Math. Ann. 250, 135–155 (1980)

Mathematische Annalen

Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Räume

C. Bănică*, M. Putinar und G. Schumacher

Increst, Abteilung Mathematik, Bd. Păcii, 220 Bukarest, Rumänien
Mathematisches Institut, Roxeler Straße 64, D-4400 Münster, Bundesrepublik Deutschland

Die globalen Ext-Gruppen kohärenter Garben oder gewisser Komplexe von Garben auf komplexen Räumen sind in verschiedenen Situationen von Interesse, etwa bei Deformationen kompakter komplexer Räume [2, 3, 7, 13, 15] und kohärenter Moduln [17] sowie für Vektorbündel vom Rang zwei auf komplexen Mannigfaltigkeiten (z. B. [14]).

Ist $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ ein kompakter komplexer Raum and $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ kohärente $\mathcal{O}_{X_0}$-Moduln, so sind die $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ endlich dimensionale Vektorräume. In dieser Arbeit betrachten wir die Variation dieser Invarianten in Deformationen komplexer Räume in Analogie zur Variation der Kohomologie ([6, 8] vgl. auch [1]). Sei $f: X \to Y$ eine eigentliche Abbildung komplexer Räume und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln; dann sind bekanntlich die relativen Ext-Garben $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ kohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Unter Flachheitsvoraussetzungen konstruieren wir in Abschn. 1 zur Berechnung der relativen Ext-Garben lokal auf den Basisräumen Komplexe endlicher freier Moduln, die mit beliebigen Basiswechseln verträglich sind (Satz 1).

In Abschn. 2 übertragen wir zunächst (Satz 2) den Vergleichssatz und den Satz über Basiswechsel von Bildgarben auf relative Ext-Garben (punktuelle Aussagen lassen sich im allgemeinen ähnlich wie für Bildgarben zeigen, für die lokale Aussage aus Satz 2 benötigen wir jedoch Satz 1). Dann zeigen wir (Satz 3) mit Hilfe von Satz 1, daß die Funktionen $y \mapsto \dim \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ Zariski-halbstetig sind, daß die Euler-Poincaré-Charakteristik $\sum_q (-1)^q \dim \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ lokal konstant auf Y ist [falls $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$ für große q] und eine zum Grauertschen Stetigkeitssatz analoge Aussage.

Die obigen Ergebnisse werden auch für gewisse Komplexe von Moduln beweisen.

In Abschn. 3 verallgemeinern wir zuerst Aussagen, die für lokal freie Garben bekannt sind, auf Y-flache $\mathcal{O}_X$-Moduln. Ferner erhalten wir Folgerungen über die Variation der globalen Tangentialkohomologiegruppen T^i in einer Deformation.

* Der erstgenannte Verfasser dankt der Alexander von Humboldt-Stiftung für das gewährte Stipendium

0025-5831/80/0250/0135/$04.20

Diese Invarianten wurden in [13] eingeführt; wir benutzen aber die Charakterisierung der T^i als Ext-Invarianten nach [2, 3]. Einige dieser Folgerungen finden sich in [13, Satz 4.4 und Korollare]. (Der Beweis in [13] benutzt die Spaltung des Tangentenkomplexes, Satz 3.1.)

Im letzten Abschnitt werden die Existenz einer versellen Deformation für Extensionen gezeigt und analoge Ergebnisse für relative Tor-Moduln beweisen.

Das Interesse für die Variation von Ext-Gruppen entstammt einer Diskussion des erstgenannten Verfassers mit G. Trautmann.

0. Vorbereitungen

(0.1) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum oder auch allgemein ein geringter Raum und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Es bezeichne A den Nerv der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Falls $\alpha = \{i_0, \ldots, i_q\} \in A$, schreiben wir $U_\alpha = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$ und $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_X | U_\alpha$. Unter einem simplizialen System von Garben bzgl. $\mathfrak{U}$ versteht man nach [18] eine Familie $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, wobei die $\mathcal{L}_\alpha$ $\mathcal{O}_\alpha$-Moduln sind, zusammen mit einer Familie $\varrho = \{\varrho_{\beta\alpha}\}_{\alpha \subset \beta}$ von Verbindungs-Morphismen $\varrho_{\beta\alpha} : \mathcal{L}_\alpha | U_\beta \to \mathcal{L}_\beta$, so daß für $\alpha \subset \beta \subset \gamma$ gilt $\varrho_{\gamma\beta} \circ (\varrho_{\beta\alpha} | U_\gamma) = \varrho_{\gamma\alpha}$, und $\varrho_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$ für alle α. Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$ solcher Systeme besteht aus einer Familie $\{\varphi_\alpha\}$ von Morphismen $\varphi_\alpha : \mathcal{L}'_\alpha \to \mathcal{L}''_\alpha$, die mit den Verbindungs-Morphismen verträglich sind. Man bekommt so eine abelsche Kategorie. Es heißt $\mathcal{L}$ quasi frei (d. h. frei im Sinne von [4]), wenn die $\mathcal{L}_\alpha$ endliche freie $\mathcal{O}_\alpha$-Moduln sind. Ist α_0 ein Simplex und $\mathcal{T}_{\alpha_0}$ ein beliebiger $\mathcal{O}_{\alpha_0}$-Modul, dann definiert $\mathcal{T}_{\alpha_0}$ nach [4] ein simpliziales System $\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha_0}$ durch $(\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha_0})_\alpha = \mathcal{T}_{\alpha_0} | U_\alpha$ falls $\alpha_0 \subset \alpha$ und $(\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha_0})_\alpha = 0$ sonst. Ist $\mathcal{L}$ ein beliebiges simpliziales System von Garben, so ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha_0}, \mathcal{L}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\alpha_0}}(\mathcal{T}_{\alpha_0}, \mathcal{L}_{\alpha_0}); \quad \varphi \mapsto \varphi_{\alpha_0}$$

bijektiv. Nach [2–4, 13] heißt eine direkte Summe $\coprod_\alpha \tilde{\mathcal{T}}_\alpha$, wo alle $\mathcal{T}_\alpha$ endliche freie $\mathcal{O}_\alpha$-Moduln sind, frei. Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, dann wird durch $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F} | U_\alpha$ und $\varrho_{\alpha\beta} = \mathrm{id}$ ein simpliziales System von Garben definiert, das wir mit $\mathcal{F} | \mathfrak{U}$ bezeichnen.

(0.2) Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum endlicher Dimension. Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathfrak{U}$ hinreichend fein, dann gibt es nach [4] eine Auflösung $\mathcal{L}^{\cdot} \to \mathcal{F} | \mathfrak{U} \to 0$ durch freie simpliziale Systeme $\mathcal{L}^i$. Sei nun $\mathfrak{U}$ außerdem steinsch und lokal endlich. Dann hat man nach [2] und [3] bemerkenswerte Isomorphien

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong H^q(\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\cdot}, \mathcal{G} | \mathfrak{U})),$$

wo $\mathcal{G}$ einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul bezeichnet. Die Isomorphismen sind funktoriell in $\mathcal{G}$. Eine analoge Aussage gilt für nach rechts beschränkte Komplexe $\mathcal{F}^{\cdot}$ mit kohärenter Kohomologie, die eine solche Auflösung $\mathcal{L}$ besitzen.

Wir geben kurz das Argument von [2] an: Es sei $\mathcal{T}$ ein simpliziales System bzgl. $\mathfrak{U}$ und $x \in X$. Die $\mathcal{T}_{\alpha,x}$ für Simplices α mit $x \in U_\alpha$ bilden zusammen mit den Morphismen $\varrho_{\beta\alpha,x} : \mathcal{T}_{\alpha,x} \to \mathcal{T}_{\beta,x}$, $\alpha \subset \beta$ ein gerichtetes System. Weil $\mathfrak{U}$ lokal endlich ist, erhält man eine Garbe $\hat{\mathcal{T}}$ auf X mit den Halmen $\hat{\mathcal{T}}_x = \varinjlim \mathcal{T}_{\alpha,x}$. Eine Basis der Topologie von $\hat{\mathcal{T}}$ (als espace étalé) wird folgendermaßen gegeben: für jede offene

Menge $U \subset U_\alpha$ und $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{T}_\alpha)$ betrachtet man die Menge $(\hat{\sigma}_x)_{x\in U}$, wo $\hat{\sigma}_x$ das Bild von σ_x in $\varinjlim \mathscr{T}_{\alpha,x}$ ist. Sind die $\mathscr{T}_\alpha$ kohärent, so ist i.a. die Garbe $\hat{\mathscr{T}}$ nicht kohärent, sondern sie hat nur noethersche Halme. Die Zuordnung $\mathscr{T} \mapsto \hat{\mathscr{T}}$ ist funktoriell und exakt. Man bemerkt, daß $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathscr{S}$ stets auf natürliche Weise mit $\widehat{(\mathscr{S}|\mathfrak{U})}$ identifiziert werden können. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{I}$ und jedes simpliziale System $\mathscr{T}$ folgt unmittelbar aus der Definition von $\hat{\mathscr{T}}$ eine kanonische Bijektion

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{T}, \mathscr{I}|\mathfrak{U}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\hat{\mathscr{T}}, \mathscr{I}). \tag{1}$$

Wir betrachten eine injektive Auflösung $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{I}^\cdot$ und den Doppelkomplex $\operatorname{Hom}(\mathscr{L}^\cdot, \mathscr{I}^\cdot|\mathfrak{U})$. Die beiden zugehörigen Spektralsequenzen degenerieren [für die eine benutzt man (1), für die andere die Tatsache, daß die $\mathscr{L}^p$ frei sind]. Daraus folgt die Behauptung.

(0.3) Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung komplexer Räume (oder allgemeiner geringter Räume) und $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Bekanntlich kann man relative Ext-Garben $\mathscr{E}xt^\cdot_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ auf Y definieren. Es wird $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ durch die Prägarbe $\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(f^{-1}(V); \mathscr{F}, \mathscr{G})$ für offene Teilmengen $V \subset Y$ (mit den kanonischen Restriktionen) definiert. Für $q=0$ ist diese Prägarbe schon eine Garbe, die mit $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ bezeichnet wird. Es ist leicht zu zeigen, daß die $\mathscr{E}xt^\cdot_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, -)$ die Ableitung des Funktors $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, -)$ darstellen. Offensichtlich sind diese Invarianten auch im Argument $\mathscr{F}$ δ-Funktoren. Ist $\mathscr{F}$ lokal frei, dann ist $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong R^q f_*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$. Wegen $f_*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, -)) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, -)$ gibt es eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = R^p f_*(\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})),$$

die gegen $\mathscr{E}xt^\cdot_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ konvergiert. Die Gleichheit von $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, -)$ und $\Gamma(Y, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, -))$ liefert eine Spektralsequenz mit $E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}))$, die gegen $\operatorname{Ext}^\cdot_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ konvergiert.

