ROELCKE, W.
Math. Annalen 167, 292—337 (1966)

Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I*

WALTER ROELCKE

Diese Arbeit erscheint in zwei Teilen. Die Aufteilung ist aus der nachfolgenden Inhaltsübersicht zu ersehen. Die Einleitung bezieht sich auf beide Teile zusammen. Eine Liste häufig benutzter Bezeichnungen und das Literaturverzeichnis stehen am Ende des ersten Teiles der Arbeit. Zahlen in eckigen Klammern stellen Verweise auf das Literaturverzeichnis dar. Formeln, Definitionen und Sätze sind paragraphenweise numeriert — Satz 3.1 bedeutet z. B. den ersten Satz in § 3. Das Ende des Beweises eines Satzes oder Lemmas ist stets durch einen fetten senkrechten Strich markiert.

Einleitung

Die von H. MAASS in [11] und [12] eingeführten reell-analytischen automorphen Formen in einer komplexen Variablen z lassen sich für reelles Gewicht k als Lösungen von formal selbstadjungierten partiellen Eigenwertdifferentialgleichungen ansehen. In der vorliegenden Abhandlung werden diese Eigenwertprobleme nach den Gesichtspunkten der Spektraltheorie in dem angemessenen Hilbert-Raum näher diskutiert. Insbesondere werden die Fragen nach der wesentlichen Selbstadjungiertheit des zugrundeliegenden Differentialoperators auf natürlichen Definitionsbereichen und nach der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und der das kontinuierliche Spektrum repräsentierenden Eigenpakete positiv beantwortet und zugehörige Entwicklungssätze für „willkürliche" Funktionen bewiesen. — Auf Anwendungen der Theorie wird nicht eingegangen.

Ihrer Zielsetzung nach kann diese Arbeit als eine Verallgemeinerung meiner Dissertation [18] angesehen werden, in der nur von den voll invarianten automorphen Funktionen zu Grenzkreisgruppen erster Art, insbesondere den Hauptkongruenzgruppen, die Rede war. Den Untersuchungen wird zunächst eine beliebige (die negative Einheitsmatrix enthaltende) diskrete Untergruppe Γ der speziellen linearen Gruppe $SL(2, \mathbf{R})$ zugrunde gelegt; von § 8 an wird Γ zu einer Grenzkreisgruppe erster Art spezialisiert. In diesem Fall lassen sich schärfere Formen von Entwicklungssätzen als im allgemeinen Fall beweisen, und es kann ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen durch Integration der analytisch fortgesetzten Eisenstein-Reihen, die in dieser Theorie eine zentrale Stellung einnehmen, konstruiert werden. — Um

* This work was carried out to a large extent during my visit from September 1964 to August 1965 at the Mathematics Research Center of the United States Army in Madison, Wis. Herewith I express my thanks for this support.

den Fall von Systemen von automorphen Formen mit zu erfassen, werden von Anfang an Formen mit Werten in einem endlichdimensionalen unitären Vektorraum $\mathfrak{U}$ und zu Multiplikatorsystemen mit Werten in der Gruppe der Automorphismen (d. h. der linearen unitären Selbstabbildungen) von $\mathfrak{U}$ behandelt.

In dieser Arbeit finden sich auch viele Resultate von A. SELBERG dargestellt, die von ihm in Vorlesungen in Princeton (1952) und Göttingen (1954) behandelt worden waren oder die er mir in Gesprächen freundlicherweise mitgeteilt hat. Das gilt vor allem für den die Eisenstein-Reihen betreffenden letzten Teil dieser Arbeit und für den Ansatz zur Gewinnung des Resolventenkerns in § 7. Betreffs des in § 4 dargestellten Zusammenhanges der automorphen Formen mit einem Eigenwertproblem auf der (dreidimensionalen) Überlagerungsfläche von $SL(2, \mathbf{R})$ vergleiche man A. SELBERG [22], S. 81ff. Verschiedentlich weichen meine Beweise für Sätze, die auf A. SELBERG zurückgehen, von den seinigen ab, andererseits beruhen manche Beweise von eigenen Ergebnissen auf Selbergschen Methoden. So ist es mir nicht in jedem Einzelfall möglich, die Urheberschaft völlig klarzulegen. Ziel dieser Veröffentlichung soll es denn auch nicht sein, bestimmte Sätze für mich zu beanspruchen, sondern eine schöne Theorie in ausführlicher Darstellung allgemein zugänglich zu machen. Herrn A. SELBERG möchte ich an dieser Stelle meinen Dank für sein Einverständnis zu dieser Veröffentlichung und für seine wertvollen Mitteilungen aussprechen. Herrn H. MAASS danke ich für seine Ermunterung zur Abfassung dieser Arbeit, Herrn J. ELSTRODT für seine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Nicht enthalten in dieser Arbeit ist die von A. SELBERG ausgeführte analytische Fortsetzung der Eisenstein-Reihen als meromorphe Funktionen von s in die volle s-Ebene. Diese wichtige Tatsache mußte in § 10 ohne näheren Nachweis zitiert werden (Zitat (S)). Ihre Darstellung hätte den Umfang dieser Arbeit nennenswert vergrößert und ihr Erscheinen verzögert. Die genannte Lücke in der Darstellung hat insofern weniger Gewicht, als die analytische Fortsetzbarkeit der Eisenstein-Reihen von ganzzahligem Gewicht zu den besonders wichtigen Hauptkongruenzgruppen und deren einfachsten Multiplikatorsystemen aus den gut überschaubaren Fourier-Entwicklungen abgelesen werden kann. Auf diesem einen Zitat (S) aufbauend werden die Eisenstein-Reihen in den §§ 10—13 einer ausführlichen Untersuchung unterzogen.

Inhaltsübersicht

§ 1. Der Formenbegriff

1. Zunächst sollen einige Bezeichnungen und Begriffe zusammengestellt werden, die für die ganze Arbeit Gültigkeit haben. Es bezeichne **R** den Körper der reellen Zahlen, **C** den Körper der komplexen Zahlen, **Z** die Menge der ganzrationalen Zahlen, **N** die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... und $\Omega := \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ die spezielle lineare Gruppe der zweireihigen Matrizen über **R** mit Determinante 1. (Der Doppelpunkt beim Gleichheitszeichen drückt generell aus, daß es sich um eine Definition handelt. Er wird auf die Seite des zu definierenden Ausdruckes gesetzt.) Die ν-reihige Einheitsmatrix werde mit $I^{(\nu)}$ oder, wenn die Reihenzahl klar ist, mit I bezeichnet. Ferner sei $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $U^{\vartheta} := \begin{pmatrix} 1 & \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\vartheta \in \mathbf{R}$. „Abzählbar" wird immer im Sinne von „endlich oder abzählbar unendlich" benutzt.

2. Die obere z-Halbebene $\mathfrak{E} := \{z; z = x + iy \text{ mit } y = \operatorname{Im} z > 0\}$ werde als hyperbolische Ebene aufgefaßt mit $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ als Quadrat des Linienelementes. Der hyperbolische Abstand $|z', z|$ zweier Punkte $z', z \in \mathfrak{E}$ ist dann durch

$$e^{|z',z|} + e^{-|z',z|} = \frac{|z'-z|^2}{y'y} + 2 \tag{1.1}$$

gekennzeichnet, und das hyperbolische Flächenelement lautet

$$d\omega := \frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{1.2}$$

ω bezeichne das durch $d\omega$ bestimmte Lebesgue-Stieltjessche Maß in $\mathfrak{E}$. Meßbarkeit bezüglich ω bedeutet offenbar dasselbe wie Meßbarkeit in bezug auf das zweidimensionale Lebesguesche Maß in $\mathfrak{E}$. $\omega(\mathfrak{A})$ bezeichne den hyperbolischen Inhalt einer ω-meßbaren Menge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{E}$. Die Transformationen

$$z \to Mz := \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.3}$$

mit $z \in \mathfrak{E}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$ sind die orientierungstreuen Isometrien von $\mathfrak{E}$.

3. Für $z \in \mathbf{C}$ und $z \neq 0$ werde unter $\arg z$ stets der durch

$$\arg z \in \langle -\pi, \pi] \tag{1.4}$$

fixierte Hauptwert des Argumentes von z verstanden, und hiernach werde z^w für alle $w \in \mathbf{C}$ durch

(1.5) $$z^w := e^{(\log|z| + i \arg z)w} \quad \text{mit} \quad \log|z| \in \mathbf{R}$$

erklärt. Damit definieren wir schließlich den „Automorphiefaktor"

(1.6) $$j_M(z;k) := \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^k = e^{ik\arg(cz+d)} = \frac{(cz+d)^{k/2}}{(c\bar{z}+d)^{k/2}}$$

für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$, $z \in \mathfrak{E}$ und $k \in \mathbf{C}$.

Für $M_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix} \in \Omega$ $(\nu = 1, 2, 3)$ und $M_3 = M_1 M_2$ ist bekanntlich (siehe H. Petersson [15], § 2)

(1.7) $$\arg(c_1 M_2 z + d_1) = \arg(c_3 z + d_3) - \arg(c_2 z + d_2) + 2\pi w(M_1, M_2)$$

mit gewissen von z unabhängigen Zahlen $w(M_1, M_2) \in \{-1, 0, 1\}$ mit der Eigenschaft

$$w(M_1, M_2) + w(M_1 M_2, M_3) = w(M_1, M_2 M_3) + w(M_2, M_3).$$

Weitere Eigenschaften von w, von denen im folgenden verschiedentlich stillschweigend Gebrauch gemacht werden wird, sind (s. [15], (15) und (20_8))

(1.8) $$w(U^\xi M, N U^\eta) = w(M, N) \quad \text{für} \quad \xi, \eta \in \mathbf{R} \quad \text{und} \quad M, N \in \Omega;$$

(1.9) $$w(A^{-1} U^\eta A, A^{-1}) = w(A, A^{-1} U^\eta A) = 0 \quad \text{für} \quad A \in \Omega \quad \text{und} \quad \eta \in \mathbf{R}.$$

4. Für $k \in \mathbf{C}$ wird das System der Zahlen

(1.10) $$\sigma_k(M, N) := e^{2\pi i k w(M,N)} \qquad (M, N \in \Omega)$$

Faktorsystem zum Gewicht k (oder zur Dimension $-k$) genannt (s. [15]). Zufolge (1.6) und (1.7) ist dann

(1.11) $$j_M(Nz; k)\, j_N(z; k) = \sigma_k(M, N)\, j_{MN}(z; k) \quad \text{für} \quad M, N \in \Omega.$$

Wir beschränken uns im folgenden auf reelle k, damit die $\sigma_k(M, N)$ und alle Ausdrücke (1.6) den absoluten Betrag 1 haben.

5. Es sei nun $\mathfrak{U}$ ein m-dimensionaler unitärer Vektorraum über $\mathbf{C}$. Das Skalarprodukt von $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{U}$) werde mit $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle$ bezeichnet und als linear in $\mathfrak{a}$ und antilinear in $\mathfrak{b}$ vorausgesetzt. $|\mathfrak{a}| := \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle^{\frac{1}{2}}$ bezeichne den Betrag (die Länge) von $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$. Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ und Funktionen $f, g : \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ bezeichnen wir dementsprechend mit $\langle \mathfrak{a}, f \rangle$, $\langle g, f \rangle$ und $|f|$ die durch $\langle \mathfrak{a}, f(z) \rangle$, $\langle g(z), f(z) \rangle$ bzw. $|f(z)|$ dargestellten komplexwertigen Funktionen von $z \in \mathfrak{E}$.

Auf dem $\mathbf{C}$-Vektorraum der Funktionen $f : \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ erklären wir für jedes $k \in \mathbf{R}$ den rechts anzuschreibenden linearen Operator $|[M, k]$ durch

(1.12) $$(f\,|[M, k])(z) := j_M(z; k)^{-1} f(Mz) \qquad (z \in \mathfrak{E}).$$

Dann gilt wegen (1.11)

(1.13) $$f\,|[M_1 M_2, k] = \sigma_k(M_1, M_2)\,(f\,|[M_1, k])\,|[M_2, k]$$

mit $\sigma_k(M_1, M_2)$ aus *4*.

Die Algebra aller Endomorphismen von $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{A}(\mathfrak{U})$.

6. Es sei nun Γ eine diskrete Untergruppe der Lieschen Gruppe Ω und also Γ diskontinuierlich in $\mathfrak{E}$. Aus Gründen der Bequemlichkeit setzen wir noch $-I\in\Gamma$ voraus. Sind $z, w\in\mathfrak{E}$ und existiert $M\in\Gamma$, so daß $w=Mz$ ist, so schreiben wir $w\equiv z \bmod \Gamma$. v sei ein unitäres Multiplikatorsystem zur Gruppe Γ, zum Gewicht k und Raum $\mathfrak{U}$, d. h. eine Abbildung von Γ in die Gruppe der Automorphismen (unitären linearen Selbstabbildungen) von $\mathfrak{U}$, so daß gilt

$$v(MN)=\sigma_k(M,N)\,v(M)\,v(N) \qquad (M,N\in\Gamma) \tag{1.14}$$

und

$$v(-I)=e^{-\pi i k}\mathrm{id}_{\mathfrak{U}}, \tag{1.15}$$

wobei $\mathrm{id}_{\mathfrak{U}}$ den identischen Automorphismus von $\mathfrak{U}$ bezeichnet. — Aus (1.14) folgt $v(I)=\mathrm{id}_{\mathfrak{U}}$. Wegen (1.10) ist v offenbar auch ein Multiplikatorsystem zu jedem Gewicht $\equiv k \bmod 2$ anstelle von k und nur zu diesen Gewichten.

7. Wir erklären nun $\mathscr{F}_k=\mathscr{F}_k(\Gamma,\mathfrak{U},v)$ als die Menge aller Funktionen $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ mit

$$f\,|[M,k]=v(M)f \qquad (M\in\Gamma), \tag{1.16}$$

wobei $v(M)f$ natürlich die durch $z\to v(M)f(z)$ gegebene Funktion bezeichnet. Mit Hilfe von (1.13) sieht man leicht, daß (1.14) und (1.15) notwendig und hinreichend dafür sind, daß die Menge $\{f(z);\, f\in\mathscr{F}_k(\Gamma,\mathfrak{U},v),\, z\in\mathfrak{E}\}$ den Raum $\mathfrak{U}$ aufspannt.

Für $l=0,1,2,\ldots,\infty$ sei $\mathscr{C}_k^l=\mathscr{C}_k^l(\Gamma,\mathfrak{U},v)$ die Menge aller $f\in\mathscr{F}_k(\Gamma,\mathfrak{U},v)$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung l nach x und y (für $l=0$ noch Stetigkeit, für $l=\infty$ beliebige Differenzierbarkeit).

Durch Einschränkung von $|[M,k]$ $(M\in\Gamma)$ auf $\mathscr{F}_k(\Gamma,\mathfrak{U},v)$ bzw. $\mathscr{C}_k^l(\Gamma,\mathfrak{U},v)$ erhält man offenbar Automorphismen dieser **C**-Vektorräume. Ferner bestätigt man auf bekannte Weise

$$\mathscr{F}_k(\Gamma,\mathfrak{U},v)\,|[A^{-1},k]=\mathscr{F}_k(A\Gamma A^{-1},\mathfrak{U},v^{A^{-1}}) \qquad (A\in\Omega), \tag{1.17}$$

wobei

$$v^{A^{-1}}(M):=\frac{\sigma_k(A^{-1}MA,A^{-1})}{\sigma_k(A^{-1},M)}\cdot v(A^{-1}MA) \qquad (M\in A\Gamma A^{-1}) \tag{1.18}$$

ein Multiplikatorsystem zu $A\Gamma A^{-1}$, Gewicht k und $\mathfrak{U}$ darstellt.

8. Unter Benutzung des formalen Differentialoperators

$$\begin{aligned}\Delta_k:&=y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-iky\frac{\partial}{\partial x}\\ &=-(z-\bar z)^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}-\frac{k}{2}(z-\bar z)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\right),\end{aligned} \tag{1.19}$$

wobei wie üblich

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar z}:=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.20}$$

gesetzt ist, legen wir den Begriff der automorphen Formen folgendermaßen fest.

Definition 1.1. *Eine automorphe Form mit Werten in* $\mathfrak{U}$ *zur Gruppe* Γ, *zum Gewicht* $k \in \mathbf{R}$, *zum Multiplikatorsystem* v *und zur „Kennzahl"* $\lambda \in \mathbf{C}$ *ist eine Funktion* $f \in \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ *mit folgenden Eigenschaften.*

a) $f(z)$ *ist reell-analytisch in* x, y *(gleichzeitig) und erfüllt die partielle Eigenwertdifferentialgleichung*

$$-\Delta_k f = \lambda f. \tag{1.21}$$

b) *Ist* $A \in \Omega$ *und* $A^{-1}\infty$ *eine parabolische Spitze*[1] *von* Γ, *so gilt*

$$(f|[A^{-1}, k])(z) = O(y^\kappa) \quad \text{für} \quad y \to \infty \quad \text{gleichmäßig in } x$$

mit einer geeigneten reellen Konstanten κ.

Der lineare Raum der automorphen Formen aus $\mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ *zur Kennzahl* λ *werde mit* $\mathscr{F}_{k,\lambda} = \mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ *bezeichnet.*

Im Falle $f \neq 0$ ist die Kennzahl λ durch f eindeutig bestimmt. Die Bezeichnung Eigenfunktion für f und Eigenwert für λ soll für den erst später zu betrachtenden Fall vorbehalten bleiben, daß $f(\neq 0)$ zusätzlich in einem gewissen Hilbert-Raum $\mathscr{H}_k$ liegt, der durch eine quadratische Integrierbarkeitseigenschaft gekennzeichnet ist.

Δ_0 ist mit dem Laplace-Operator für die unter *2.* genannte Riemannsche Maßbestimmung in der hyperbolischen Ebene identisch. — Da die Operatoren Δ_k elliptisch sind und analytische Koeffizienten haben, ist bereits jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1.21) analytisch in x, y.

9. Die ganzen automorphen Formen im klassischen Sinne ordnen sich in einfacher Weise durch Multiplikation mit einer Potenz von y in diesen allgemeineren Formentypus ein. Zur Präzisierung führen wir zunächst an

Definition 1.2. *Eine klassische ganze automorphe Form* g *mit Werten in* $\mathfrak{U}$ *zu der Gruppe* Γ, *Gewicht* k *und Multiplikatorsystem* v *ist eine Funktion* $g: \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ *mit den folgenden Eigenschaften.*

a) g *ist holomorph in* $\mathfrak{E}$.

b) $(cz+d)^{-k} g(Mz) = v(M)\, g(z)$ *für* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

c) *Ist* $A \in \Omega$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *und* $A^{-1}\infty$ *eine Spitze von* Γ, *so ist* $(\gamma z + \delta)^{-k} g(A^{-1} z)$ *für* $y \geqq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0$ *fest) beschränkt.*

Ist nun g eine klassische ganze automorphe Form mit Werten in $\mathfrak{U}$ zu Γ, k, v, so ist $y^{k/2} g$, wie sofort zu sehen, eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ zur Kennzahl $\lambda = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)$. Auf diese Weise erhält man jedoch nicht notwendig alle Formen aus $\mathscr{F}_{k, \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})}$, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1. Es sei $\Gamma = \{I, -I\}$, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, $k \neq 1$, v trivial (vgl. (1.15)). $f(z) := y^{1-k/2}$ stellt dann eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_{k, \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})}$ dar, aber $y^{-k/2} f$ ist keine klassische ganze automorphe Form.

[1] Das heißt Fixpunkt einer parabolischen Matrix aus Γ.

Beispiel 2. Es sei $\Gamma = \mathrm{M}(q)$ die durch Adjunktion von $-I$ erweiterte Hauptkongruenzgruppe einer Stufe $q \geqq 2$, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, $k=0$, $v=1$. Jetzt ist die Maximalzahl inäquivalenter Spitzen von Γ mindestens gleich 3 und die in [18], (25) betrachteten Differenzen von Eisenstein-Reihen bilden ein Beispiel von Formen aus $\mathscr{F}_{0,0}$, für die $y^{-k/2} f$ keine klassische ganze automorphe Form ist.

Ein drittes Beispiel ist aus Satz 11.5 nebst Zusatz zu entnehmen.

In Satz 5.2, Satz 9.1, dem Zusatz zu Satz 11.5 und in § 13 werden aber spezielle Formen f aus $\mathscr{F}_{k, \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})}$ charakterisiert werden, für die $y^{-k/2} f$ eine klassische ganze automorphe Form ist.

10. Der in Definition 1.1 festgelegte Formentypus ist im wesentlichen mit demjenigen aus H. MAASS [12], S. 237 identisch. Zum Vergleich beschränken wir uns auf den Fall $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, lassen in [12] nur Gruppen Γ (statt G) der von uns betrachteten Art (s. *6.*) zu und nehmen $\alpha - \beta \in \mathbf{R}$ an. Der Unterschied zwischen den beiden Formentypen besteht dann nur noch in einem trivialen Faktor von der Form einer y-Potenz, wozu genauer folgendes bemerkt sei.

Die für [12] fundamentalen Operatoren

$$\Delta_{\alpha,\beta} := y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - (\alpha - \beta) i y \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + \beta) y \frac{\partial}{\partial y} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{C}) \tag{1.22}$$

sind mit den Operatoren Δ_k durch die Gleichung

$$\Delta_{\alpha-\beta} + \frac{\alpha+\beta}{2} \left(1 - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Delta_{\alpha,\beta} y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{1.23}$$

verbunden, wobei die rechte Seite als Operatorprodukt im Sinne der Hintereinanderausübung zu verstehen ist. Hiermit erkennt man, daß $g: \mathfrak{E} \to \mathbf{C}$ dann und nur dann eine automorphe Form vom Typus $\{\Gamma; \alpha, \beta, v\}$ im Sinne von [12] ist, wenn

$$f := y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g \tag{1.24}$$

eine Form aus $\mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathbf{C}, v)$ zum Gewicht $k = \alpha - \beta$ und zur Kennzahl

$$\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2} \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \tag{1.25}$$

im Sinne von Definition 1.1 ist.

