HALIN, R.
Math. Annalen 157, 125—137 (1964)

Über unendliche Wege in Graphen

Von

R. HALIN in Köln

KARL DÖRGE zum 65. Geburtstage gewidmet

Einleitung

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den Verzweigungen unendlicher Wege in (unendlichen) Graphen. Bezüglich ihrer Verzweigungseigenschaften sehen wir zwei unendliche Wege in einem Graphen dann als gleichwertig an, wenn es einen dritten unendlichen Weg gibt, der mit jedem von den beiden ersten Wegen immer wieder Ecken gemeinsam hat (oder — was auf dasselbe hinausläuft — wenn es keinen endlichen Teilgraphen gibt, der Reste von beiden Wegen trennt). Diese Beziehung liefert in der Menge der unendlichen Wege eines Graphen G eine Äquivalenzrelation im üblichen Sinne; jede der zugehörigen Äquivalenzklassen nennen wir ein *Ende* von G.

Wir suchen nun möglichst einfache Teilgraphen G' von G, die zugleich die Verzweigungseigenschaften der unendlichen Wege von G möglichst gut wiedergeben, die also in dem Sinne *endengleich* mit G sind, daß G' aus jedem Ende von G (mindestens) einen unendlichen Weg enthält und daß dann und nur dann zwei unendliche Wege $\subseteq G'$ in G' verschiedenen Enden angehören, wenn dasselbe in G gilt. Als die einfachsten Graphen in unserem Zusammenhange erweisen sich die Bäume, da in ihnen jedes Ende i. w. nur aus einem Weg besteht. Das Ziel besteht also darin, für G ein *endengleiches Gerüst* zu konstruieren.

Diese Aufgabe wird im § 3 für alle Graphen mit abzählbar vielen Ecken gelöst; offen bleibt das Problem für die Graphen von höherer Mächtigkeit. Immerhin wird es dadurch z. B. für die Klasse aller lokalfiniten Graphen gelöst. Die abzählbaren Graphen haben zudem die interessante Eigenschaft, daß bei ihnen die Zahl der Enden echt größer als die Eckenzahl sein kann. Als Endenzahl kommt in diesem Falle nur $2^{\aleph_0}$ in Frage, was ohne Zuhilfenahme der Kontinuumhypothese bewiesen wird.

Ein *freies Ende* eines Graphen G ist ein solches, das von allen anderen Enden längs eines endlichen Teilgraphen abgespalten wird; mit den freien Enden beschäftigt sich der § 2 dieser Note. Es wird bewiesen, daß der dyadische Baum (s. Fig. 2) für Graphen ohne freies Ende eine besondere Rolle spielt (vgl. Satz 2).

Im Schlußparagraphen wird gezeigt, daß speziell im Falle lokalfiniter Graphen die Endenzahl beim Übergang zu einem Gerüst niemals abnehmen kann. Weiter ergibt sich u. a. der Satz, daß in einem 2-fach zusammenhängenden unendlichen lokalfiniten Graphen G jede unendliche Folge verschiedener Ecken eine abzählbare Teilfolge besitzt, die in einem unendlichen Weg von G enthalten ist.

Zur Terminologie und Bezeichnungsweise

Die betrachteten Graphen werden als *schlingen- und zweiecklos* vorausgesetzt. Ist G' ein *Teilgraph* von G (was durch $G' \subseteqq G$ ausgedrückt wird), so bezeichne $G(G')$ den Teilgraphen von G, der als Eckenmenge die Eckenmenge von G', als Kantenmenge genau diejenigen Kanten aus G enthält, die irgend zwei Ecken aus G' verbinden. Diese $G(G')$ heißen auch die *Untergraphen* von G. Jeder Teilgraph von G, der alle Ecken von G enthält, heißt ein *Faktor* von G. Ist T Teilgraph von G, so ist $G - T$ der Untergraph von G, der durch die Ecken $\notin T$ von G aufgespannt wird. Laufen von jeder Ecke $\in G$ nur endlich viele Kanten aus, so heißt G *lokalfinit*. Die Eckenzahl eines Graphen G wird bezeichnet mit $\alpha(G)$.

Ein Graph mit den sämtlich verschiedenen Ecken a_ν $(\nu = 0, \ldots, n$ bzw. $\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und den Kanten $(a_\nu, a_{\nu+1})$ $(\nu = 0, \ldots, n-1$ bzw. $\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ heiße ein *endlicher Weg* (der Länge n) bzw. ein *unendlicher Weg*. (Die betrachteten unendlichen Wege sollen also immer *einseitig unendlich* sein, d. h. einen *Anfangspunkt* besitzen, der in unserem Falle a_0 ist.) Jede Ecke ist ein Weg der Länge 0. — Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn in ihm je zwei Ecken einem Weg $\subseteqq G$ angehören. Die maximalen zusammenhängenden Untergraphen eines Graphen heißen seine *Komponenten*. Ein Teilgraph T von G *trennt* G genau dann, wenn $G - T$ mindestens zwei Komponenten hat.

Jeder unendliche Teilweg eines unendlichen Weges U heiße ein *Rest* von U. Wir sagen: U hat *immer wieder* die Eigenschaft E, wenn jeder Rest von U die Eigenschaft E hat.

Ein *Baum* B ist ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis (= geschlossenen Weg) enthält. Zeichnet man eine Ecke $e \in B$ aus und setzt man für zwei Ecken $a, b \in B$ genau dann $a \leqq b$, wenn man beim Durchlaufen des Weges von e nach b in B die Ecke a passiert, so liefert dies eine Teilordnung der Eckenmenge von B. In einem unendlichen Wege werde stets der Anfangspunkt ausgezeichnet; in diesem Falle (und nur im Falle der Wege) haben wir eine totale Ordnung. In diesem Sinne wollen wir die Beziehungen „vor" und „nach" für die Ecken von U verstehen.

Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Baum als Faktor. Bestimmen wir für jede Komponente eines beliebigen Graphen einen solchen Faktorbaum, so heißt die Vereinigung dieser Bäume ein *Gerüst* des betr. Graphen.

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften der Enden

Man habe irgendeinen unendlichen Graphen G, ferner zwei (einseitig) unendliche Wege $U, V \subseteqq G$. Wir nennen U und V *äquivalent* in G (in Zeichen: $U \sim_G V$, auch kurz $U \sim V$, wenn keine Irrtümer zu befürchten sind) genau dann, wenn es einen weiteren unendlichen Weg $W \subseteqq G$ gibt, derart, daß W sowohl mit U als auch mit V immer wieder Ecken gemeinsam hat.

Ohne weiteres klar ist dann:

(1.1) *Folgende Aussagen über die unendlichen Wege U, $V \subseteqq G$ sind äquivalent:*

(1) $U \sim_G V$;

(2) *Für jeden endlichen Teilgraphen $T \subset G$ liegen Reste der Wege U, V in derselben Komponente von $G - T$;*

(3) *Es gibt unendlich viele paarweise eckenfremde (endliche) Wege $\subseteqq G$, die eine Ecke $\in U$ mit einer $\in V$ verbinden.*

Aus (1.1) folgt nun sofort, daß die Relation $\sim_G$ in der Menge der unendlichen Wege $\subseteqq G$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. (Die Transitivität sieht man am besten mit Hilfe von (2) ein.)

Damit folgt:

(1.2) *Die Relation $\sim_G$ ist eine Äquivalenzrelation (im Sinne der allgemeinen Relationentheorie). Die Menge der unendlichen Wege $\subseteqq G$ zerfällt also in Klassen derart, daß zwei unendliche Wege $\subseteqq G$ zu derselben Klasse genau dann gehören, wenn sie in der Beziehung $\sim_G$ zueinander stehen.*

Wir nennen jede dieser Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_G$ ein *Ende* (bezeichnet durch den Buchstaben $\mathfrak{E}$) des Graphen G. Die Zahl der Enden (*= Endenzahl*) von G werde bezeichnet mit $\varepsilon(G)$.

(1.3) *Dann und nur dann gehören zwei unendliche Wege U, $V \subseteqq G$ verschiedenen Enden von G an, wenn es ein endliches $T \subset G$ und Reste von U und V gibt, die in G durch T getrennt sind. Hat man ein solches T und ist $U' \sim_G U$, $V' \sim_G V$, so gibt es auch Reste von U' und V', die durch dasselbe T getrennt sind.*

Man kann daher sagen (da T nicht vom gewählten Vertreter des betr. Endes abhängt), daß *T die betr. beiden Enden trennt.* Zu zwei verschiedenen Enden von G existiert also stets ein endliches T, das sie trennt, und zwar leistet dies jedes endliche T, das die Reste irgend zweier Vertreter der betr. Enden trennt.

Zu beweisen ist wegen (1.1) nur noch die Behauptung über U', V'. Wegen $U \sim U'$, $V \sim V'$ existieren Wege in $G - T$, die Ecken der Reste (in $G - T$) von U und U' bzw. V und V' verbinden. Wären also die Reste von U' und V' in $G - T$ durch einen Weg verbunden, so auch die Reste von U und V (Fig. 1), entgegen der Wahl von T.

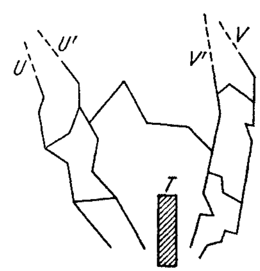

Fig. 1

$\varepsilon(G) = 0$ ist offenbar gleichbedeutend damit, daß G keinen unendlichen Weg besitzt (vgl. hierzu auch [1], Satz 6). Nach einem bekannten Satz (s. [2], Kap. VI, Satz 3) ist für ein lokalfinites unendliches und zusammenhängendes G immer $\varepsilon(G) \geqq 1$.

Wie man sieht, ist jedes Ende von G auch ein Ende (genau) einer Komponente von G, und umgekehrt. Daher kann man o. B. d. A. meist G als zusammenhängend voraussetzen. Da es überdies bei unserer Äquivalenzrelation nur auf die Reste der Wege ankommt, kann man oft annehmen, daß alle betrachteten unendlichen Wege denselben Anfangspunkt haben.

Ist α die Eckenzahl von G, so ist die Anzahl der unendlichen Wege in G höchstens $\alpha^{\aleph_0}$, also auch

(1.4) $\varepsilon(G) \leqq \alpha^{\aleph_0}$ *(mit* $\alpha = \alpha(G)$*).*

Für $\alpha(G) = \aleph_0$ ist $\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (= Mächtigkeit des Kontinuums). Beispiel eines (lokalfiniten) abzählbaren Graphen mit der Endenzahl $\mathfrak{c}$ ist der *dyadische Baum D:* Er habe die Ecken e, $e_{i_1,\ldots,i_n}$ ($i_\nu = 0$ oder 1, $n = 1, 2, 3, \ldots$) und die Kanten (e, e_0), (e, e_1) und $(e_{i_1,\ldots,i_n}, e_{i_1,\ldots,i_{n+1}})$ (Fig. 2).