Es sei $h: Z \to X$ ein Morphismus geringter Räume. Die Halme der Strukturgarben von Z und X seien noethersch. Ferner seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln, $\mathscr{F}$ lokal endlich darstellbar. Wir setzen voraus, daß

$$\operatorname{Tor}^i_{\mathcal{O}_{X,h(z)}}(\mathscr{F}_{h(z)}, \mathcal{O}_{Z,z}) = 0 \quad \text{für} \quad i > 0 \quad \text{und} \quad z \in Z. \tag{2}$$

Dann konstruieren wir natürliche Basiswechsel-Morphismen

$$\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_Z}(h^*\mathscr{F}, h^*\mathscr{G}). \tag{3}$$

Weil die durch h induzierte Abbildung $(Z, h^{-1}(\mathcal{O}_X)) \to (X, \mathcal{O}_X)$ geringter Räume flach ist, bekommt man leicht kanonische Morphismen

$$\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F}, h^{-1}\mathscr{G})$$

(vgl. [8], Chap. $\mathrm{O_{III}}$, Sect. 12.3.4).

Die kanonische $h^{-1}(\mathcal{O}_X)$-lineare Abbildung $h^{-1}\mathscr{G} \to h^*\mathscr{G}$ liefert Morphismen $\operatorname{Ext}^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F}, h^{-1}\mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F}, h^*\mathscr{G})$, die wir mit den obigen Morphismen komponieren zu $\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F}, h^*\mathscr{G})$. Seien nun $\mathscr{I}^\cdot$ und $\mathscr{J}^\cdot$ injektive Auflösungen von $h^*\mathscr{G}$ aufgefaßt als $\mathcal{O}_Z$- bzw. $h^{-1}(\mathcal{O}_X)$-Modul. Dann gibt es eine, bis auf Homotopie eindeutig bestimmte, $h^{-1}(\mathcal{O}_X)$-lineare Abbildung $\mathscr{I}^\cdot \to \mathscr{J}^\cdot$

von Auflösungen von $h^*\mathscr{G}$. Diese induziert $\Gamma(h^{-1}\mathcal{O}_X)$-lineare Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(h^*\mathscr{F},\mathscr{I}^{\cdot})\cong \mathrm{Hom}_{h^{-1}(\mathcal{O}_Z)}(h^{-1}\mathscr{F},\mathscr{I}^{\cdot})\to \mathrm{Hom}_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F},\mathscr{I}^{\cdot}) \tag{4}$$

und damit

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_Z}(h^*\mathscr{F},h^*\mathscr{G})\to \mathrm{Ext}^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F},h^*\mathscr{G}). \tag{5}$$

Wir zeigen, daß die letzteren Abbildungen Isomorphismen sind, womit die gewünschten Morphismen (3) konstruiert wären. Analog zu (4) hat man

$$\mathscr{H}\!om_{\mathcal{O}_Z}(h^*\mathscr{F},\mathscr{I}^{\cdot})\to \mathscr{H}\!om_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F},\mathscr{I}^{\cdot}) \tag{6}$$

und die dadurch induzierten $h^{-1}(\mathcal{O}_X)$-linearen Abbildungen

$$\mathscr{E}\!xt^q_{\mathcal{O}_Z}(h^*\mathscr{F},h^*\mathscr{G})\to \mathscr{E}\!xt^q_{h^{-1}(\mathcal{O}_X)}(h^{-1}\mathscr{F},h^*\mathscr{G}). \tag{7}$$

Wir werden zeigen, daß die Abbildungen (7) Isomorphismen sind. Da die obigen Hom-Garben welk sind, folgt daraus, daß auch die Abbildungen (5) Isomorphismen sind. Um die Isomorphie von (7) zu zeigen, genügt es, (weil hier die Halme der Ext-Garben die Ext-Moduln der Halme sind), für alle $z\in Z$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{Z,z}}\left(\mathscr{F}_{h(z)}\underset{\mathcal{O}_{X,h(z)}}{\otimes}\mathcal{O}_{Z,z},\mathscr{G}_{h(z)}\underset{\mathcal{O}_{X,h(z)}}{\otimes}\mathcal{O}_{Z,z}\right)\\ &\quad\to \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X,h(x)}}\left(\mathscr{F}_{h(z)},\mathscr{G}_{h(z)}\underset{\mathcal{O}_{X,h(z)}}{\otimes}\mathcal{O}_{Z,z}\right)\end{aligned}$$

zu betrachten. Diese sind jedoch Isomorphismen, wie man leicht mit Hilfe einer freien $\mathcal{O}_{X,h(z)}$-Auflösung von $\mathscr{F}_{h(z)}$ zeigt unter Benutzung von (2).

Es sei jetzt

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{$*$}$$

ein kommutatives Diagramm geringter Räume mit noetherschen Halmen und $\mathscr{F},\mathscr{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln, $\mathscr{F}$ lokal endlich darstellbar. Es sei wiederum

$$\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{O}_{X,g'(x')}}(\mathscr{F}_{g'(x')},\mathcal{O}_{X',x'})=0 \quad \text{für} \quad i>0, x'\in X'. \tag{$**$}$$

Seien $\mathscr{F}'=g'^*\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}'=g'^*\mathscr{G}$. Für jede offene Teilmenge $V\subset Y$ liefert die obige Konstruktion Morphismen

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(f^{-1}(V);\mathscr{F},\mathscr{G})\to \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X'}}(f'^{-1}g'^{-1}(V);\mathscr{F}',\mathscr{G}').$$

Diese sind verträglich mit Inklusionen offener Teilmengen von Y und liefern also $\mathcal{O}_{Y'}$-lineare Basiswechsel-Morphismen

$$g^*\mathscr{E}\!xt^q_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})\to \mathscr{E}\!xt^q_{\mathcal{O}_{X'}}(f;\mathscr{F}',\mathscr{G}').$$

Diese haben alle Eigenschaften, die man erwartet.

Wir diskutieren nun, wann ($**$) erfüllt ist. Ist ($*$) ein kartesisches Diagramm noetherscher Schemata und f flach sowie $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, der Y-flach ist, so ist stets (**) erfüllt, da $\mathcal{O}_{X',x'} = \mathcal{O}_{X,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y',y'}$, wenn $x' \in X'$, $x = g'(x')$, $y' = f'(x')$ und $y = f(x)$. Die Basiswechsel-Morphismen wurden in diesem Fall auch in [12] definiert, falls zusätzlich X regulär ist (und also $\mathscr{F}$ eine Auflösung durch lokal freie endliche $\mathcal{O}_X$-Moduln besitzt). Sei nun (*) ein kartesisches Diagramm komplexer Räume, sei f flach und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, flach über Y. Dann ist (**) ebenfalls erfüllt. Falls g nämlich eine Einbettung ist oder ein flacher Morphismus, folgt (**) unmittelbar. Ein beliebiger Morphismus läßt sich über den Graphen faktorisieren.

Für noethersche Schemata und komplexe Räume lassen sich Basiswechsel-Morphismen (wenn zusätzlich $\mathscr{G}$ kohärent ist) auch mit Hilfe von Auflösungen durch freie simpliziale Systeme konstruieren (vgl. Abschn. 1).

(0.4) **Lemma.** *Sei X ein komplexer Raum und $\mathscr{F}^{\cdot}$ ein nach rechts beschränkter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit kohärenter Kohomologie. Für alle steinschen Kompakta $K \subset X$ gelte $H^p(K, \mathscr{F}^q) = 0$ für alle q und alle $p > 0$. Dann gibt es einen nach rechts beschränkten Komplex $\mathscr{L}^{\cdot}$ freier simplizialer Systeme bzgl. $\mathfrak{U}$ zusammen mit einem Quasiisomorphismus $\mathscr{L}^{\cdot} \to \mathscr{F}^{\cdot} | \mathfrak{U}$.*

In [5] wird eine solche Aussage bewiesen ohne die Voraussetzung, daß die einzelnen $\mathscr{F}^q$ azyklisch sind (bzgl. steinscher Kompakta), jedoch nur die Existenz einer quasi freien Auflösung gezeigt. Im Induktionsbeweis wird die Überdeckung von X verfeinert, d.h. der zugehörige simpliziale Komplex vergrößert; hierbei gehen freie simpliziale Systeme in quasi freie über. Wir skizzieren deshalb den Beweis:

Sei $\mathfrak{K}$ eine Überdeckung von X durch steinsche Kompakta, die eine offene steinsche Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X als Schrumpfung zulasse. Es genügt, die Existenz eines solchen Komplexes $\mathscr{L}^{\cdot}$ von simplizialen Systemen bzgl. $\mathfrak{K}$ zu zeigen.

Bezeichnen wir mit $\mathscr{Z}^{\cdot}$ und $\mathscr{B}^{\cdot}$ die Zykel bzw. Ränder von $\mathscr{F}^{\cdot}$. Da die $\mathscr{F}^q$ bzgl. steinscher Kompakta azyklisch sind und die Kohomologie von $\mathscr{F}^{\cdot}$ kohärent ist, folgt für beliebige steinsche Kompakta $K \subset X$, daß $H^p(K, \mathscr{B}^q) = 0$ und $H^p(K, \mathscr{Z}^q) = 0$ für alle p und alle $q > 0$.

Für große q setzen wir $\mathscr{L}^q = 0$. Wir nehmen an, daß wir einen Komplex $\ldots \to 0 \to \mathscr{L}^q \to \mathscr{L}^{q+1} \to \ldots$ konstruiert haben mit einem q-Quasiisomorphismus nach $\mathscr{F}^{\cdot} | \mathfrak{K}$. Wir konstruieren ein freies simpliziales System $\mathscr{L}^{q-1}$ zusammen mit Morphismen nach $\mathscr{L}^q$ und $\mathscr{F}^{q-1}$, so, daß sich ein $(q-1)$-Quasiisomorphismus ergibt.

Sei α ein fester Simplex. Es gibt einen endlichen freien $\mathcal{O}_\alpha$-Modul $\mathscr{P}^{q-1}$ zusammen mit Morphismen nach $\mathscr{L}^q_\alpha$ und $\mathscr{F}^{q-1}_\alpha$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathscr{P}^{q-1}_\alpha & \longrightarrow & \mathscr{L}^q_\alpha & \longrightarrow & \mathscr{L}^{q+1}_\alpha & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & \mathscr{F}^{q-2}_\alpha & \longrightarrow & \mathscr{F}^{q-1}_\alpha & \longrightarrow & \mathscr{F}^q_\alpha & \longrightarrow & \mathscr{F}^{q+1}_\alpha & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

einen $(q-1)$-Quasiisomorphismus beschreibt. Es wird $\mathscr{P}^{q-1}_\alpha$ genau wie in [8, Chap. 0_{III}, 11.9] konstruiert, nur muß man beachten, daß die auftretenden Obstruktionen in $H^1(K_\alpha, \mathscr{B}^{q-1})$ und $H^1(K_\alpha, \mathscr{Z}^{q-1})$ liegen. Das simpliziale System

$\mathscr{L}^{q-1} = \coprod_{\alpha} (\mathscr{P}_\alpha^{q-1})$ mit den induzierten Abbildungen nach $\mathscr{L}^q$ und $\mathscr{F}^{q-1}|\mathfrak{K}$ genügt der Behauptung.