Ist $g \in \{\Gamma; \alpha, \beta, v\}$, so ist $y^{\alpha+\beta-1} g \in \{\Gamma; 1-\beta, 1-\alpha, v\}$ und $\bar{g} \in \{\Gamma; \bar{\beta}, \bar{\alpha}, \bar{v}\}$. Der letzten Relation entsprechen

$$\bar{\Delta}_k = \Delta_{-k}, \tag{1.26}$$

$$\overline{\mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)} = \mathscr{F}_{-k}(\Gamma, \mathfrak{U}, \bar{v}), \tag{1.27}$$

$$\overline{\mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)} = \mathscr{F}_{-k,\bar{\lambda}}(\Gamma, \mathfrak{U}, \bar{v}). \tag{1.28}$$

Die speziellen Definitionsbereiche $\mathscr{D}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ (vorläufige Bezeichnung), auf denen wir später Δ_k betrachten werden, werden ebenfalls die Eigenschaft $\overline{\mathscr{D}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)} = \mathscr{D}_{-k}(\Gamma, \mathfrak{U}, \bar{v})$ haben, so daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine Beschränkung auf den Fall $k \geqq 0$ möglich wäre. Von dieser Möglichkeit wird aber nur in § 13 Gebrauch gemacht werden.

11. Eine einfache Rechnung zeigt, daß Δ_k mit den Operatoren $|[A, k]$ für alle $A \in \Omega$ vertauschbar ist. Daher ist

$$\Delta_k \mathscr{C}_k^l(\Gamma, \mathfrak{U}, v) \subset \mathscr{C}_k^{l-2}(\Gamma, \mathfrak{U}, v) \qquad (l \geqq 2), \tag{1.29}$$

und aus Definition 1.1 folgt, daß $|[A, k]$ durch Einschränkung einen Isomorphismus von $\mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ auf $\mathscr{F}_{k,\lambda}(A\Gamma A^{-1}, \mathfrak{U}, v^{A^{-1}})$ bestimmt, mit $v^{A^{-1}}$ aus (1.18).

Es sei noch bemerkt, was jedoch im folgenden nicht weiter benutzt wird, daß Δ_k zusammen mit dem identischen Operator 1 die **C**-Algebra $\mathscr{A}_k$ aller formalen Differentialoperatoren auf $\mathfrak{E}$, die mit allen Operatoren $|[A, k]$ $(A \in \Omega)$ vertauschbar sind, erzeugt. Insbesondere gibt es in $\mathscr{A}_k$ keine Differentialoperatoren erster Ordnung, und jeder Differentialoperator zweiter Ordnung in $\mathscr{A}_k$ hat die Gestalt $a\Delta_k + b$ mit $a, b \in \mathbf{C}$, was zu einer Charakterisierung von Δ_k benutzt werden kann.

§ 2. Die Entwicklungen in den Spitzen und der Hilbert-Raum $\mathscr{H}_k$

Aus H. Maass [12], S. 245—247 kann die Gestalt der Fourier-Entwicklungen der Formen aus $\mathscr{F}_{k,\lambda}$ entnommen werden. Wir führen dazu weitere Bezeichnungen und Begriffe ein, die auch später noch gebraucht werden. Es sei ξ eine Spitze von Γ. Es existiert dann ein $A \in \Omega$, so daß $A\xi = \infty$ ist und die Gruppe der Matrizen von $A\Gamma A^{-1}$ mit Fixpunkt ∞ durch U und $-I$ (s. *1.*) erzeugt wird. Ist $\tilde{A}$ eine zweite mögliche Wahl für A, so gilt $\tilde{A} = \pm U^{\vartheta} A$ mit einem geeigneten reellen ϑ. Daher ist

$$P := A^{-1} U A, \tag{2.1}$$

die „Grundmatrix von Γ zur Spitze ξ", von der Auswahl von A unabhängig, und P und $-I$ erzeugen die Gruppe der Matrizen aus Γ mit Fixpunkt ξ. Unter Benutzung von (1.10), (1.18) und (1.9) bestätigt man die bekannten Gleichungen

$$v^{A^{-1}}(U^\nu) = (v^{A^{-1}}(U))^\nu = (v(P))^\nu = v(P^\nu) \qquad (\nu \in \mathbf{Z}). \tag{2.2}$$

Der lineare Raum

$$\mathfrak{L}(\xi) := \{\mathfrak{x}\,;\, \mathfrak{x} \in \mathfrak{U},\ v(P)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\} \tag{2.3}$$

möge der Fixraum von v zur Spitze ξ heißen. Seine Dimension $m(\xi)$ ist gleich der Vielfachheit, in der 1 als Eigenwert von $v(P)$ auftritt. $m(\xi)$ hängt offenbar nur von der Klasse $\{P\}_\Gamma$ der zu P in Γ konjugierten parabolischen Matrizen ab, also nur von der Klasse der zu ξ modulo Γ äquivalenten Fixpunkte. $m(\xi)$ heißt auch der Grad, von dem v in bezug auf ξ oder in bezug auf $\{P\}_\Gamma$ singulär ist (A. Selberg [22], S. 76). Ist $m(\xi) = 0$, so heißt v regulär in bezug auf ξ oder $\{P\}_\Gamma$.

Falls Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art im Sinne von H. PETERSSON [15], also eine Grenzkreisgruppe mit endlichem Erzeugendensystem ist[2], so ist jedes maximale System von inäquivalenten Spitzen von Γ endlich. Ist dann $\zeta_1, \ldots, \zeta_\vartheta$ ein solches System, so heißt

$$(2.4) \qquad m^* := \sum_{\iota=1}^{\vartheta} m(\zeta_\iota)$$

der Grad, von dem v bezüglich Γ singulär ist; ist $m^* = 0$, so heißt v regulär (in bezug auf Γ).

Es sei nun $f \in \mathscr{C}_k^2(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ eine Lösung von (1.21) und damit sogar reell-analytisch in x, y; Eigenschaft b) aus Definition 1.1 wird noch nicht gefordert. Wir schreiben λ aus (1.21) in der Form

$$(2.5) \qquad \lambda = \frac{1}{4} + r^2 \quad \text{mit einem } r \in \mathbf{C}.$$

Da $v(P)$ ein Automorphismus von $\mathfrak{U}$ ist, besitzt $v(P)$ ein orthonormiertes System $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ von Eigenvektoren. Da die zugehörigen Eigenwerte den Betrag 1 haben, gilt also

$$(2.6) \qquad v(P)\,\mathfrak{e}_\mu = e^{2\pi i \tau_\mu}\,\mathfrak{e}_\mu \text{ mit gewissen eindeutig bestimmten } \tau_\mu \in [0, 1\rangle$$ [3]

für $1 \leqq \mu \leqq m$. Die Numerierung der $\mathfrak{e}_\mu$ kann und soll so getroffen werden, daß gilt

$$(2.7) \qquad \tau_\mu = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \mu \leqq m(\zeta),$$

$$(2.8) \qquad \tau_\mu > 0 \quad \text{für} \quad m(\zeta) < \mu \leqq m.$$

$f^* := f\,|[A^{-1}, k]$ ist nach einer Bemerkung in § 1, *11.* eine in $\mathscr{F}_k(A\Gamma A^{-1}, \mathfrak{U}, v^{A^{-1}})$ gelegene Lösung von (1.21); und wegen $U = APA^{-1} \in A\Gamma A^{-1}$ und (2.2) erfüllt die μ-te Koordinate $f_\mu^* := \langle \mathfrak{e}_\mu, f^* \rangle$ von f^* in bezug auf $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ die Gleichung

$$f_\mu^*(z+1) = e^{2\pi i \tau_\mu} f_\mu^*(z).$$

Auf Grund des in §1, *10.* angegebenen Zusammenhanges mit dem Formentypus aus [12] erhält man daher aus [12], insbesondere S. 245—247 eine gewisse Fourier-Entwicklung für f_μ^*. Schreibt man diese Entwicklung auf $f_\mu := \langle \mathfrak{e}_\mu, f \rangle$ um unter Benutzung von

$$f = \sigma_k(A^{-1}, A)\, f^*\,|[A, k]$$

---

[2] Es läßt sich zeigen, daß diese Definition äquivalent ist mit jeder der beiden folgenden, bequemeren.

a) Γ ist eine diskrete Untergruppe von Ω, so daß $-I \in \Gamma$ ist und der Quotientenraum $\mathfrak{E}/\Gamma$ nach Einbeziehung der Klassen äquivalenter Spitzen als neuer Punkt mit den üblichen Ortsuniformisierenden zu einer kompakten Riemannschen Fläche wird.

b) Γ ist eine diskrete Untergruppe von Ω, die $-I$ enthält und einen meßbaren Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ (vgl. S. 302, Fußnote 4) von endlichem Inhalt $\omega(\mathfrak{F})$ besitzt.

[3] Für $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, bezeichne $[a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, b\rangle$ das abgeschlossene, rechts halboffene, links halboffene bzw. offene Intervall mit den Endpunkten a, b. — Die gewählte Fixierung der τ_μ ist für das Folgende nicht wesentlich.

(s. (1.13)) und

(2.9) $$z_A := x_A + i y_A := Az,$$

so erhält man schließlich eine Darstellung

(2.10) $$f_\mu(z) = j_A(z;k)^{-1}\,[u_\mu(y_A) + q_\mu(z_A)] \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

wobei die u_μ in $y>0$ und die q_μ in $\mathfrak{E}$ definierte komplexwertige Funktionen mit folgenden Eigenschaften sind. Es ist

(2.11) $$u_\mu(y) = 0 \quad \text{für} \quad m(\xi) < \mu \leqq m;$$

und für $1 \leqq \mu \leqq m(\xi)$ ist

(2.12) $$u_\mu(y) = \begin{cases} b_{\mu 0} y^{\frac{1}{2}-ir} + c_{\mu 0} y^{\frac{1}{2}+ir}, & \text{falls} \quad r \neq 0, \\ b_{\mu 0} y^{\frac{1}{2}} + c_{\mu 0} y^{\frac{1}{2}} \log y, & \text{falls} \quad r = 0, \end{cases}$$

mit komplexen Konstanten $b_{\mu 0}$, $c_{\mu 0}$. Ferner ist

(2.13) $$q_\mu(z) = \sum_{n \sim \tau_\mu} [b_{\mu n} W_{-\frac{k}{2}\operatorname{sgn} n, ir}(-4\pi|n|y) + c_{\mu n} W_{\frac{k}{2}\operatorname{sgn} n, ir}(4\pi|n|y)]\, e^{2\pi i n x}$$

für $1 \leqq \mu \leqq m$, wobei $n \sim \tau_\mu$ soviel wie $n \equiv \tau_\mu \bmod 1$ und $n \neq 0$ bedeutet. $b_{\mu n}$, $c_{\mu n}$ bezeichnen wieder komplexe Konstanten, und $W_{\gamma,\delta}(t)$ bedeutet die Whittakersche Funktion im Argumentbereich $-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$ (Bezeichnung nach W. Magnus und F. Oberhettinger [14], S. 116) mit dem asymptotischen Verhalten

(2.14) $$W_{\gamma,\delta}(t) \sim t^\gamma e^{-t/2} \quad \text{für} \quad t \to \infty,\ -\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}.$$

Die Reihe (2.13) ist gleichmäßig absolut konvergent in $y \geqq y_0$ für jedes $y_0 > 0$. Setzen wir noch

(2.15) $$u(y) := \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu(y)\mathfrak{e}_\mu, \quad q(z) := \sum_{\mu=1}^{m} q_\mu(z)\mathfrak{e}_\mu,$$

(2.16) $$\mathfrak{b}_0 := \sum_{\mu=1}^{m(\xi)} b_{\mu 0}\mathfrak{e}_\mu, \qquad \mathfrak{c}_0 := \sum_{\mu=1}^{m(\xi)} c_{\mu 0}\mathfrak{e}_\mu,$$

so ist nach (2.11) und (2.12)

(2.17) $$u(y) = \begin{cases} \mathfrak{b}_0 y^{\frac{1}{2}-ir} + \mathfrak{c}_0 y^{\frac{1}{2}+ir}, & \text{falls} \quad r \neq 0, \\ \mathfrak{b}_0 y^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{c}_0 y^{\frac{1}{2}} \log y, & \text{falls} \quad r = 0. \end{cases}$$

Eine Ersetzung von r durch $-r$ läuft im Falle $r \neq 0$ offenbar auf eine Vertauschung von $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ hinaus. $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ und wegen (2.11) auch $u(y)$ für alle $y > 0$ liegen im Fixraum $\mathfrak{L}(\xi)$, und nach (2.10) gilt

(2.18) $$f(z) = j_A(z;k)^{-1}\,[u(y_A) + q(z_A)].$$

Diese Gleichung zusammen mit (2.15) und den oben beschriebenen Funktionen u_μ und q_μ bezeichnen wir als die Fourier-Entwicklung von f zur Spitze ξ unter Benutzung von A und $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$; $u(y)$ nennen wir den 0-ten Fourier-Koeffizienten der Entwicklung.

Bezeichnet $\psi_{(\xi)}$ die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{U}$ auf den Fixraum $\mathfrak{L}(\xi)$, so gilt offenbar

$$(2.19)\quad u(y) = \int_0^1 j_A(A^{-1}z;k)\psi_{(\xi)} f(A^{-1}z)\,dx = \sigma_k(A, A^{-1}) \int_0^1 \psi_{(\xi)}(f \| [A^{-1}, k])(z)\,dx\,.$$

Daher hängt u und folglich auch q nicht von der Auswahl der Basis $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ (unter Einhaltung der an sie gestellten Bedingungen) ab. Die Auswirkung einer Abänderung von A in $\tilde{A}$ läßt sich auf Grund der Bemerkung vor (2.1), die $z_{\tilde{A}} = z_A + \vartheta$ zur Folge hat, leicht überblicken.

Aus der Bedingung b) von Definition 1.1, aus (2.14) und der absoluten Konvergenz der Fourier-Entwicklung von f folgert man

Lemma 2.1. *Eine Lösung $f \in \mathscr{C}_k^2(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ von* (1.21) *ist genau dann eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$, wenn in der Fourier-Entwicklung* (2.18) *von f in bezug auf jede beliebige Spitze $\xi = A^{-1}\infty$ die Koeffizienten $b_{\mu n}$ aus* (2.13) *sämtlich (also für $1 \leqq \mu \leqq m$, $n \sim \tau_\mu$) verschwinden. Ist diese Bedingung erfüllt, so verschwindet $q(z)$ exponentiell für $y \to \infty$.*

Unsere Voraussetzung $k \in \mathbf{R}$ bringt es mit sich, daß Δ_k formal selbstadjungiert in bezug auf das Flächenelement $d\omega$ ist, d. h. daß gilt

$$(2.20)\qquad \int_{\mathfrak{E}} \langle \Delta_k g, f \rangle\, d\omega = \int_{\mathfrak{E}} \langle g, \Delta_k f \rangle\, d\omega$$

für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ mit kompaktem Träger. (Diese Aussage ist äquivalent mit der formalen Selbstadjungiertheit des Operators $\Delta_{\alpha,\beta}$ aus (1.22) in bezug auf das Flächenelement $y^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)} d\omega$ für $\alpha - \beta \in \mathbf{R}$.)

Wegen $k \in \mathbf{R}$, und da v unitär ist, ist ferner $\langle g, f \rangle$ für $f, g \in \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ eine bei Γ invariante komplexwertige Funktion auf $\mathfrak{E}$. Für eine Diskussion des Eigenwertproblems (1.21) nach spektraltheoretischen Gesichtspunkten erscheint daher der folgende Hilbert-Raum $\mathscr{H}_k = \mathscr{H}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ angemessen.

$\mathscr{H}_k$: 1) $f \in \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$, f meßbar bezüglich ω;

2) $\|f\|^2 := \int_{\mathfrak{F}} |f|^2\, d\omega < \infty$ (quadratische Integrierbarkeit mod Γ).

Dabei bedeute $\mathfrak{F}$ einen Fundamentalbereich[4] von Γ in $\mathfrak{E}$. Das Skalarprodukt in $\mathscr{H}_k$ sei

$$(g, f) := \int_{\mathfrak{F}} \langle g, f \rangle\, d\omega\,.$$

Die Auswahl von $\mathfrak{F}$ ist ohne Einfluß auf die Definition, da v unitär und der Integrand bei Γ invariant ist. Zur Bildung von $\mathscr{H}_k$ ist noch der übliche Übergang zu Äquivalenzklassen von Funktionen f zu vollziehen, wobei wir auch solche Funktionen f einbeziehen wollen, die nur ω-fast überall auf $\mathfrak{E}$ definiert sind. Wir werden in der Bezeichnung zwischen den Funktionen und ihren Äquivalenzklassen nicht unterscheiden. Wenn jedoch von einem $f \in \mathscr{H}_k$ die Rede ist, das durch eine stetige Funktion auf ganz $\mathfrak{E}$ repräsentierbar ist,

[4] Hierunter werde eine ω-meßbare Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{E}$ verstanden, mit

($\mathfrak{F}$.1) $\Gamma\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$;

($\mathfrak{F}$.2) die Menge der $z \in \mathfrak{F}$, zu denen ein mod Γ äquivalenter Punkt $w \in \mathfrak{F} - \{z\}$ existiert, ist eine ω-Nullmenge.

so möge unter der „Funktion f" immer dieser eindeutig bestimmte stetige Repräsentant verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Ist f eine beliebige Funktion aus $\mathscr{H}_k$, so ist f im allgemeinen unstetig, und im allgemeinen besitzt f dann nur für (Lebesguesch) fast alle $y>0$ erklärte Fourier-Koeffizienten zu einer Spitze $\xi = A^{-1}\infty$. Insbesondere hat der 0-te Fourier-Koeffizient $u(y)$ von f wieder die Gestalt (2.19), wobei das Integral im allgemeinen nur für fast alle $y>0$ existiert.

Wir betrachten jetzt $-\Delta_k$ auf den folgenden Definitionsbereichen $\mathscr{D}_k^2$ und $\mathscr{D}_k^\infty$:

(2.21) $$\mathscr{D}_k^2 := \{f;\, f \in \mathscr{H}_k \cap \mathscr{C}_k^2(\Gamma, \mathfrak{U}, v),\ -\Delta_k f \in \mathscr{H}_k\},$$

(2.22) $$\mathscr{D}_k^\infty := \{f;\, f \in \mathscr{C}_k^\infty(\Gamma, \mathfrak{U}, v),\ f \text{ hat einen } \operatorname{mod}\Gamma \text{ kompakten Träger}\}.$$

„f hat einen $\operatorname{mod}\Gamma$ kompakten Träger" bedeute, daß die Projektion des Trägers von f in den Quotientenraum $\mathfrak{E}/\Gamma$ kompakt ist. Damit ist gleichwertig, daß ein Kompaktum $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{E}$ existiert, so daß $f(z)=0$ ist für alle $z \notin \Gamma\mathfrak{C}$. Zu den Definitionen (2.21) und (2.22) vergleiche man auch (1.29).

Lemma 2.2. *$\mathscr{D}_k^\infty$ ist identisch mit der Menge der Funktionen $g: \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ mit Darstellungen der Form*

(2.23) $$g = \sum_{M \in \Gamma} v(M)^{-1}\, l|[M, k],$$

wobei $l: \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ beliebig oft differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat.

Beweis. a) Daß die g mit einer solchen Darstellung in $\mathscr{D}_k^\infty$ liegen, ist sofort zu sehen.

b) Es sei nun $g \in \mathscr{D}_k^\infty$ vorgegeben. Wir benutzen die folgende Abkürzung: Ist t eine Abbildung von $\mathfrak{E}$ in eine Menge $\mathfrak{X}$ und ist $M \in \Omega$, so erklären wir die Abbildung $t^M: \mathfrak{E} \to \mathfrak{X}$ durch

(2.24) $$t^M(z) := t(Mz) \qquad (z \in \mathfrak{E},\ M \in \Omega).$$

Gemäß [20], S. 41—42 existiert eine bei Γ invariante, beliebig differenzierbare Zerlegung der 1 auf $\mathfrak{E}$, d. h. eine Darstellung

(2.25) $$1 = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{N} \\ M \in \Gamma}} h_\nu^M$$

der konstanten Funktion 1 mit Hilfe von beliebig oft differenzierbaren Funktionen h_ν (ν aus einer abzählbaren Indexmenge $\mathfrak{N}$), so daß die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind.

1. $0 \leqq h_\nu \leqq 1$;
2. h_ν hat einen kompakten Träger $\mathfrak{T}_\nu$;
3. Es existieren offene Umgebungen $\mathfrak{B}_\nu$ der $\mathfrak{T}_\nu$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$ kompakt und die Familie

(2.26) $$M\mathfrak{B}_\nu \quad \text{mit} \quad (M, \nu) \in \Gamma \times \mathfrak{N}$$

eine Überdeckung von $\mathfrak{E}$ vom endlichen Typ ist, d. h. so daß $\mathfrak{E} = \bigcup_{\substack{\nu \in \mathfrak{N} \\ M \in \Gamma}} M\mathfrak{B}_\nu$ ist und $M\mathfrak{B}_\nu \cap M_0 \mathfrak{B}_{\nu_0} \neq \emptyset$ bei festem $(M_0, \nu_0) \in \Gamma \times \mathfrak{N}$ nur für endlich viele $(M, \nu) \in \Gamma \times \mathfrak{N}$ erfüllt ist.