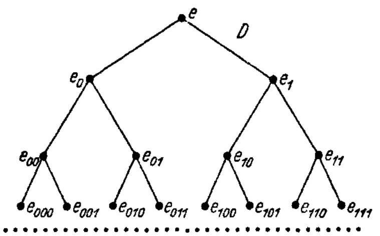

Fig. 2

Die Bäume sind in unserem Zusammenhange die einfachsten Graphen; es gilt nämlich:

(1.5) *Ist B Baum, so enthält — bei gegebenem Anfangspunkt — jedes Ende von B nur einen einzigen unendlichen Weg. Also:* $\varepsilon(B)$ *= Anzahl der unendlichen Wege, die von einer beliebigen, aber festen Ecke* $\in B$ *ausgehen.* Umgekehrt hat man auch: *Wenn für jede Ecke e eines unendlichen, zusammenhängenden Graphen G (mit* $\varepsilon(G) > 0$*) jedes Ende nur einen einzigen bei e beginnenden unendlichen Weg enthält, so ist G Baum.*

Wir interessieren uns im folgenden für Zusammenhänge zwischen der Endenzahl von G und den Endenzahlen der Teilgraphen von G. Werden Kanten oder Ecken von G gestrichen, so können unendliche Wege von G zerstört, aber auch Enden von G in mehrere Enden des Teilgraphen „aufgespalten" werden; die Endenzahl kann also bei Übergängen zu Teilgraphen sowohl zu- als auch abnehmen. Jedenfalls gilt aber:

(1.6) *Ist* $G' \subseteqq G$ *und sind U, V unendliche Wege in G', die demselben Ende von G' angehören, so liegen U, V auch in G in demselben Ende.*

Gilt auch das Umgekehrte, d. h., zieht für unendliche Wege $U, V \subseteqq G'$ (mit $G' \subseteqq G$) die Äquivalenz $U \sim_G V$ stets die Äquivalenz $U \sim_{G'} V$ nach sich, so soll G' ein *endentreuer* Teilgraph von G heißen. Weiter nennen wir einen Graphen $G' \subseteqq G$ *endenvollständig* in G, wenn G' aus jedem Ende von G mindestens einen unendlichen Weg enthält. Ist $G' \subseteqq G$ sowohl endentreu als auch endenvollständig in G, so heiße G' *endengleich* mit (oder zu) G. Dann ist folgendes selbstverständlich:

(1.7) *Ist G' endentreuer bzw. endenvollständiger bzw. endengleicher Teilgraph von G, so ist* $\varepsilon(G') \leqq \varepsilon(G)$ *bzw.* $\varepsilon(G') \geqq \varepsilon(G)$ *bzw.* $\varepsilon(G') = \varepsilon(G)$.

(1.8) *Ist G' endentreuer bzw. endenvollständiger bzw. endengleicher Teilgraph von G und G'' endentreuer bzw. endenvollständiger bzw. endengleicher Teilgraph von G', so ist auch G'' endentreuer bzw. endenvollständiger bzw. endengleicher Teilgraph von G.*

Beispiele endengleicher Teilgraphen von G erhalten wir durch

(1.9) *Ist T endlicher Teilgraph von G, so ist G — T endengleich mit G.*

Weiter folgt aus den Definitionen noch unmittelbar:

(1.10) *Ist G zerlegt in der Form*

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i \quad \textit{mit} \quad G_i \cap G_j = T \ (\textit{für } i \neq j \in I) \quad \textit{und } T \textit{ endlich},$$

so sind die G_i in G sämtlich endentreu, und enthält G_i einen Weg $\in \mathfrak{E}$, so enthält keins der G_j mit $j \neq i$ auch einen solchen. Kurz gesagt gilt: *Jedes endliche $T \subset G$ zerlegt die Menge der Enden in disjunkte Teile, ohne die Enden selbst aufzuspalten. Insbesondere also ist $\varepsilon(G) = \sum_{i \in I} \varepsilon(G_i)$.*

Aus dem oben erwähnten Satz von KÖNIG folgt noch:

(1.11) *Ein lokalfiniter zusammenhängender Graph G läßt sich dann und nur dann längs eines endlichen trennenden Teilgraphen in zwei unendliche Teilgraphen zerlegen, wenn die Endenzahl von G mindestens 2 ist.*

§ 2. Freie Enden

Ein Ende $\mathfrak{E}$ heißt *freies Ende* von G, wenn ein endliches $T \subset G$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Komponente von $G - T$, die einen Weg $\in \mathfrak{E}$ enthält, aber keinen Weg aus einem Ende $\neq \mathfrak{E}$. Kurz gesagt ist ein Ende also frei genau dann, wenn es sich durch einen endlichen trennenden Teilgraphen von allen übrigen Enden (auf einmal) abspalten läßt.

Ist die Endenzahl von G endlich, so folgt, daß jedes Ende von G frei ist, und es existiert ein endliches T, so daß in $G - T$ alle Enden getrennt sind. Gibt es (bei beliebigem $\varepsilon(G)$) ein endliches T, das alle Enden voneinander trennt, so folgt sofort, daß jedes Ende frei ist. Ist aber umgekehrt jedes Ende frei, so braucht es kein solches endliches T zu geben, wie ein einfaches Beispiel (Fig. 3) zeigt. Für lokalfinite und zusammenhängende G existiert aber doch stets ein solches T (vgl. Satz 1).

(2.1) *Dann und nur dann ist ein Ende $\mathfrak{E}$ von G nicht frei, wenn es ein $U \in \mathfrak{E}$ und eine Folge von paarweise nicht äquivalenten eckenfremden unendlichen Wegen $V_1, V_2, \ldots$ ($V_n \notin \mathfrak{E}$; $n = 1, 2, \ldots$) derart gibt, daß die V_n ihren Anfangspunkt auf U haben und sonst keine gemeinsame Ecke mit U besitzen (vgl. Fig. 4)*[1].