(0.5) **Lemma.** *Sei $A \to B$ ein lokaler Morphismus noetherscher lokaler Ringe und $F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F''$ ein Komplex endlich erzeugter B-Moduln, die A-flach sind. Sei $F'/\mathfrak{m}_A F' \to F/\mathfrak{m}_A F \to F''/\mathfrak{m}_A F''$ exakt. Dann ist auch für jeden A-Modul E die Sequenz*

$$F' \bigotimes_A E \to F \bigotimes_A E \to F'' \bigotimes_A E$$

exakt.

Für den Fall, daß $A \to B$ die Lokalisierung eines Morphismus $A' \to B'$ von Algebren ist, wo B' eine endlich erzeugte A'-Algebra ist, findet sich das Resultat in [8, Chap. IV, Sect. 12.3]. Wir benötigen dieses Lemma jedoch für analytische Algebren. Ein Beweis ergibt sich sofort aus der folgenden Tatsache:

Sei $M \to N$ ein Morphismus endlich erzeugter B-Moduln und N A-flach. Dann ist der induzierte Morphismus $M/\mathfrak{m}_A M \to N/\mathfrak{m}_A N$ genau dann injektiv, wenn $M \to N$ injektiv ist und der zugehörige Kokern A-flach ist. (Diese Tatsache wurde in [8, Chap. IV, Sect. 3, Fußnote auf S. 118] angegeben und folgt aus dem Flachheitskriterium von Bourbaki-Grothendieck und dem Lemma von Nakayama).

Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, daß $(\mathrm{Im}\, v)/\mathfrak{m}_A(\mathrm{Im}\, v) \to F''/\mathfrak{m}_A F''$ injektiv ist, so daß nach der obigen Tatsache $\mathrm{coker}\, v$ ein A-flacher Modul ist. Also sind $\mathrm{Im}\, v$ und $\mathrm{Ker}\, v$ A-flach. Aus der Voraussetzung folgert man, daß die Inklusion $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$ modulo $\mathfrak{m}_A$ surjektiv ist, also $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$; insbesondere ist $\mathrm{Im}\, u$ A-flach. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Folgerung. Sei $A \to B$ ein flacher, lokaler Morphismus noetherscher lokaler Ringe und F, G endlich erzeugte B-Moduln A-flach. Sei $\mathrm{Ext}^q_{B/\mathfrak{m}_A B}(F/\mathfrak{m}_A F, G/\mathfrak{m}_A G) = 0$ für ein q. Dann ist $\mathrm{Ext}^q_B\left(F, G \bigotimes_A E\right) = 0$ für jeden A-Modul E.

Zum Beweis betrachtet man eine Auflösung $L^{\cdot} \to F \to 0$ mit endlichen freien B-Moduln und wendet das Lemma auf den Komplex $\mathrm{Hom}_B(L^{\cdot}, G)$ an der Stelle q an.

1. Konstruktion eines universellen Komplexes auf der Basis

(1.1) Im folgenden sei stets

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm komplexer Räume und $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ seien $\mathcal{O}_X$-Moduln. Es seien $\mathscr{F}' = g'^* \mathscr{F}$ und $\mathscr{G}' = g'^* \mathscr{G}$. Für $y \in Y$ sei X_y die Faser von f und die $\mathcal{O}_{X_y}$-Moduln $\mathscr{F}_y$ und $\mathscr{G}_y$ seien die analytischen Fasern von $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$. Mit $X_y^{(n)}$

bezeichnen wir die n-te analytische Faser, d.h. den Raum $(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathcal{O}_X)$, und es seien $\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)}$ die $\mathcal{O}_{X_y^{(n)}}$-Moduln $\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathcal{F}$, $\mathcal{G}/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathcal{G}$.

(1.2) **Satz 1.** *Sei $f: X \to Y$ eine flache eigentliche Abbildung komplexer Räume und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, flach über Y.*

(i) *Sei $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$ für alle $q \geqq q_0$ und $y \in Y$. Dann existiert lokal auf Y ein nach rechts beschränkter Komplex $\mathcal{P}^{\cdot}$ von endlichen freien $\mathcal{O}_Y$-Moduln mit der folgenden Eigenschaft: Für jeden Basiswechsel $g: Y' \to Y$ gibt es Isomorphismen*

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X'}}(f'; \mathcal{F}'\mathcal{G}') \cong \mathcal{H}^q(g^*\mathcal{P}^{\cdot}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Diese sind funktoriell in g und bilden einen Isomorphismus von δ-Funktoren in $\mathcal{G}$.

(ii) *Sei Y eine Mannigfaltigkeit und n_0 vorgegeben. Dann gibt es lokal auf Y Komplexe ${}^{(n_0)}\mathcal{P}^{\cdot}$ mit den Eigenschaften wie in* (i) *für $q \leqq n_0$.*

Beweis. Da die Aussage bzgl. Y lokal ist, können wir Y als steinsch annehmen. Sei $\mathfrak{U}$ eine lokal endliche, offene, steinsche Überdeckung von X zusammen mit einer freien Auflösung $\mathcal{L}^{\cdot}$ von $\mathcal{F}|\mathfrak{U}$ wie in (0.2). Für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ betrachten wir den Komplex

$$\mathcal{C}^{\cdot}(V) = \mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\cdot}|f^{-1}(V) \cap \mathfrak{U}, \mathcal{G}|f^{-1}(V) \cap \mathfrak{U}).$$

Durch $V \mapsto \mathcal{C}^{\cdot}(V)$ erhält man einen Komplex $\mathcal{C}^{\cdot}$ von $\mathcal{O}_Y$-Moduln mit $\mathcal{C}^q = 0$ für $q < 0$. Im Unterschied zur Konstruktion bei Bildgarben ist der Komplex $\mathcal{C}^{\cdot}$ nicht mehr nach rechts beschränkt. In natürlicher Weise ist $\mathcal{C}^{\cdot}$ ein Komplex von $\mathcal{O}_Y$-Fréchet-Moduln. Der Komplex $\mathcal{C}^{\cdot} = \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{L}^{\cdot}, \mathcal{G})$ ist funktoriell und exakt in $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul, so folgt aus der Definition, daß $\mathcal{C}^{\cdot}\left(\mathcal{L}^{\cdot}, \mathcal{G} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}\right) \cong \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{L}, \mathcal{G}) \bigotimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M}$ ist. [Für jedes $\alpha \in A$ und $V \subset Y$ steinsch und klein ist $\Gamma\left(f^{-1}(V) \cap U_\alpha, \mathcal{G} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{M})\right) \cong \mathcal{G}(f^{-1}(V) \cap U_\alpha) \bigotimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{M}(V)$, wie man mit einer Darstellung von $\mathcal{M}$ einsieht.] Aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß die Komponenten von $\mathcal{C}^{\cdot}$ $\mathcal{O}_Y$-flach sind. (Ist $\mathcal{J}$ eine kohärente Idealgarbe auf Y, dann ist $\mathcal{G} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{J} \to \mathcal{G}$ injektiv.) Ist $V \subset Y$ steinsch, so ist $\mathfrak{U} \cap f^{-1}(V)$ eine steinsche Überdeckung und nach (0.2) ist $H^q(\mathcal{C}^{\cdot}(V)) \cong \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(f^{-1}(V); \mathcal{F}, \mathcal{G})$, so daß $\mathcal{H}^q(\mathcal{C}^{\cdot}) \cong \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Aus der Spektralsequenz $R^q f_* \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ folgt die Kohärenz der relativen Extensionsgarben.

Sei $g: Y' \to Y$ ein Basiswechsel. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}'$ die offene Überdeckung $g'^{-1}(\mathfrak{U})$ von X'. Dann ist $\mathcal{L}'^{\cdot} = g'^*\mathcal{L}^{\cdot}$ eine freie Auflösung von $\mathcal{F}'$ bzgl. $\mathfrak{U}'$, denn es war f flach und $\mathcal{F}$ Y-flach. Mit Hilfe von $\mathcal{L}'^{\cdot}$ konstruiert man entsprechend den Komplex $\mathcal{C}'^{\cdot} = \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{L}'^{\cdot}, \mathcal{G}')$. Weil für jede steinsche, offene Menge $V' \subset Y'$ die Überdeckung $\mathfrak{U}' \cap f'^{-1}(V')$ steinsch ist, folgt $\mathcal{H}^{\cdot}(\mathcal{C}'^{\cdot}) \cong \mathcal{E}xt^{\cdot}_{\mathcal{O}_{X'}}(f'; \mathcal{F}', \mathcal{G}')$. Um $\mathcal{C}^{\cdot}$ und $\mathcal{C}'^{\cdot}$ zu vergleichen, braucht man ein topologisches Urbild von $\mathcal{C}^{\cdot}$. Man kann zu $\mathcal{O}_Y$-Fréchet-Moduln $\mathcal{D}$ das topologische Urbild $\mathcal{D} \hat{\bigotimes}_Y Y'$ definieren als die durch $V' \mapsto \mathcal{D}(Y) \hat{\bigotimes}_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(V')$ induzierte Garbe, wo das Tensorprodukt im Sinne von [10] gebildet wird. (Es war Y als steinsch vorausgesetzt worden.) Wir werden für unsere Zwecke direkt jedoch nur mit dem gewöhnlichen Tensorprodukt $\hat{\bigotimes}_{\mathbb{C}}$ arbeiten. (Dies scheint auch erforderlich zu sein, da auftretende Abbildingszylinder nicht nach rechts beschränkt sind.)

Sei $Y' \xrightarrow{i} Y \times Y' \xrightarrow{p} Y$ die Faktorisierung über den Graphen. Zunächst wird $\mathscr{D} \hat{\otimes} Y'$ auf $Y \times Y'$ durch die Prägarben $V \times V' \mapsto \mathscr{D}(V) \hat{\bigotimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V')$ definiert. Wir bezeichnen mit $\mathscr{D} \hat{\bigotimes}_{Y'} Y$ das gewöhnliche Urbild $i^*(\mathscr{D} \hat{\otimes} Y')$. Wir zeigen, daß in dieser Notation $\mathscr{C}'^{\cdot}$ und $\mathscr{C}^{\cdot} \hat{\bigotimes}_{Y'} Y$ kanonisch isomorph sind. Für jeden Simplex α hat man den Künneth-Isomorphismus

$$\Gamma((U_\alpha \cap f^{-1}(V)) \times V', \mathscr{G} \boxtimes \mathscr{O}_{Y'}) \cong \Gamma(U_\alpha \cap f^{-1}(V), \mathscr{G}) \hat{\bigotimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V').$$

Aus den Definitionen folgt somit leicht, daß $\mathscr{C}^{\cdot} \hat{\otimes} Y'$ kanonisch isomorph ist zu $\mathscr{C}^{\cdot}(p'^* \mathscr{L}^{\cdot}, p'^* \mathscr{G})$, wo $p': X \times Y' \to X$ die kanonische Projektion bezeichnet. Es folgt nun einfach, daß für den Basiswechsel i, der eine Einbettung ist, $i^*(\mathscr{C}^{\cdot}(p'^* \mathscr{L}^{\cdot}, p'^* \mathscr{G})) \cong \mathscr{C}'^{\cdot}$ gilt.