Da g einen mod Γ kompakten Träger $\mathfrak{T}$ hat, existiert eine endliche Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{N}$, so daß gilt $\mathfrak{T} \cap M\mathfrak{T}_\nu = \emptyset$ für $\nu \in \mathfrak{N} - \mathfrak{A}$ und $M \in \Gamma$. Dann ist $g h_\nu^M = 0$ für $\nu \in \mathfrak{N} - \mathfrak{A}$ und $M \in \Gamma$, und wegen (2.25) und $g \in \mathscr{F}_k$ folgt

$$g = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{A} \\ M \in \Gamma}} g h_\nu^M = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{A} \\ M \in \Gamma}} v(M)^{-1} (g h_\nu) \,|\, [M, k] \,.$$

Man sieht nun, daß $l := \sum\limits_{\nu \in \mathfrak{A}} g h_\nu$ eine Darstellung der im Lemma angegebenen Art für g liefert. ▮

Offenbar ist

$$\mathscr{D}_k^\infty \subset \mathscr{D}_k^2 \,. \tag{2.27}$$

$\mathscr{D}_k^2$ und $\mathscr{D}_k^\infty$ sind lineare Teilmannigfaltigkeiten von $\mathscr{H}_k$ und offenbar dicht in $\mathscr{H}_k$ (im Sinne der Normtopologie). Für $\tau \in \{2, \infty\}$ ist durch die Anwendung von Δ_k auf $\mathscr{D}_k^\tau$ ein linearer Operator[5] $\Delta_k^\tau = \Delta_k | \mathscr{D}_k^\tau$ in $\mathscr{H}_k$ bestimmt,

$$\Delta_k^\tau : \mathscr{D}_k^\tau \to \mathscr{H}_k, \; \Delta_k^\tau f := \Delta_k f \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{D}_k^\tau; \; \tau \in \{2, \infty\} \,. \tag{2.28}$$

Satz 2.1. *Jede Eigenfunktion f von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert λ ist eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_{k,\lambda}$ im Sinne von Definition 1.1.*

Beweis. Es sei $f \in \mathscr{D}_k^2$, $f \neq 0$ und $-\Delta_k f = \lambda f$. Zum Nachweis von $f \in \mathscr{F}_{k,\lambda}$ braucht von Definition 1.1 offenbar nur noch Eigenschaft b) geprüft zu werden. Das geschieht an Hand der Fourier-Entwicklung von f. Es sei $\xi = A^{-1}\infty$ mit $A \in \Omega$ eine Spitze von Γ. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf A so angenommen werden, daß die Grundmatrix P von Γ zur Spitze ξ die Form (2.1) hat. Γ besitzt dann einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$, der den „Spitzensektor" $A^{-1}\mathfrak{S}$ mit

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\eta) := \{z \,; 0 \leqq x \leqq 1, y > \eta\} \tag{2.29}$$

für ein geeignetes $\eta \geqq 0$ enthält. Wegen

$$\int_{\mathfrak{S}} |f(A^{-1} z)|^2 \, d\omega \leqq \|f\|^2 < \infty$$

müssen dann bei der Fourier-Entwicklung (2.18) die Koeffizienten $b_{\mu n}$ aus (2.13) sämtlich verschwinden. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 2.1. ▮

Im Falle von Grenzkreisgruppen erster Art läßt sich beweisen (vgl. [18], § 3), daß jede Eigenfunktion f von $-\Delta_k^2$ die O-Aussage $f(z) = O(y^{-\gamma})$ für $y \to 0$ mit geeignetem $\gamma > 0$ in jedem Vertikalhalbstreifen $a \leqq x \leqq b$, $y > 0$ von $\mathfrak{E}$ gleichmäßig in x erfüllt (vgl. [18], § 3). Es ist eine offene Frage, ob diese Aussage auch für beliebige Gruppen Γ richtig ist.

Definition 2.1. *Ist f eine ω-meßbare Funktion aus $\mathscr{F}_k$, $\xi = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ und $A^{-1}\mathfrak{S}$ ein Spitzensektor der vor (2.29) eingeführten Art, so heiße f in die Spitze ξ hinein quadratisch integrierbar, wenn* $\int\limits_{A^{-1}\mathfrak{S}} |f|^2 \, d\omega < \infty$.

---

[5] In Δ_k^τ fungiert τ als oberer Index und nicht als Exponent. Potenzen von Operatoren werden nur im Beweis von Lemma 5.3 auftreten und dort als solche durch Klammerung besonders kenntlich gemacht werden, so daß Verwechslungen nicht zu befürchten sind.

Definition 2.2. *Eine automorphe Form $f \in \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ heißt eine Spitzenform, wenn f in jeder parabolischen Spitze $A^{-1}\infty$ von Γ die über Definition 1.1,* b) *hinausgehende Eigenschaft*

$$(2.30)\qquad (f|[A^{-1}, k])(z) = O(e^{-\varepsilon y}) \quad \textit{für} \quad y \to \infty \quad \textit{gleichmäßig in } x$$

mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ erfüllt. Andernfalls heißt f eine Nichtspitzenform. — Für die klassischen ganzen automorphen Formen sind analoge Begriffsbildungen üblich.

Eine automorphe Form ist offenbar genau dann eine Spitzenform, wenn ihre 0-ten Fourier-Koeffizienten zu allen Spitzen verschwinden. Die Fourier-Entwicklungen zu den Spitzen zeigen, daß jede Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zu einem Eigenwert $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ eine Spitzenform ist. — Falls Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art ist, liegen offenbar alle Spitzenformen aus $\mathscr{F}_k$ in $\mathscr{H}_k$.

§ 3. Die Operatoren K_k und Λ_k und die wesentliche Selbstadjungie theit von Δ_k^2 und Δ_k^∞

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist der Beweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit von Δ_k^2 und Δ_k^∞ (Satz 3.2). Haupthilfsmittel sind zwei von H. Maass [12] in die Theorie eingeführte Differentialoperatoren K_k und Λ_k und der mit ihnen formulierte Satz 3.1, eine Art Stokesscher Satz, der auch später noch mehrfach angewandt werden wird.

1. Die Definitionen von K_k und Λ_k lauten

$$(3.1)\qquad \mathsf{K}_k := iy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{k}{2} = (z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k}{2},$$

$$(3.2)\qquad \Lambda_k := iy\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{k}{2} = (z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{k}{2}.$$

Diese Operatoren entsprechen den ebenso bezeichneten, aber von den angegebenen etwas verschiedenen Operatoren aus [12] auf Grund des bei (1.24) beschriebenen Zusammenhanges zwischen unserem Formentypus und demjenigen aus [12].

Einfache Rechnungen unter Beachtung von $k \in \mathbf{R}$ zeigen

$$(3.3)\qquad \Lambda_k = -\bar{\mathsf{K}}_{-k}, \quad \mathsf{K}_k = -\bar{\Lambda}_{-k},$$

$$(3.4)\qquad -\Delta_k = \Lambda_{k+2}\mathsf{K}_k - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right) = \mathsf{K}_{k-2}\Lambda_k + \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right),$$

$$(3.5)\qquad \Delta_{k+2}\mathsf{K}_k = \mathsf{K}_k\Delta_k, \quad \Delta_{k-2}\Lambda_k = \Lambda_k\Delta_k.$$

Ferner sieht man durch eine einfache Rechnung, daß K_k und Λ_{k+2} bezüglich $d\omega$ formal adjungiert sind, d. h. daß gilt

$$\int_{\mathfrak{E}} \langle \mathsf{K}_k g, f\rangle \, d\omega = \int_{\mathfrak{E}} \langle g, \Lambda_{k+2} f\rangle \, d\omega$$

für alle einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ mit kompaktem Träger. — In Analogie zu [12], Hilfssatz 3 und 1 erhält man

Lemma 3.1. *α) Für stetig differenzierbare $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ und $M\in\Omega$ ist*

$$(\mathsf{K}_k f)\,|[M,k+2]=\mathsf{K}_k(f\,|[M,k]),$$
$$(\Lambda_k f)\,|[M,k-2]=\Lambda_k(f\,|[M,k]).$$

β) Für $l\in\mathbb{N}$ ist

$$\mathsf{K}_k\mathscr{C}_k^l(\Gamma,\mathfrak{U},v)\subset\mathscr{C}_{k+2}^{l-1}(\Gamma,\mathfrak{U},v), \tag{3.6}$$

$$\Lambda_k\mathscr{C}_k^l(\Gamma,\mathfrak{U},v)\subset\mathscr{C}_{k-2}^{l-1}(\Gamma,\mathfrak{U},v). \tag{3.7}$$

γ) K_k liefert eine lineare Abbildung von $\mathscr{F}_{k,\lambda}$ in $\mathscr{F}_{k+2,\lambda}$, die für $\lambda\neq-\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$ bijektiv ist; und Λ_k liefert eine lineare Abbildung von $\mathscr{F}_{k,\lambda}$ in $\mathscr{F}_{k-2,\lambda}$, die für $\lambda\neq\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$ bijektiv ist.

Der Beweis von γ) kann auch leicht direkt mit Hilfe von (3.4) und (3.5) geführt werden.

γ) zeigt, daß K_k einen zunächst ziemlich formalen Zusammenhang zwischen den Eigenwertproblemen von $-\Delta_k$ und $-\Delta_{k+2}$, Λ_k einen analogen Zusammenhang zwischen den Eigenwertproblemen von $-\Delta_k$ und $-\Delta_{k-2}$ vermittelt.

Lemma 3.2. a) *Ist $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ reell-analytisch und $-\Delta_k f=\lambda f$, so erfüllt $u:=\mathsf{K}_k f$ die Differentialgleichung $-\Delta_{k+2}u=\lambda u$.*

a′) *Ist $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ reell-analytisch und $-\Delta_k f=\lambda f$, so erfüllt $u:=\Lambda_k f$ die Differentialgleichung $-\Delta_{k-2}u=\lambda u$.*

b) *Für stetig differenzierbares $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ ist dann und nur dann $\mathsf{K}_k f=0$, wenn $y^{k/2}f(z)$ eine antiholomorphe Funktion von z ist, also $y^{k/2}\overline{f(z)}$ holomorph ist. Ist $\mathsf{K}_k f=0$, so ist $-\Delta_k f=-\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)f$.*

b′) *Für stetig differenzierbares $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ ist dann und nur dann $\Lambda_k f=0$, wenn $y^{-k/2}f(z)$ eine holomorphe Funktion von z ist. Ist $\Lambda_k f=0$, so ist $-\Delta_k f=\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)f$.*

c) *Für reell-analytisches $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ ist dann und nur dann $-\Delta_k f=\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)f$, wenn $y^{\frac{k}{2}-1}\Lambda_k f(z)$ eine antiholomorphe Funktion von z ist.*

c′) *Für reell-analytisches $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ ist dann und nur dann $-\Delta_k f=-\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)f$, wenn $y^{-\frac{k}{2}-1}\mathsf{K}_k f(z)$ eine holomorphe Funktion von z ist.*

d) *Ist $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ stetig differenzierbar und $\mathsf{K}_k f=\Lambda_k f=0$, so ist f konstant; ferner ist $k=0$, falls $f\neq0$.*

Beweis. a) folgt aus (3.5).

b) Für $g(z):=(z-\bar z)^{\frac{k}{2}}f(z)$ ist $\frac{\partial g}{\partial z}=(z-\bar z)^{\frac{k}{2}-1}\mathsf{K}_k f$. Daraus folgt die zuerst behauptete Äquivalenz. Ist $\mathsf{K}_k f=0$, so ist f nach dem eben Bewiesenen reell-analytisch in x, y, und (3.4) liefert die zweite Behauptung.

c) Gemäß (3.4) ist die zur Rede stehende Differentialgleichung äquivalent mit $\mathsf{K}_{k-2}\Lambda_k f = 0$. Man kann sich daher auf b) berufen.

a′), b′), c′) können analog bewiesen werden, oder man folgert sie aus a), b), c) durch Übergang zum konjugiert Komplexen auf Grund von (3.3) und (1.26).

Zu d). Nach (3.1) und (3.2) ist $\mathsf{K}_k f - \Lambda_k f = 2y \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, d. h. f hängt nicht von y ab. Aus

$$\mathsf{K}_k f + \Lambda_k f = 2iy \frac{\partial f}{\partial x} + kf = 0$$

folgt daher $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, usw. ∎

2. Für den Beweis des angekündigten Satzes 3.1 stellen wir das folgende, zu [19], Satz 1 analoge Lemma bereit.

Lemma 3.3. *Es sei $f \in \mathscr{C}_k^2$, $g \in \mathscr{F}_k$, und g habe einen* mod Γ *kompakten Träger. Ferner sei g dehnungsbeschränkt, d. h. es existiere eine Konstante $\delta \geqq 0$, so daß gilt*

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqq \delta |z_1, z_2| \quad \textit{für} \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{E}.$$

Dann gilt

$$-\int_{\mathfrak{F}} \langle g, \Delta_k f\rangle \, d\omega = \int_{\mathfrak{F}} \langle \mathsf{K}_k g, \mathsf{K}_k f\rangle \, d\omega - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \cdot \int_{\mathfrak{F}} \langle g, f\rangle \, d\omega .$$

Beweis. Mit einer bei Γ invarianten, beliebig oft differenzierbaren Zerlegung der 1 auf $\mathfrak{E}$ in der bei (2.25) beschriebenen Form ergibt sich

$$\begin{aligned} L := -\int_{\mathfrak{F}} \langle g, \Delta_k f\rangle \, d\omega &= -\int_{\mathfrak{F}} \Big\langle \sum_{\nu, M} h_\nu^M g, \Delta_k f\Big\rangle \, d\omega \\ &= -\sum_{\nu, M} \int_{\mathfrak{F}} \langle h_\nu^M g, \Delta_k f\rangle \, d\omega \quad \text{wegen absoluter Konvergenz}^6 \\ &= -\sum_{\nu, M} \int_{\mathfrak{F}} \langle h_\nu g, \Delta_k f\rangle^M \, d\omega , \end{aligned}$$

da $\langle g, \Delta_k f\rangle$ bei Γ invariant ist. Wegen $-I \in \Gamma$ und $M\mathfrak{F} = (-M)\mathfrak{F}$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} L &= -2 \sum_\nu \int_{\mathfrak{E}} \langle h_\nu g, \Delta_k f\rangle \, d\omega \\ &= 2 \sum_\nu \int_{\mathfrak{E}} \left\{ \langle \mathsf{K}_k(h_\nu g), \mathsf{K}_k f\rangle - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \langle h_\nu g, f\rangle \right\} d\omega . \end{aligned} \tag{3.8}$$

[6] Da g einen mod Γ kompakten Träger hat, liefern übrigens immer nur endlich viele ν einen von 0 verschiedenen Beitrag. Bezeichnet $\mathfrak{C}$ ein Kompaktum in $\mathfrak{E}$, so daß der Träger von g in $\Gamma\mathfrak{C}$ liegt, und wird $\mathfrak{F}$ speziell so gewählt, daß $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C} \cup (\mathfrak{E} - \Gamma\mathfrak{C})$ ist, was möglich ist, so liefern sogar nur endlich viele Paare (ν, M) von 0 verschiedene Beiträge zu $\sum_{\nu, M}$, und das ergibt eine zweite Rechtfertigung der Vertauschung der Summation mit der Integration für diese speziellen $\mathfrak{F}$. Da die nächste Formelzeile $\mathfrak{F}$ nicht mehr enthält, erhält man so auch eine Rechtfertigung für beliebige $\mathfrak{F}$.

Der letzte Ausdruck ist durch formale partielle Integration entstanden, und man rechtfertigt diesen Schritt mit Hilfe des Stokesschen Satzes in einer Fassung von HAUPT-AUMANN-PAUC [5], 11.3.4, S. 305, wobei noch in analoger Weise wie in 11.3.4.1, S. 307 zu spezialisieren ist. Bei dieser Version des Stokesschen Satzes ist darauf zu achten, daß f zweimal stetig differenzierbar ist und die $h_\nu g$ zugleich mit g dehnungsbeschränkt sind. Randbeiträge treten nicht auf, da h_ν einen kompakten Träger hat.

Da die Überdeckung (2.26) vom endlichen Typ ist, ist

$$\sum_{\nu,M}\left\{|\langle \mathsf{K}_k(h_\nu g), \mathsf{K}_k f\rangle| + \left|\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle h_\nu g, f\rangle\right|\right\}^M$$

eine stetige, bei Γ invariante Funktion. Diese Funktion hat einen mod Γ kompakten Träger, weil dies von g vorausgesetzt ist, und sie ist beschränkt und meßbar und deshalb über $\mathfrak{F}$ quadratisch integrierbar. Daher erhält man aus (3.8) wegen absoluter Konvergenz oder auch durch eine ähnliche Schlußweise wie unter der letzten Fußnote

$$\begin{aligned} L &= \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\nu,M}\left\{\langle \mathsf{K}_k(h_\nu g), \mathsf{K}_k f\rangle - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle h_\nu g, f\rangle\right\}^M d\omega \\ &= \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\nu,M}\left\{\langle (\mathsf{K}_k(h_\nu g))\,|[M,k+2], (\mathsf{K}_k f)\,|[M,k+2]\rangle - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle h_\nu^M g, f\rangle\right\} d\omega. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.1, α) und des Transformationsverhaltens von f, g erhält man weiter

$$L = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\nu,M}\left\{\langle \mathsf{K}_k(h_\nu^M g), \mathsf{K}_k f\rangle - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle h_\nu^M g, f\rangle\right\} d\omega$$

und daraus wegen (2.25) die Behauptung. ∎

Satz 3.1. *Für* $f, g \in \mathscr{D}_k^2$ *gilt* $\mathsf{K}_k f \in \mathscr{H}_{k+2}$, $\Lambda_k f \in \mathscr{H}_{k-2}$ *und*

$$(g, -\Delta_k f) = (\mathsf{K}_k g, \mathsf{K}_k f) - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)(g, f), \tag{3.9}$$

$$(g, -\Delta_k f) = (\Lambda_k g, \Lambda_k f) + \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)(g, f). \tag{3.10}$$

Bemerkung: In welchem der Hilbert-Räume $\mathscr{H}_{k-2}$, $\mathscr{H}_k$, $\mathscr{H}_{k+2}$ hier die Skalarprodukte $(.,.)$ zu verstehen sind, geht aus den jeweiligen Argumenten hervor.

Beweis. Es genügt, (3.9) zu beweisen, weil (3.10) daraus durch Übergang zum konjugiert Komplexen auf Grund von (3.3) und (1.26) folgt. Ferner genügt es, (3.9) für $f = g$ zu beweisen, der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch Polarisieren.

Ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Γ (s. S. 302, Fußnote 4) und $w \in \mathfrak{E}$ seien fest gewählt. Für $r \geqq 0$ bezeichne $\mathfrak{K}_r(w)$ die abgeschlossene Kreisscheibe zum Mittelpunkt w und Radius r in der hyperbolischen Geometrie, also

$$\mathfrak{K}_r(w) := \{z; z \in \mathfrak{E}, |z, w| \leqq r\}. \tag{3.11}$$

Die Menge $\mathfrak{F}_r := \mathfrak{F} \cap \Gamma \mathfrak{K}_r(w)$ ist dann ebenfalls meßbar, und es ist

$$\mathfrak{F}_r = \{z; z \in \mathfrak{F}, |z, Sw| \leqq r \text{ für mindestens ein } S \in \Gamma\}.$$

In Analogie zu [19], Satz 2, gilt dann

$$\int_0^R \left| \int_{\mathfrak{F}_r} \left\{ \langle g, \Delta_k f \rangle + \langle \mathsf{K}_k g, \mathsf{K}_k f \rangle - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \langle g, f \rangle \right\} d\omega \right| dr$$
$$\leqq \int_{\mathfrak{F}_R} |g| \, |\mathsf{K}_k f| \, d\omega .$$

Der Beweis dieser Abschätzung kann unter Benutzung von Lemma 3.3 in völliger Analogie zum Beweis von [19], Satz 2, geführt werden. Satz 3.1 folgt aus dieser Abschätzung durch einfache Übertragung von [19], Satz 3 bis 5. ∎

3. Mit Hilfe von Satz 3.1 soll jetzt die wesentliche Selbstadjungiertheit von $-\Delta_k^2$ und $-\Delta_k^\infty$ bewiesen werden; weitere Anwendungen dieses Satzes werden in späteren Paragraphen gemacht werden.

Aus Satz 3.1 folgt $(-\Delta_k g, f) = (g, -\Delta_k f)$ für $f, g \in \mathscr{D}_k^2$. Da $\mathscr{D}_k^\infty$ und $\mathscr{D}_k^2$ in $\mathscr{H}_k$ dichte lineare Mannigfaltigkeiten sind, bedeutet diese Gleichung, daß $-\Delta_k^\infty$ und $-\Delta_k^2$ symmetrische Operatoren sind (s. M. Stone [24], S. 49).

Zur Erinnerung seien einige bekannte Tatsachen über wesentlich selbstadjungierte Operatoren vorausgeschickt. Ein symmetrischer Operator $\mathsf{A}: \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ in einem Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn sein adjungierter Operator A^* selbstadjungiert ist, d. h. wenn $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^{**}$ gilt (M. Stone [24], Definition 2.12). Es sei nun $\mathsf{A}: \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ wesentlich selbstadjungiert. Nach [24], Theorem 2.9, ist $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^{**}$ abgeschlossen, d. h. der Graph dieses Operators ist abgeschlossen in $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Nach [24], Theorem 2.10 und 9.5, ist $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^{**}$ mit der kleinsten abgeschlossenen linearen Fortsetzung $\tilde{\mathsf{A}}: \tilde{\mathscr{D}} \to \mathscr{H}$ von A identisch. graph $\tilde{\mathsf{A}}$ ist also die abgeschlossene Hülle von graph A in $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Man sagt, $\tilde{\mathsf{A}}$ entstehe aus A durch Abschließen, und nennt $\tilde{\mathsf{A}}$ die Abschließung von A. $\tilde{\mathsf{A}}$ ist die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von A (s. [24], Kap. II, § 2). Ein bekanntes Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit ist (s. [24], Theorem 4.17 und 4.16)

Lemma 3.4. *Ein symmetrischer Operator $\mathsf{A}: \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ in einem Hilbert-Raum ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn die linearen Mannigfaltigkeiten $(\mathsf{A} + i)\mathscr{D}$ und $(\mathsf{A} - i)\mathscr{D}$ in $\mathscr{H}$ dicht sind.*

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Paragraphen.

