_2^{(2)}, \ldots, {}_\mu A_{q_1}^{(2)}),$$

$({}_\mu A_1^{(2)}, \ldots, {}_\mu A_{q_1}^{(2)}) \in \mathcal{O}_x^{q_1}$, $1 \leqq \mu \leqq n-k$. Weiter gilt:

$$\varphi^{(1)}({}_\lambda B_1^{(1)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_1}^{(1)}) = \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} \varphi^{(1)}({}_\mu A_1^{(2)}, \ldots, {}_\mu A_{q_1}^{(2)}), \; 1 \leqq \lambda \leqq n ,$$

$$\begin{pmatrix} {}_\lambda B_1^{(1)} \\ \vdots \\ {}_\lambda B_{q_1}^{(1)} \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} \begin{pmatrix} {}_\mu A_1^{(2)} \\ \vdots \\ {}_\mu A_{q_1}^{(2)} \end{pmatrix} + \varphi^{(2)}({}_\lambda B_1^{(2)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_2}^{(2)}),$$

$({}_\lambda B_1^{(2)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_2}^{(2)}) \in \mathcal{O}_x^{q_2}$, $1 \leqq \lambda \leqq n$. Es sei $p_2 := (n-k) q_1 + n q_2$. Dann liefert die Zuordnung

$$({}_\mu A_{\nu_1}^{(2)}, {}_\lambda B_{\nu_2}^{(2)}) \to$$
$$\to \left(\varphi_{\nu_0}^{(1)}({}_\mu A_1^{(2)}, \ldots, {}_\mu A_{q_1}^{(2)}), \; \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} {}_\mu A_{\nu_1}^{(2)} + \varphi_{\nu_1}^{(2)}({}_\lambda B_1^{(2)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_2}^{(2)}) \right)$$

einen surjektiven Homomorphismus $\Phi^{(2)}: \mathcal{O}_x^{p_2} \to \operatorname{Kern} \Phi^{(1)}$. Analog erhält man sukzessive surjektive $\mathcal{O}_x$-Homomorphismen

$$\Phi^{(i)}: \mathcal{O}_x^{p_i} \to \operatorname{Kern} \Phi^{(i-1)} \subset \mathcal{O}_x^{p_{i-1}},\ 2 \leqq i \leqq d,\ p_i := (n-k) q_{i-1} + n q_i,$$

vermöge der Zuordnungen

$$({}_\mu A_{\nu_{i-1}}^{(i)}, {}_\lambda B_{\nu_i}^{(i)}) \to$$
$$\to \left(\varphi_{\nu_{i-2}}^{(i-1)}({}_\mu A_1^{(i)}, \ldots, {}_\mu A_{q_{i-1}}^{(i)}), (-1)^i \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} {}_\mu A_{\nu_{i-1}}^{(i)} + \varphi_{\nu_{i-1}}^{(i)}({}_\lambda B_1^{(i)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_i}^{(i)})\right),$$

$({}_\mu A_1^{(i)}, \ldots, {}_\mu A_{q_{i-1}}^{(i)}) \in \mathcal{O}_x^{q_{i-1}}$, $1 \leqq \mu \leqq n-k$, $({}_\lambda B_{q_i}^{(i)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_i}^{(i)}) \in \mathcal{O}_x^{q_i}$, $1 \leqq \lambda \leqq n$. Wir berechnen nun den Kern von $\Phi^{(d)}$. Ist $\Phi^{(d)}({}_\mu A_{\nu_{d-1}}^{(d)}, {}_\lambda B_{\nu_d}^{(d)}) = 0$, so folgt

$$\varphi^{(d-1)}({}_\mu A_1^{(d)}, \ldots, {}_\mu A_{q_{d-1}}^{(d)}) = 0$$

für alle μ, und das bedeutet:

$$\begin{pmatrix} {}_\mu A_1^{(d)} \\ \vdots \\ {}_\mu A_{q_{d-1}}^{(d)} \end{pmatrix} = \varphi^{(d)}({}_\mu A_1^{(d+1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_d}^{(d+1)}),$$