Zum Beweis von (i). Wir konstruieren zunächst $\mathscr{P}^{\cdot}$: Nach der asymptotischen Voraussetzung folgt mit (0.5), daß $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = 0$ für $q \geqq q_0$, so daß mit der Spektralsequenz aus (0.3) folgt, daß für ein q_1 gilt $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}) = 0$, $q \geqq q_1$. Insbesondere ist $\mathscr{H}^q(\mathscr{C}^{\cdot}) = 0$ für $q \geqq q_1$. Sei $y \in Y$ vorgegeben. Wie in [8, Chap. 0_{III}, 11.9] konstruiert man einfach induktiv von rechts nach links einen nach rechts beschränkten Komplex $\mathscr{P}^{\cdot}$ auf einer steinschen Umgebung V von y aus endlichen freien $\mathscr{O}_V$-Moduln zusammen mit einem Quasiisomorphismus $\mathscr{P}^{\cdot} \to \mathscr{C}^{\cdot}|V$. Sei ohne Einschränkung $\mathscr{P}^{\cdot} \to \mathscr{C}^{\cdot}$ auf Y definiert. Zu zeigen ist, daß die durch einen Basiswechsel $g: Y' \to Y$ induzierte Abbildung $\mathscr{P}^{\cdot} \hat{\bigotimes}_{Y} Y' \to \mathscr{C}^{\cdot} \hat{\bigotimes}_{Y} Y'$ ein Quasiisomorphismus ist, denn $\mathscr{P}^{\cdot} \hat{\bigotimes}_{Y} Y' \cong g^* \mathscr{P}^{\cdot}$ und $\mathscr{C}^{\cdot} \hat{\bigotimes}_{Y} Y' \cong \mathscr{C}'^{\cdot}$. Der Beweis geht folgendermaßen: Zunächst sind die Komponenten des Abbildungszylinders $\mathscr{K}^{\cdot}$ von $\mathscr{P}^{\cdot} \to \mathscr{C}^{\cdot}$ kohomologisch trivial auf steinschen Mengen $V \subset Y'$, denn es handelt sich um direkte Summen nullter Bildgarben von der Form $(f|U_\alpha \cap f^{-1}(V))_*(\mathscr{G}|U_\alpha \cap f^{-1}(V))$. Weil Y endlich dimensional ist, sind also die Zykeln $\mathscr{Z}^{\cdot}$ von $\mathscr{K}^{\cdot}$ kohomologisch triviale Garben, so daß man exakte Sequenzen

$$0 \to \mathscr{Z}^i(V) \to \mathscr{K}^i(V) \to \mathscr{Z}^{i+1}(V) \to 0$$

von Fréchet-Räumen hat. Durch Anwendung von $\hat{\bigotimes}_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(V')$ erhält man, daß $\mathscr{P}^{\cdot} \hat{\otimes} Y' \to \mathscr{C}^{\cdot} \hat{\otimes} Y'$ ein Quasiisomorphismus ist. Nach Definition von $\hat{\bigotimes}_{Y} Y'$ bleibt es zu zeigen, daß man hieraus durch Anwenden des gewöhnlichen Urbildes i^* einen Quasiisomorphismus erhält. Weil die asymptotische Voraussetzung in (i) nach dem Basiswechsel p erhalten bleibt, ist der Beweis geführt, wenn man folgendes zeigen kann: Ist Y' ein Unterraum von Y, so ist die Abbildung $\mathscr{P}^{\cdot} \bigotimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'} \to \mathscr{C}^{\cdot} \bigotimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$ ein Quasiisomorphismus. Wir zeigen allgemeiner, daß für auf offenen Teilmengen von Y definierte kohärente Moduln $\mathcal{M}$ stets der induzierte Morphismus $m:\mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\to\mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}$ ein Quasiisomorphismus ist.

Weil $\mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\cong\mathcal{C}^{\cdot}\left(\mathcal{L}^{\cdot},\mathcal{G}\bigotimes_{\mathcal{O}_X}f^*\mathcal{M}\right)$ ist, folgt zunächst

$$\mathcal{H}^{\cdot}\left(\mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\right)\cong\mathcal{E}xt^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}\left(f;\mathcal{F},\mathcal{G}\bigotimes_{\mathcal{O}_X}f^*\mathcal{M}\right).$$

Wir zeigen durch absteigende Induktion nach q, daß $\mathcal{H}^q(m)$ ein Isomorphismus ist. Aus der asymptotischen Voraussetzung, mit (0.5) und einem Spektralsequenzargument folgt die Existenz einer Zahl q_2, so daß für jeden kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}\left(f;\mathcal{F},\mathcal{G}\bigotimes_{\mathcal{O}_X}f^*\mathcal{M}\right)=0$ für $q\geqq q_2$, so daß die obige Behauptung für große q gilt. Der Induktionsschritt $q+1\to q$ geht so: Wir möchten zeigen, daß die Abbildung $\mathcal{H}^q\left(\mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\right)\to\mathcal{H}^q\left(\mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\right)$ ein Isomorphismus ist. Da dieses eine lokale Aussage ist, können wir annehmen, daß es eine exakte Sequenz $0\to\mathcal{N}\to\mathcal{O}_Y^r\to\mathcal{M}\to 0$ gibt. Man bekommt damit ein exaktes, kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y^r & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y^r & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M} & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

(Hier geht die Y-Flachheit von $\mathcal{G}$ ein.) Aus dem Diagram der langen exakten Kohomologiesequenz folgt mit dem Fünfer-Lemma aus der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

Zum Beweis von (ii). Wir definieren $\mathcal{P}^q=0$ für $q>n_0+\dim Y=n_1$. Da die $\mathcal{H}^{\cdot}(\mathcal{C}^{\cdot})\cong\mathcal{E}xt^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(f;\mathcal{F},\mathcal{G})$ kohärent sind, hat man in einer Umgebung V eines Punktes $y_0\in Y$ eine Surjektion $\mathcal{O}_V^r\to\mathcal{H}^{n_1}(\mathcal{C}^{\cdot})|V$.

Nach Verkleinerung von V kann man diese Surjektion über $\mathcal{Z}^{n_1}(\mathcal{C}^{\cdot})|V$ faktorisieren. Wir setzen $\mathcal{P}^{n_1}=\mathcal{O}_V^r$ und nehmen die Komposition dieser Faktorisierung mit der Inklusion $\mathcal{Z}^{n_1}(\mathcal{C}^{\cdot})|V\hookrightarrow\mathcal{C}^{n_1}|V$. Die restlichen $\mathcal{P}^q$ werden wie in [8, Chap. 0_{III}, 11.9] konstruiert. (Die Umgebungen V werden nur für $q\geqq 0$ verkleinert, danach betrachtet man eine kompakte steinsche Umgebung.) Man bekommt so einen Komplex ${}^{(n_0)}\mathcal{P}^{\cdot}$ zusammen mit einem Morphismus nach $\mathcal{C}^{\cdot}$, der für alle $q\leqq n_1$ einen Isomorphismus in der Kohomologie induziert. Ohne Einschränkung sei ${}^{(n_0)}\mathcal{P}^{\cdot}$ auf Y definiert. Durch Induktion nach der kohomologischen Dimension zeigt man mit dem Fünfer-Lemma, ähnlich wie am Schluß des Beweises von (i), daß die Abbildungen $\mathcal{H}^q\left({}^{(n_0)}\mathcal{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\right)\to\mathcal{H}^q\left(\mathcal{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{M}\right)$ für alle kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{M}$ und alle $q\leqq n_1-\mathrm{dh}\,\mathcal{M}$, insbesondere für $q\leqq n_0$ Isomorphismen sind. Wir zeigen die Behauptung des Satzes. Sei $g:Y'\to Y$ ein Basiswechsel. Da in der Faktorisierung $Y'\to Y'\times Y\to Y$ über den Graphen i.a. $Y'\times Y$ keine Mannigfaltigkeit mehr ist, kann man nicht wie in (i) vorgehen. Wir benutzen stattdessen den Vergleichssatz für relative Extensionsgarben aus Abschn. 2.

Man betrachtet $g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot)\cong{}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot \hat{\bigotimes}_Y Y' \to \mathscr{C}^\cdot \hat{\bigotimes}_Y Y' \cong \mathscr{C}'^\cdot$; diese Abbildung induziert in der Kohomologie Abbildungen $\alpha^q: \mathscr{H}^q(g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot)) \to \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X'}}(f'; \mathscr{F}', \mathscr{G}')$, und es ist zu zeigen, daß dieses für $q \leqq n_0$ Isomorphismen sind. Sei $y' \in Y'$ ein Punkt. Nach [8, Chap. III, Proposition 7.4.7] ist

$$\mathscr{H}^q(g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot))^\frown_{y'} \cong H^q(g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot)_{y'})^\frown$$
$$\cong \varprojlim_k H^q(g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot)_{y'}/\mathfrak{m}_{y'}^{k+1} g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot)_{y'}) .$$

Andererseits ist nach Satz 2(i)

$$\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X'}}(f'; \mathscr{F}', \mathscr{G}')^\frown_{y'} \cong \varprojlim_k \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X'_{y'}(k)}}(\mathscr{F}'^{(k)}_{y'}, \mathscr{G}'^{(k)}_{y'}) ,$$

wo $\hat{}$ die Komplettierung in der $\mathfrak{m}_{y'}$-adischen Topologie bezeichne. Aus diesen Tatsachen folgt leicht, daß man die Isomorphie nur für artinsche Räume Y' zu beweisen braucht. Da jetzt $g_*(\mathcal{O}_{Y'})$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul ist, wissen wir schon, daß die Abbildung ${}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot \bigotimes_{\mathcal{O}_Y} g_*(\mathcal{O}_{Y'}) \to \mathscr{C}^\cdot \bigotimes_{\mathcal{O}_Y} g_*(\mathcal{O}_{Y'})$ in der Kohomologie für $q \leqq n_0$ Isomorphismen induziert. Also liefert $g^*({}^{(no)}\mathscr{P}^\cdot) \to g^*(\mathscr{C}^\cdot)$ für $q \leqq n_0$ einen Isomorphismus der Kohomologie. Es bleibt zu zeigen, daß $g^*(\mathscr{C}^\cdot) \cong \mathscr{C}'^\cdot$ ist. Die Abbildung g wird faktorisiert über den einpunktigen Unterraum Y'' von Y, mit $\mathcal{O}_{Y''} = g_* \mathcal{O}_{Y'}$. Die Einschränkung von $\mathscr{C}^\cdot$ auf Unterräume von Y wurde schon behandelt; ohne Einschränkung sei also Y artinsch. Betrachtet man die Definition von $\mathscr{C}^\cdot$, so sieht man, daß die Isomorphie von $g^*(\mathscr{C}^\cdot)$ und $\mathscr{C}'^\cdot$ aus der nachstehenden Tatsache folgt: Sei

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagram, U' und U steinsch und Y', Y artinsch, $\mathscr{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul und $\mathscr{G}'$ das analytische Urbild davon. Dann ist $\Gamma(U', \mathscr{G}') \cong \Gamma(U, \mathscr{G}) \bigotimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$. (Das folgt z. B. einfach rein algebraisch, wenn man die Faktorisierung von $Y' \to Y$ über den Graphen betrachtet.)

(1.3) Wir möchten auch Komplexe von Garben betrachten; wir beschränken uns auf Komplexe im ersten Argument. Die auftretenden Ext-Objekte sind als Objekte in der derivierten Kategorie zu verstehen.