Satz 3.2. *Die Operatoren $-\Delta_k^2$ und $-\Delta_k^\infty$ in $\mathscr{H}_k$ sind wesentlich selbstadjungiert und haben dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung.*

Diese selbstadjungierte Fortsetzung wird im folgenden mit $-\tilde{\Delta}_k$ bezeichnet, ihr Definitionsbereich mit $\tilde{\mathscr{D}}_k$ und ihre Spektralschar mit $(\mathsf{E}_{k,\lambda})_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

Beweis des Satzes. Da jeder wesentlich selbstadjungierte Operator genau eine selbstadjungierte Fortsetzung hat und $-\Delta_k^2$ eine Fortsetzung von $-\Delta_k^\infty$

ist, haben $-\Delta_k^2$ und $-\Delta_k^\infty$ jedenfalls dann dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung, falls beide Operatoren wesentlich selbstadjungiert sind. Es genügt daher, die wesentliche Selbstadjungiertheit von $-\Delta_k^2$ und $-\Delta_k^\infty$ zu zeigen. Lemma 3.4 entsprechend zeigen wir dafür, daß die linearen Mannigfaltigkeiten $(\Delta_k+i)\mathscr{D}_k^2$, $(\Delta_k-i)\mathscr{D}_k^2$, $(\Delta_k+i)\mathscr{D}_k^\infty$, $(\Delta_k-i)\mathscr{D}_k^\infty$ in $\mathscr{H}_k$ dicht sind. Wegen $\mathscr{D}_k^\infty\subset\mathscr{D}_k^2$ genügt es, die letzten beiden Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Wir beschränken uns auf $(\Delta_k+i)\mathscr{D}_k^\infty$, weil man für $(\Delta_k-i)\mathscr{D}_k^\infty$ analog schließen kann (oder zum konjugiert Komplexen übergehen kann).

Es sei $u\in\mathscr{H}_k$ und

$$(u,\Delta_k f+if)=0 \quad \text{für alle } f\in\mathscr{D}_k^\infty. \tag{3.12}$$

Wir müssen $u=0$ zeigen. Es sei dazu $l:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ beliebig oft differenzierbar und mit kompaktem Träger beliebig gewählt. Nach Lemma 2.2 kann in (3.12)

$$f=\sum_{M\in\Gamma} v(M)^{-1}\, l|[M,k] \tag{3.13}$$

eingesetzt werden. Da l einen kompakten Träger hat, kann Δ_k auf diese Reihendarstellung gliedweise ausgeübt werden, und da Δ_k mit $|[M,k]$ vertauschbar ist, folgt

$$\Delta_k f=\sum_{M\in\Gamma} v(M)^{-1}(\Delta_k l)|[M,k].$$

Damit folgt aus (3.12)

$$\begin{aligned}0&=\int_{\mathfrak{F}}\langle u,\Delta_k f+if\rangle\,d\omega\\&=\int_{\mathfrak{F}}\langle u,\sum_M v(M)^{-1}(\Delta_k l+il)\,|[M,k]\rangle\,d\omega\\&=\sum_M\int_{\mathfrak{F}}\langle u^M,(\Delta_k l+il)^M\rangle\,d\omega\end{aligned}$$

wegen absoluter Konvergenz und des Transformationsverhaltens von u bei Γ. Daraus folgt

$$0=\int_{\mathfrak{E}}\langle u,\Delta_k l+il\rangle\,d\omega. \tag{3.14}$$

Da dies für alle beliebig oft differenzierbaren l gilt und Δ_k elliptisch ist und beliebig oft differenzierbare Koeffizienten hat, folgt[7], daß u eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf $\mathfrak{E}$ darstellt (vgl. nun die Bemerkung von S. 303, o.). Dann folgt aber aus (3.14) durch partielle Integration (Stokesscher Satz) — man beachte, daß l einen kompakten Träger hat und Δ_k formal selbstadjungiert ist —, daß $\Delta_k u-iu=0$ ist. Wegen $u\in\mathscr{H}_k$ ist also $\Delta_k u\in\mathscr{H}_k$, d. h. insgesamt $u\in\mathscr{D}_k^2$. Da Δ_k^2 symmetrisch ist, folgt $u=0$. ∎

Das folgende Lemma wird zum Beweis der Sätze 5.6 und 5.7 herangezogen werden.

Lemma 3.5. *Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion aus $\tilde{\mathscr{D}}_k$ liegt in $\mathscr{D}_k^2$.*

[7] Siehe L. SCHWARTZ [21], Kap. V, § 6.

Beweis. Es sei $f \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ zweimal stetig differenzierbar. Mit einer beliebigen Funktion g aus $\mathscr{D}_k^\infty$ in der Darstellung (2.23) ist

$$\begin{aligned}(\tilde{\Delta}_k f, g) &= (f, \tilde{\Delta}_k g) = (f, \Delta_k^2 g) \\ &= 2\int_{\mathfrak{E}} \langle f, \Delta_k l\rangle \, d\omega && \text{(vgl. die Umformung vor (3.8))} \\ &= 2\int_{\mathfrak{E}} \langle \Delta_k f, l\rangle \, d\omega && \text{(partielle Integration)} \\ &= \int_{\mathfrak{F}} \langle \Delta_k f, g\rangle \, d\omega .\end{aligned}$$

Da hier $g \in \mathscr{D}_k^\infty$ beliebig war, folgt $\Delta_k f = \tilde{\Delta}_k f \in \mathscr{H}_k$ und damit $f \in \mathscr{D}_k^2$. ∎

§ 4. Zusammenhang mit einem Eigenwertproblem auf der Überlagerungsfläche von $\Omega = SL(2, \mathbf{R})$; zweiter Beweis von Satz 3.2

A. Selberg benutzt in [22] zur Behandlung der automorphen Formen den dreidimensionalen Raum

(4.1) $$\hat{\mathfrak{E}} := \mathfrak{E} \times \mathbf{R} := \{(z, \varphi);\, z \in \mathfrak{E}, \varphi \in \mathbf{R}\}.$$

Dabei werden der diskontinuierlichen Gruppe Γ auf $\mathfrak{E}$ eine diskontinuierliche Gruppe $\hat{\Gamma}$ auf $\hat{\mathfrak{E}}$ und den automorphen Formen f auf $\mathfrak{E}$ vom Gewicht k die Funktionen $F(z, \varphi) := e^{-ik\varphi} f(z)$ auf $\hat{\mathfrak{E}}$ zugeordnet. Die Funktionen F erfüllen dann eine Eigenwertdifferentialgleichung in bezug auf einen Differentialoperator $\hat{\Delta}$, der als Laplace-Operator von $\hat{\mathfrak{E}}$ in bezug auf eine passende Riemannsche Maßbestimmung auf $\hat{\mathfrak{E}}$ angesehen werden kann. In diesem Paragraphen soll aus der allgemeinen Theorie des Laplace-Operators auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, angewandt auf $\hat{\Delta}$ auf $\hat{\mathfrak{E}}$, ein neuer Beweis von Satz 3.2 abgeleitet werden.

Wir führen dazu weitere Gruppen, insbesondere die universelle Überlagerungsgruppe $\hat{\Omega}$ von $\Omega = SL(2, \mathbf{R})$ ein. $\hat{\mathfrak{E}}$ wird dann als globaler Koordinatenraum von $\hat{\Omega}$ und zugleich als Wirkungsraum für die Linkstranslationen in $\hat{\Omega}$ erscheinen.

Bekanntlich kann jede Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$ eindeutig in der Gestalt

(4.2) $$M = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $x, y, \varphi \in \mathbf{R}$, $y > 0$, $\sqrt{y} > 0$ und $\varphi \bmod 2\pi$ geschrieben werden, nämlich mit

(4.3) $$x + iy = Mi \quad \text{und} \quad \varphi \equiv \arg(ci + d) \bmod 2\pi .$$

Daraus folgt, daß der dreidimensionale Raum

(4.4) $$\hat{\Omega} := \left\{(M, \alpha);\, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \equiv \arg(ci + d) \bmod 2\pi\right\}$$

als universelle Überlagerungsgruppe von Ω mit der kanonischen Projektion

$$\Phi(M, \alpha) := M \tag{4.5}$$

und (I, 0) als Einselement betrachtet werden kann. Die Gruppenstruktur von $\hat{\Omega}$ ist hierdurch bereits eindeutig bestimmt, und zwar findet man als Verknüpfung

$$(M_1, \alpha_1)(M, \alpha) = (M_1 M, \arg(c_1 M i + d_1) - \arg(c_1 i + d_1) + \alpha_1 + \alpha), \tag{4.6}$$

was wegen der Argumentdefinition (1.4) und wegen (1.7) dasselbe ist wie

$$(M_1, \alpha_1)(M, \alpha) = (M_1 M, \arg(c_2 i + d_2) + 2\pi w(M_1, M) + 2\pi v(\alpha_1) + 2\pi v(\alpha)). \tag{4.7}$$

Dabei bedeutet (c_2, d_2) die zweite Zeile von $M_1 M$ und $v(\psi)$ für $\psi \in \mathbf{R}$ diejenige ganzrationale Zahl, für die gilt

$$-\pi + 2\pi v(\psi) < \psi \leqq \pi + 2\pi v(\psi). \tag{4.8}$$

Durch

$$\mathsf{X}(M, \alpha) := (M i, \alpha) \tag{4.9}$$

ist offenbar eine topologische Abbildung von $\hat{\Omega}$ auf $\hat{\mathfrak{E}}$ aus (4.1) gegeben, so daß $\hat{\mathfrak{E}}$ als Koordinatenraum von $\hat{\Omega}$ betrachtet werden kann. Aus (4.2) und (4.3) folgt mit $z = x + iy$

$$\mathsf{X}^{-1}(z, \varphi) = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \dfrac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \right). \tag{4.10}$$

X ist offenbar ein für die Liesche Gruppenstruktur von $\hat{\Omega}$ zulässiges Koordinatensystem [Koordinaten (x, y, φ) oder zusammengefaßt (z, φ)]. Auf die Übertragung der Gruppenstruktur auf $\hat{\mathfrak{E}}$ kann für die folgenden Zwecke verzichtet werden. Dagegen benötigen wir die Beschreibung der Linkstranslationen von $\hat{\Omega}$ in den Koordinaten (z, φ), oder in einer anderen, im folgenden bevorzugten Auffassung, die Operation der Elemente (M, α) von $\hat{\Omega}$ auf $\hat{\mathfrak{E}}$ als „Wirkungsraum" gemäß

$$(z, \varphi) \to (M, \alpha)(z, \varphi) := \mathsf{X}(M, \alpha)\mathsf{X}^{-1}(z, \varphi). \tag{4.11}$$

Eine kleine Rechnung mit Hilfe von (4.10), (4.9), (4.8) und (4.3) zeigt

$$\begin{aligned} (M, \alpha)(z, \varphi) &= (Mz, \varphi + \alpha + \arg(cz + d) - \arg(ci + d)) \\ &= (Mz, \varphi + \arg(cz + d) + 2\pi v(\alpha)). \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\hat{\Omega}$ operiert auf $\hat{\mathfrak{E}}$ offenbar effektiv, d. h. ein vom Einselement verschiedenes Element aus $\hat{\Omega}$ bestimmt eine von der Identität verschiedene Abbildung von $\hat{\mathfrak{E}}$.

Für beliebiges festes $\eta > 0$ ist durch

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \eta^2 \left(d\varphi - \frac{dx}{2y} \right)^2 \tag{4.13}$$

als Quadrat des Linienelementes auf $\hat{\mathfrak{E}}$ eine positiv-definite Riemannsche Maßbestimmung gegeben, die bei $\hat{\Omega}$ invariant ist, wie leicht zu bestätigen. $\hat{\Omega}$ operiert dann als transitive Gruppe von Isometrien auf $\hat{\mathfrak{E}}$. Daher ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{E}}$ vollständig, d. h. von jedem Punkt von $\hat{\mathfrak{E}}$ gehen in jeder Richtung Geodätische von beliebiger Länge aus (bei Geschlossenheit einer Geodätischen wiederholte Durchlaufung).[8]

Zu (4.13) gehört der Laplace-Operator

$$\hat{\Delta} = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\varphi} + \frac{4+\eta^2}{4\eta^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{4.14}$$

und das Volumenelement

$$\eta\,\frac{dx\,dy\,d\varphi}{y^2}.$$

Statt dieses Volumenelementes werden wir im folgenden

$$d\hat{\omega} := \frac{dx\,dy\,d\varphi}{\pi y^2} \tag{4.15}$$

benutzen.

Wie bisher bezeichne Γ eine diskrete, die Matrix $-I$ enthaltende Untergruppe von Ω.

$$\hat{\Gamma} := \Phi^{-1}\Gamma = \{(M,\alpha);\,(M,\alpha)\in\hat{\Omega},\,\Phi(M,\alpha)\in\Gamma\} \tag{4.16}$$

ist dann eine diskrete Untergruppe von $\hat{\Omega}$ und operiert daher diskontinuierlich auf $\hat{\mathfrak{E}}$. Speziell ist $(-I,\pi)\in\hat{\Gamma}$, und es ist

$$(-I,\pi)(z,\varphi) = (z,\varphi+\pi)\,. \tag{4.17}$$

Ist $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich von Γ in $\mathfrak{E}$ (im Sinne der Fußnote 4 von S. 302), so ist

$$\hat{\mathfrak{F}} := \mathfrak{F}\times[0,\pi\rangle := \{(z,\varphi);\,z\in\mathfrak{F},\,0\leqq\varphi<\pi\} \tag{4.18}$$

ein Fundamentalbereich von $\hat{\Gamma}$ in $\hat{\mathfrak{E}}$ (in einem analogen Sinne).

Wie bisher sei v ein unitäres Multiplikatorsystem zur Gruppe Γ, zum Gewicht $k\in\mathbf{R}$ und zum unitären Raum $\mathfrak{U}$ im Sinne von § 1, 6. k war durch v nur mod 2 eindeutig bestimmt, und zwar durch (1.15). Diese Restklasse mod 2 werde mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Wir werden die verschiedenen $k\in\mathfrak{K}$ nebeneinander betrachten.

Jedem $f:\mathfrak{E}\to\mathfrak{U}$ ordnen wir die durch

$$(\mathsf{l}_k f)(z,\varphi) := e^{-ik\varphi}f(z) \tag{4.19}$$

gegebene Funktion $\mathsf{l}_k f:\hat{\mathfrak{E}}\to\mathfrak{U}$ zu. Für $F:\hat{\mathfrak{E}}\to\mathfrak{U}$ und $(M,\alpha)\in\hat{\Omega}$ bezeichne ferner $F^{(M,\alpha)}$ die durch

$$F^{(M,\alpha)}(z,\varphi) := F((M,\alpha)(z,\varphi)) \tag{4.20}$$

[8] Eine äquivalente Definition der Vollständigkeit ist nach H. Hopf und W. Rinow [8] die folgende. Man betrachte $\hat{\mathfrak{E}}$ als metrischen Raum, indem man als Abstand $|u,v|$ von $u,v\in\hat{\mathfrak{E}}$ die untere Grenze der Längen aller stetig differenzierbaren Verbindungskurven von u,v erklärt. $\hat{\mathfrak{E}}$ ist dann und nur dann vollständig, wenn $\hat{\mathfrak{E}}$ in der Metrik $|u,v|$ ein vollständiger metrischer Raum ist, d. h. wenn jede Cauchy-Folge in $\hat{\mathfrak{E}}$ einen Limes hat.

gegebene Funktion auf $\hat{\mathfrak{E}}$. Man bestätigt dann

$$(4.21)\qquad (\mathsf{l}_k f)^{(M,\alpha)} = e^{-2\pi i v(\alpha) k}\,\mathsf{l}_k(f|[M,k]).$$

Daher liegt f genau dann in $\mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$, d. h. f besitzt genau dann das Transformationsverhalten (1.16) bei Γ, wenn

$$(4.22)\qquad (\mathsf{l}_k f)^{(M,\alpha)} = e^{-2\pi i v(\alpha) k}\, v(M)\,\mathsf{l}_k f \qquad \text{für } (M,\alpha)\in\hat{\Gamma}$$

erfüllt ist. Hieraus folgt wegen einer hinter (1.16) gemachten Bemerkung, daß die in (4.22) auftretenden Automorphismen

$$(4.23)\qquad \hat{v}(M,\alpha) := e^{-2\pi i v(\alpha) k}\, v(M), \qquad (M,\alpha)\in\hat{\Gamma},$$

von $\mathfrak{U}$ eine unitäre Darstellung $\hat{v}$ von $\hat{\Gamma}$ bilden, was auch direkt nachgerechnet werden kann. $\hat{v}$ hängt offenbar nicht von der Auswahl von $k\in\mathfrak{K}$ ab, sondern nur von v.

Aus (1.15) folgt

$$(4.24)\qquad \hat{v}(-I,\pi) = e^{-\pi i k}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{U}}.$$

Die eben getroffene Zuordnung von $\hat{v}$ zu v läßt sich eindeutig umkehren. Wir gehen dazu von einer beliebigen Darstellung $\hat{v}$ von $\hat{\Gamma}$ in der Gruppe der Automorphismen des unitären Raumes $\mathfrak{U}$ aus, für die $\hat{v}(-I,\pi)$ die Form $\eta\,\mathrm{id}_{\mathfrak{U}}$ mit einer komplexen Zahl η vom Betrag 1 besitzt. Die $k\in\mathbf{R}$, die der Bedingung (4.24) genügen, bilden eine Restklasse mod 2, die $\mathfrak{K}$ genannt werde. Es sei nun $M\in\Gamma$ gegeben. Wählt man $k\in\mathfrak{K}$ und $\alpha\in\mathbf{R}$, so daß $(M,\alpha)\in\hat{\Gamma}$ ist, so bestätigt man leicht, daß

$$(4.25)\qquad v(M) := e^{2\pi i v(\alpha) k}\,\hat{v}(M,\alpha)$$

nicht von der Auswahl von k und α, sondern nur von $\hat{v}$ und M abhängt, und daß auf diese Weise ein unitäres Multiplikatorsystem v von Γ zum Gewicht k definiert ist. Die Eindeutigkeit der Zuordnung $v\to\hat{v}$ ist offensichtlich.

Wir erklären jetzt

$$(4.26)\qquad \hat{\mathscr{F}} = \hat{\mathscr{F}}(\hat{\Gamma}, \mathfrak{U}, \hat{v}) := \{F;\ F:\hat{\mathfrak{E}}\to\mathfrak{U},\ F^{(M,\alpha)} = \hat{v}(M,\alpha)\,F \ \text{ für } (M,\alpha)\in\hat{\Gamma}\},$$

und für $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$(4.27)\qquad \hat{\mathscr{C}}^l = \hat{\mathscr{C}}^l(\hat{\Gamma}, \mathfrak{U}, \hat{v}) = \{F;\ F\in\hat{\mathscr{F}}(\hat{\Gamma}, \mathfrak{U}, \hat{v}),\ F\ l\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Ist $F\in\hat{\mathscr{F}}$, so hat $e^{ik\varphi}F(z,\varphi)$ in Abhängigkeit von φ die Periode π. Das ergibt sich sofort unter Beachtung von (4.17).

Die Bedeutung der in (4.19) getroffenen Zuordnung $f\to\mathsf{l}_k f$ für das Eigenwertproblem von $-\Delta_k$ beruht nun weiter auf der Tatsache, daß die Anwendung von Δ_k auf zweimal stetig differenzierbare f nach der leicht zu bestätigenden Gleichung

$$(4.28)\qquad \hat{\Delta}\,\mathsf{l}_k f = \mathsf{l}_k\left(\Delta_k - \frac{4+\eta^2}{4\eta^2}k^2\right) f$$

im wesentlichen der Anwendung von $\hat{\Delta}$ auf $\mathsf{H} f$ entspricht. Insbesondere erfüllt also f dann und nur dann die Gleichung $-\Delta_k f = \lambda f$, wenn

$$(4.29)\qquad -\hat{\Delta}\,\mathsf{l}_k f = \left(\lambda + \frac{4+\eta^2}{4\eta^2}k^2\right)\mathsf{l}_k f$$

gilt. Die Eigenwertprobleme von $-\Delta_k$ für alle $k \in \mathfrak{K}$ entspringen also formal aus dem Eigenwertproblem von $-\hat{\Delta}$ durch Separation der Variablen z, φ gemäß $F(z, \varphi) = e^{-ik\varphi} f(z)$.

Diese formalen Zusammenhänge lassen sich im Rahmen der angemessenen Hilbert-Räume weiter verfolgen. Zur Untersuchung des Eigenwertproblems von $-\hat{\Delta}$ in $\hat{\mathscr{F}}$ benutzen wir den Hilbert-Raum

$\hat{\mathscr{H}}$: 1) $F \in \hat{\mathscr{F}}$ Lebesgue-meßbar,

2) $\|F\|^2 := \int\limits_{\hat{\mathfrak{F}}} |F|^2 \, d\hat{\omega} < \infty$,

mit $d\hat{\omega}$ aus (4.15) und einem Fundamentalbereich $\hat{\mathfrak{F}}$ von $\hat{\Gamma}$ in $\hat{\mathfrak{E}}$, dessen Auswahl auf die Definition keinen Einfluß hat, da der Integrand bei $\hat{\Gamma}$ invariant ist. Das Skalarprodukt in $\hat{\mathscr{H}}$ sei

$$(F, G) := \int\limits_{\hat{\mathfrak{F}}} \langle F, G \rangle \, d\hat{\omega}.$$

Da $\hat{\mathfrak{F}}$ speziell in der Gestalt (4.18) gewählt werden kann, sieht man, daß eine Funktion $f: \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ genau dann in $\mathscr{H}_k$ liegt, wenn $\mathsf{I}_k f$ in $\hat{\mathscr{H}}$ liegt.