$({}_\mu A_1^{(d+1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_d}^{(d+1)}) \in \mathcal{O}_x^{q_d}$, $1 \leqq \mu \leqq n-k$. Weiter gilt

$$\varphi^{(d)}({}_\lambda B_1^{(d)}, \ldots, {}_\lambda B_{q_d}^{(d)}) = (-1)^{d+1} \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} \varphi^{(d)}({}_\mu A_1^{(d+1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_d}^{(d+1)}),$$

$1 \leqq \lambda \leqq n$, und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} {}_\lambda B_1^{(d)} \\ \vdots \\ {}_\lambda B_{q_d}^{(d)} \end{pmatrix} = (-1)^{d+1} \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} \begin{pmatrix} {}_\mu A_1^{(d+1)} \\ \vdots \\ {}_\mu A_{q_d}^{(d+1)} \end{pmatrix}, 1 \leqq \lambda \leqq n,$$

weil $\varphi^{(d)}$ injektiv ist. Es sei $p_{d+1} := (n-k) q_d$. Dann liefert die Zuordnung

$$({}_\mu A_{\nu_d}^{(d+1)}) \to \left(\varphi_{\nu_{d-1}}^{(d)}({}_\mu A_1^{(d+1)}, \ldots, {}_\mu A_{q_d}^{(d+1)}), (-1)^{d+1} \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\lambda} {}_\mu A_{\nu_d}^{(d+1)}\right)$$

einen surjektiven Homomorphismus $\Phi^{(d+1)}: \mathcal{O}_x^{p_{d+1}} \to \operatorname{Kern} \Phi^{(d)}$. $\Phi^{(d+1)}$ ist injektiv, weil $\varphi^{(d)}$ injektiv ist. Wir haben damit eine exakte Sequenz

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}_x^{p_{d+1}} \xrightarrow{\Phi^{(d+1)}} \mathcal{O}_x^{p_d} \to \cdots \xrightarrow{\Phi^{(1)}} \mathcal{O}_x^{p_0} \xrightarrow{\Phi^{(0)}} \mathfrak{R}_x \to 0.$$

Aus (2) erhalten wir dann sofort die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_x^{p_{d+1}} \xrightarrow{\Phi^{(d+1)}} \mathcal{O}_x^{p_d} \to \cdots \xrightarrow{\Phi^{(1)}} \mathcal{O}_x^{p_0} \xrightarrow{\Phi^{(0)}} \Omega(G)_x \to \Omega(G)_x/\mathfrak{R}_x \to 0.$$

Nun ist $\Omega(G)_x = \mathcal{O}_x^n$ und $\Omega(G)_x/\mathfrak{R}_x = (\Omega(G)/\mathfrak{R})_x = (\hat{\Omega}_a(X))_x$, wobei $\hat{\Omega}_a(X)$ die triviale Fortsetzung von $\Omega_a(X)$ nach G bedeutet. Dann gilt $\mathrm{hd}_x \hat{\Omega}_a(X) \leqq d+2$. Es ist $\mathrm{hd}_x \mathfrak{I} = d$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X)$ die Strukturgarbe von X und mit $\hat{\mathcal{O}}(X)$ ihre triviale Fortsetzung nach G, so folgt aus (0), da $\mathcal{O}(X)_x$ ein Macaulayring ist (vgl. [8], [11]):

$$k = \dim_x X = \mathrm{codh}_x \mathcal{O}(X) = n\text{-}\mathrm{hd}_x \hat{\mathcal{O}}(X), \qquad \mathrm{hd}_x \hat{\mathcal{O}}(X) = n-k > 0.$$