Zusatz. Die Aussagen (i) und (ii) bleiben richtig für nach rechts beschränkte Komplexe $\mathscr{F}^\cdot$ mit kohärenter Kohomologie, deren Komponenten auf steinschen Kompakta kohomologisch trivial und über Y flach sind, wenn man $\mathscr{F}'$ durch die Ableitung $\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^\cdot$ in der derivierten Kategorie ersetzt.

Beweis. Zunächst gibt es nach (0.4) eine offene steinsche Überdeckung $\mathfrak{U}$ und eine nach rechts beschränkte Auflösung $\mathscr{L}^\cdot$ von $\mathscr{F}^\cdot|\mathfrak{U}$ freier simplizialer Systeme bzgl. $\mathfrak{U}$. Wir zeigen, daß $g'^*(\mathscr{L}^\cdot)$ eine Auflösung von $(\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^\cdot)|\mathfrak{U}$ durch freie simpliziale Systeme ist. (Um die Schreibweise zu vereinfachen, identifizieren wir Objekte aus der derivierten Kategorie mit geeigneten Repräsentanten.) Dann geht der Beweis des Zusatzes genauso wie der Beweis des Satzes. Nach (0.2) ist $\hat{\mathscr{L}}^{\cdot} \to \mathscr{F}^{\cdot}$ eine Auflösung mit $\mathcal{O}_X$-flachen Moduln. Insbesondere ist $\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^{\cdot} = g'^*\hat{\mathscr{L}}$. Hat man allgemein ein simpliziales System $\mathscr{T}$ bzgl. $\mathfrak{U}$ und dessen Urbild $g'^*\mathscr{T}$, dann ist nach Definition $\widehat{(g'^*\mathscr{T})} \cong g'^*(\hat{\mathscr{T}})$; d.h. $\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^{\cdot} \cong \widehat{(g'^*\mathscr{L}^{\cdot})}$. Man hat eine natürliche Abbildung $\varphi: g'^*(\mathscr{L}^{\cdot}) \to \widehat{(g'^*\mathscr{L}^{\cdot})}|\mathfrak{U}$. Wir zeigen, daß dieses ein Quasiisomorphismus ist. Weil die Funktoren $\hat{}$ und $|\mathfrak{U}$ exakt sind, genügt es zu zeigen, daß die Kohomologie-Objekte des Komplexes $g'^*(\mathscr{L}^{\cdot})$ Garben auf X' sind, d.h. daß die Verbindungsmorphismen Isomorphismen sind. Seien $\alpha \subset \beta$ Simplices, dann liefern die Verbindungsmorphismen das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^{\cdot}_{\alpha}|U_{\beta} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}^{\cdot}|U_{\beta} \\ \mathscr{L}^{\cdot}_{\beta} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Die Behauptung folgt leicht aus der Betrachtung der Halme (denn g'^* ist halmweise definiert).

Bemerkung. Sind die Halme von $\mathscr{F}$ über $\mathcal{O}_X$ endlich erzeugt, so gilt $\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^{\cdot} \cong g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$.

Zum Beweis betrachtet man eine *flache* $\mathcal{O}_X$-Auflösung $\mathscr{Q}^{\cdot} \to \mathscr{F}^{\cdot}$ mit noetherschen Halmen (z.B. $\hat{\mathscr{L}}^{\cdot}$). Dann ist $\mathbf{L}g'^*\mathscr{F}^{\cdot} = g'^*\mathscr{Q}^{\cdot}$. Zu zeigen ist, daß $g'^*\mathscr{Q}^{\cdot} \to g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$ ein Quasiisomorphismus ist. Dies ist offensichtlich, falls g flach ist, darüber hinaus bleiben die Halme der Komponenten $g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$ und $g'^*\mathscr{Q}^{\cdot}$ flach über Y' [16, Exp. No. 13]. Für eine Einbettung g' ist offensichtlich $g'^*\mathscr{Q}^{\cdot} \to g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$ ein Quasiisomorphismus und der allgemeine Fall wird durch Faktorisierung über den Graphen gelöst.

Folgerung. Für einen nach rechts beschränkten Komplex $\mathscr{F}^{\cdot}$ mit kohärenter Kohomologie, dessen Komponenten Y-flach, bzgl. steinscher Kompakta azyklisch und dessen Halme noethersch sind, gelten die Aussagen (i) und (ii) des Satzes.

Der Kotangentenkomplex erfüllt die Voraussetzungen der Folgerung.

(1.4) *Bemerkung.* Aus dem Beweis des Satzes 1 folgt:

(i) $\mathscr{H}^q\left(\mathscr{P}^{\cdot} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathscr{M}\right) \cong \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}\left(f; \mathscr{F}, \mathscr{G} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} f^*\mathscr{M}\right)$ für kohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathscr{M}$, und die entsprechende Aussage gilt für die Komplexe ${}^{(n)}\mathscr{P}^{\cdot}$.

(ii) Für beliebige Räume Y gibt es lokal Komplexe ${}^{(n)}\mathscr{P}^{\cdot}$, die auf Y_{reg} die Eigenschaften wie oben und wie in Satz 1(ii) haben.

(iii) Sei Y ein komplexer Raum und $\mathscr{C}^{\cdot}$ ein nicht notwendig nach rechts beschränkter Komplex von flachen $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Für jede offene Teilmenge V von Y und jede kohärente Garbe $\mathscr{M}$ auf V sei $T^q(\mathscr{M}) = \mathscr{H}^q\left(\mathscr{C}^{\cdot} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathscr{M}\right)$ ein kohärenter $\mathcal{O}_V$-Modul. Dieses ist eine Familie von δ-Funktoren, und man findet ähnlich wie im Beweis von Satz 1(ii) zu vorgegebenen Zahlen $m<n$ lokal auf Y Komplexe ${}^{(m,n)}\mathscr{P}^{\cdot}$, so daß $T^q(\mathscr{M}) = \mathscr{H}^q\left({}^{(m,n)}\mathscr{P}^{\cdot} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathscr{M}\right)$ für $m \leqq q \leqq n$ und jede kohärente Garbe $\mathscr{M}$ auf einer offenen Teilmenge von Y_{reg}. Trägt $\mathscr{C}^{\cdot}$ eine gute Topologie und erfüllt

$\mathscr{C}^{\cdot}$ Azyklizitätseigenschaften (z. B. ist $\mathscr{C}^{\cdot}$ ein Komplex von Fréchet-Garben und sind die Komponenten azyklisch auf offenen steinschen Mengen von Y), dann gilt auch $T^q(\mathcal{O}_{Y'}) \cong \mathscr{H}^q((g'^{*(m,n)}\mathscr{P}^{\cdot}))$ für $m \leqq q \leqq n$ und jeden Basiswechsel $Y' \to Y_{\mathrm{reg}}$, wo $T^{\cdot}$ auf Y' mit Hilfe des topologischen Urbilds von $\mathscr{C}^{\cdot}$ definiert sei. Mit Hilfe dieser Methoden lassen sich die Beweise aus [6, 8] übertragen, und man erhält Ergebnisse über die Funktoren T^q, insbesondere über die Funktion $y \mapsto \dim T^q(\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ (vgl. Abschn. 2 für Ext-Invarianten).

Die Bemerkungen (i) und (ii) gelten entsprechend für Komplexe $\mathscr{F}^{\cdot}$.

2. Eigenschaften relativer Extensionsgarben

(2.1) Dieser Paragraph behandelt die Variation globaler Ext-Moduln in einer Deformation komplexer Räume in Analogie zur Variation der Kohomologie. Wir benutzen die Bezeichnungen aus Abschn. 1, alle Abbildungen zwischen Ext-Invarianten sind auf natürliche Weise definiert (vgl. Abschn. 0).

(2.2) **Satz 2.** *Sei $f: X \to Y$ eine flache, eigentliche Abbildung komplexer Räume und $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, $\mathscr{F}$ sei Y-flach. Sei $y \in Y$ ein Punkt und q eine Zahl.*

(i) *(Vergleichssatz). Für die Komplettierung bzgl. $\mathfrak{m}_y$ gilt*

$$\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})^{\wedge}_y \cong \varprojlim_n \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y^{(n)}}}(\mathscr{F}_y^{(n)}, \mathscr{G}_y^{(n)}).$$

(ii) *(Basiswechsel). Für einen Morphismus $g: Y' \to Y$ seien*

$$\varepsilon^i(g): g^*(\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_{X'}}(f'; \mathscr{F}', \mathscr{G}')$$

die Basiswechselmorphismen. Es sind die $\varepsilon^i(g)$ Isomorphismen für jede Abbildung g in einer Umgebung von $g^{-1}(y)$ für $i = q$ (bzw. für $i = q, q-1$) genau dann, wenn die Abbildung

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})_y \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$$

für $i = q$ surjektiv ist (bzw. $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f, \mathscr{F}, \mathscr{G})_y$ zusätzlich frei ist). Ist darüber hinaus die asymptotische Voraussetzung von Satz 1 erfüllt oder Y regulär, dann ist die Menge aller y, in denen die obige Behauptung gilt, in Y Zariski-offen.

Zusatz. Die Aussagen gelten auch für Komplexe $\mathscr{F}^{\cdot}$ wie in (1.2), wenn man wie oben $\mathscr{F}_y^{(n)}$ und $\mathscr{F}'$ durch $\mathscr{F}^{\cdot} \underline{\otimes}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y^{n+1})$ bzw. $\mathbf{L}^{\cdot}g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$ ersetzt. Ist $\mathscr{F}^{\cdot}$ ein Komplex wie in der Bemerkung von (1.2), kann man wieder $\mathscr{F}^{\cdot}_y/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathscr{F}^{\cdot}$ bzw. $g'^*\mathscr{F}^{\cdot}$ schreiben.

Beweis von (i). Für jedes kohärente Ideal $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_Y$ sind die relativen Ext-Garben von $\mathscr{F}/\mathscr{I} \cdot \mathscr{F}$ und $\mathscr{G}/\mathscr{I} \cdot \mathscr{G}$ isomorph zu den $\mathscr{E}xt^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}/\mathscr{I} \cdot \mathscr{G})$. Das wurde schon in Abschn. 1 mit einer Auflösung $\mathscr{L}^{\cdot}$ von $\mathscr{F}$ gezeigt und dem zugehörigen Komplex $\mathscr{C}^{\cdot}$. [Es folgt auch direkt mit injektiven Auflösungen wie in (0.3).] Die Isomorphismen sind funktoriell in $\mathscr{I}$, deshalb ist die Isomorphie

$$\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})^{\wedge}_y \cong \varprojlim_n \mathscr{E}xt^q(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}/\mathfrak{m}_y^{n+1}\mathscr{G})_y$$

zu zeigen. Die letztere Behauptung gilt im übrigen ohne Flachheitsvoraussetzungen. Sie folgt wörtlich genauso wie der Beweis für den Vergleichssatz für Bildgarben ([6, 11], vgl. auch [1, S. 128]).