Die Zuordnung $f \to \mathsf{I}_k f$ aus (4.19) liefert offenbar einen Hilbert-Raum-Isomorphismus H_k von $\mathscr{H}_k$ auf einen abgeschlossenen Unterraum $\hat{\mathscr{H}}_k$ von $\hat{\mathscr{H}}$,

$$\mathsf{H}_k : \mathscr{H}_k \xrightarrow{\text{auf}} \hat{\mathscr{H}}_k, \quad \mathsf{H}_k f := \mathsf{I}_k f \qquad \text{für } f \in \mathscr{H}_k. \tag{4.30}$$

Den Operatoren Δ_k^τ in $\mathscr{H}_k$ aus (2.28) entsprechen vermöge H_k die Operatoren $\mathsf{H}_k \Delta_k^\tau \mathsf{H}_k^{-1}$ in $\hat{\mathscr{H}}_k$ mit den Definitionsbereichen

$$\hat{\mathscr{D}}_k^\tau := \mathsf{H}_k \mathscr{D}_k^\tau \qquad (k \in \mathfrak{K};\ \tau = 2, \infty). \tag{4.31}$$

Zufolge (4.28) ist

$$\mathsf{H}_k \Delta_k^\tau \mathsf{H}_k^{-1} = \hat{\Delta}_k^\tau + \frac{4+\eta^2}{4\eta^2} k^2, \tag{4.32}$$

wobei der Operator $\hat{\Delta}_k^\tau$ die folgende „Konkretisierung“ von $\hat{\Delta}$ bedeutet:

$$\hat{\Delta}_k^\tau : \hat{\mathscr{D}}_k^\tau \to \hat{\mathscr{H}}_k, \quad \hat{\Delta}_k^\tau F := \hat{\Delta} F \qquad \text{für } F \in \hat{\mathscr{D}}_k^\tau. \tag{4.33}$$

Wir ziehen nun die Theorie des Laplace-Operators $\hat{\Delta}$ in $\hat{\mathscr{H}}$ in Verbindung mit der Orthogonalprojektion Π_k von $\hat{\mathscr{H}}$ auf $\hat{\mathscr{H}}_k$ heran. Gemäß [19], Satz 8, ist $\hat{\Delta}$ wesentlich selbstadjungiert auf jedem der folgenden beiden Definitionsbereiche

$$\hat{\mathscr{D}}^2 := \{F;\ F \in \hat{\mathscr{H}} \cap \hat{\mathscr{C}}^2(\hat{\Gamma}, \mathfrak{U}, \hat{v}),\ \hat{\Delta} F \in \hat{\mathscr{H}}\}, \tag{4.34}$$

$$\hat{\mathscr{D}}^\infty := \{F;\ F \in \hat{\mathscr{C}}^\infty(\hat{\Gamma}, \mathfrak{U}, \hat{v}),\ F \text{ hat einen mod } \hat{\Gamma} \text{ kompakten Träger}\}. \tag{4.35}$$

Wir bezeichnen diese wesentlich selbstadjungierten Operatoren mit $\hat{\Delta}^2$ und $\hat{\Delta}^\infty$. Wegen $\hat{\mathscr{D}}^\infty \subset \hat{\mathscr{D}}^2$ haben $\hat{\Delta}^\infty$ und $\hat{\Delta}^2$ dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung $\tilde{\hat{\Delta}}$; ihren Definitionsbereich bezeichnen wir mit $\tilde{\hat{\mathscr{D}}}$. Nach den Bemerkungen vor Lemma 3.4 ist $\tilde{\hat{\Delta}}$ die Abschließung von $\hat{\Delta}^2$ und $\hat{\Delta}^\infty$.

Die Orthogonalprojektion Π_k von $\hat{\mathscr{H}}$ auf $\hat{\mathscr{H}}_k$ ($k \in \mathfrak{K}$) kann wie folgt analytisch dargestellt werden:

$$(\Pi_k F)(z, \varphi) = \frac{e^{-ik\varphi}}{\pi} \cdot \int\limits_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi) \, d\psi \tag{4.36}$$

für $F \in \hat{\mathscr{H}}$ und (Lebesguesch) fast alle $(z, \varphi) \in \hat{\mathfrak{E}}$. (Das Integral existiert wegen $F \in \hat{\mathscr{H}}$ jedenfalls für fast alle $z \in \mathfrak{E}$.)

Beweis. Ändert man F im Integranden auf einer Nullmenge von $\hat{\mathfrak{E}}$ ab, so ändert sich F als Element von $\hat{\mathscr{H}}$ nicht, und die rechte Seite von (4.36) ändert sich höchstens auf einer Nullmenge von $\hat{\mathfrak{E}}$. Daher ist eine solche Abänderung ohne Einfluß auf die Gültigkeit der Behauptung (4.36). Durch eine solche Abänderung von F kann erreicht werden, daß das Integral für alle $z \in \mathfrak{E}$ existiert, was wir nunmehr voraussetzen. Die durch

$$f(z) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi)\, d\psi \qquad (z \in \mathfrak{E})$$

erklärte Funktion f liegt in $\mathscr{F}_k$; das zeigt eine einfache Rechnung unter Benutzung von (4.25) und der Tatsache, daß der Integrand gemäß S. 314 die Periode π in ψ hat. Ferner ist wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{F}} |f|^2\, d\omega &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathfrak{F}} \left| \int_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi)\, d\psi \right|^2 d\omega \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathfrak{F}} \left\{ \int_0^\pi |e^{ik\psi}|^2\, d\psi \cdot \int_0^\pi |F(z, \psi)|^2\, d\psi \right\} d\omega \\ &= \|F\|^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt $f \in \mathscr{H}_k$, und es folgt, daß die rechte Seite von (4.36) in Abhängigkeit von (z, φ) ein Element von $\hat{\mathscr{H}}_k$ darstellt, das wir mit G bezeichnen. Eine kurze Rechnung zeigt, daß $(E, F - G) = 0$ ist für alle $E \in \hat{\mathscr{H}}_k$. (Man nehme zur Ausrechnung des Skalarproduktes $\hat{\mathfrak{F}}$ in der Gestalt (4.18) an und integriere zuerst nach φ.) Damit ist bewiesen, daß G die Projektion von F auf $\hat{\mathscr{H}}_k$ ist.

Die Hilbert-Räume $\hat{\mathscr{H}}_k$ $(k \in \mathfrak{K})$ sind offenbar paarweise orthogonal. Wir zeigen noch, daß die Räume $\hat{\mathscr{H}}_k$ zusammengenommen ganz $\hat{\mathscr{H}}$ als abgeschlossene lineare Hülle besitzen. Wegen der paarweisen Orthogonalität der $\hat{\mathscr{H}}_k$ genügt es dafür,

$$\|F\|^2 = \sum_{k \in \mathfrak{K}} \|\Pi_k F\|^2 \qquad \text{für } F \in \hat{\mathscr{H}}$$

zu zeigen. Diese Gleichung ergibt sich aber mühelos mit Hilfe von (4.36).

Satz 4.1. *Die Operatoren $\hat{\Delta}^2$, $\hat{\Delta}^\infty$ und $\tilde{\hat{\Delta}}$ werden von $\hat{\mathscr{H}}_k$ reduziert*[9].

Beweis. Da $\tilde{\hat{\Delta}}$ aus den Operatoren $\hat{\Delta}^2$, $\hat{\Delta}^\infty$ durch Abschließen entsteht, genügt es, die Behauptung für $\hat{\Delta}^2$ und $\hat{\Delta}^\infty$ zu zeigen (zweifache Anwendung von B. VON SZ.-NAGY [25], S. 32, Zeile 5, f)).

[9] Ein linearer Operator $T: \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ in einem Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ wird definitionsgemäß von einem abgeschlossenen Unterraum $\mathscr{R}$ von $\mathscr{H}$ reduziert, wenn $\Pi T \subset T\Pi$ ist, wobei Π die Orthogonalprojektion von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{R}$ bezeichnet und $\subset$ ausdrückt, daß ΠT eine Einschränkung von $T\Pi$ ist (vgl. B. VON SZ.-NAGY [25], V., Nr. 3).

Es sei also $\tau = 2$ oder ∞ und $F \in \hat{\mathscr{D}}^\tau$. Nach (4.36) ist dann

$$G(z, \varphi) := \Pi_k \hat{\Delta}^\tau F(z, \varphi) = \frac{e^{-ik\varphi}}{\pi} \int_0^\pi e^{ik\psi} \hat{\Delta} F(z, \psi)\, d\psi,$$

und zweimalige partielle Integration nach ψ liefert

$$G(z, \varphi) = \frac{e^{-ik\varphi}}{\pi} \left(\Delta_k - \frac{4+\eta^2}{4\eta^2} k^2\right) \int_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi)\, d\psi.$$

Läßt man hier das Integral die Rolle von f aus (4.28) spielen, so folgt

$$G(z, \varphi) = \hat{\Delta}\left(\frac{e^{-ik\varphi}}{\pi} \int_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi)\, d\psi\right)$$

(4.37) $$= \hat{\Delta}(\Pi_k F)(z, \varphi).$$

Damit haben wir $\hat{\Delta}\Pi_k F \in \hat{\mathscr{H}}$. Hier ist $\Pi_k F \in \hat{\mathscr{H}}$, insbesondere also $\Pi_k F \in \hat{\mathscr{F}}$. Aus (4.36) folgt weiter, daß $\Pi_k F \in \hat{\mathscr{C}}^\tau$ ist und daß $\Pi_k F$ im Falle $\tau = \infty$ einen $\bmod \hat{\Gamma}$ kompakten Träger hat. Damit haben wir insgesamt $\Pi_k F \in \hat{\mathscr{D}}^\tau$, d. h.

(4.38) $$\Pi_k \hat{\mathscr{D}}^\tau \subset \hat{\mathscr{D}}^\tau.$$

Aus (4.37) folgt daher

(4.39) $$\Pi_k \hat{\Delta}^\tau F = \hat{\Delta}^\tau \Pi_k F \qquad (F \in \hat{\mathscr{D}}^\tau).$$

(4.38) und (4.39) zusammengenommen bedeuten $\Pi_k \hat{\Delta}^\tau \subset \hat{\Delta}^\tau \Pi_k$. ∎

Wir zeigen jetzt noch von $\hat{\mathscr{D}}_k^\tau$ aus (4.31)

(4.40) $$\hat{\mathscr{D}}_k^\tau = \Pi_k \hat{\mathscr{D}}^\tau = \hat{\mathscr{D}}^\tau \cap \hat{\mathscr{H}}_k.$$

1. Es sei $F \in \hat{\mathscr{D}}^\tau$. Dann ist $\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F \in \mathscr{H}_k$, somit $\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F \in \mathscr{F}_k$. Nach (4.36) und der Definition von H_k ist ferner

(4.41) $$(\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F)(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ik\psi} F(z, \psi)\, d\psi.$$

Damit folgt $\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F \in \mathscr{C}_k^\tau(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$, und daß $\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F$ im Falle $\tau = \infty$ einen $\bmod \Gamma$ kompakten Träger hat. Aus (4.28) und Satz 4.1 folgt

$$\mathsf{I}_k \left(\Delta_k - \frac{4+\eta^2}{4\eta^2} k^2\right) \mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F = \hat{\Delta} \Pi_k F = \Pi_k \hat{\Delta}^\tau F \in \hat{\mathscr{H}}_k,$$

und daraus $\Delta_k \mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F \in \mathscr{H}_k$. Damit haben wir insgesamt $\mathsf{H}_k^{-1} \Pi_k F \in \mathscr{D}_k^\tau$ bewiesen, d. h. $\Pi_k \hat{\mathscr{D}}^\tau \subset \mathsf{H}_k \mathscr{D}_k^\tau = \hat{\mathscr{D}}_k^\tau$.

2. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in \mathscr{D}_k^\tau$. Dann ist offenbar $\mathsf{H}_k f \in \hat{\mathscr{H}}_k \cap \hat{\mathscr{C}}^\tau$. Ferner hat $\mathsf{H}_k f$ im Falle $\tau = \infty$ einen $\bmod \hat{\Gamma}$ kompakten Träger. Aus (4.28) entnehmen wir

$$\hat{\Delta} \mathsf{H}_k f = \mathsf{I}_k \left(\Delta_k - \frac{4+\eta^2}{4\eta^2} k^2\right) f \in \hat{\mathscr{H}}_k \subset \hat{\mathscr{H}}.$$

Zusammenfassend erhalten wir $\mathsf{H}_k f \in \hat{\mathscr{D}}^\tau \cap \hat{\mathscr{H}}_k \subset \Pi_k \hat{\mathscr{D}}^\tau$, also

$$\hat{\mathscr{D}}_k^\tau = \mathsf{H}_k \mathscr{D}_k^\tau \subset \Pi_k \hat{\mathscr{D}}^\tau .$$

Zusammen mit dem Ergebnis von 1. ist damit die Gültigkeit des ersten Gleichheitszeichens in (4.40) bewiesen. Die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens folgt aus (4.38).

Wir können jetzt einen zweiten Beweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit der Operatoren Δ_k^τ $(\tau = 2, \infty)$ führen. Wir ziehen das Kriterium aus Lemma 3.4 heran. Zunächst ist die Symmetrie der Operatoren Δ_k^τ zu zeigen. Für F, $G \in \hat{\mathscr{D}}_k^\tau$ ist

$$\begin{aligned}(\hat{\Delta}_k^\tau F, G) &= (\hat{\Delta} F, G) \qquad \text{nach (4.33)}\\ &= (F, \hat{\Delta} G) \text{ wegen (4.40) und der Symmetrie von } \hat{\Delta} \text{ auf } \hat{\mathscr{D}}^\tau\\ &= (F, \hat{\Delta}_k^\tau G) \text{ nach (4.33)}.\end{aligned}$$

Da der Definitonsbereich $\hat{\mathscr{D}}_k^\tau$ von $\hat{\Delta}_k^\tau$ eine in $\hat{\mathscr{H}}_k$ dichte lineare Mannigfaltigkeit ist, ist also $\hat{\Delta}_k^\tau$ ein symmetrischer Operator in $\hat{\mathscr{H}}_k$.

Da $\hat{\Delta}^\tau$ wesentlich selbstadjungiert ist, ist $(\hat{\Delta}^\tau + i)\hat{\mathscr{D}}^\tau$ in $\hat{\mathscr{H}}$ dicht. Folglich ist $\Pi_k(\hat{\Delta}^\tau + i)\hat{\mathscr{D}}^\tau$ in $\hat{\mathscr{H}}_k$ dicht. Wegen Satz 4.1 und (4.40) bedeutet das, daß $(\hat{\Delta} + i)\hat{\mathscr{D}}_k^\tau$ in $\hat{\mathscr{H}}_k$ dicht ist. Wegen (4.33) ist also $(\hat{\Delta}_k^\tau + i)\hat{\mathscr{D}}_k^\tau$ in $\hat{\mathscr{H}}_k$ dicht. Die entsprechende Aussage mit $-i$ statt i gilt ebenso. Nach Lemma 3.4 ist damit die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\hat{\Delta}_k^\tau$ bewiesen. Wegen (4.31), (4.32), und da H_k ein Hilbert-Raum-Isomorphismus ist, folgt hieraus, daß Δ_k^τ wesentlich selbstadjungiert ist.

Die — wie eben bewiesen — wesentlich selbstadjungierten Operatoren $\hat{\Delta}_k^2$ und $\hat{\Delta}_k^\infty$ in $\hat{\mathscr{H}}_k$ haben wegen $\hat{\Delta}_k^\infty \subset \hat{\Delta}_k^2$ ein und dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung. Wir bezeichnen sie mit $\tilde{\Delta}_k$ und ihren Definitionsbereich mit $\tilde{\mathscr{D}}_k$. Es gelten dann die im folgenden nicht weiter benötigten Gleichungen

$$\hat{\tilde{\mathscr{D}}}_k = \Pi_k \hat{\tilde{\mathscr{D}}} = \hat{\tilde{\mathscr{D}}} \cap \hat{\mathscr{H}}_k$$

und

$$\hat{\tilde{\Delta}}_k F = \hat{\tilde{\Delta}} F \qquad \text{für } F \in \hat{\tilde{\mathscr{D}}}_k .$$

Zu ihrem Beweise benutze man Satz 4.1, 4.40 und die Tatsache, daß $\hat{\tilde{\Delta}}_k$ und $\hat{\tilde{\Delta}}$ durch Abschließen (s. S. 309) aus $\hat{\Delta}_k^2$ bzw. $\hat{\Delta}^2$ entstehen.

Es sei noch bemerkt, daß die Operatoren K_k, Λ_k aus § 3 auf die beiden Differentialoperatoren

$$\Sigma := e^{-2i\varphi}\left((z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

$$\mathsf{T} := e^{+2i\varphi}\left((z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

zurückführbar sind. Ist nämlich $f : \mathfrak{E} \to \mathbf{C}$ einmal stetig differenzierbar und $F = \mathsf{l}_k f$ die im Sinne von (4.19) zugeordnete Funktion auf $\hat{\mathfrak{E}}$, so gilt

$$e^{-i(k+2)\varphi} \mathsf{K}_k f(z) = \Sigma F(z, \varphi),$$
$$e^{-i(k-2)\varphi} \Lambda_k f(z) = \mathsf{T} F(z, \varphi).$$

Σ und T sind zueinander formal adjungiert bezüglich $d\hat{\omega}$ und haben ein einfaches Transformationsverhalten bei $\hat{\Omega}$. Für eine Untersuchung von Σ, T als Operatoren auf geeigneten Definitionsbereichen in $\hat{\mathscr{H}}$ ist hier nicht der rechte Ort.

§ 5. Über die Eigenfunktionen und Eigenpakete

1. Wir beginnen mit verschiedenen Folgerungen aus Satz 3.1 und Lemma 3.2.

Satz 5.1. *Ist $f \in \mathscr{F}_0(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ eine Eigenfunktion von $-\Delta_0^2$ zum Eigenwert* 0, *so ist f konstant und Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art.*

Beweis. Satz 3.1 liefert $\mathrm{K}_0 f = \Lambda_0 f = 0$. Nach Lemma 3.2, d) ist daher f konstant. Wegen $f \neq 0$ und $f \in \mathscr{H}_0$ hat also ein Fundamentalbereich von Γ einen endlichen Inhalt, und somit ist Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art [vgl. S.300, Fußnote 2, b)]. ▮

Satz 5.2. *Ist $f \in \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert $\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$, so ist $g := y^{-k/2} f$ eine klassische ganze automorphe Form mit Werten in $\mathfrak{U}$ zu Γ, Gewicht k und Multiplikatorsystem v.*

Beweis. Nach Satz 2.1 ist f eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_k$. Daher besitzt g das richtige Transformationsverhalten [s. Definition 1.2, b)] und erfüllt die in Definition 1.2, c) verlangte O-Aussage. Setzt man nun in (3.10) für das dortige g die Funktion f ein und beachtet, daß f zum Eigenwert $\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$ gehört, so erhält man $\Lambda_k f = 0$. Nach Lemma 3.2, b′) ist daher g holomorph. ▮

Aus Satz 5.2 folgt übrigens sofort, daß in H. Maass [12], (77) die Summe über $n+\kappa<0$ verschwindet, wenn dort G diskontinuierlich, α reell und f oder auch nur $\Lambda^h f$ über einen Fundamentalbereich von G quadratisch integrierbar ist in bezug auf das zuständige Flächenelement $y^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-2}\,dx\,dy$.

Satz 5.3. *Es sei $f \in \mathscr{D}_k^2$, $f \neq 0$. Dann gilt:*

a) *Ist $\mathrm{K}_k f = 0$, so ist $k \leqq 0$, und f ist eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert $-\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$.*

b) *Ist $\Lambda_k f = 0$, so ist $k \geqq 0$, und f ist eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert $\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$.*

Beweis. a) Aus Satz 3.1 folgt mit $g = f$ durch Subtraktion von (3.9) und (3.10)

$$k\|f\|^2 = -\|\Lambda_k f\|^2,$$

also $k \leqq 0$. Man beachte jetzt noch Lemma 3.2, b).

b) folgt aus a) durch Übergang zum konjugiert Komplexen. ▮

Aus diesem Satz folgt übrigens leicht der bekannte Satz, daß jede klassische ganze automorphe Form g mit Werten in $\mathfrak{U}$ zu einer Grenzkreisgruppe erster Art Γ, zu negativem Gewicht k und unitärem Multiplikatorsystem v verschwindet. Falls Γ parabolische Spitzen besitzt, wird in einem klassischen Beweis dieses Satzes die absolute Invariante $y^{k/2}|g|$ betrachtet. Mit Hilfe von Satz 5.3 kann man indessen allgemein wie folgt schließen.

Zunächst ist $f := y^{k/2} g$ eine automorphe Form aus $\mathscr{F}_k$ mit $\Lambda_k f = 0$. Die Fourier-Entwicklungen von g und f in den Spitzen von Γ zeigen wegen $k<0$, daß f in jede Spitze hinein quadratisch integrierbar ist (s. Definition 2.1). Es folgt $f \in \mathscr{H}_k$ und damit $f \in \mathscr{D}_k^2$. Wäre nun $f \neq 0$, so hätte man einen Widerspruch zu Satz 5.3, b).

Umgekehrt kann man Satz 5.3 im Falle der Grenzkreisgruppen erster Art auf den genannten klassischen Satz zurückführen.

Satz 5.3 wird falsch, wenn man die Voraussetzung $f \in \mathscr{D}_k^2$ durch die schwächere Voraussetzung $f \in \mathscr{C}_k^2$ (s. § 1, *7.*) ersetzt.

Beispiel: $\Gamma = \{I, -I\}$, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, $k<0$, v trivial. Dann liegt $f := y^{k/2} z$ in $\mathscr{C}_k^2$, aber nicht in $\mathscr{D}_k^2$, und $\Lambda_k f = 0$.

Ein anderes Beispiel mit den Heckeschen Gruppen $\mathfrak{G}(\mu)$ $(\mu > 2)$ steht am Ende dieses Paragraphen.

Der folgende Satz stellt eine Verschärfung und Verallgemeinerung von H. MAASS [13], S. 203, Theorem 31, dar, wie man auf Grund von § 1, *10.* leicht feststellt.

Satz 5.4. *f sei eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert λ.*

a) *Es sei $k \geqq 0$, und k^+ bezeichne die zu k modulo 2 kongruente Zahl im Intervall $\langle 0, 2]$. Ferner sei $\lambda < \frac{k^+}{2}\left(1 - \frac{k^+}{2}\right)$.[10] Dann ist $k>2$,*

$$l := \frac{k}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \text{ eine nichtnegative ganze Zahl,}$$

$$\Lambda_{k-2l}\Lambda_{k-2l+2} \cdots \Lambda_k f = 0,$$

und l ist die kleinste ganze Zahl $\geqq 0$, für die diese Gleichung zutrifft.

b) *Es sei $k \leqq 0$, und k^- bezeichne die zu k modulo 2 kongruente Zahl im Intervall $[-2, 0\rangle$. Ferner sei $\lambda < -\frac{k^-}{2}\left(1 + \frac{k^-}{2}\right)$.[10] Dann ist $k < -2$,*

$$l := -\frac{k}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \text{ eine nichtnegative ganze Zahl,}$$

$$\mathrm{K}_{k+2l}\mathrm{K}_{k+2l+2} \cdots \mathrm{K}_k f = 0,$$

und l ist die kleinste ganze Zahl $\geqq 0$, für die diese Gleichung zutrifft.