π sei die Projektion von $\mathcal{O}(G)$ auf $\mathcal{O}(G)/\mathfrak{J} = \hat{\mathcal{O}}(X)$. Nach Theorem 13 in [5], Kapitel 7, folgt dann wegen $\mathrm{hd}_x \hat{\mathcal{O}}(X) > 0$, daß

$$d = \mathrm{hd}_x \mathfrak{J} = \mathrm{hd}_x \mathrm{Kern}\,\pi = \mathrm{hd}_x \hat{\mathcal{O}}(X) - 1 = n - k - 1$$

gilt. Also erhalten wir $\mathrm{hd}_x \hat{\Omega}_a(X) \leqq n - k + 1$, $\mathrm{codh}_x \Omega_a(X) = n - \mathrm{hd}_x \hat{\Omega}_a(X) \geqq k - 1$. Auf Grund von (b) gilt $\mathrm{codh}_{x'} \Omega_a(X) \geqq k - 1$ für alle $x' \in X_{sg}$. Wegen (c) gilt für alle $x' \in X_{sg}$ $k \geqq \dim_{x'} X_{sg} + 2$, $\mathrm{codh}_{x'} \Omega_a(X) \geqq k - 1 \geqq \dim_{x'} X_{sg} + 1$, und nach Satz I in [7] folgt hieraus, daß ε_x injektiv ist. Analog schließt man mit Hilfe des Korollars zu Satz III in [7], daß ε_x im Falle $\mathrm{codim}_{x'} X_{sg} \geqq 3$ für alle $x' \in X_{sg}$ bijektiv ist.

Aus Satz 1 ergibt sich sofort

Satz 2. *Voraussetzungen wie in Satz 1. Ist* $\mathrm{codim}_x X_{sg} \geqq 2$, *so ist* ϱ_x *bijektiv und* σ_x *injektiv. Ist* $\mathrm{codim}_x X_{sg} \geqq 3$, *so sind* ϱ_x, σ_x *und* τ_x *bijektiv.*

Bemerkung 1. Die Aussagen von Satz 1 und Satz 2 gelten sofort für eine Umgebung von x.

Bemerkung 2. Der Beweis für die Injektivität von ε_x in Satz 1 kann unter Umgehung der Sätze von Scheja auch durch eine einfache direkte Rechnung abgeleitet werden.

§ 3. Gegenbeispiele

In diesem Paragraphen soll an Hand von Beispielen die Schärfe der Sätze 1 und 2 diskutiert werden.

(a) *Beispiel einer Hyperfläche X, für die* $\mathrm{codim}\, X_{sg} = 1$ *gilt, die Abbildung* ϱ *jedoch nicht injektiv ist.* Es sei $f := z_1^2 - z_2^3$ und $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; f(z_1, z_2) = 0\}$. X ist eine Hyperfläche mit $X_{sg} = \{(0, 0)\}$.

$$v := \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} = -3z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

liefert bei Beschränkung auf X offenbar ein Element aus $H^0(X, \mathfrak{S}(X))$, welches in jedem Punkt $x \in X - X_{sg}$ den Tangentialraum $S(X)_x$ erzeugt. An v liest man ab, daß $\omega := 2z_2^2 dz_1 - 3z_1 z_2 dz_2$ eine holomorphe Pfaffsche Form auf $\mathbf{C}^2$ ist, die zu $H^0(X, \mathfrak{K}')$ gehört. Wäre der von ω in $0 = (0, 0)$ erzeugte Keim ω_0 ein Element von $\mathfrak{K}_0$, so müßte sich ω in einer Umgebung U von 0 schreiben lassen in der Form $\omega = g\,df + f\omega'$ mit $g \in H^0(U, \mathcal{O}(\mathbf{C}^2))$, $\omega' \in H^0(U, \Omega(\mathbf{C}^2))$. Dann würde auf $X \cap U$ gelten:

$$\omega = g\,df = 2g z_1 dz_1 - 3g z_2^2 dz_2, \qquad g = \frac{z_2^2}{z_1}.$$

Die Funktion $\frac{z_2^2}{z_1}$ ist auf X zwar stetig, aber nicht holomorph, womit ein Widerspruch abgeleitet ist. Also gilt $\omega_0 \notin \mathfrak{K}_0$, und ϱ_0 ist nicht injektiv. Mit ϱ_0 ist auch ε_0 nicht injektiv.