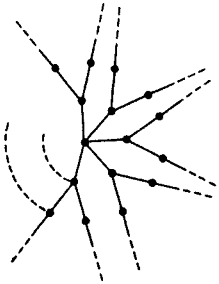

Fig. 3

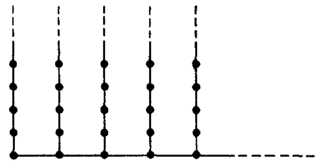

Fig. 4

Beweis: Wenn U und solche V_n existieren, so folgt, daß es für jedes endliche $T \subset G$ Reste von gewissen V_n und U gibt, die derselben Komponente von $G - T$ angehören; das durch U bestimmte Ende ist also nicht frei.

Ist umgekehrt $\mathfrak{E}$ ein nicht freies Ende von G, ist $U \in \mathfrak{E}$ und sind für eine natürliche Zahl n schon eckenfremde, paarweise nicht äquivalente $V_1, \ldots, V_{n-1}$

[1]) Etwas schärfer folgt, daß im Falle, daß $\mathfrak{E}$ nicht frei ist, zu *jedem* $U \in \mathfrak{E}$ solche V_n existieren.

bestimmt, deren Anfangspunkte auf U liegen, so wähle man ein $\mathfrak{E}$ und diese $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_{n-1}$ (wo $\mathfrak{E}_i$ das Ende ist, dem V_i angehört) paarweise trennendes endliches T, in dem außerdem (o. B. d. A.) alle Ecken von $V_1, \ldots, V_{n-1}$ liegen mögen, die nicht zu den durch T bestimmten Resten der betr. V_i gehören. Da $\mathfrak{E}$ nicht frei ist, existiert ein unendliches $V_n \notin \mathfrak{E}, \notin \mathfrak{E}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, das in den durch T bestimmten Rest von U mündet und zu jedem der V_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ eckenfremd ist. Wir erhalten also eine Folge $V_1, V_2, \ldots$ der verlangten Art.

Satz 1. *G sei lokalfinit und zusammenhängend. Ist die Endenzahl von G unendlich, so besitzt G mindestens ein nicht freies Ende.* M. a. W.: *Besitzt G nur freie Enden, so ist $\varepsilon(G)$ endlich.*

Beweis: $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ seien abzählbar viele freie Enden von G. $T_1 \subseteqq T_2 \subseteqq T_3 \subseteqq \cdots$ seien zusammenhängende endliche Teilgraphen von G derart, daß für jedes n T_n die Enden $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ paarweise voneinander und von allen übrigen Enden von G trennt (diese T_n existieren, weil die $\mathfrak{E}_n$ sämtlich frei sind und G zusammenhängend ist). Überdies kann offenbar angenommen werden, daß für jedes n $T_{n+1} - T_n$ keine Ecke derjenigen Komponenten von $G - T_n$ enthält, zu denen die $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ gehören. $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ ist unendlich (dies ergibt sich aus der Lokalfinitheit; vgl. etwa [1], Satz 7) und zusammenhängend. Wir wählen eine Ecke $e_1 \in T_1$ sowie zu jedem n einen in e_1 beginnenden Weg $U_n \in \mathfrak{E}_n$, so daß $U_n \cap T \subseteqq T_n$ und ein endlicher Weg ist (dies geht, weil die T_n zusammenhängend sind). Sind $e_i \in U_i$ $(i < n)$ schon bestimmt und U_i' die durch die e_i bestimmten Reste der U_i (einschließlich e_i), so sei e_n die letzte Ecke, die U_n mit $\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ gemeinsam hat, U_n' der durch e_n bestimmte Rest von U_n (einschließlich e_n). Wegen der Lokalfinitheit können jeweils nur endlich viele der e_n zusammenfallen. $T \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n' = H$ ist zusammenhängend und unendlich. Wegen der Lokalfinitheit folgt die Existenz eines unendlichen Weges $V \subseteqq H$; dieser ist zu keinem der U_n äquivalent und enthält unendlich viele der e_n. Streicht man in G irgendeine endliche Menge von Ecken, so folgt, daß für hinreichend großes n stets ein Rest von V mit einem Rest von U_n in derselben Komponente des Restgraphen liegt, d. h. das durch V bestimmte Ende ist nicht frei.

Läßt man die Voraussetzung der Lokalfinitheit fallen, so erhält man durch fast dieselbe Überlegung folgenden

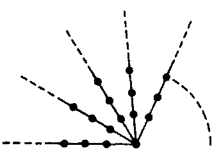

Fig. 5

Satz 1'. *Ist G zusammenhängend und $\varepsilon(G)$ unendlich, so gibt es in G entweder ein nicht freies Ende oder unendlich viele paarweise nicht äquivalente unendliche Wege U_n $(n = 1, 2, \ldots)$, so daß zwei verschiedene U_n je nur genau ihren Anfangspunkt gemeinsam haben (s. Fig. 5).*

Man kann beweisen, daß es, falls in G jedes Ende frei ist, in jeder unendlichen Menge von Enden unendlich viele Enden gibt, die durch ein endliches T paarweise voneinander getrennt werden.