Beweis. Zu a). Es kann weder $k=0$ noch $k=k^+$ sein. Denn wegen der Voraussetzung über λ wäre dann $\lambda < \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)$ im Widerspruch zu (3.10) mit $g=f$. Es folgt $k>2$.

[10] Insbesondere ist also $\lambda < \frac{1}{4}$, und die Voraussetzung über λ ist speziell für $\lambda < 0$ erfüllt. $\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ möge im folgenden positiv gewählt werden.

Es sei nun n diejenige natürliche Zahl, für die $k^+ = k - 2n$ ist. Zufolge Lemma 3.1, γ) und Satz 3.1 ist dann

$$f_n := \Lambda_{k-2n+2} \Lambda_{k-2n+4} \cdots \Lambda_k f$$

eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k^+}$ zum Eigenwert λ oder es ist $f_n = 0$. Im ersteren Fall müßte wegen (3.10) $\lambda \geqq \frac{k^+}{2}\left(1 - \frac{k^+}{2}\right)$ sein. Da dies unserer Voraussetzung über λ widerspricht, kann der erstere Fall nicht eintreten. Damit ist $f_n = 0$ bewiesen.

Es existiert daher eine kleinste nichtnegative ganze Zahl $j < n$, für die gilt

$$\Lambda_{k-2j} \Lambda_{k-2j+2} \cdots \Lambda_k f = 0 .$$

Die Funktion $\Lambda_{k-2j+2} \Lambda_{k-2j+4} \cdots \Lambda_k f$ (was im Falle $j = 0$ soviel wie f bedeute) ist dann eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k-2j}^2$ zum Eigenwert λ, die durch Λ_{k-2j} annulliert wird. Aus Lemma 3.2, b') mit $k - 2j$ anstelle von k folgt daher

$$\lambda = \frac{k-2j}{2}\left(1 - \frac{k-2j}{2}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{4} - \lambda = \left[\frac{k-2j}{2} - \frac{1}{2}\right]^2 .$$

Wegen $k - 2n \in \langle 0, 2]$ und $j \leqq n - 1$ ist der Ausdruck rechts in der Klammer positiv, und es folgt $j = l$. Damit haben wir die Behauptung im Falle $k \geqq 0$.

Zu b). Dieser Fall läßt sich auf den Fall a) durch Übergang zum konjugiert Komplexen zurückführen oder analog zu a) beweisen. ∎

2. In der nächsten Nummer 3. soll gezeigt werden, daß der Operator $-\Delta_k^2$ spektral zerlegbar ist in dem Sinne, daß das System seiner Eigenfunktionen und Eigenpakete in $\mathscr{H}_k$ vollständig ist; und darüber hinaus werden wir zeigen, daß jede Eigenfunktion und jedes Eigenpaket von $-\tilde{\Delta}_k$ reell-analytisch in $\mathfrak{E}$ ist und in $\mathscr{D}_k^2$ liegt.

Zur Erinnerung seien in dieser Nummer die Definition und einige allgemeine Eigenschaften von Eigenpaketen wiedergegeben. Dazu bezeichne $\mathsf{A}: \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ einen symmetrischen Operator in einem separablen Hilbert-Raum $\mathscr{H}$.

Definition 5.1. *Eine Elementschar $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ in $\mathscr{H}$ heißt ein Eigenpaket von* A, *wenn sie die folgenden drei Eigenschaften hat.*

1. *$v_0 = 0$ und $v_\lambda \in \mathscr{D}$ für alle λ.*
2. *v_λ ist $\mathscr{H}$-stetig in λ, d. h. $\lim_{\mu \to \lambda} \|v_\mu - v_\lambda\| = 0$.*
3. *$\mathsf{A} v_\lambda = \int_0^\lambda \mu \, dv_\mu$, wobei das Integral als $\mathscr{H}$-Grenzwert Stieltjesscher Zerlegungssummen zu verstehen ist, oder damit gleichwertig durch $\lambda v_\lambda - \int_0^\lambda v_\mu \, d\mu$, wobei das letztere Integral als $\mathscr{H}$-Grenzwert von Zerlegungssummen gewöhnlicher Art gemeint ist.*

Lemma 5.1. a) *Die Eigenpakete von* A *sind zu den Eigenfunktionen von* A *orthogonal* (vgl. [18], Satz 23).

b) *Sind* (v_λ) *und* (w_λ) *zwei Eigenpakete von* A *und* $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ *zwei Intervalle, die höchstens einen Endpunkt gemeinsam haben, so besteht die Orthogonalitätsrelation* $(v_{\alpha'} - v_\alpha, w_{\beta'} - w_\beta) = 0$ (vgl. [18], Satz 23).

c) *Ist* A *selbstadjungiert und* $(\mathsf{E}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ *seine Spektralschar, so ist eine Elementschar* $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ *aus* $\mathscr{H}$ *dann und nur dann ein Eigenpaket von* A, *wenn es zu jedem* $\alpha > 0$ *ein* $f_\alpha \in \mathscr{H}$ *gibt, das auf allen Eigenfunktionen von* A *senkrecht steht, und so daß* $v_\lambda = (\mathsf{E}_\lambda - \mathsf{E}_0) f_\alpha$ *für* $\lambda \in [-\alpha, \alpha]$ *gilt* ([18], Satz 24).

d) *Ist* (v_λ) *ein Eigenpaket von* A *und* $f \in \mathscr{H}$, *so werden durch die Bedingungen*

$$p(\beta) - p(\alpha) = \|v_\beta - v_\alpha\|^2 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha \leqq \beta), \tag{5.1}$$

$$a(\beta) - a(\alpha) = (v_\beta - v_\alpha, f) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}) \tag{5.2}$$

zwei stetige Funktionen $p: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *(„Gewichtsfunktion von* (v_λ)*") und* $a: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *bis auf additive Konstanten eindeutig festgelegt. a ist absolutstetig in bezug auf das durch die monotone Funktion p bestimmte Lebesgue-Stieltjessche Maß auf* $\mathbf{R}$, *und das Quadrat der Norm der Orthogonalprojektion von f auf den von* (v_λ) *aufgespannten abgeschlossenen Unterraum von* $\mathscr{H}$ *ist gleich dem Hellingerschen Integral*[11]

$$\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{|da(\lambda)|^2}{dp(\lambda)}$$

(vgl. [18], § 11).

e) *Ist* A *selbstadjungiert, so existiert ein abzählbares orthonormiertes System* e_ϱ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ *von Eigenfunktionen von* A *und ein abzählbares Orthogonalsystem von Eigenpaketen*[12] $(v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ *von* A, *so daß die Elemente* e_ϱ *zusammen mit den* $v_{\varrho,\lambda}$ *in* $\mathscr{H}$ *vollständig sind* ([18], Anfang von § 11). *Aus jedem Orthogonalsystem von Eigenfunktionen und Eigenpaketen von* A *kann durch Hinzunahme von weiteren Eigenfunktionen und Eigenpaketen ein in* $\mathscr{H}$ *vollständiges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen und Eigenpaketen hergestellt werden* (vgl. M. STONE [24], S. 242—250).

Da $\mathscr{H}$ separabel ist, ist jedes Orthogonalsystem von nicht verschwindenden Elementen aus $\mathscr{H}$ abzählbar. Man sieht nun leicht: Ist A selbstadjungiert, und ist e_ϱ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen

[11] Die Hellingerschen Integrale lassen sich nach H. HAHN [4] auf Lebesgue-Stieltjessche Integrale zurückführen. Das obige Hellingersche Integral ist dann gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{da(\lambda)}{dp(\lambda)} \right|^2 dp(\lambda),$$

wobei $\dfrac{da(\lambda)}{dp(\lambda)}$ die $dp(\lambda)$-fast überall auf $\mathbf{R}$ existierende Ableitung im Sinne des Satzes von Radon-Nikodym bedeutet.

[12] Zwei Eigenpakete (v_λ), (w_λ) heißen orthogonal, wenn die Skalarprodukte (v_λ, w_μ) für alle $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ verschwinden. Wegen b) genügt es, $(v_\lambda, w_\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ zu fordern.

und $(v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von A, in dem kein Eigenpaket $(v_{\varrho,\lambda})_{\lambda \in \mathbf{R}}$ für alle λ verschwindet, so haben die beiden Systeme zusammen die unter e) des Satzes genannten Eigenschaften der Abzählbarkeit und Vollständigkeit.

Aus [18], § 11 seien noch ein Vollständigkeitskriterium und ein Entwicklungssatz angeführt.

Lemma 5.2. *Ein orthonormiertes System von Eigenfunktionen $e_\varrho(\varrho \in \mathfrak{J})$ und ein abzählbares Orthogonalsystem von Eigenpaketen $(v_{\varrho,\lambda})(\varrho \in \mathfrak{J})$ von A sind zusammen genau dann vollständig, wenn für jedes $f \in \mathscr{H}$ die Vollständigkeitsrelation*

$$\|f\|^2 = \sum_{\varrho \in \mathfrak{J}} |(e_\varrho, f)|^2 + \sum_{\varrho \in \mathfrak{J}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d a_\varrho(\lambda)|^2}{d p_\varrho(\lambda)} \tag{5.3}$$

(vgl. Fußnote 11) *erfüllt ist, wobei die Funktionen p_ϱ, a_ϱ auf zu* (5.1), (5.2) *analoge Weise zu erklären sind. Im Falle der Vollständigkeit gilt der Entwicklungssatz*

$$f = \sum_{\varrho \in \mathfrak{J}} (e_\varrho, f) e_\varrho + \sum_{\varrho \in \mathfrak{J}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d a_\varrho(\lambda)\, d v_{\varrho,\lambda}}{d p_\varrho(\lambda)}$$

im Sinne der $\mathscr{H}$-Konvergenz.

3. Aus Satz 3.1 folgt „durch Abschließen“

$$(f, -\tilde{\Delta}_k f) \geqq -\frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \|f\|^2 \quad \text{für} \quad f \in \tilde{\mathscr{D}}_k, \tag{5.4}$$

$$(f, -\tilde{\Delta}_k f) \geqq \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right) \|f\|^2 \quad \text{für} \quad f \in \tilde{\mathscr{D}}_k, \tag{5.5}$$

und hieraus folgt unmittelbar

Satz 5.5. *Das Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ ist in der Halbgeraden $\left[\frac{|k|}{2}\left(1 - \frac{|k|}{2}\right), \infty\right\rangle$ enthalten.*

Unser nächstes Ziel sind Regularitätsaussagen über die Eigenfunktionen und Eigenpakete von $-\tilde{\Delta}_k$. $(\mathsf{E}_{k,\lambda})_{\lambda \in \mathbf{R}}$ bezeichne weiterhin die Spektralschar von $-\tilde{\Delta}_k$.

Satz 5.6. a) *Sind $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ und $f \in \mathscr{H}_k$, so ist $(\mathsf{E}_{k,\beta} - \mathsf{E}_{k,\alpha}) f$ durch eine reell-analytische Funktion aus $\mathscr{D}_k^2$ darstellbar. Insbesondere sind die Eigenfunktionen und Eigenpakete von $-\tilde{\Delta}_k$ reell-analytisch.*

b) *Wird jedes Element v_λ eines Eigenpaketes (v_λ) von $-\tilde{\Delta}_k$ durch eine reell-analytische Funktion auf $\mathfrak{E}$ dargestellt*[13], *so ist $v_\lambda(z)$ in Abhängigkeit von $(z, \lambda) \in \mathfrak{E} \times \mathbf{R}$ stetig, und dasselbe gilt für die partiellen Ableitungen aller Ordnungen von $v_\lambda(z)$ nach x, y.*

Beweis. a) Das Element $u := (\mathsf{E}_{k,\beta} - \mathsf{E}_{k,\alpha}) f$ liegt im Definitionsbereich einer jeden Potenz $(\tilde{\Delta}_k)^n (n \in \mathbf{N})$ von $\tilde{\Delta}_k$. Die Funktionen g des Typs (2.23)

[13] Vgl. die Vereinbarung von S. 303, o.

liegen offenbar auch im Definitionsbereich von $(\tilde{\Delta}_k)^n$, und für sie gilt $(\tilde{\Delta}_k)^n g = (\Delta_k)^n g$, wobei $(\Delta_k)^n$die formale Potenz des formalen Differentialoperators Δ_k aus (1.19) bedeutet. Wegen der Selbstadjungiertheit von $\tilde{\Delta}_k$ ist daher für diese g

$$(u, (\Delta_k)^n g) = ((\tilde{\Delta}_k)^n u, g).$$

Man schreibe nun diese Skalarprodukte als Integrale über einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Γ und trage die Darstellung (2.23) von g ein. Eine analoge Umformung wie vor (3.14) liefert dann, wenn man unter u zunächst irgendeine Funktion versteht, die das Element u aus $\mathscr{H}_k$ repräsentiert,

$$\int_{\mathfrak{E}} \langle u, (\Delta_k)^n l \rangle \, d\omega = \int_{\mathfrak{E}} \langle (\tilde{\Delta}_k)^n u, l \rangle \, d\omega . \tag{5.6}$$

Da $(\Delta_k)^n$ elliptisch ist, die Ordnung $2n$ und reell-analytische Koeffizienten hat, folgt aus (5.6), daß u als $(2n-2)$-mal stetig differenzierbare Funktion gewählt werden kann (s. z. B. N. DUNFORD und J. SCHWARTZ [2], erster Teil des Korollars 4 von S. 1708). Da hier n eine beliebige natürliche Zahl sein kann, ist damit die beliebige Differenzierbarkeit von u bewiesen. — Es ist

$$\|(\Delta_k)^n u\| = \|(\tilde{\Delta}_k)^n u\| = \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \lambda^{2n} d_\lambda(\mathsf{E}_{k,\lambda} f, f) \right\}^{1/2} \leqq \gamma^n \|f\|$$

mit $\gamma := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Nach einem Satz von T. KOTAKÉ und M. S. NARASIMHAN, s. H. KOMATSU [9], folgt daher, daß u reell-analytisch ist, und Lemma 3.5 liefert $u \in \mathscr{D}_k^2$.

Ist f eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$ zum Eigenwert λ, so kann man das eben bewiesene Resultat mit $\alpha = \lambda - 1$, $\beta = \lambda + 1$ anwenden und erhält, daß f reell-analytisch ist. Die entsprechende Aussage über die Eigenpakete folgt unter Beachtung von Lemma 5.1, c).

b) Für jedes $l \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathscr{C}^l(\mathfrak{E}, \mathfrak{U})$ den linearen Raum aller Funktionen $f: \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung l. Wird $\mathscr{C}^l(\mathfrak{E}, \mathfrak{U})$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung l auf allen kompakten Teilmengen von $\mathfrak{E}$ ausgestattet, so ist $\mathscr{C}^l(\mathfrak{E}, \mathfrak{U})$ bekanntlich ein vollständiger metrisierbarer topologischer linearer Raum (F-Raum; s. z. B. N. DUNFORD und J. T. SCHWARTZ [2], S. 1639). Für jedes $\alpha > 0$ bezeichne nun $\mathscr{H}_{k,\alpha}$ den Hilbert-Raum $(\mathsf{E}_{k,\alpha} - \mathsf{E}_{k,-\alpha})\mathscr{H}_k$, wobei die Elemente von $\mathscr{H}_{k,\alpha}$ als reell-analytische Funktionen auf $\mathfrak{E}$ betrachtet werden mögen. Der Graph der kanonischen Einbettungsabbildung $j: \mathscr{H}_{k,\alpha} \to \mathscr{C}^l(\mathfrak{E}, \mathfrak{U})$ ist abgeschlossen in der Produkttopologie von $\mathscr{H}_{k,\alpha} \times \mathscr{C}^l(\mathfrak{E}, \mathfrak{U})$, wie sofort zu bestätigen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist daher j stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und Kompaktum $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{E}$ existiert also ein $\delta > 0$, so daß gilt

$$\left| \frac{\partial^{p+q} f(z)}{\partial x^p \, \partial y^q} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \|f\| < \delta, z \in \mathfrak{K} \quad \text{und} \quad p + q \leqq l .$$

Da jedes Eigenpaket (v_λ) für $\lambda \in [-\alpha, \alpha]$ eine stetige Elementschar aus $\mathscr{H}_{k,\alpha}$ darstellt und $\alpha > 0$ hierbei beliebig groß gewählt werden kann, folgt die Behauptung b) für alle partiellen Ableitungen mit Ordnung $\leq l$. Da l beliebig war, ist damit b) in voller Allgemeinheit bewiesen. ∎

Schränkt man einen selbstadjungierten Operator A in einem Hilbert-Raum auf die lineare Mannigfaltigkeit ein, die von seinen Eigenfunktionen und Eigenpaketen aufgespannt wird, so erhält man, wie mit Hilfe des Kriteriums Lemma 3.4 leicht einzusehen, einen wesentlich selbstadjungierten Operator A_0. Aus Satz 5.6, a) folgt daher, daß $-\Delta_k$ auch auf der linearen Mannigfaltigkeit aller reell-analytischen Funktionen aus $\mathcal{D}_k^2$ wesentlich selbstadjungiert ist.

Satz 5.7. a) *Die Eigenfunktionen und Eigenpakete von* $-\tilde{\Delta}_k$ *sind mit denjenigen von* $-\Delta_k^2$ *identisch.*

b) $-\Delta_k^2$ *besitzt ein abzählbares orthonormiertes System* $e_\varrho(\varrho \in \mathfrak{J})$ *von Eigenfunktionen und ein abzählbares System* $(v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ *von paarweise orthogonalen Eigenpaketen, so daß die Elemente* e_ϱ *zusammen mit den* $v_{\varrho,\lambda}$ *in* $\mathcal{H}_k$ *vollständig sind.*

Beweis. a) Jede Eigenfunktion und jedes Eigenpaket von $-\Delta_k^2$ ist trivialerweise Eigenfunktion bzw. Eigenpaket von $-\tilde{\Delta}_k$. Die Umkehrung ergibt sich durch eine einfache Anwendung von Lemma 3.5.

b) folgt aus a) und Lemma 5.1, e). ∎

4. Je nach der Vorgabe von Γ, k, $\mathfrak{U}$, v kann es vorkommen, daß $-\tilde{\Delta}_k$ ein reines Streckenspektrum[14] oder ein reines Punktspektrum oder sowohl ein nichtleeres Streckenspektrum als auch ein nichtleeres Punktspektrum besitzt. Der erstere Fall liegt z. B. vor für $\Gamma = \{I, -I\}$, $k=0$, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, v trivial; der zweite Fall, wenn der Quotientenraum $\mathfrak{E}/\Gamma$ kompakt ist, wie wir mit Hilfe des Resolventenkerns in Satz 7.3 zeigen werden. Der dritte Fall liegt z. B. vor, wenn Γ die Modulgruppe, $k=0$, $\mathfrak{U}=\mathbf{C}$ und $v=1$ ist (vgl. [18]).

Bei Gruppen Γ mit einem Fundamentalbereich unendlichen Inhalts können auch Eigenwerte unendlicher Vielfachheit und kontinuierliche Spektren unendlicher Vielfachheit (im Sinne von M. Stone [24], Definition 7.1) auftreten. Als Beispiel sei erwähnt: $\Gamma = \{I, -I\}$, $k>1$, $\mathfrak{U}=\mathbf{C}$, v trivial. Dann ist $\lambda = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$ Eigenwert unendlicher Vielfachheit, und das kontinuierliche Spektrum hat in $\left[\frac{1}{4}, \infty\right\rangle$ unendliche Vielfachheit. — Ein weiteres Beispiel für das Auftreten von Eigenwerten unendlicher Vielfachheit liefern die Heckeschen Gruppen $\mathfrak{G}(\mu)$ für $\mu>2$ aus E. Hecke [6], die von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt werden. Dort sind nämlich unendlich viele linear unabhängige automorphe Formen g der Signatur $\{\mu, 2\beta, 1\}$ konstruiert worden, das sind gewisse klassische ganze automorphe Formen zu $\Gamma = \mathfrak{G}(\mu)$, $k=2\beta$, $\mathfrak{U}=\mathbf{C}$ und einem

[14] Ist A ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ mit Spektralschar $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$, so gehört $\mu \in \mathbf{R}$ definitionsgemäß zum Streckenspektrum von A, das auch (abweichend von M. Stone [24]) kontinuierliches Spektrum genannt wird, wenn ein $f \in \mathcal{H}$ existiert, so daß $E_\lambda f$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbf{R}$ eine stetige Elementschar darstellt und $(E_\beta - E_\alpha) f \neq 0$ für alle reellen α, β mit $\alpha < \mu < \beta$ erfüllt ist.

Multiplikatorsystem v_k vom Betrage 1. Aus der dortigen Konstruktion ersieht man, daß diese Funktionen f auf dem Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F} = \left\{z;\ z \in \mathfrak{E},\ |z| \geqq 1,\ |x| \leqq \frac{\mu}{2}\right\} \tag{5.7}$$

von $\mathfrak{G}(\mu)$ beschränkt sind und in der Spitze ∞ exponentiell verschwinden. Ihre Metrisierungsintegrale $\int\limits_{\mathfrak{F}} |g|^2 y^k \, d\omega$ sind daher für $k>1$ endlich. Für $k>1$ erhält man also in der Form $f = y^{k/2} g$ unendlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen von $-\tilde{\Delta}_k$ zu $\Gamma = \mathfrak{G}(\mu)$, Gewicht k, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}$, Multiplikatorsystem v_k und Eigenwert $\frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)$.