Die Behauptung (ii) folgt mit Hilfe von (i) und Satz 1 (für die letzte Behauptung) genauso wie für Bildgarben ([8, Chap. III], vgl. auch [1, Chap. 3, Théorèmes 3.4, 4.7]). Falls schon ein universeller Komplex $\mathscr{P}^\cdot$ wie in Abschn. 1 existiert, kann man zum Beweis von Satz 2 ein Argument aus [8, Chap. III, Sect. 7.4] benutzen. Für den folgenden Satz benötigen wir wesentlich Satz 1.

Satz 3. *Sei $f: X \to Y$ eine flache, eigentliche Abbildung komplexer Räume und $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, flach über Y.*

(i) *(Halbstetigkeit). Die Mengen*

$$\{y \in Y; \dim \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y) \leqq n\}$$

sind für alle q und n in Y Zariski-offen.

(ii) *(Stetigkeit). Ist entweder Y reduziert und die asymptotische Voraussetzung aus Satz 1 erfüllt oder Y regulär, dann gilt:*

Ist die Funktion $y \mapsto \dim \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$ für ein q konstant, so ist $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ lokal frei und für jedes $y \in Y$ ist

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})_y \underset{\mathcal{O}_y}{\otimes} (\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y) \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y) \quad \text{für} \quad i = q-1, q.$$

(iii) *(Invarianz der Euler-Poincaré-Charakteristik). Sei $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y) = 0$ für alle y und $i \geqq i_0$. Dann ist die Funktion*

$$y \mapsto \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$$

lokal konstant.

Zusatz. Analoge Aussagen gelten für Komplexe $\mathscr{F}^\cdot$.

Beweis von (i). Ist Y eine Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Satz 1(ii) lokal auf Y Komplexe ${}^{(n)}\mathscr{P}^\cdot$, so daß

$$H^q({}^{(n)}\mathscr{P}^\cdot/\mathfrak{m}_y{}^{(n)}\mathscr{P}^\cdot) \cong \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y) \quad \text{für} \quad q \leqq n.$$

Die Behauptung folgt daraus unmittelbar (z. B. [1, Chap. III, Proposition 1.7]).

Der allgemeine Fall folgt mit Hilfe einer Auflösung der Singularitäten in einer Umgebung von y und dem Projektionssatz von Remmert. (Für Komplexe $\mathscr{F}^\cdot$ erinnern wir daran, daß $g'^*\mathscr{L}^\cdot$ eine Auflösung von $Lg'^*\mathscr{F}^\cdot$ bzgl. $\mathfrak{U}'$ ist, wo g die Auflösung der Singularitäten ist.) Um eine Auflösung der Singularitäten zu umgehen, kann man das ursprüngliche Argument von Grauert für die Halbstetigkeit der Kohomologie [6, Abschn. 7, Beweis von Satz 3] benutzen und den Beweis durch Induktion über dim Y führen: Für $\dim Y = 1$ benötigt man nur die Normalisierung, und ansonsten zeigt man die Existenz einer Zariski-offenen, dichten Teilmenge von Y, auf der $\dim \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$ konstant ist. Dies folgt aus Bemerkung (1.4) (i): Eine solche Menge ist etwa die Menge der regulären Punkte, in denen $\operatorname{Coker}({}^{(n)}\mathscr{P}^{q-1} \to {}^{(n)}\mathscr{P}^q)$ und $\operatorname{Coker}({}^{(n)}\mathscr{P}^q \to {}^{(n)}\mathscr{P}^{q+1})$ frei sind (vgl. [1, Chap. III, Theorem 4.7]).

Die Aussage (ii) folgt aus Satz 1 wie für Bildgarben.

Beweis von (iii). Weil $\mathscr{G}$ Y-flach ist, gilt $\mathfrak{m}_y^k\mathscr{G}/\mathfrak{m}_y^{k+1}\mathscr{G}\cong(\mathfrak{m}_y^k/\mathfrak{m}_y^{k+1})\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}$. Durch Induktion folgt, daß $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}_y^{(k)},\mathscr{G}_y^{(k)})=0$ für alle k und $i\geqq i_0$, also nach dem Vergleichssatz $\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})=0$ für $i\geqq i_0$. Wie im Beweis von Satz 1(i) konstruiert man (lokal auf Y) einen nach rechts beschränkten Komplex $\mathscr{P}^{\cdot}$ endlicher, freier $\mathcal{O}_Y$-Moduln zusammen mit einem Quasiisomorphismus $\mathscr{P}^{\cdot}\to\mathscr{C}^{\cdot}$, derart, daß für jeden kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathscr{M}$ der Morphismus

$$\mathscr{P}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{M}\to\mathscr{C}^{\cdot}\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{M}\cong\mathscr{C}^{\cdot}\left(\mathscr{L}^{\cdot},\mathscr{G}\bigotimes_{\mathcal{O}_X}f^*\mathscr{M}\right)$$

Ein Quasiisomorphismus bleibt. Insbesondere hat man $\mathscr{H}^q(\mathscr{P}^{\cdot}/\mathfrak{m}_y\mathscr{P}^{\cdot})\cong\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y,\mathscr{G}_y)$ für $y\in Y$ und alle q. Es folgt leicht mit dem Lemma von Nakayama, daß $\mathrm{Coker}\,(\mathscr{P}^{-(n+1)}\to\mathscr{P}^{-n})$ für $n\geqq 0$ lokal frei ist und man $\mathscr{P}^{\cdot}$ als auch nach links beschränkt konstruieren kann. Die Behauptung folgt jetzt aus [1, Chap. III, Proposition 1.7(iii)].

3. Anwendungen

(3.1) Wir beginnen mit einer Bemerkung über die asymptotische Voraussetzung aus Satz 1. Mit den dort benutzten Notationen gilt für die kohomologische Dimension $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F}=\sup_y \mathrm{dh}_{\mathcal{O}_{X_y}}\mathscr{F}_y$. Damit ist die asymptotische Voraussetzung erfüllt, wenn $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F}$ oder alle $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_{X_y}}\mathscr{F}_y$ endlich sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn X oder die Fasern X_y regulär sind. Die asymptotische Voraussetzung gilt auch, wenn die Fasern X_y gorensteinsch sind und $\mathscr{G}$ lokal frei ist.

Falls $\mathscr{F}$ eine endliche Auflösung durch endliche lokal freie Garben besitzt, erhält man die Ergebnisse über Ext-Invarianten direkt mit Bildgarben von Komplexen.

(3.2) Wir geben einige Folgerungen an, die sich bekanntlich für lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}$ zeigen lassen. (In diesem Fall sind die Ext-Invarianten Kohomologie-Invarianten.)

Es sei im folgenden stets $f:X\to Y$ eine flache, eigentliche Abbildung und $\mathscr{F}$ ein Y-flacher, kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

Korollar 1. *Ist $\mathscr{G}$ Y-flach und $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y,\mathscr{G}_y)=0$, dann gibt es eine Zariski-offene Umgebung V von y, so daß $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})|V=0$, und für jeden Punkt $z\in V$ ist $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_z}}(\mathscr{F}_z,\mathscr{G}_z)=0$ und*

$$\mathscr{E}xt^{q-1}_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})_z/\mathfrak{m}_z\mathscr{E}xt^{q-1}_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})\cong\mathrm{Ext}^{q-1}_{\mathcal{O}_{X_z}}(\mathscr{F}_z,\mathscr{G}_z).$$

Beweis. Nach dem Halbstetigkeitssatz gibt es eine Zariski-offene Umgebung V, so daß für jedes $z\in V$ gilt $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_z}}(\mathscr{F}_z,\mathscr{G}_z)=0$. Es genügt nach Satz 2 (ii) zu zeigen, daß $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})_z=0$ ist. Es sind die $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_z^{(n)}}}(\mathscr{F}_z^{(n)},\mathscr{G}_z^{(n)})$ und $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G}/\mathfrak{m}_z^{n+1}\mathscr{G})_z$ isomorph, weil f flach und $\mathscr{F}$ Y-flach ist. Wegen der Y-Flachheit von $\mathscr{G}$ ist $\mathfrak{m}_z^n\mathscr{G}/\mathfrak{m}_z^{n+1}\mathscr{G}\cong(\mathfrak{m}_z^n/\mathfrak{m}_z^{n+1})\bigotimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}$; durch Induktion $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_z^{(n)}}}(\mathscr{F}_z^{(n)},\mathscr{G}_z^{(n)})=0$ und die Behauptung folgt aus dem Vergleichssatz.

Korollar 2. *Ist $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{F}_y,\mathscr{G}_y)=0$ und $\mathscr{F}_y\cong\mathscr{G}_y$, dann sind $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in einer Umgebung von $f^{-1}(y)$ isomorph.*

Beweis. Nach Korollar 1 kommt ein Isomorphismus $\mathcal{F}_y \cong \mathcal{G}_y$ her von einem Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definiert auf einer Umgebung von $f^{-1}(y)$. Die Behauptung folgt mit dem Lemma von Nakayama und Flachheitsvoraussetzungen.

Korollar 3. *Sei eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$ kohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln gegeben (und $\mathcal{F}$ wie stets in diesem Paragraphen flach). Die Sequenz spaltet in einer Umgebung von $f^{-1}(y)$, wenn für alle n die Sequenz $0 \to \mathcal{G}_y^{(n)} \to \mathcal{H}_y^{(n)} \to \mathcal{F}_y^{(n)} \to 0$ spaltet.*

Beweis. Die gegebene Sequenz induziert ein Element aus $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y$, und die Behauptung folgt aus dem Vergleichssatz.

Korollar 4. *Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$, jeden Punkt y und jede Zahl q gibt es eine Zahl $n = n(y, q, \mathcal{F}, \mathcal{G})$, so daß*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}(\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y \to \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y))\\ &\quad = \operatorname{Im}(\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y^{(n)}}}(\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)}) \to \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y))\end{aligned}$$

ist.

Beweis. Da die Räume $E^{(k)} = \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X_y^{(k)}}}(\mathcal{F}_y^{(k)}, \mathcal{G}_y^{(k)})$ endlich dimensional sind, gibt es eine Zahl n, so daß

$$\operatorname{Im}\left(\varprojlim_k E^{(k)} \to E^{(0)}\right) = \operatorname{Im}(E^{(n)} \to E^{(0)})$$

ist, und man benutzt den Vergleichssatz.

Korollar 5. *Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ flach über Y. Zusätzlich sei entweder Y reduziert und $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_y) = 0$ für $q \geqslant 0$ oder Y regulär.*

(i) *Ist die Funktion $y \mapsto \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ konstant, so ist die Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F} | f^{-1}(y), \mathcal{G} | f^{-1}(y)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$$

surjektiv.

(ii) *Ist die Funktion $y \mapsto \dim \operatorname{End}(\mathcal{F}_y)$ konstant und $\mathcal{F}_y \cong \mathcal{G}_y$ für jedes y, so sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal bzgl. Y isomorph.*

Der Beweis folgt aus dem Stetigkeitssatz [Satz 3(ii)].

(3.3) In [13] definiert Palamodov allgemeine Invarianten für Deformationen komplexer Räume. Die Theorie dieser Invarianten wurde in [2, 3] weitergeführt, um diese als Hyper-Ext-Invarianten zu erhalten. Obwohl man im Beweis von Satz 1 anstatt von $\mathcal{C}^\cdot$ direkt den entsprechenden Komplex von Palamodov betrachten könnte, benutzen wir den Formalismus von [2, 3], um die folgenden Ergebnisse als Spezialfälle unserer Sätze aus Abschn. 1 und 2 zu erhalten.