Satz 2. *Wenn G kein freies Ende besitzt, so ist entweder $\varepsilon(G) = 0$, oder aber G enthält eine endentreue Unterteilung des dyadischen Baumes D (vgl. Fig. 2); insbesondere ist dann also $\varepsilon(G) \geqq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

Beweis: O.B.d.A. dürfen wir offenbar annehmen, daß G zusammenhängend ist. Es sei $\varepsilon(G) > 0$; dann folgt nach dem obigen $\varepsilon(G) \geqq \aleph_0 \geqq 2$. Also existiert ein endliches nicht leeres $T \subset G$, so daß es in $G - T$ mindestens zwei Komponenten G_0, G_1 mit $\varepsilon(G_0), \varepsilon(G_1) > 0$ gibt; o. B. d. A. darf T als zusammenhängend angenommen werden, da wir durch Hinzunahme endlich vieler Ecken und Kanten von G stets ein zusammenhängendes, endliches $T^* \supseteqq T$ in G erhalten können. G_0, G_1 haben beide wieder kein freies Ende, da andernfalls dasselbe Ende auch in G frei wäre. In T gibt es Ecken p_0, p_1, von denen jeweils eine Kante nach G_0 bzw. G_1 führt (die Endpunkte seien q_0 bzw. q_1), sowie einen endlichen Weg Y, der p_0, p_1 verbindet. e sei irgendeine Ecke von Y.

Wir konstruieren nun die gesuchte Unterteilung von D schrittweise durch wiederholte Anwendung i. w. desselben Schlusses.

Betrachtet werden die endlichen Folgen $\mathfrak{i}: i_1, \ldots, i_n$ ($i_\nu = 0$ oder 1); n heiße die Länge dieser Folge. Die Folge der Länge 0 sei das leere System. Endliche 0, 1-Folgen beliebiger Länge werden durch $\mathfrak{i}$ bezeichnet; soll es sich um Folgen von einer Länge > 0 handeln, so schreiben wir $\mathfrak{j}$.

Wir nehmen nun für eine natürliche Zahl n an, daß für jede 0, 1-Folge $\mathfrak{i}$ der Länge $n - 1$ bestimmt sind: $G_\mathfrak{i} \subseteqq G$ und ein endliches zusammenhängendes $T_\mathfrak{i} \subset G_\mathfrak{i}$ derart, daß $G_\mathfrak{i} - T_\mathfrak{i}$ (mindestens) zwei Komponenten $G_{\mathfrak{i},0}$ und $G_{\mathfrak{i},1}$ besitzt, von denen jede eine Endenzahl >0 und kein freies Ende hat; ferner Ecken $p_{\mathfrak{i},0}$, $p_{\mathfrak{i},1} \in T_\mathfrak{i}$, die (in G) benachbart sind zu $q_{\mathfrak{i},0} \in G_{\mathfrak{i},0}$ bzw. $q_{\mathfrak{i},1} \in G_{\mathfrak{i},1}$.

Wir wählen nun in $G_{\mathfrak{i},0}$ ein endliches zusammenhängendes $T_{\mathfrak{i},0}$ mit $q_{\mathfrak{i},0} \in T_{\mathfrak{i},0}$ derart, daß in $G_{\mathfrak{i},0} - T_{\mathfrak{i},0}$ zwei Komponenten $G_{\mathfrak{i},0,0}$ und $G_{\mathfrak{i},0,1}$ existieren, die je eine Endenzahl >0, also beide kein freies Ende besitzen. (Daß dies geht, ist aus dem ersten Abschnitt unseres Beweises ersichtlich.) Wir wählen dann weiter Ecken $p_{\mathfrak{i},0,0}$ und $p_{\mathfrak{i},0,1} \in T_{\mathfrak{i},0}$ sowie $q_{\mathfrak{i},0,0} \in G_{\mathfrak{i},0,0}$ und $q_{\mathfrak{i},0,1} \in G_{\mathfrak{i},0,1}$, so daß jeweils gleich indizierte p und q (in G) durch eine Kante verbunden sind. Wegen des Zusammenhangs können wir in $T_{\mathfrak{i},0}$ eine Ecke $e_{\mathfrak{i},0}$ und drei Wege von diesem $e_{\mathfrak{i},0}$ nach den beiden p und dem q aus $T_{\mathfrak{i},0}$ finden, so daß je zwei dieser Wege (die auch nur aus einer Ecke bestehen können) nur dieses e gemeinsam haben. Die Vereinigung dieser drei Wege bezeichnen wir mit $Y_{\mathfrak{i},0}$.

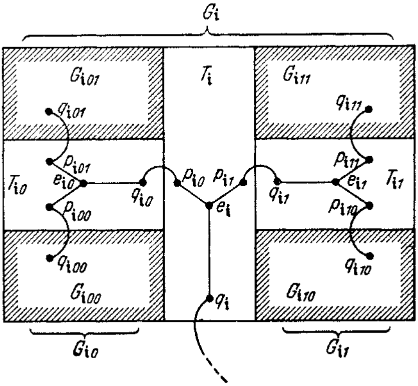

Fig. 6

Ganz entsprechend verfahren wir bei $G_{\mathfrak{i},1}$.

Man sieht, daß die $Y_\mathfrak{i}$ zusammen mit den Kanten $(p_\mathfrak{j}, q_\mathfrak{j})$ eine Unterteilung D' des dyadischen Baumes D bilden; die Verzweigungspunkte (= Ecken $\geqq$ 3-ten Grades) dieses D' sind gerade die $e_\mathfrak{j}$.

Hat man nun zwei verschiedene unendliche Wege $\subseteqq D'$, so gibt es ein (von e aus betrachtet) letztes $e_{\mathfrak{i}}$, das diese beiden Wege gemeinsam haben. Daraus folgt, daß ein Rest des einen Weges in $G_{\mathfrak{i},0}$, der des anderen in $G_{\mathfrak{i},1}$ liegen muß. Für die Vereinigung $\overline{T}$ der $T_{\mathfrak{i}'}$ mit einem $\mathfrak{i}'$ von nicht größerer Länge als $\mathfrak{i}$ bilden aber $G_{\mathfrak{i},0}$ und $G_{\mathfrak{i},1}$ verschiedene Komponenten von $G - \overline{T}$, und $\overline{T}$ ist endlich, so daß die beiden Wege auch in G verschiedenen Enden angehören müssen. Damit folgt auch die Endentreue von D'.