Bei dieser Gelegenheit sei noch eine ähnliche Art von automorphen Formen f zu $\mathfrak{G}(\mu)$, $\mu > 2$, mit negativem Gewicht k angegeben. Definiert man analog zu E. Hecke [6], S. 673, unter Benutzung der dortigen Funktionen h, H die Funktion

$$g_0(z) = \left(\frac{h'(z)}{H(z)\,(h(z)-1)}\right)^{\frac{k}{2}} \qquad (z \in \mathfrak{E}),$$

so sieht man sofort, daß g_0 auf dem Fundamentalbereich (5.7) beschränkt ist und das Transformationsverhalten

$$g_0(z+\mu) = g_0(z), \qquad g_0\left(-\frac{1}{z}\right) = (-iz)^k g_0(z)$$

aufweist, und daraus folgt

$$g_0(Mz) = v_k(M)\,(cz+d)^k g_0(z) \qquad \text{für } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}(\mu) \tag{5.8}$$

mit einem Multiplikatorsystem v_k vom Betrage 1.

Wir zeigen nun weiter, daß g_0 in $\mathfrak{E}$ beschränkt ist. Wegen (5.8) und der Beschränktheit von g_0 auf $\mathfrak{F}$ genügt es offenbar, die Beschränktheit von $(cz+d)^{-1}$ in Abhängigkeit von $M \in \mathfrak{G}(\mu)$ und $z \in \mathfrak{F}$ zu zeigen. Dabei genügt es, den Fall $c \neq 0$ zu betrachten, weil sonst $d = \pm 1$ ist. Da $\mathfrak{G}(\mu)$ diskret ist und die Spitze ∞ hat, existiert bekanntlich ein $\gamma > 0$, so daß $|c| \geqq \gamma$ für $c \neq 0$ ist (H. Petersson [15], S. 33, Satz 2). Dann ist $|cz+d|^{-1} \leqq \gamma^{-1} |z - M^{-1}\infty|^{-1}$. Aus der Lage der drei zu $\mathfrak{F}$ benachbarten Bilder von $\mathfrak{F}$ unter $\mathfrak{G}(\mu)$ erkennt man, daß die parabolische Spitze $M^{-1}\infty$ mindestens den Abstand $1 - \frac{2}{\mu}$ von $\mathfrak{F}$ hat. So erhalten wir $|cz+d|^{-1} \leqq \gamma^{-1} \frac{\mu}{\mu-2}$, womit der Beweis der Beschränktheit von g_0 in $\mathfrak{E}$ beendet ist.

Da die Funktion h aus loc. cit. bei $\mathfrak{G}(\mu)$ invariant, holomorph und beschränkt ist, sind die Funktionen $g_n := (h-1)^n g_0$ ($n \geqq 0$, ganz) in $\mathfrak{E}$ holomorph und beschränkt; sie verschwinden in der Spitze $i\infty$, falls $n \geqq 1$ ist, und bilden ein linear unabhängiges System von beschränkten klassischen ganzen automorphen Formen zu $\mathfrak{G}(\mu)$, Gewicht $k<0$ und einem Multiplikatorsystem v_k vom Betrage 1. Die mit diesen g_n gebildeten Funktionen $f_n = y^{\frac{k}{2}} g_n$ liegen in $\mathscr{F}_{k,\lambda}(\mathfrak{G}(\mu), \mathbf{C}, v_k)$ mit $\lambda = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$, aber sie sind wegen ihres Verhaltens für $y \to 0$ nicht in $\mathscr{H}_k$ enthalten. Letzteres kann auch aus Satz 5.3, b) gefolgert werden.

§ 6. Der durch K_k und Λ_k vermittelte Zusammenhang zwischen den Eigenwertproblemen zu verschiedenen Gewichten k

Der in Lemma 3.1, γ) ausgedrückte, durch die Operatoren K_k und Λ_k vermittelte formale Zusammenhang zwischen den Eigenwertproblemen zu mod 2 kongruenten Gewichten k kann in den zuständigen Hilbert-Räumen $\mathscr{H}_k$ weiter verfolgt und vertieft werden.

Satz 6.1. *f sei eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert λ. Dann gilt:*

a) *$\mathsf{K}_k f$ ist genau dann eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k+2}^2$ zum Eigenwert λ, wenn $\mathsf{K}_k f \neq 0$ ist.*

a′) *$\Lambda_k f$ ist genau dann eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k-2}^2$ zum Eigenwert λ, wenn $\Lambda_k f \neq 0$ ist.*

Beweis. Der Satz folgt aus Lemma 3.1, γ) und Satz 3.1. ∎

Bezüglich der Bedingungen $\mathsf{K}_k f \neq 0$ und $\Lambda_k f \neq 0$ vergleiche man Satz 5.3.

Satz 6.2. a) *e sei eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k+2}^2$ zum Eigenwert λ, und e sei nicht darstellbar in der Form $e = \mathsf{K}_k f$ mit einer Eigenfunktion f von $-\Delta_k^2$. Dann ist $k \geqq -2$, $\lambda = -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$, und $g := y^{-\frac{k}{2}-1} e$ ist eine klassische ganze automorphe Form vom Gewicht $k+2$. Im Falle $k \geqq -1$ ist g eine Spitzenform.*

b) *Verschärfte Umkehrung: Ist e eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k+2}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$, so ist e nicht darstellbar in der Form $e = \mathsf{K}_k f$ mit $f \in \mathscr{D}_k^2$.*

a′) *e sei eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k-2}^2$ zum Eigenwert λ, und e sei nicht darstellbar in der Form $e = \Lambda_k f$ mit einer Eigenfunktion f von $-\Delta_k^2$. Dann ist $k \leqq 2$, $\lambda = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$, und $g := y^{\frac{k}{2}-1}\bar{e}$ ist eine klassische ganze automorphe Form vom Gewicht $-k+2$. Im Falle $k \leqq 1$ ist g eine Spitzenform.*

b′) *Ist e eine Eigenfunktion von $-\Delta_{k-2}^2$ zum Eigenwert $\lambda = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$, so ist e nicht darstellbar in der Form $e = \Lambda_k f$ mit $f \in \mathscr{D}_k^2$.*

Beweis. a) Voraussetzungsgemäß ist $-\Delta_{k+2}^2 e = \lambda e$, also nach (3.4)

$$\mathsf{K}_k \Lambda_{k+2} e = \left(\lambda + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right) e .$$

Hier ist notwendig $\lambda = -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$. Denn andernfalls ist $\Lambda_{k+2}e \neq 0$, nach Satz 6.1, a') ist daher $\Lambda_{k+2}e$ eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$, und wir erhalten die Identität

$$e = \mathsf{K}_k \frac{\Lambda_{k+2}e}{\lambda + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)}$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung über e. Satz 5.2 mit $k+2$ statt k liefert nun, daß $g := y^{-\frac{k}{2}-1}e$ eine klassische ganze automorphe Form vom Gewicht $k+2$ ist. Nach Lemma 3.2, b') ist also $\Lambda_{k+2}e = 0$. Nach Satz 5.3, b) folgt $k+2 \geqq 0$. Wegen $e = y^{\frac{k}{2}+1}g \in \mathscr{H}_{k+2}$ muß g im Falle $k \geqq -1$ eine Spitzenform sein.

b) Nach Satz 5.2 ist $y^{-\frac{k}{2}-1}e$ eine klassische ganze automorphe Form zur Gruppe Γ, Gewicht $k+2$ und Multiplikatorsystem v. Gemäß Lemma 3.2, b') ist

$$\Lambda_{k+2}e = 0. \tag{6.1}$$

Angenommen es existiert $f \in \mathscr{D}_k^2$ mit

$$\mathsf{K}_k f = e. \tag{6.2}$$

Dann ist nach (3.4)

$$\begin{aligned} -\Delta_k f &= \Lambda_{k+2}\mathsf{K}_k f - \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right) f \\ &= -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right) f \qquad \text{wegen (6.2) und (6.1)}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in Satz 3.1, (3.9) mit $g = f$ ein, so folgt $\mathsf{K}_k f = 0$ im Widerspruch zu (6.2).

a'), b') folgen aus a), b) durch Übergang zum konjugiert Komplexen. ∎

Lemma 6.1. *Ist $e, f \in \mathscr{D}_k^2$, e eine Eigenfunktion von $-\Delta_k^2$ zum Eigenwert λ, so gilt*

$$(\mathsf{K}_k f, \mathsf{K}_k e) = \left(\lambda + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right)(f, e), \tag{6.3}$$

$$\|\mathsf{K}_k e\|^2 = \left(\lambda + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right)\|e\|^2, \tag{6.4}$$

$$(\Lambda_k f, \Lambda_k e) = \left(\lambda - \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)(f, e), \tag{6.5}$$

$$\|\Lambda_k e\|^2 = \left(\lambda - \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)\|e\|^2. \tag{6.6}$$

Beweis. Siehe Satz 3.1. ∎

Satz 6.3. *Es sei e_ϱ ($\varrho \in \mathfrak{J}$) ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen von $-\Delta_k^2$ und λ_ϱ der Eigenwert von e_ϱ.*

a) $\mathfrak{A}$ *sei ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen von* $-\Delta_{k+2}^2$ *zu* $\lambda = -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$. *Die Funktionen* $y^{-\frac{k}{2}-1}e$, $e \in \mathfrak{A}$, *bilden also ein maximales, im Sinne der Peterssonschen Metrisierung orthonormiertes System von klassischen ganzen automorphen Formen vom Gewicht* $k+2$ *zum Multiplikatorsystem* v. *Dann bilden die Funktionen*

$$\text{(6.7)} \qquad \frac{\mathsf{K}_k e_\varrho}{\sqrt{\lambda_\varrho + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)}} \qquad \left(\varrho \in \mathfrak{J},\ \lambda_\varrho \neq -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right)$$

zusammen mit den Funktionen des Systems $\mathfrak{A}$ *ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen von* $-\Delta_{k+2}^2$.

b) $\mathfrak{B}$ *sei ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen von* $-\Delta_{k-2}^2$ *zu* $\lambda = \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)$. *Die Funktionen* $y^{\frac{k}{2}-1}\bar{e}$, $e \in \mathfrak{B}$, *bilden also ein maximales, im Sinne der Peterssonschen Metrisierung orthonormiertes System von klassischen ganzen automorphen Formen vom Gewicht* $-k+2$ *zum Multiplikatorsystem* $\bar{v}$. *Dann bilden die Funktionen*

$$\text{(6.8)} \qquad \frac{\Lambda_k e_\varrho}{\sqrt{\lambda_\varrho - \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)}} \qquad \left(\varrho \in \mathfrak{J},\ \lambda_\varrho \neq \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)$$

zusammen mit den Funktionen aus $\mathfrak{B}$ *ein maximales orthonormiertes System von Eigenfunktionen von* $-\Delta_{k-2}$.

Beweis. a) Aus (6.3) und (6.4) folgt, daß das System (6.7) orthonormiert ist. Das System (6.7) ist ferner orthogonal zu dem orthonormierten System $\mathfrak{A}$, da Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind. Also ist die Vereinigung $\mathfrak{B}$ der beiden Systeme ein orthonormiertes System. Es bleibt die Maximalität von $\mathfrak{B}$ zu zeigen. Der von $\mathfrak{B}$ erzeugte abgeschlossene lineare Unterraum von $\mathscr{H}_{k+2}$ enthält alle Eigenfunktionen von $-\Delta_{k+2}^2$ der Gestalt $\mathsf{K}_k e$ mit einer Eigenfunktion e von $-\Delta_k^2$, wie man mit Hilfe von (6.4) einsieht. Die noch fehlenden Eigenfunktionen von $-\Delta_{k+2}^2$ sind gemäß Satz 6.2, a) in dem von $\mathfrak{A}$ erzeugten abgeschlossenen linearen Unterraum von $\mathscr{H}_{k+2}$ enthalten. Daraus folgt die Maximalität von $\mathfrak{B}$.

b) folgt aus a) durch Übergang zum konjugiert Komplexen. ∎

Von den Elementen des maximalen orthonormierten Systems e_ϱ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ von Eigenfunktionen von $-\Delta_k^2$ haben nur diejenigen e_ϱ zur Bildung des unter a) beschriebenen Systems von Eigenfunktionen von $-\Delta_{k+2}^2$ beigetragen, für die $\lambda_\varrho \neq -\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$ ist, d. h. genau diejenigen, für die $\mathsf{K}_k e_\varrho \neq 0$ ist. Die anderen sind „verlorengegangen", während die Elemente aus $\mathfrak{A}$ „neu hinzugekommen" sind. Wird nun Satz 6.3, a) noch einmal mit $k+2$ anstelle von k auf das eben unter a) hergestellte Orthogonalsystem angewandt, so gehen dabei die im ersten

Schritt neu hinzugekommenen Elemente von $\mathfrak{A}$ dann und nur dann verloren, wenn $k=-2$ ist. Denn falls überhaupt $\mathfrak{A}\neq\emptyset$ ist, ist $k\geqq -2$ wegen Satz 6.2, b) und a); und damit $\mathsf{K}_{k+2}f=0$ für ein $f\in\mathfrak{A}$ möglich ist, muß $k+2\leqq 0$ gelten wegen Satz 5.3, a). Im Falle $k=-2$ gehen die Elemente von $\mathfrak{A}$ auch tatsächlich verloren.

Wir untersuchen jetzt die Wirkung von K_k und Λ_k auf die Eigenpakete.

Lemma 6.2. a) *Es sei* $(v_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ *ein Eigenpaket von* $-\Delta_k^2$. *Dann ist* $(\mathsf{K}_\lambda v_\lambda)$ *ein Eigenpaket von* $-\Delta_{k+2}^2$ *und* $(\Lambda_k v_\lambda)$ *ein Eigenpaket von* $-\Delta_{k-2}^2$.

b) *Es sei* $f\in\mathscr{D}_k^2$. *Erklärt man die Funktion* $a:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *wie in Lemma 5.1*, (5.2), *so gilt*

$$(\mathsf{K}_k v_\beta-\mathsf{K}_k v_\alpha,\mathsf{K}_k f)=\int_\alpha^\beta\left(\lambda+\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right)da(\lambda),\tag{6.9}$$

$$(\Lambda_k v_\beta-\Lambda_k v_\alpha,\Lambda_k f)=\int_\alpha^\beta\left(\lambda-\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)da(\lambda).\tag{6.10}$$

c) *Erklärt man die Funktion* $p:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *wie in Lemma 5.1*, (5.1), *so ist*

$$\|\mathsf{K}_k v_\beta-\mathsf{K}_k v_\alpha\|^2=\int_\alpha^\beta\left(\lambda+\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right)dp(\lambda),\tag{6.11}$$

$$\|\Lambda_k v_\beta-\Lambda_k v_\alpha\|^2=\int_\alpha^\beta\left(\lambda-\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right)dp(\lambda)\tag{6.12}$$

für $\alpha\leqq\beta$.

d) *Ist* (w_λ) *ein zu* (v_λ) *orthogonales Eigenpaket von* $-\Delta_k^2$ (vgl. S. 322, Fußnote 12), *so sind auch die Eigenpakete* $(\mathsf{K}_k w_\lambda)$, $(\mathsf{K}_k v_\lambda)$ *zueinander orthogonal, desgleichen die Eigenpakete* $(\Lambda_k w_\lambda)$, $(\Lambda_k v_\lambda)$.

Beweis. Zu a). Wir bestätigen die drei Eigenschaften aus Definition 5.1 für $(\mathsf{K}_k v_\lambda)$.

Zu 1. $\mathsf{K}_k v_0=0$ ist klar. Für jedes $\lambda\in\mathbf{R}$ ist $\mathsf{K}_k v_\lambda$ reell-analytisch nach Satz 5.6, a). Ferner ist nach (3.5) und Definition 5.1, 3.

$$-\Delta_{k+2}\mathsf{K}_k v_\lambda=\mathsf{K}_k(-\Delta_k v_\lambda)=\mathsf{K}_k\int_0^\lambda \mu\,dv_\mu.\tag{6.13}$$

Wegen Lemma 5.1, c) ist hier

$$\int_0^\lambda \mu\,dv_\mu=(\mathsf{E}_{k,\lambda}-\mathsf{E}_{k,0})\int_0^\lambda \mu\,dv_\mu,$$

wobei $\mathsf{E}_{k,\lambda}$ wie immer die Spektralschar von $-\tilde{\Delta}_k$ bezeichnet. Nach Satz 5.6, a) ist dies ein Element aus $\mathscr{D}_k^2$. Nach Satz 3.1 ist also $\mathsf{K}_k \int_0^\lambda \mu \, dv_\mu$ ein Element aus $\mathscr{H}_{k+2}$. Damit haben wir $-\Delta_{k+2}(\mathsf{K}_k v_\lambda) \in \mathscr{H}_{k+2}$, also $\mathsf{K}_k v_\lambda \in \mathscr{D}_{k+2}^2$.

Zu 2. Nach Satz 3.1 ist für $\alpha \leqq \beta$

$$\|\mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha\|^2 = (v_\beta - v_\alpha, \; -\Delta_k(v_\beta - v_\alpha)) + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\|v_\beta - v_\alpha\|^2$$

$$= \left(v_\beta - v_\alpha, \; \int_\alpha^\beta \lambda \, dv_\lambda\right) + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\|v_\beta - v_\alpha\|\|^2 .$$

Wegen der $\mathscr{H}_k$-Stetigkeit von (v_λ) liegt hierin die $\mathscr{H}_{k+2}$-Stetigkeit von $(\mathsf{K}_k v_\lambda)$.

Vor den Beweis von Eigenschaft 3. aus Definition 5.1 schieben wir hier den Beweis von c) ein. In der letzten Gleichung ist das zweite Glied auf der rechten Seite gleich $\frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \int_\alpha^\beta dp(\lambda)$ und das erste gleich

$$\left(\int_\alpha^\beta dv_\lambda, \int_\alpha^\beta \lambda \, dv_\lambda\right) = \int_\alpha^\beta \lambda \, dp(\lambda)$$

auf Grund einer einfachen Umformung. Zusammengefaßt haben wir damit (6.11). (6.12) folgt aus (6.11).

Zu 3. Im Hinblick auf (6.13) genügt es,

$$\mathsf{K}_k \int_0^\lambda \mu \, dv_\mu = \int_0^\lambda \mu \, d\mathsf{K}_k v_\mu \tag{6.14}$$

zu zeigen. Wir bemerken zunächst, daß das letzte Integral existiert, da $\mathsf{K}_k v_\lambda$ nach 2. eine $\mathscr{H}_{k+2}$-stetige Elementschar darstellt. Mit einem beliebigen $g \in \mathscr{D}_{k+2}^\infty$, das nach Lemma 2.2 in der Form (2.23) angenommen werden kann, gilt zunächst

$$\left(g, \mathsf{K}_k \int_0^\lambda \mu \, dv_\mu\right) = \left(\Lambda_{k+2} g, \int_0^\lambda \mu \, dv_\mu\right), \quad \text{wie Umformungen der auf S. 331 ausgeführten Art zeigen,}$$

$$= \int_0^\lambda \mu \, d(\Lambda_{k+2} g, v_\mu), \quad \text{wofür man auf Zerlegungssummen zurückgehe,}$$

$$= \int_0^\lambda \mu \, d(g, \mathsf{K}_k v_\mu), \quad \text{wofür man wieder (2.23) benutze,}$$

$$= \left(g, \int_0^\lambda \mu \, d\mathsf{K}_k v_\mu\right), \quad \text{wofür man auf Zerlegungssummen zurückgehe.}$$

Da $g \in \mathscr{D}_{k+2}^\infty$ beliebig gewählt war, folgt (6.14).

Damit ist der Beweis, daß $(\mathsf{K}_k v_\lambda)$ ein Eigenpaket von $-\Delta_{k+2}^2$ ist, beendet. Die analoge Aussage über $(\Lambda_k v_\lambda)$ folgt durch Übergang zum konjugiert Komplexen. — (6.14) hätte übrigens auch ohne Benutzung von g durch eine Approximation des Integrals durch Zerlegungssummen bewiesen werden können.

b) Wegen Satz 3.1, und da $-\Delta_k^2$ symmetrisch ist, ist

$$(\mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha, \mathsf{K}_k f) = (-\Delta_k^2(v_\beta - v_\alpha), f) + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)(v_\beta - v_\alpha, f)$$

$$= \left(\int_\alpha^\beta \lambda\, dv_\lambda, f\right) + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\int_\alpha^\beta da(\lambda)$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\lambda + \frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)\right) da(\lambda).$$

Entsprechender Schluß für Λ_k.

c) war schon unter a), zu 2. gezeigt worden.

d) Man forme $(\mathsf{K}_k w_\beta - \mathsf{K}_k w_\alpha, \mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha)$ mit Hilfe von Satz 3.1 um. Für Λ_k schließt man analog. ▮

Wegen Satz 3.2 und S. 309 ist $\tilde{\Delta}_k$ die Abschließung von Δ_k^2. Ein Element $f \in \mathscr{H}_k$ liegt also genau dann in $\tilde{\mathscr{D}}_k$, wenn es eine Folge (f_n) in $\mathscr{D}_k^2$ gibt, derart daß $f_n \to f$ und $\Delta_k^2 f_n \to \tilde{\Delta}_k f$ in $\mathscr{H}_k$ gilt. Aus Satz 3.1 folgt dann, daß auch die Folgen $(\mathsf{K}_k f_n)$ und $(\Lambda_k f_n)$ in $\mathscr{H}_{k+2}$ bzw. $\mathscr{H}_{k-2}$ konvergieren und von der Auswahl von (f_n) unabhängige Grenzwerte haben. Somit können die Operatoren $\mathsf{K}_k | \mathscr{D}_k^2$, $\Lambda_k | \mathscr{D}_k^2$ zu Operatoren $\tilde{\mathsf{K}}_k : \tilde{\mathscr{D}}_k \to \mathscr{H}_{k+2}$, $\tilde{\Lambda}_k : \tilde{\mathscr{D}}_k \to \mathscr{H}_{k-2}$ fortgesetzt werden, so daß (3.9) und (3.10) auch mit $\tilde{\Delta}_k$, $\tilde{\mathsf{K}}_k$, $\tilde{\Lambda}_k$ anstelle von Δ_k, K_k, Λ_k für $f, g \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ gelten.