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung komplexer Räume endlicher Dimension. Dann gibt es den Kotangentenkomplex $L^\cdot_{X/Y}$. Dieses ist ein Objekt in der abgeleiteten Kategorie und geeignete Repräsentanten sind nach rechts beschränkte Komplexe von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit kohärenter Kohomologie, so daß die Halme der Komponenten noethersch und die Komponenten auf steinschen Kompakta kohomologisch trivial sind. Ist f flach, dann sind die Komponenten von $L^\cdot_{X/Y}$ flach über Y und für jeden Basiswechsel g gilt $g'^{*}L^{\cdot}_{X/Y} \cong L^{\cdot}_{X'/Y'}$. Für einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ definiert man:

$$T^i(X/Y,\mathcal{G}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(L^{\cdot}_{X/Y},\mathcal{G})$$
$$\mathcal{T}^i(X/Y,\mathcal{G}) = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(L^{\cdot}_{X/Y},\mathcal{G}).$$

Ist Y der reduzierte Punkt, dann bezeichnet man die Invarianten mit $T^i(X,\mathcal{G})$ und $\mathcal{T}^i(X,\mathcal{G})$. Man definiert noch die $\mathcal{O}_Y$-Moduln

$$\mathcal{T}^i(f,\mathcal{G}) = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(f; L^{\cdot}_{X/Y},\mathcal{G}).$$

(In [13] werden diese für $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$ mit $\tilde{T}^i(X/Y)$ bezeichnet.) Es ist $T^0(X,\mathcal{G}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})$, und $T^1(X,\mathcal{G}) = \mathrm{Ex}\,(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})$ ist die Gruppe der analytischen Erweiterungen von $\mathcal{O}_X$ durch $\mathcal{G}$ [15]. Die lokalen Invarianten $\mathcal{T}^0$ und $\mathcal{T}^1$ entsprechen den Garben $\mathcal{D}er$ und $\mathcal{E}x$. Ähnliche Interpretationen hat man für die relativen Invarianten. Sei jetzt $f: X \to Y$ eine eigentliche, flache Abbildung und $\mathcal{G}$ ein kohärenter, Y-flacher $\mathcal{O}_X$-Modul. Aus den Abschnitten 1 u. 2 folgt nun

$$-\ \mathcal{T}^i(f,\mathcal{G})^{\hat{}}_y = \varprojlim_n T^i(X^{(n)}_y,\mathcal{G}^{(n)}_y)$$

(ohne Flachheit von $\mathcal{G}$);

– die Basiswechselmorphismen

$$\varepsilon^i(g): g^*\mathcal{T}^i(f,\mathcal{G}) \to \mathcal{T}^i(f',\mathcal{G}')$$

sind Isomorphismen für jedes g in einer Umgebung von $f^{-1}(y)$ für $i=0$ (bzw. $i=q, q-1$) genau dann, wenn die Abbildung $\mathcal{T}^i(f,\mathcal{G})_y \to T^i(X_y,\mathcal{G}_y)$ surjektiv ist [bzw. zusätzlich $\mathcal{T}^q(f,\mathcal{G})_y$ frei ist]. Ist darüber hinaus Y regulär oder $\mathcal{T}^q(X_y,\mathcal{G}_y)=0$ für große q, dann ist die Menge aller y, in denen die obige Behauptung erfüllt ist, in Y Zariski-offen;

– die Mengen $\{y \in Y; \dim T^q(X_y,\mathcal{G}_y) \leq n\}$

sind in Y Zariski-offen. Ist $T^i(X_y,\mathcal{G}_y)=0$ für $i \gg 0$ und alle y [z.B. falls $\mathcal{T}^i(X_y,\mathcal{G}_y)=0$], dann ist die Funktion

$$y \mapsto \sum_i (-1)^i \dim T^i(X_y,\mathcal{G}_y)$$

lokal konstant.

Diese Aussage wurde für $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$ in [13] gezeigt. Der Beweis dort stützt sich auf die Spaltung des Tangentenkomplexes eines kompakten Raumes in einer gewissen Kategorie topologischer Vektorräume [13, Satz 3.1]. (Der Tangentenkomplex bei Palamodov ist ein Komplex von Vektorräumen, dessen Kohomologie gleich $T^{\cdot}$ ist.) Auch die anderen Behauptungen von [13, Theorems 4.4 u. 4.5] folgen direkt aus den Resultaten von Abschn. 1 u. 2;

– sei entweder Y reduziert und $\mathcal{T}^i(X_y,\mathcal{G}_y)=0$ für $i \gg 0$ und alle y oder Y eine Mannigfaltigkeit. Ist für ein q die Funktion $y \mapsto \dim T^q(X_y,\mathcal{G}_y)$ konstant, so ist die Garbe $\mathcal{T}^q(f,\mathcal{G})$ lokal frei und für jedes y gilt

$$\mathcal{T}^i(f,\mathcal{G})_y \bigotimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y/\mathrm{m}_y) \cong T^i(X_y,\mathcal{G}_y) \quad \text{für} \quad i=q, \quad q-1.$$

Entsprechend zu den Korollaren 3 und 4 gilt (ohne Flachheit von $\mathscr{G}$):

Korollar 6. *Eine analytische Erweiterung*

$$0\to\mathscr{G}\to\mathscr{A}\to\mathcal{O}_X\to 0$$

über Y ist bereits dann in einer Umgebung von $f^{-1}(y)$ trivial, wenn sie formal trivial ist, d. h. wenn die Erweiterungen

$$0\to\mathscr{G}_y^{(n)}\to\mathscr{A}_y^{(n)}\to\mathcal{O}_{X_y^{(n)}}\to 0$$

trivial sind.

Korollar 7. *Es gibt eine Zahl $n=n(y,\mathscr{G})$, so daß*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}(\operatorname{Der}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X|f^{-1}(y),\mathscr{G}|f^{-1}(y))\to\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_y},\mathscr{G}_y))\\ &\quad=\operatorname{Im}(\operatorname{Der}_{\mathcal{O}_{Y_y^{(n)}}}(\mathcal{O}_{X_y^{(n)}},\mathscr{G}_y^{(n)})\to\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_y},\mathscr{G}_y))\end{aligned}$$

ist. Die entsprechende Aussage gilt für die Moduln Ex *analytischer Erweiterungen.*

Korollar 8. *Sei entweder Y eine Mannigfaltigkeit oder Y reduziert und $\mathscr{T}^i(X_y,\mathscr{G}_y)=0$ für $i\gg 0$. Ist die Funktion $y\mapsto\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_y},\mathscr{G}_y)$ konstant, dann ist $f_*(\mathscr{D}er_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X,\mathscr{G}))$ lokal frei und*

$$\operatorname{Der}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X|\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}),\mathscr{G}|\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}))\bigotimes_{\mathcal{O}_y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y)\cong\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_y},\mathscr{G}_y).$$

Ähnliche Aussagen gelten für analytische Erweiterungen.

4. Bemerkungen

(4.1) Es sei $(X_0,\mathcal{O}_{X_0})$ ein kompakter, komplexer Raum und $\mathscr{F}_0,\mathscr{G}_0$ kohärente $\mathcal{O}_{X_0}$-Moduln. Sei

$$E_0:0\to\mathscr{G}_0\to\mathscr{H}_0\to\mathscr{F}_0\to 0$$

eine Erweiterung und $[E_0]\in\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_0,\mathscr{G}_0)$ das zugehörige Element.

Sei (S,s_0) ein analytischer Raumkeim. Unter einer Deformation von $[E_0]$ über (S,s_0) verstehen wir eine Deformation $f:X\to S$ von X_0, ein Paar S-flacher, kohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathscr{F},\mathscr{G}$ zusammen mit Isomorphismen $\mathscr{F}_{s_0}\cong\mathscr{F}_0,\mathscr{G}_{s_0}\cong\mathscr{G}_0$ und ein Element $[E]\in\mathscr{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})_{s_0}$, das (vermöge der obigen Isomorphien) durch den Basiswechselmorphismus auf $[E_0]$ abgebildet werde. Man identifiziert auf kanonische Weise Deformationen von $[E_0]$. Sei $D(S)$ die Menge der Isomorphieklassen. Ein Morphismus $T\to S$ induziert eine Abbildung $D(S)\to D(T)$. Man erhält so einen Funktor, der die Schlessinger-Bedingungen erfüllt. Eine Extension $[E_0]$ besitzt stets eine verselle Deformation. Die Existenz einer vollständigen Deformation zeigt man mit denselben Methoden wie [3, Theoreme 8.5 u. 8.6]:

Es induziert das Element E_0 eine Abbildung $X_0[\mathscr{F}_0]\to X_0[\mathscr{H}_0]$ der trivialen Erweiterungen des Raumes X_0 durch $\mathscr{F}_0$ bzw. $\mathscr{H}_0$. Sei $Y_0=X_0[\mathscr{F}_0]$ und $Z_0=X_0[\mathscr{H}_0]$. Seien ferner $X_0\to Y_0$ und $X_0\to Z_0$ die kanonischen Injektionen, sowie $Y_0\to X_0$ und $Z_0\to X_0$ die kanonischen Projektionen. Unter einer Deformation des

Diagramms

$$d_0:\quad \begin{tikzcd} & Y_0 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_0 \arrow[dl] \\ & Z_0 & \end{tikzcd}$$

über einem Raumkeim (S, s_0) versteht man ein kommutatives Diagramm

$$d:\quad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ & Z \arrow[d] & \\ & S & \end{tikzcd}$$

derart, daß alle Abbildungen nach S flach und eigentlich sind, die Abbildung $X \to X$ die Identität ist und der Basiswechsel (bis auf Isomorphie) das Diagramm d_0 liefert. Man zeigt zuerst die Existenz eines vollständigen Objektes. Unter diesen Objekten sind die Diagramme von der Form

$$\tilde{d}:\quad \begin{tikzcd} & X[\mathscr{F}] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ & X[\mathscr{H}] \arrow[d] & \\ & S & \end{tikzcd}$$

durch $\mathscr{I}_1^2 = 0, \mathscr{I}_2^2 = 0$ gekennzeichnet, wenn $\mathscr{I}_1$ und $\mathscr{I}_2$ die zu X gehörigen Ideale in $\mathcal{O}_Y$ bzw. $\mathcal{O}_Z$ bezeichnen. Es folgt die Existenz eines vollständigen Objektes für Deformationen der spezielleren Form. Aus Flachheitsgründen und mit dem Lemma von Nakayama folgt, daß Erweiterungen

$$E: 0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to \mathscr{F} \to 0$$

die Deformationen von $[E_0]$ induzieren, genau den Diagrammen $\tilde{d}$ entsprechen. Aus der Existenz einer vollständigen Deformation von $[E_0]$ folgt mit [3, Theorem 8.1] die Existenz einer versellen Deformation.