(b) *Beispiel eines perfekten*[1] *komplexen Raumes X, für den* $\mathrm{codim}\, X_{sg} = 2$ *gilt,* ϱ *jedoch nicht injektiv ist.* Es sei $f_1 := z_3^2 - z_2 z_4$, $f_2 := z_4^2 - z_1 z_3$, $f_3 := z_1 z_2 -$

[1] *Ein komplexer Raum X heißt perfekt, wenn der Halm* $\mathcal{O}(X)_x$ *der Strukturgarbe* $\mathcal{O}(X)$ *in jedem Punkte* $x \in X$ *ein Macaulayring ist.*

$-z_3z_4$, und $X:=\{z\in\mathbf{C}^4; f_1(z)=f_2(z)=f_3(z)=0\}$. Es ist $X_{sg}=\{(0,0,0,0)\}$. KOESTNER zeigt in [4], daß X ein 2-dimensionaler normaler, folglich perfekter (s. [11], S. 397) komplexer Raum ist, die Funktionen f_1, f_2, f_3 das die Menge X in $0=(0,0,0,0)$ definierende Ideal $\mathfrak{J}_0$ erzeugen und daß X kein vollständiger Durchschnitt ist. Es gilt

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -z_4 & 2z_3 & -z_2 \\ -z_3 & 0 & -z_1 & 2z_4 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & -z_3 \end{pmatrix}.$$

Die Beschränkungen der holomorphen Vektorfelder

$$\begin{aligned} v_1 &:= -2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4},\\ v_2 &:= 3z_4\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_3}+2z_3\frac{\partial}{\partial z_4},\\ v_3 &:= -3z_3\frac{\partial}{\partial z_2}-2z_4\frac{\partial}{\partial z_3}-z_1\frac{\partial}{\partial z_4} \end{aligned}$$

auf X sind Elemente von $H^0(X,\mathfrak{S}(X))$, die in jedem Punkt $x\in X-X_{sg}$ den Vektorraum $S(X)_x$ erzeugen. Wir betrachten die folgende holomorphe Pfaffsche Form auf dem $\mathbf{C}^4$: $\omega:=z_2dz_1+2z_1dz_2-3z_4dz_3$. ω annulliert auf X alle v_i $(i=1,2,3)$ und verschwindet in 0, also gilt $\omega\in H^0(X,\mathfrak{K}')$. Wäre der von ω in 0 erzeugte Keim ω_0 ein Element von $\mathfrak{K}_0$, so müßte sich ω in einer Umgebung U von 0 schreiben lassen in der Form

$$\omega=\sum_{\nu=1}^{3}g_\nu df_\nu+\sum_{\mu=1}^{3}f_\mu\omega_\mu$$

mit $g_\nu\in H^0(U,\mathcal{O}(\mathbf{C}^4))$ und $\omega_\mu\in H^0(U,\Omega(\mathbf{C}^4))$. Auf $X\cap U$ müßte dann gelten

$$\begin{aligned} z_2 &= -z_3g_2+z_2g_3\\ 2z_1 &= -z_4g_1+z_1g_3\\ -3z_4 &= 2z_3g_1-z_1g_2-z_4g_3\\ 0 &= -z_2g_1+2z_4g_2-z_3g_3. \end{aligned}$$

Auf Grund der 1. Gleichung wäre $g_3\,(0,z_2,0,0)\equiv 1$ und auf Grund der 2. Gleichung $g_3\,(z_1,0,0,0)\equiv 2$. Das widerspricht sich offenbar. Also gilt $\omega_0\notin K_0$, und ϱ_0 ist als nicht injektiv nachgewiesen. Es folgt, daß auch ε_0 nicht injektiv ist, woraus sich übrigens nach Satz 1 wiederum ergibt, daß X kein vollständiger Durchschnitt ist. Der Grund dafür, daß ε_0 nicht injektiv ist, liegt — syzygientheoretisch gesehen — darin, daß die Differentiale df_ν, die bei vollständigen Durchschnitten wegen ihrer linearen Unabhängigkeit in den gewöhnlichen Punkten praktisch keine Rolle spielen, die Länge der Syzygienauflösung im Falle des angegebenen Beispiels vergrößern. Deshalb ist auch zu erwarten, daß die Surjektivitätsaussage für ε in Satz 1 echt an die Bedingung des vollständigen Durchschnitts geknüpft ist.