Aus Satz 6.1 und Lemma 6.2 folgern wir nun

Satz 6.4. *Mit den eben erklärten Operatoren* $\tilde{\mathsf{K}}_k$, $\tilde{\Lambda}_k$ *gilt*

$$\tilde{\mathsf{K}}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f = \mathsf{E}_{k+2,\lambda} \tilde{\mathsf{K}}_k f \quad \textit{und} \quad \tilde{\Lambda}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f = \mathsf{E}_{k-2,\lambda} \tilde{\Lambda}_k f \quad \text{für } \lambda \in \mathbf{R} \text{ und } f \in \tilde{\mathscr{D}}_k\,.$$

Beweis. Es genügt wieder, den $\tilde{\mathsf{K}}_k$ betreffenden Teil der Behauptung zu beweisen. $\mathscr{H}_k^e$ und $\mathscr{H}_k^c$ mögen diejenigen zueinander komplementären und orthogonalen abgeschlossenen Unterräume von $\mathscr{H}_k$ bezeichnen, die von den Eigenfunktionen bzw. den Eigenpaketen von $-\tilde{\Delta}_k$ aufgespannt werden [vgl. Lemma 5.1, a) und e)]. $\mathscr{H}_k^c$ läßt sich wegen Definition 5.1, 2. und Lemma 5.1, c) auch charakterisieren als die Menge der Elemente f aus $\mathscr{H}_k$, für die $\mathsf{E}_{k,\lambda} f$ in Abhängigkeit von λ eine stetige Elementschar darstellt. — $\tilde{\Delta}_k$ wird von $\mathscr{H}_k^e$ und $\mathscr{H}_k^c$ reduziert (vgl. S. 316, Fußnote 9).

Es sei jetzt $f \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ vorgegeben. Die Projektionen f^e und f^c von f auf $\mathscr{H}_k^e$ bzw. $\mathscr{H}_k^c$ liegen dann ebenfalls in $\tilde{\mathscr{D}}_k$, und $f = f^e + f^c$. Es genügt daher, die $\tilde{\mathsf{K}}_k$ betreffende Behauptung für f^e und f^c anstelle von f zu beweisen.

1. Ist $\dim \mathscr{H}_k^e$ endlich, so ist die Behauptung für f^e statt f offensichtlich. Ist $\dim \mathscr{H}_k^e$ unendlich, so können wir $f^e = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ schreiben mit einem maximalen orthonormierten System (e_n) von Eigenfunktionen von $-\tilde{\Delta}_k$ und geeigneten $c_n \in \mathbf{C}$. Mit beliebigem $p \in \mathbf{N}$ und $f_p^e := \sum_{n=1}^{p} c_n e_n$ gilt dann $f_p^e \to f^e$, $\tilde{\Delta}_k f_p^e \to \tilde{\Delta}_k f^e$, $\mathsf{E}_{k,\lambda} f_p^e \to \mathsf{E}_{k,\lambda} f^e$, $\tilde{\Delta}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f_p^e \to \tilde{\Delta}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f^e$ in $\mathscr{H}_k$ für $p \to \infty$. Daraus folgt $\mathsf{K}_k f_p^e \to \tilde{\mathsf{K}}_k f^e$ und $\mathsf{K}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f_p^e \to \tilde{\mathsf{K}}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f^e$ nach Definition von $\tilde{\mathsf{K}}_k$. Die Behauptung über f^e folgt daher aus der nach Satz 6.1, a) gültigen Gleichung $\mathsf{K}_k \mathsf{E}_{k,\lambda} f_p^e = \mathsf{E}_{k+2,\lambda} \mathsf{K}_k f_p^e$ durch den Grenzübergang $p \to \infty$.

2. Beweis der Behauptung über $\tilde{\mathsf{K}}_k$ mit f^c anstelle von f. Nach einer Bemerkung zu Beginn des Beweises und Lemma 5.1, c) stellt

$$v_\mu := (\mathsf{E}_{k,\mu} - \mathsf{E}_{k,0}) f^c \qquad (\mu \in \mathbf{R})$$

ein Eigenpaket von $-\tilde{\Delta}_k$ dar. Nach Lemma 6.2, a) ist daher $(\mathsf{K}_k v_\mu)_{\mu \in \mathbf{R}}$ ein Eigenpaket von $-\tilde{\Delta}_{k+2}$. Daher ist

$$\mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha = (\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})(\mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

Für $\gamma < \alpha < \beta < \delta$ folgt hieraus

$$\mathsf{K}_k v_\beta - \mathsf{K}_k v_\alpha = (\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})(\mathsf{K}_k v_\delta - \mathsf{K}_k v_\gamma)$$

wegen

$$(\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})(\mathsf{E}_{k+2,\alpha} - \mathsf{E}_{k+2,\gamma}) = (\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})(\mathsf{E}_{k+2,\delta} - \mathsf{E}_{k+2,\beta}) = 0.$$

Nach Definition von v_μ bedeutet das

$$\mathsf{K}_k(\mathsf{E}_{k,\beta} - \mathsf{E}_{k,\alpha}) f^c = (\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})\, \mathsf{K}_k(\mathsf{E}_{k,\delta} - \mathsf{E}_{k,\gamma}) f^c \qquad (\gamma < \alpha < \beta < \delta).$$

Für $\gamma \to -\infty$ und $\delta \to \infty$ folgt hieraus unter Berechnung von $f^c \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ und der Definition von $\tilde{\mathsf{K}}_k$

$$\mathsf{K}_k(\mathsf{E}_{k,\beta} - \mathsf{E}_{k,\alpha}) f^c = (\mathsf{E}_{k+2,\beta} - \mathsf{E}_{k+2,\alpha})\, \tilde{\mathsf{K}}_k f^c.$$

Unter Beachtung der Definition von $\tilde{\mathsf{K}}_k$ folgt hieraus für $\alpha \to -\infty$ die Behauptung über $\tilde{\mathsf{K}}_k$ mit f^c statt f und β statt λ. ∎

Satz 6.5. *Ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von* $-\Delta_k^2$ [15] *wird durch* K_k *(bzw.* Λ_k*) in ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von* $-\Delta_{k+2}^2$ *(bzw.* $-\Delta_{k-2}^2$*) übergeführt.*

Beweis. Es genügt wieder, die Aussage über K_k zu beweisen. Es sei $(v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von $-\Delta_k^2$. Nach Lemma 6.2, a), b) ist $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$ ein Orthogonalsystem von Eigenpaketen von $-\Delta_{k+2}^2$. Zum Nachweis der Maximalität dieses Orthogonalsystems sei

[15] in dem Sinne, daß jedes zu den Eigenpaketen dieses Systems orthogonale Eigenpaket von $-\Delta_k^2$ identisch verschwindet.

(w_λ) ein zu den $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\lambda})$ orthogonales Eigenpaket von $-\Delta_{k+2}^2$. Wir müssen $w_\lambda = 0$ für alle λ zeigen.

Für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ ist $-\Delta_{k+2} w_\lambda = \int\limits_0^\lambda \mu \, dw_\mu$, das Integral ist Grenzwert von Zerlegungssummen vom Stieltjesschen Typ, und jede dieser Zerlegungssummen steht nach der Voraussetzung über (w_λ) senkrecht auf den $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\lambda})$ $(\varrho \in \mathfrak{J})$. Für alle α, $\beta \in \mathbf{R}$ und $\varrho \in \mathfrak{J}$ ist also $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\alpha}, -\Delta_{k+2} w_\beta) = 0$. Nach (3.4) ist also

$$(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\alpha}, \mathsf{K}_k \Lambda_{k+2} w_\beta) = \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\alpha}, w_\beta).$$

Die rechte Seite verschwindet nach der Voraussetzung über (w_λ). Durch Umformung der linken Seite mit Hilfe von (3.9) erhält man dann

$$(-\Delta_k v_{\varrho,\alpha}, \Lambda_{k+2} w_\beta) + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)(v_{\varrho,\alpha}, \Lambda_{k+2} w_\beta) = 0,$$

$$\left(v_{\varrho,\alpha}, \left(-\Delta_k + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right) \Lambda_{k+2} w_\beta\right) = 0. \tag{6.15}$$

Nach Lemma 6.2, a) ist $(\Lambda_{k+2} w_\lambda)$ ein Eigenpaket von $-\Delta_k^2$. Daher stellt auch $\left(-\Delta_k + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right)\Lambda_{k+2} w_\lambda$ ein Eigenpaket von $-\Delta_k^2$ dar, und da die $(v_{\varrho,\lambda})$ ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von $-\Delta_k^2$ bilden, folgt aus (6.15)

$$\left(-\Delta_k + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right) \Lambda_{k+2} w_\beta = 0,$$

d. h.

$$\int\limits_0^\beta \left(\lambda + \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right) d_\lambda(\Lambda_{k+2} w_\lambda) = 0 \qquad (\beta \in \mathbf{R}),$$

$$\Lambda_{k+2} w_\lambda = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Nach Lemma 6.2, c) folgt hieraus $w_\lambda = 0$ $(\lambda \in \mathbf{R})$. Damit ist die Maximalität des Systems der Eigenpakete $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\lambda})$ bewiesen. ▌

Satz 6.6. *Die Vielfachheiten der Streckenspektren von* $-\tilde{\Delta}_k$ *und* $-\tilde{\Delta}_{k+2}$ *stimmen überein.*

Als Definition der Vielfachheit des Streckenspektrums eines selbstadjungierten Operators in einem separablen Hilbert-Raum wird hier M. STONE [24], Definition 7.1, zugrunde gelegt. Den Beweis des Satzes werden wir leicht mit Hilfe des folgenden einfachen spektraltheoretischen Lemmas führen, das es erlaubt, statt des in der zitierten Vielfachheitsdefinition auftretenden Orthogonalsystems $\psi_1, \psi_2, \ldots$ gewisse maximale Orthogonalsysteme von Eigenpaketen zu benutzen.

Lemma 6.3. *Für jeden selbstadjungierten Operator* A *in einem separablen Hilbert-Raum* $\mathscr{H}$ *gelten folgende Aussagen.*

a) *Es existiert ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen* $(v_{1,\lambda})$, $(v_{2,\lambda})$, $(v_{3,\lambda})$, ... *von* A *mit der folgenden Eigenschaft.*

(*) *Werden die reellen, monoton wachsenden und stetigen Funktionen* $p_\varrho: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *für* $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ *auf die zu* (5.1) *analoge Weise zu den Eigenpaketen* $(v_{\varrho,\lambda})$ *gebildet, so ist für jedes* ϱ *das durch* $p_{\varrho+1}$ *bestimmte Lebesgue-Stieltjessche Maß auf* $\mathbf{R}$ [16] *absolutstetig in bezug auf das durch* p_ϱ *bestimmte Maß auf* $\mathbf{R}$.

b) *Ist* $(v_{1,\lambda})$, $(v_{2,\lambda})$, $(v_{3,\lambda})$, ... *ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von* A *mit der unter* a) *genannten Eigenschaft* (*), *so hat das Streckenspektrum von* A *in einem Punkte* $\mu \in \mathbf{R}$ *dann und nur dann die Vielfachheit* $n \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, *wenn* n *das kleinste Element aus* $\{0, 1, \ldots, \infty\}$ *ist, derart daß jedes* p_ϱ *mit* $\varrho > n$ *in einer hinreichend kleinen Umgebung* $\mathfrak{W}_\varrho$ *von* μ *in* $\mathbf{R}$ *konstant ist.*

Dieses Lemma stellt eine so einfache Umformung von [24], Definition 7.1 und Theorem 7.5 mit Hilfe unseres Lemmas 5.1, c) dar, daß sein Beweis hier übergangen werden kann.

Beweis von Satz 6.6. Es sei $(v_{1,\lambda})$, $(v_{2,\lambda})$, $(v_{3,\lambda})$, ... ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von $-\tilde{\Delta}_k$ mit der Eigenschaft (*) aus Lemma 6.3. $p_1, p_2, p_3, \ldots$ seien die im Sinne von (5.1) zugeordneten Funktionen. Nach Satz 6.5 ist dann $(\mathsf{K}_k v_{1,\lambda})$, $(\mathsf{K}_k v_{2,\lambda})$, ... ein maximales Orthogonalsystem von Eigenpaketen von $-\tilde{\Delta}_{k+2}$. Die im Sinne von (5.1) zugeordneten Funktionen nennen wir $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Zufolge (6.11) ist das durch p_ϱ bestimmte Lebesgue-Stieltjessche Maß auf $\mathbf{R}$ äquivalent mit dem durch q_ϱ bestimmten Maß ($\varrho \in \mathbf{N}$). Daraus folgt, daß auch das maximale Orthogonalsystem der Eigenpakete $(\mathsf{K}_k v_{\varrho,\lambda})$ von $-\tilde{\Delta}_{k+2}$ die Eigenschaft (*) aus Lemma 6.3 hat. Weil also p_ϱ und q_ϱ dieselben Konstanzintervalle haben, zeigt nun Lemma 6.3, b), daß die Streckenspektren von $-\tilde{\Delta}_k$ und $-\tilde{\Delta}_{k+2}$ in jedem Punkte von $\mathbf{R}$ dieselbe Vielfachheit haben. ∎

Setzt man

$$\mu_k := \max\left\{\frac{l}{2}\left(1 - \frac{l}{2}\right);\ l \equiv k \bmod 2\right\}, \tag{6.16}$$

so ist das Streckenspektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ nach Satz 6.6 und Satz 5.5 in der Halbgeraden $[\mu_k, \infty\rangle$ enthalten. μ_k ist im Falle $k \geqq 0$ mit $\frac{k^+}{2}\left(1 - \frac{k^+}{2}\right)$ und im Falle $k \leqq 0$ mit $\frac{k^-}{2}\left(1 - \frac{k^-}{2}\right)$ identisch (k^+, k^- aus Satz 5.4). Nach Satz 5.4 besteht daher der unterhalb μ_k gelegene Teil des Spektrums von $-\tilde{\Delta}_k$ nur aus endlich vielen Punkten der Form $\frac{1}{4} - \left(l + \frac{1}{2} - \frac{|k|}{2}\right)^2$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen l. — Mir ist kein Beispiel bekannt, in dem das Streckenspektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ in dem Intervall $\left\langle \mu_k, \frac{1}{4}\right]$ nicht leer ist. Die Frage, ob in diesem Intervall unendlich viele Punkteigenwerte von $-\tilde{\Delta}_k$ liegen können, ist vermutlich zu bejahen.

[16] für welches das links halboffene Intervall $\langle \alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ das Maß $p_{\varrho+1}(\beta) - p_{\varrho+1}(\alpha)$ besitzt.

Liste häufig benutzter Bezeichnungen

A_ι s. § 8
$\mathscr{A}(\mathfrak{U})$ Algebra aller Endomorphismen von $\mathfrak{U}$
$\mathfrak{A}_{k,\lambda}$ s. Lemma 9.1
C der Körper der komplexen Zahlen
$\mathscr{C}_k^l = \mathscr{C}_k^l(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ s. S. 296
$\tilde{\mathscr{D}}_k$ s. S. 309
$\mathscr{D}_k^2$ s. (2.21)
$\mathscr{D}_k^\infty$ s. (2.22)
Δ_k s. (1.19)
$\tilde{\Delta}_k$ s. S. 309
Δ_k^2 s. (2.28)
Δ_k^∞ s. (2.28)
$\mathfrak{E}$ die obere Halbebene
$E(z, s, \mathfrak{h}; A, \Gamma, k, \mathfrak{U}, v)$ s. (10.1)
$E_\iota(z, s, \mathfrak{h})$ s. § 10
$(\mathsf{E}_{k,\lambda})_{\lambda\in\mathbf{R}}$ Spektralschar von $-\tilde{\Delta}_k$
$\varepsilon(s)$ s. (10.20)
$\mathfrak{F}$ Fundamentalbereich von Γ, s. S. 302, Fußnote 4
$\mathfrak{F}_\eta$ s. ($\mathfrak{F}$. 3), γ), S.
($\mathfrak{F}$. 3) s. § 8, Anfang
$\mathscr{F}_k = \mathscr{F}_k(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ s. § 1, 7.
$\mathscr{F}_{k,\lambda} = \mathscr{F}_{k,\lambda}(\Gamma, \mathfrak{U}, v)$ s. Definition 1.1
$\Gamma_\iota := A_\iota \Gamma A_\iota^{-1}$ s. Zeile nach (8.5)
Grundmatrix von Γ zur Spitze ξ s. S. 299
$\mathscr{H}_k$ Hilbert-Raum, s. S. 302
$\mathscr{H}_k^c$ s. S. 332
$\mathscr{H}_k^e$ s. S. 332
$\mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$ die identische Abbildung der Menge $\mathfrak{M}$
$I^{(\nu)}$ die ν-reihige Einheitsmatrix; meist steht I statt $I^{(2)}$
$j_M(z; k)$ s. (1.6)
K_k s. (3.1)
Kennzahl s. Definition 1.1
$\mathfrak{L}(\xi)$ Fixraum von v zur Spitze ξ, s. (2.3)
$\mathfrak{L}_\iota = \mathfrak{L}(\xi_\iota)$
Λ_k s. (3.2)
$m := \dim \mathfrak{U}$
m^* s. (2.4)
$m(\xi) := \dim \mathfrak{L}(\xi)$ s. S. 299
$m_\iota := m(\xi_\iota)$ s. (8.12)
N die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, …
$\mathscr{N}_{k,\lambda}$, Normalraum s. Definition 9.1
ξ_ι s. § 8
ω s. S. 294
$\Omega := SL(2, \mathbf{R})$
P_ι s. ($\mathfrak{F}$. 3), α), § 8
$\mathfrak{p}_{\iota\kappa}(s, \mathfrak{h})$ s. Lemma 10.2
$\varphi_{\iota\mu,\kappa\nu}(s)$ s. (10.16)
$\Phi(s)$ s. (10.17)
$\psi_\iota := \psi_{(\xi_\iota)}$ Orthogonalprojektion von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{L}_\iota$ s. § 8
$\psi_{(\xi)}$ Orthogonalprojektion von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{L}(\xi)$ s. S. 302
$\mathfrak{Q}_\iota$ s. (8.2)
$\mathfrak{Q}(\eta_\iota)$ s. (8.2)
R der Körper der reellen Zahlen
$\mathsf{R}_{k,\lambda} := (-\tilde{\Delta}_k - \lambda)^{-1}$ Resolvente s. (7.1)
$\mathfrak{S}(\eta) := \{z; 0 \leqq x \leqq 1, y > \eta\}$ s. (2.29)
$\mathfrak{S}_\iota$ s. ($\mathfrak{F}$. 3), β), § 8
$\mathscr{S}_{k,\lambda}$ s. Definition 9.1
σ^* s. § 10
$\hat{\sigma}$ s. ($\mathfrak{F}$. 3), § 8 und vor (2.4)
$\sigma_k(M, N)$ s. (1.10)
Spitzenform s. Definition 2.2
$\mathfrak{U}$ s. § 1, 5.
$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$U^\vartheta := \begin{pmatrix} 1 & \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\vartheta \in \mathbf{R}$
v Multiplikatorsystem von Γ s. S. 296
$w(M_1, M_2)$ s. (1.7)
$W_{\gamma,\delta}(t)$ Whittakersche Funktion s. S. 301
Z die Menge der ganzrationalen Zahlen
$[a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, b\rangle$ s. S. 300, Fußnote 3
$|\mathfrak{a}|$ Norm in $\mathfrak{U}$
$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ Skalarprodukt in $\mathfrak{U}$
$|z, w|$ s. § 1, 2.
$|x'; x|$ s. (8.39)
$\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ s. (1.20)
$f|[M, k]$ s. (1.12)
$w \equiv z \bmod \Gamma$ s. § 1, 6.
$n \sim \tau$, mit $\tau \in \mathbf{R}$, bedeutet $n \equiv \tau \bmod 1$, $n \neq 0$

Literatur

[1] Carleman, T.: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Uppsala Universitets Årsskrift 1923. Matematik och Naturvetenskap. 3.

[2] Dunford, N., and J. T. Schwartz: Linear operators, Bd. II. New York, London: Interscience Publishers 1963.

[3] Elstrodt, J.: Automorphe Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren in der Poincaréschen Halbebene. Diplomarbeit, Münster 1964.

[4] Hahn, H.: Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Monatsh. Math. Phys. **23**, 170—179 (1912).

[5] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, Bd. 3. Berlin: de Gruyter 1955.
[6] HECKE, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112**, 664—699 (1936).
[7] HELLINGER, E.: Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. J. reine angew. Math. **136**, 210—271 (1909).
[8] HOPF, H., u. W. RINOW: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. Math. Helv. **3**, 209—225 (1931).
[9] KOMATSU, H.: A proof of Kotake and Narasimhan's theorem. Proc. Jap. Acad. **38**, 615—618 (1962).
[10] KOWALEWSKI, G.: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 4. Aufl. Leipzig: Teubner 1928.
[11] MAASS, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **121**, 141—183 (1949).
[12] — Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **125**, 235—263 (1953).
[13] — Lectures on modular functions of one complex variable. Tata Institute, Bombay 1964.
[14] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1948.
[15] PETERSSON, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Ann. **115**, 23—67 (1938).
[16] — Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen II. Math. Ann. **115**, 175—204 (1938).
[17] — Über den Bereich der absoluten Konvergenz der Poincaréschen Reihen. Acta Math. **80**, 23—63 (1948).
[18] ROELCKE, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitz. Ber. Heidelberger Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1956, 4. Abh.
[19] — Über den Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen. Math. Nachr. **21**, 131—149 (1960).
[20] — Über diskontinuierliche Gruppen in lokalkompakten Räumen. Math. Z. **75**, 36—52 (1961).
[21] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, Bd. 1. Paris: Hermann 1950.
[22] SELBERG, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. **20**, 47—87 (1956).
[23] SHIMIZU, H.: On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. of Math. **77**, 33—71 (1963).
[24] STONE, M.: Linear transformations in Hilbert space ... New York: American Mathem. Soc. Colloquium Public. vol. XV 1932.
[25] SZ.-NAGY, B. v.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Ergeb. Math. **5**, Heft 5. Berlin: Springer 1942

Prof. Dr. WALTER ROELCKE
Mathematisches Institut der Universität
8 München 13, Schellingstr. 2–8

(Eingegangen am 5. Januar 1966)