(4.2) Ist X ein komplexer Raum endlicher Dimension und sind $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln, dann sind die globalen Invarianten $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ als $H^{-i}\mathbf{R}\Gamma(\mathscr{F} \underline{\underline{\otimes}} \mathscr{G})$ definiert [9]. Für eine Abbildung $f: X \to Y$ komplexer Räume endlicher Dimension bezeichnet man mit $\mathscr{T}\!or_i^{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ die durch die Prägarbe $V \mapsto \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(f^{-1}(V); \mathscr{F}, \mathscr{G})$ induzierte Garbe auf Y. Es gilt $\mathscr{T}\!or_i^{\mathcal{O}_X}(f; \mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathbf{R}^{-i} f_* (\mathscr{F} \underline{\underline{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})$.

Satz 4. *Sei $f:X\to Y$ eine eigentliche flache Abbildung komplexer Räume und $\mathscr{F},\mathscr{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, flach über Y. Dann gibt es lokal auf Y einen nach rechts beschränkten Komplex $\mathscr{P}^\cdot$ endlicher freier $\mathcal{O}_Y$-Moduln, so daß für jeden Basiswechsel $g:Y'\to Y$ gilt:*

$$\mathscr{T}\!or_i^{\mathcal{O}_{X'}}(f';\mathscr{F}',\mathscr{G}')\cong\mathscr{H}^{-i}(g^*(\mathscr{P}^\cdot))$$

für alle i.

Nach Definition von $\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{G}$ folgt, daß Satz 4 im wesentlichen ein spezieller Fall eines Satzes über Bildgarben von nach rechts beschränkten Komplexen mit kohärenter Kohomologie ist, deren Komponenten Y-flach sind. Es folgt nämlich die Existenz von Komplexen $_{(n)}\mathscr{P}^\cdot$, die die gewünschten Isomorphismen für $i\leqq n$ liefern. Es sei jedoch einiges gesagt über die Berechnung der globalen Tor-Invarianten kohärenter Garben und ein Beweis von Satz 4 ohne Benutzung der abgeleiteten Kategorie gegeben.

Es seien nun $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ wie oben gegeben oder Komplexe wie in Abschn. 0. Sei nun $\mathfrak{U}$ eine offene, steinsche Überdeckung von X, so daß $\mathscr{F}|\mathfrak{U}$ eine Auflösung $\mathscr{L}^\cdot$ durch freie simpliziale Systeme bzgl. $\mathfrak{U}$ besitzt. Sei $C^{p,q}=C^p(\mathscr{L}^q\otimes(\mathscr{G}|\mathfrak{U}))$. Es wird dies durch das Cech-Differential und das Differential von $\mathscr{L}^\cdot$ zu einem Doppelkomplex, und es sei $C^\cdot=C^\cdot(\mathscr{L}^\cdot,\mathscr{G})$ der zugehörige Einfachkomplex. Die Kohomologie hängt nicht von der Wahl von $\mathscr{L}^\cdot$ ab, denn zwei solche Auflösungen sind homotop, sie werde mit $\mathrm{Tor}.(\mathfrak{U};\mathscr{F},\mathscr{G})$ bezeichnet. Ist $\mathscr{P}^\cdot$ eine quasi freie Auflösung von $\mathscr{F}|\mathfrak{U}$, dann gibt es einen Morphismus $\mathscr{L}^\cdot\to\mathscr{P}^\cdot$ von Auflösungen von $\mathscr{F}|\mathfrak{U}$, der einen Morphismus der zugehörigen Doppelkomplexe induziert. Die Abbildung der Spektralsequenzen ist auf dem zweiten Niveau ein Isomorphismus; beide $E_2^{p,q}$-Terme sind zu $H^p(X,\mathscr{T}\!or_{-q}^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}))$ isomorph, so daß man $\mathrm{Tor}.(\mathfrak{U};\mathscr{F},\mathscr{G})$ auch mit quasi freien Auflösungen berechnen kann. Ist nun $\mathfrak{B}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, so ist $\mathscr{P}^\cdot|\mathfrak{B}$ noch quasi freie Auflösung von $\mathscr{F}|\mathfrak{B}$. Mit einem ähnlichen Spektralsequenzargument folgt, daß die $\mathrm{Tor}_q(\mathfrak{U};\mathscr{F},\mathscr{G})\to\mathrm{Tor}_q(\mathfrak{B};\mathscr{F},\mathscr{G})$ Isomorphismen sind. Also erhält man auf diese Weise ohne Benutzung der abgeleiteten Kategorie globale Tor-Invarianten. Da $\hat{\mathscr{L}}^\cdot$ eine flache Auflösung von $\mathscr{F}$ darstellt, folgt mit einem Spektralsequenzargument, daß dieses die bekannten Objekte sind. Die $\mathrm{Tor}_\cdot^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ sind funktoriell in $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ und für kurze exakte Sequenzen erhält man zugehörige lange exakte Sequenzen. Im allgemeinen sind endlich viele „negative“ $\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ von null verschieden aufgrund des kontravarianten Anteils der Globalisierung. Wie gesagt hat man eine Spektralsequenz $E_2^{p,q}=H^p(X,\mathscr{T}\!or_{-q}^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}))$, die gegen $\mathrm{Tor}_{-p-q}^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ konvergiert. Insbesondere sind die $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ endlich dimensional, wenn X kompakt ist.

Sei nun $f:X\to Y$ zusätzlich eine Abbildung komplexer Räume endlicher Dimension und $\mathfrak{U}$ eine offene, steinsche Überdeckung von X zusammen mit einer freien (oder quasi freien) Auflösung $\mathscr{L}^\cdot$ von $\mathscr{F}|\mathfrak{U}$. Dann wird durch $\mathscr{C}^\cdot(V)=C^\cdot(\mathscr{L}^\cdot|\mathfrak{U}\cap f^{-1}(V),\mathscr{G})$ ein Komplex $\mathscr{C}^\cdot=\mathscr{C}^\cdot(\mathscr{L}^\cdot,\mathscr{G})$ von $\mathcal{O}_Y$-Moduln definiert. Es ist

$$\mathscr{H}^{-i}(\mathscr{C}^\cdot)=\mathscr{T}\!or_i^{\mathcal{O}_X}(f;\mathscr{F},\mathscr{G})\,,$$

und es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q}=R^pf_*(\mathscr{T}\!or_{-q}^{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}))\,,$$

die gegen $\mathcal{T}or_{-p-q}^{\mathcal{O}_X}(f;\mathcal{F},\mathcal{G})$ konvergiert. Ist f eigentlich, so folgt, daß die Garben $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(f;\mathcal{F},\mathcal{G})$ kohärent sind. Der Komplex $\mathcal{C}^{\cdot}$ ist nach rechts beschränkt, hat kohärente Kohomologie und seine Komponenten sind azyklisch bzgl. offener steinscher Mengen. Also gibt es einen Komplex $\mathcal{P}^{\cdot}$ mit einem Quasi-isomorphismus $\mathcal{P}^{\cdot}\to\mathcal{C}^{\cdot}$. Man zeigt, daß dieser Satz 4 genügt.

Aus Satz 4 erhält man Folgerungen wie für Bildgarben oder relative Ext-Garben. Ist etwa $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y,\mathcal{G}_y)=0$ für $i\gg 0$ und alle y, so ist die Funktion

$$y\to\sum_i(-1)^i\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y,\mathcal{G}_y)$$

lokal konstant auf Y. Wir geben eine Folgerung daraus an: Ist Z eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und sind $\mathcal{M},\mathcal{N}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, dann definiert man die Zahl

$$\mathcal{M}\cdot\mathcal{N}=\sum(-1)^i\chi(\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M},\mathcal{N}))\,.$$

Ist $\mathcal{M}=\mathcal{O}_Z/\mathcal{I}=\mathcal{O}_A$ und $\mathcal{N}=\mathcal{O}_Z/\mathcal{J}=\mathcal{O}_B$ mit $\dim A+\dim B=\dim Z$, $\dim A\cap B=0$, dann ist $\mathcal{M}\cdot\mathcal{N}$ der Grad des Null-Zykels $A\cdot B$.

Korollar 9. *Sei f außerdem regulär, dann ist die Funktion $y\mapsto\mathcal{F}_y\cdot\mathcal{G}_y$ lokal konstant.*

Der Beweis folgt aus der Invarianz der Euler-Poincaré-Charakteristik der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q}=H^p(X_y,\mathcal{T}or_{-q}^{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y,\mathcal{G}_y))\,,$$

die gegen $\mathrm{Tor}_{-q-p}^{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y,\mathcal{G}_y)$ konvergiert.

(4.3) Mit den Methoden aus Abschn. 1 kann man noch beweisen:

Satz 5. *Sei $f:X\to Y$ eine flache, eigentliche Abbildung noetherscher Schemata und $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, flach über Y. Dann gilt die entsprechende Aussage von Satz 1.*

Ebenso lassen sich die anderen Ergebnisse auf den algebraischen Fall übertragen (für Satz 2(ii) im algebraischen Fall vgl. auch [12, Satz 4.2]).

Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit findet sich in C. Bănică et M. Putinar, Algèbre homologique globale pour une Déformation, Preprint series in Mathematics, No. 31, Juni 1979, Increst, Bucureşti.

Zusatz bei der Korrektur. Mit Hilfe von Satz 1 folgt die Existenz einer versellen Deformation für Erweiterungen beliebigen Grades aus J. Bingener: Darstellbarkeitskriterien für analytische Funktoren, preprint, Satz (8.1).

Literatur

1. Bănică, C., Stănăşilă, O.: Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Bukarest Editura Academiei 1974, Paris Gauthier-Villars 1977
2. Belkilani, A.: Sur le complexe cotangent dans la géométrie analytique. Thèse 3^{me} cycle, Strasbourg, 1978
3. Flenner, H.: Über Deformationen holomorpher Abbildungen. Habilitationsschrift, Osnabrück, 1978
4. Forster, O., Knorr, K.: Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. Manuscripta Math. **5**, 19–44 (1971)

5. Forster, O., Knorr, K.: Relativ-analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben. Invent. Math. **16**, 113–160 (1972)
6. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. IHES No. **5**, 1960
7. Grauert, H., Kerner, H.: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. **153**, 236–260 (1964)
8. Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. Publ. IHES
9. Harthshorne, R.: Residues and duality. In: Lecture Notes in Mathematics 20. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966
10. Kiehl, R., Verdier, J.L.: Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. Math. Ann. **195**, 24–50 (1971)
11. Knorr, K.: Der Grauertsche Projektionssatz. Invent. Math. **12**, 118–172 (1971)
12. Lange, H.: Families of Extensions. Erlangen (preprint)
13. Palamodov, V.P.: Deformations of complex spaces. Russian Math. Surveys **31**, 129–197 (1976)
14. Schneider, M.: Holomorphic vector bundles on $\mathbb{P}_n$. Séminaire Bourbaki, No. 530, 1978/79
15. Schuster, H.W.: Über die Starrheit komplexer Räume. Manuscripta Math. **1**, 125–137 (1969)
16. Séminaire H. Cartan, E.N.S. 1960/61
17. Trautmann, G.: Deformations of sheaves and bundles, variétés analytiques compactes. In: Lecture Notes in Mathematics 683. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978
18. Verdier, J.L.: Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente. Bull. Math. France **99**, 337–343 (1971)

Eingegangen am 2. Januar 1980