Weiter beweisen wir

(2.2) *B sei abzählbarer Baum mit überabzählbar vielen Enden. Dann enthält B eine Unterteilung des dyadischen Baumes D; insbesondere folgt (ohne Benutzung der Kontinuumhypothese) $\varepsilon(B) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

Beweis: Wir wählen irgendeine feste Ecke $e \in B$; wir wollen voraussetzen, daß alle betrachteten unendlichen Wege in e anfangen. Dann entsprechen sich also Enden und Wege eineindeutig.

Wir streichen zunächst alle Ecken in B, durch die kein (in e beginnender) unendlicher Weg verläuft. Der entstehende Graph sei B_0; offenbar hat B_0 dieselben unendlichen Wege wie B. Ist $\tau > 0$ eine Ordnungszahl, so sei der Teilbaum B_ϱ für alle $\varrho < \tau$ schon definiert. Ist τ Limeszahl, so werde gesetzt $B_\tau = \bigcap_{\varrho<\tau} B_\varrho$, wobei in diesem Durchschnitt noch alle evtl. auftretenden endlichen „Auswüchse" fortgeschnitten werden sollen. Ist aber $\tau = \tau' + 1$ Nachfolgerzahl, so werde B_τ nicht definiert, falls $B_{\tau'}$ kein freies Ende hat; falls $B_{\tau'}$ ein solches besitzt (etwa mit dem unendlichen Weg $U_{\tau'}$), so betrachte man auf $U_{\tau'}$ die letzte Ecke eines Grades $\neq 2$ (in $B_{\tau'}$)[2]), und B_τ entstehe dann durch Streichung des durch diese Ecke bestimmten Restes von $U_{\tau'}$ (ausschließlich dieser Ecke selbst).

Bei diesem Wegschneiden bleiben alle Wege $\subseteqq B_{\tau'}$, die von $U_{\tau'}$ verschieden sind, unverletzt. Da bei jedem solchen Übergang von τ' zu $\tau' + 1$ mindestens eine Ecke von B fortfällt, muß das Verfahren nach abzählbar vielen Schritten abbrechen. Insgesamt sind also auch nur höchstens abzählbar viele Enden fortgefallen (da die Wege $\neq U_{\tau'}$ bei jedem Schritt unverletzt geblieben sind), so daß die Endenzahl des entstehenden Teilbaumes ohne freies Ende überabzählbar ist. Damit folgt nach Satz 2 die Behauptung.

Wir können nun für die abzählbaren Bäume zusammenfassend formulieren:

(2.3) *Es sei B ein Baum mit abzählbar vielen Ecken.*

a) *Ist $\varepsilon(B) = n > 0$ endlich, so enthält B eine Unterteilung eines Baumes B^* folgender Art: B^* besteht aus einem endlichen Baum B_0 mit genau n Ecken 1. Grades (im Falle $n \geqq 2$; im Falle $n = 1$ sei B_0 Kante) und keiner Ecke 2. Grades, wobei an den Ecken 1. Grades n fremde unendliche Wege angeheftet sind.*

b) *Ist $\varepsilon(B) = \aleph_0$, so enthält B eine Unterteilung des in Fig. 4 oder 5 dargestellten Graphen; im Falle der Lokalfinitheit kann nur die Fig. 4 auftreten.*

c) *Ist $\varepsilon(B) > \aleph_0$, so folgt $\varepsilon(B) = 2^{\aleph_0}$, und B enthält eine Unterteilung des Graphen D der Fig. 2.*

---

[2]) Eine solche Ecke existiert, weil $U_{\tau'}$ freies Ende ist und alle endlichen „Auswüchse" fortgeschnitten sind.

§ 3. Konstruktion endengleicher Gerüste in den abzählbaren Graphen

Wir beweisen nunmehr als Hauptergebnis:

Satz 3. *Jeder abzählbare Graph G besitzt ein Gerüst, das mit G endengleich ist (das also aus jedem Ende von G einen und nur einen unendlichen Weg enthält).*

Beweis: Offenbar dürfen wir o. B. d. A. G als zusammenhängend annehmen, da wir andernfalls die Komponenten einzeln untersuchen können. — Wir schreiben die Eckenmenge von G als Folge: $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$.

Es sei nun $B_1 = \{e_1\}$. Weiter setzen wir noch $G_0 = G$ und $Z_1 = \{e_1\}$. Nehmen wir an, daß für eine natürliche Zahl n schon die endlichen Teilbäume B_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ von G konstruiert sind mit $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n$ und $e_\nu \in B_\nu$. $G_i^{(n)} (i \in I_n)$ seien die Komponenten von $G - B_n$. Ist nun μ_{n+1} die kleinste natürliche Zahl μ mit $e_\mu \notin B_n$ (jedenfalls $\mu_{n+1} \geqq n + 1$), so wähle man dasjenige $G_i^{(n)} = G_{n+1}$, das $e_{\mu_{n+1}}$ enthält. Ferner sei k_{n+1} eine Kante $\in G$, die von B_n in G_{n+1} hineinführt; ihre Endpunkte seien $b_{n+1} \in B_n$ und $c_{n+1} \in G_{n+1}$. Dabei sei k_{n+1} so gewählt, daß b_{n+1} zu einem $B_\nu - B_{\nu-1}$ mit möglichst großem $\nu \leqq n$ gehört. Z_{n+1} sei ein beliebiger (endlicher) Weg in G_{n+1}, der c_{n+1} mit $e_{\mu_{n+1}}$ verbindet. Wir setzen

$$B_{n+1} = B_n \cup k_{n+1} \cup Z_{n+1};$$

B_{n+1} ist offenbar wieder ein Baum und enthält sicher $e_1, \ldots, e_{n+1}$.