(c) *Beispiel einer Hyperfläche X, für die* $\operatorname{codim} X_{sg} = 2$ *gilt, σ jedoch nicht surjektiv ist.* Es sei $f := z_3^2 - z_1 z_2$ und $X := \{z \in \mathbf{C}^3;\ f(z) = 0\}$. X ist eine Hyperfläche mit $X_{sg} = \{(0,0,0)\}$. Es ist $\operatorname{grad} f = (-z_2, -z_1, 2z_3)$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} v_1 &:= 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \\ v_2 &:= 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \\ v_3 &:= 2z_3 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_3}, \\ v_4 &:= 2z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_3}; \end{aligned}$$

man prüft leicht nach, daß die Beschränkungen der Vektorfelder v_i auf X Elemente von $H^0(X, \mathfrak{S}(X))$ darstellen. Im weiteren kennzeichnen wir Beschränkungen von Vektorfeldern oder Funktionen auf X durch einen Querstrich über dem betreffenden Symbol.

Behauptung 1. $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ sind ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}(X)_0$ $(0 = (0,0,0))$.

Beweis. Wir müssen zu einem beliebigen Element $u \in \mathfrak{S}(X)_0$ eine Darstellung $u = \sum_\nu a_\nu \overline{v_\nu}$ mit $a_\nu \in \mathcal{O}(X)_0$ finden. $u \in \mathfrak{S}(X)_0$ sei also vorgegeben. Dann gibt es eine $\mathbf{C}^3$-Umgebung U von 0 und ein Vektorfeld $v \in H^0(U, \mathfrak{S}(\mathbf{C}^3))$, derart daß der Keim von $\bar{v}$ in 0 gleich u ist. Es sei $v = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2} + c \frac{\partial}{\partial z_3}$. Dann gilt $-z_2 a - z_1 b + 2z_3 c = (z_3^2 - z_1 z_2) g$ mit in einer Umgebung von 0 holomorphem g. $z_2 a$ liegt in dem von z_1, z_3 erzeugten Ideal, entsprechend $z_1 b$ in dem von z_2, z_3 erzeugten Ideal. Daraus folgt $a = a_1 z_1 + a_2 z_3$, $b = b_1 z_2 + b_2 z_3$, wobei die a_j und die b_j in einer Umgebung von 0 holomorph sind. Es sei $w := \frac{a_1}{2} v_1 + \frac{a_2}{2} v_3 + \frac{b_1}{2} v_2 + \frac{b_2}{2} v_4$. Dann gilt $v - w = d \frac{\partial}{\partial z_3}$, wobei d in einer Umgebung V von 0 holomorph ist. Nun ist $\bar{v} - \bar{w} \in H^0(V \cap X, \mathfrak{S}(X))$. Daraus folgt $2\overline{z_3}\bar{d} = 0$, $\bar{d} = 0$, womit Behauptung 1 bewiesen ist.

Behauptung 2. Durch die Zuordnungen $\overline{v_1} \to \overline{z_3}\overline{f_1}$, $\overline{v_2} \to \overline{z_3}\overline{f_2}$, $\overline{v_3} \to \overline{z_2}\overline{f_1}$, $\overline{v_4} \to \overline{z_1}\overline{f_2}$ $(f_\nu \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^3)_0)$ ist (bei homomorpher Fortsetzung auf $\mathfrak{S}(X)_0$) ein Element $\omega_0 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathfrak{S}(X), \mathcal{O}(X))_0$ definiert.