Nunmehr betrachten wir

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

B ist als Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Bäumen wieder ein Baum, und zwar (wegen $e_n \in B_n$) ein Gerüst von G. Weiter sehen wir, daß B die Vereinigung der zu je zweien eckenfremden $Z_n = B_n - B_{n-1}$ zuzüglich der k_n ist, die jeweils zwei verschiedene dieser Z_n verbinden.

Aus $\emptyset = Z_m \cap B_{m-1} \supseteqq Z_m \cap B_n$ für $m > n$ sehen wir, daß ein Z_m (mit $m \geqq n$) schon dann ganz in G_n verläuft, wenn nur eine Ecke von Z_m in G_n enthalten ist. Wir betrachten nun für ein (festes) n die m, für die $Z_m \subseteqq G_n$ ist (natürlich folgt dann $m \geqq n$). Diese m schreiben wir als (endliche oder abzählbare) Folge: $m_1 = n < m_2 < m_3 < \cdots$. Weiter fassen wir für irgendeines dieser $m_\varkappa = m$ mit $\varkappa \geqq 2$[3]) einen Weg $Z \subseteqq G_n$, der e_{μ_m} mit e_{μ_n} verbindet, ins Auge. Z treffe $Z_{m_1} \cup \cdots \cup Z_{m_{\varkappa-1}}$ das erste Mal in $z \in Z_{m_\lambda}$; $z \neq e_{\mu_m}$. Daraus folgt, daß von G_m eine Kante $\in G$ nach $B_{m_\lambda} - B_{m_{\lambda-1}}$ führt. Nach Wahl der k_i (s. o.) sehen wir daraus, daß der Endpunkt $b_{m_\varkappa} \in B_{m_\varkappa -1}$ von k_m nicht zu B_{n-1} gehören kann. Da nun außerdem G_n Komponente von $G - B_{n-1}$ ist, folgt, daß $b_{m_\varkappa}$ in G_n liegt für alle $\varkappa \geqq 2$. Damit haben wir: Für jedes n existiert nur eine einzige Kante (nämlich k_n) in B, die eine Ecke $\in G_n$ mit einer von $G - G_n$ verbindet.

Es ist also $G_n = G\left(\bigcup\limits_{m_\varkappa} Z_{m_\varkappa}\right)$. $G_n - Z_n$ hat die Komponenten H_i $(i \in I_n' \subseteqq I_n)$; jedes H_i ist gleich $G\left(\bigcup\limits_{m_\varrho'} Z_{m_\varrho'}\right)$, wo m_ϱ' die Teilfolge der $m_\varkappa$ ist, für die das zugehörige Z in H_i fällt. Ist m $(>n)$ das kleinste der j mit $Z_j \subseteqq H_i$, so folgt $H_i = G_m$. Ist

[3]) Falls ein $m_\varkappa$ mit $\varkappa \geqq 2$ nicht existiert, haben wir nichts weiter zu untersuchen.

also G_m Komponente von $G_n - Z_n$, so führt offenbar (nach der obigen Bedingung für die k_ν) k_m von Z_m nach Z_n.

U sei nun ein unendlicher Weg $\subseteq G$, n irgendeine natürliche Zahl. Wegen der Endlichkeit von B_n folgt, daß ein Rest R_1 von U in einer Komponente C von $G - B_n$ enthalten sein muß. C ist gleich einem G_{r_1} ($r_1 \geqq n + 1$), wobei r_1 das kleinste der μ_m mit $e_{\mu_m} \in C$ ist. Entsprechend folgt, daß ein Rest R_2 von R_1 in einer Komponente G_{r_2} von $G_{r_1} - Z_{r_1}$ enthalten ist, usw.; allgemein folgt, daß ein Rest R_ϱ in einer Komponente G_{r_ϱ} von $G_{r_{\varrho-1}} - Z_{r_{\varrho-1}}$ enthalten ist. Wir bekommen also eine nicht abbrechende Kette $G_{r_1} \supset G_{r_2} \supset \cdots$, wobei jedesmal G_{r_ϱ} Komponente von $G_{r_{\varrho-1}} - Z_{r_{\varrho-1}}$ ist und einen Rest R_ϱ von U enthält. Insbesondere folgt nach dem obigen, daß die k_{r_ϱ} auf einem unendlichen Weg V von B liegen (da k_{r_ϱ} immer Z_{r_ϱ} und $Z_{r_{\varrho-1}}$ verbindet).

Wir behaupten, daß V und U in G äquivalent sind. Denn ist T eine endliche Menge von Ecken $\in G$, so gibt es ein letztes λ, so daß Z_{r_λ} eine Ecke $\in T$ enthält. In $G_{r_{\lambda+1}}$ liegen dann der Rest $R_{\lambda+1}$ von U und der Endpunkt $\in Z_{r_{\lambda+1}}$ von $k_{r_{\lambda+1}}$; d. h. T trennt keinen Rest von U von allen Ecken $\in V$.

Damit folgt, daß B in G endenvollständig ist.

Weiter seien nun U, V (beide o. B. d. A. mit dem Anfangspunkt e_1) irgend zwei Wege in B, die in G äquivalent sind. Es folgt, daß die wie oben bestimmte Folge der G_{r_ϱ} für U und V die gleiche sein muß, da sonst Reste von U und V in G durch eines der (endlichen) B_n trennbar wären. Aus G_{r_ϱ} führt außer k_{r_ϱ} keine Kante von B hinaus. Daher müssen U und V beide diese unendlich vielen verschiedenen k_{r_ϱ} enthalten, also auch in B äquivalent sein.