Beweis. Wir müssen zeigen: Gilt für ein Vektorfeld $v = \sum_{\nu=1}^{4} h_\nu v_\nu$ mit in einer Umgebung von 0 holomorphen Koeffizienten h_ν $\bar{v} = 0$, so ist

$$\overline{h_1}\,\overline{z_3}\,\overline{f_1} + \overline{h_2}\,\overline{z_3}\,\overline{f_2} + \overline{h_3}\,\overline{z_2}\,\overline{f_1} + \overline{h_4}\,\overline{z_1}\,\overline{f_2} = 0. \tag{3}$$

Dann ist ω_0 ein wohldefiniertes Element aus $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)_0}(\mathfrak{S}(X)_0, \mathcal{O}(X)_0)$ und damit aus $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathfrak{S}(X), \mathcal{O}(X))_0 = \Omega_h(X)_0$. Es sei also $v = \sum_{\nu=1}^{4} h_\nu v_\nu$ und $\bar{v} = 0$. Es folgt $h_1 z_1 + h_3 z_3 = \alpha(z_3^2 - z_1 z_2)$, $h_2 z_2 + h_4 z_3 = \beta(z_3^2 - z_1 z_2)$, wobei α, β in einer Umgebung von 0 holomorph sind. Dann ist

$$z_1(h_1 + \alpha z_2) = z_3(\alpha z_3 - h_3), \qquad z_2(h_2 + \beta z_1) = z_3(\beta z_3 - h_4). \tag{4}$$

Da $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)_0$ ein faktorieller Ring ist und z_1, z_2, z_3 in $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)_0$ Primelemente sind, folgt

$$\begin{aligned} g_1 z_3 &= h_1 + \alpha z_2, & g_2 z_3 &= h_2 + \beta z_1, \\ g_3 z_1 &= \alpha z_3 - h_3, & g_4 z_2 &= \beta z_3 - h_4 \end{aligned} \tag{5}$$

mit in einer Umgebung von 0 holomorphen g_ν. Setzt man (5) in (4) ein, so folgt $z_1 g_1 z_3 = z_3 g_3 z_1$, $z_2 g_2 z_3 = z_3 g_4 z_2$, also $g_1 = g_3$, $g_2 = g_4$. Damit hat man

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 z_3 - \alpha z_2, & h_2 &= g_2 z_3 - \beta z_1, \\ h_3 &= \alpha z_3 - g_1 z_1, & h_4 &= \beta z_3 - g_2 z_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir setzen (6) in (3) ein und erhalten

$$\overline{f_1}(\overline{g_1}\,\overline{z_3^2} - \overline{\alpha}\overline{z_2}\overline{z_3} + \overline{\alpha}\overline{z_2}\overline{z_3} - \overline{g_1}\overline{z_1}\overline{z_2}) + \overline{f_2}(\overline{g_2}\,\overline{z_3^2} - \overline{\beta}\overline{z_1}\overline{z_3} + \overline{\beta}\overline{z_1}\overline{z_3} - \overline{g_2}\overline{z_1}\overline{z_2}) = 0,$$

q.e.d.

Behauptung 3. Für $f_1 := 1$ und $f_2 := z_3$ liegt der auf Grund von Behauptung 2 definierte Keim ω_0 nicht in $\sigma_0(\Omega_g(X)_0)$.

Beweis. Läge ω_0 in $\sigma_0(\Omega_g(X)_0)$, so gäbe es eine in einer $\mathbf{C}^3$-Umgebung von 0 holomorphe Pfaffsche Form $\eta := a\,dz_1 + b\,dz_2 + c\,dz_3$ mit $\sigma_0(\eta_0 + \mathfrak{K}_0') = \omega_0$. Dann müßte gelten $\overline{\eta(v_1)} = 2\bar{a}\overline{z_1} + \bar{c}\overline{z_3} = \overline{z_3}$, $\overline{\eta(v_2)} = 2\bar{b}\overline{z_2} + \bar{c}\overline{z_3} = \overline{z_3^2}$ oder

$$2az_1 + cz_3 = z_3 + A(z_3^2 - z_1 z_2), \tag{7}$$

$$2bz_2 + cz_3 = z_3^2 + B(z_3^2 - z_1 z_2), \tag{8}$$

wobei A, B in einer $\mathbf{C}^3$-Umgebung von 0 holomorph sind. Indem man $z_1 = z_2 = 0$ setzt, folgt aus (7) $c(0,0,z_3)\,z_3 = z_3 + A(0,0,z_3)z_3^2$; das bedeutet, c ist eine Einheit. Dann folgt aus (8), daß z_3 in dem von z_3^2 und z_2 aufgespannten Ideal liegt. Widerspruch! Damit haben wir gezeigt, daß $\sigma_0\colon \Omega_g(X)_0 \to \Omega_h(X)_0$ nicht surjektiv ist. Insbesondere ist dann auch ε_0 nicht surjektiv.

§ 4. Ein Satz über die Injektivität von σ im Falle von Hyperflächen

In § 3 haben wir gezeigt, daß die Aussagen des Satzes 1 über die Abbildung ε in gewisser Weise als scharf zu bezeichnen sind. Beispiel (c) aus § 3 beweist darüberhinaus, daß die Aussage von Satz 2 über die Surjektivität von σ zumindest für vollständige Durchschnitte im allgemeinen nicht verschärft werden kann. Hingegen ist die in Satz 2 über die Injektivität von σ gemachte Aussage in keiner Weise erschöpfend, wie in diesem Paragraphen am Beispiel der Hyperflächen gezeigt werden soll. Im übrigen ist den Autoren kein Beispiel bekannt, für das σ nicht injektiv ist.

Satz 3. *X sei eine analytische Menge in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$. Für $x \in X_{sg}$ sei die Einbettungsdimension von X gleich n. Es sei $v_\varrho = (v_\varrho^1, \ldots, v_\varrho^n)$, $1 \leqq \varrho \leqq r$,* *eine Menge von Vektorfeldern über einer Umgebung $U \subset X$ von x, die in jedem Punkt $y \in U - X_{sg}$ den Tangentialvektorraum $S(X)_y$ erzeugen. Dann ist*

$$\sigma_x : \Omega_g(X)_x \to \Omega_h(X)_x$$

genau dann nicht injektiv, wenn es ein ν_0 und Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_0 - 1}, \alpha_{\nu_0 + 1}, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}(G)_x$ gibt, derart daß für $\varrho = 1, \ldots, r$ gilt:

$$v_\varrho^{\nu_0} \equiv \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^{n} \alpha_\nu v_\varrho^\nu \bmod \mathfrak{J}_x ;$$

dabei bezeichne $\mathfrak{J}_x$ das die Menge X in x definierende Ideal.

Beweis. σ_x ist genau dann nicht injektiv, wenn es in einer $\mathbf{C}^n$-Umgebung V von x eine holomorphe Pfaffsche Form $\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu dz_\nu$ gibt, für die gilt:

1) für alle $y \in X \cap V - X_{sg}$ ist $\omega_y \in \mathfrak{R}'_y$,

2) es existiert ein ν_0 mit $\beta_{\nu_0} = 1$.

Hieraus ergibt sich sofort Satz 3.

Anmerkung zu Satz 3. Vektorfelder $v_1, \ldots, v_r$ mit den in Satz 3 genannten Eigenschaften existieren immer, weil $\mathfrak{S}(X)$ kohärent ist. In [10], Lemma 15.1, hat WHITNEY ein Verfahren angegeben, wie man spezielle derartige Vektorfelder aus einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{J}_x$ berechnen kann.

Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich jetzt ohne Mühe der angekündigte Satz beweisen.

Satz 4. *Der komplexe Raum X sei eine Hyperfläche. Dann ist $\sigma : \Omega_g(X) \to \Omega_h(X)$ injektiv.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen: Ist X Nullstellengebilde einer holomorphen Funktion f in einem Gebiet G eines $\mathbf{C}^n$ und wird das die Menge X in $x \in X_{sg}$ definierende Ideal $\mathfrak{J}_x$ von f_x erzeugt, so ist σ_x injektiv.

Die holomorphen Vektorfelder

$$v_{\varrho\sigma} := \frac{\partial f}{\partial z_\varrho} \frac{\partial}{\partial z_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial z_\sigma} \frac{\partial}{\partial z_\varrho}, \qquad 1 \leqq \varrho, \sigma \leqq n,$$

besitzen die in Satz 3 verlangten Eigenschaften. Angenommen, σ_x sei nicht injektiv. Dann existieren ein ν_0 und Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_0 - 1}, \alpha_{\nu_0 + 1}, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}(G)_x$, derart daß gilt:

$$v_{\varrho\sigma}^{\nu_0} \equiv \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_0}}^{n} \alpha_\nu v_{\varrho\sigma}^\nu \bmod \mathfrak{J}_x .$$

Daraus folgt $\dfrac{\partial f}{\partial z_\nu} \equiv -\alpha_\nu \dfrac{\partial f}{\partial z_{\nu_0}} \bmod \mathfrak{J}_x$ für alle $\nu \neq \nu_0$. Folglich gibt es Elemente $\beta_\nu \in \mathcal{O}(G)_x$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = -\alpha_\nu \frac{\partial f}{\partial z_{\nu_0}} + \beta_\nu f$$

für alle $\nu \neq \nu_0$. Diese Gleichungen implizieren aber $\dfrac{\partial}{\partial z_\nu} + \alpha_\nu \dfrac{\partial}{\partial z_{\nu_0}} \in S(X)_x$ für $\nu \neq \nu_0$, d. h. es gibt $n-1$ holomorphe Vektorfelder $w_1, \ldots, w_{n-1}$ über einer Umgebung von x, derart daß $w_1(x), \ldots, w_{n-1}(x)$ linear unabhängig sind. Hieraus ergibt sich mit Corollar 3.4 zu Theorem 3.2 aus [6]: $x \notin X_{sg}$, ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung! σ_x ist folglich injektiv.

Zusatz bei der Korrektur: In Vol. 87, Amer. J. Math. (1965), beweist Lipman auf S. 896 für affine algebraische Varietäten eine Aussage, aus der man unmittelbar ein komplex-analytisches Analogon gewinnt, welches zeigt, daß die zu Satz 1 angegebenen Bedingungen über die Codimension der Singularitätenmenge im Falle von reduzierten vollständigen Durchschnitten nicht nur hinreichend sondern auch notwendig sind für die Injektivität bzw. Bijektivität von ε_x.

Literatur

[1] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331—368 (1962).
[2] —, u. H. Kerner: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. **153**, 236—260 (1964).
[3] Kaup, W.: Holomorphe Vektorfelder und Transformationsgruppen komplexer Räume. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Heft **24** (1963).
[4] Koestner, A.: Normale algebroide Ringe der Dimension 2. Dissertation Münster, 1965.
[5] Northcott, D. G.: An introduction to homological algebra. Cambridge: University Press 1960.
[6] Rossi, H.: Vector fields on analytic spaces. Ann. Math. **78**, No. 3, 455—467 (1963).
[7] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. **144**, 345—360 (1961).
[8] — Eine Anwendung Riemannscher Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Arch. Math. **7**, 341—348 (1961).
[9] Serre, J. P.: Faiscaux algébriques cohérents. Ann. Math. **61**, 197—278 (1955).
[10] Whitney, H.: Tangents to an analytic variety. Ann. Math. **81**, 496—549 (1965).
[11] Zariski, O., and P. Samuel: Commutative Algebra. Vol. II, Princeton: van Nostrand Co. 1960.

Dr. H.-J. Reiffen
1. Mathematisches Institut der Universität
44 Münster

Dr. Udo Vetter
Mathematisches Institut B
der Technischen Hochschule
3000 Hannover

(Eingegangen am 14. Oktober 1965)