Somit folgt, daß B auch endentreu in G ist, und unser Satz ist bewiesen.

Durch Betrachtung eines endengleichen Gerüstes in einem abzählbaren (zusammenhängenden) Graphen G sieht man nun ein, daß (2.3) richtig bleibt, wenn man darin „B" durch „G", „Unterteilung" durch „endentreue Unterteilung" ersetzt. Für den Fall $\varepsilon(G) > \aleph_0$ notieren wir noch einmal besonders:

Satz 4. *Ist G ein abzählbarer Graph mit überabzählbar vielen Enden, so enthält G eine endentreue Unterteilung des dyadischen Baumes D; insbesondere folgt ohne Zuhilfenahme der Kontinuumhypothese $\varepsilon(G) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

§ 4. Einige Eigenschaften der lokalfiniten Graphen

Es sei G irgendein (unendlicher) Graph, $p_1, p_2, \ldots$ eine abzählbare Folge verschiedener Ecken aus G. Ein unendlicher Weg $U \subseteq G$ heißt *konjugiert* zu dieser Folge, wenn es unendlich viele paarweise eckenfremde endliche Wege in G gibt, die eines der p_ν mit U verbinden. Gleichbedeutend damit, daß der unendliche Weg U zu der Folge der p_ν konjugiert ist, ist offenbar, daß nach Adjunktion der Kanten $(p_\nu, p_{\nu+1})$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) der entstehende unendliche Weg der p_ν zu U äquivalent ist, bzw. daß für jede endliche Eckenmenge $T \subseteq G$ die Komponente von $G - T$, die einen Rest von U enthält, stets auch mindestens eins der p_ν enthält.

Nunmehr folgt:

Satz 5. *G sei lokalfinit, unendlich und zusammenhängend, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ eine abzählbare Folge verschiedener Ecken von G. Dann gibt es wenigstens einen unendlichen Weg $\subseteqq G$, der zu der Folge $p_0, p_1, p_2, \ldots$ konjugiert ist.*

Beweis: Man wähle zunächst $Z_1 = B_1$ als einen Weg in G, der p_0 und p_1 verbindet. Ist für ein $n \geqq 1$ der Baum $B_n \subseteqq G$ schon bestimmt, so wähle man Z_{n+1} als einen Weg in G, der p_{n+1} mit einer Ecke $b_{n+1} \in B_n$ verbindet und sonst keine Ecke mit B_n gemeinsam hat (evtl. $Z_{n+1} = \{p_{n+1}\} = \{b_{n+1}\}$), und setze $B_{n+1} = B_n \cup Z_{n+1}$. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ist ein unendlicher lokalfiniter Teilbaum von G; daher folgt, daß B einen unendlichen Weg U (mit dem Anfangspunkt p_0) enthalten muß. q_ν bezeichne jeweils die letzte Ecke von U, die in dem p_0 mit p_ν verbindenden (eindeutig bestimmten) Teilweg von B liegt. Für jede Kante k von B gilt, daß in $B - k$ mindestens zwei der p_ν getrennt liegen (zum Beweise wählt man etwa das B_n mit kleinstem n, in dem k liegt). Daraus folgt, daß zu jedem $q_\nu \in U$ noch ein darauf folgendes $q_\mu \in U$ existieren muß, da sich sonst für die von q_ν fortführende Kante $k \in U$ ein Widerspruch ergäbe. Man sieht nun aber sofort ein, daß U zu der Folge p_ν konjugiert ist.

Aus Satz 5 folgt nun sofort:

Satz 5'. *Jeder zusammenhängende Faktor eines lokalfiniten zusammenhängenden Graphen G ist endenvollständig in G; jeder endentreue zusammenhängende Faktor von G ist also von selbst endengleich mit G. Es folgt daher insbesondere (mit Satz 3), daß die Endenzahl von G gleich dem Minimum der Endenzahlen aller Gerüste von B ist.*

Satz 5' beinhaltet die merkwürdige Tatsache, daß sich durch das Streichen von beliebig vielen Kanten (sofern nur der entstehende Faktor zusammenhängend bleibt) jedes Ende eines lokalfiniten zusammenhängenden Graphen höchstens in mehrere andere Enden aufspalten, nicht aber gänzlich verschwinden kann.

Wenn in G auch nur eine Ecke unendlichen Grades zugelassen ist, so wird Satz 5' falsch. Man nehme etwa den dyadischen Baum D sowie eine neue Ecke e' zu D und verbinde e' mit allen Ecken von D durch eine (neue) Kante. Diese Kanten bestimmen einen zusammenhängenden Faktor der Endenzahl 0, während der volle Graph die Endenzahl $\mathfrak{c}$ hat.

Wir beweisen mit Hilfe von Satz 5 noch:

Satz 6. *Es sei G lokalfinit, unendlich und 2-fach zusammenhängend. Dann gibt es zu jeder abzählbaren Folge $p_0, p_1, p_2, \ldots$ einen unendlichen Weg in G, der unendlich viele der Ecken p_ν enthält.*

Beweis: Nach Satz 5 gibt es einen unendlichen Weg $U \subseteqq G$, der zu der gegebenen Folge der p_ν konjugiert ist. Wir nennen einen (endlichen) Weg Z in G eine U-Sehne, wenn U den Anfangs- und den Endpunkt von Z, aber außer diesen keine weiteren Ecken und keine Kanten von Z enthält. (Auch eine Ecke von U selbst heiße U-Sehne.)

Wir nehmen nun an, daß wir schon eine Folge von n paarweise fremden U-Sehnen $Z_1, \ldots, Z_n$ gefunden haben, derart, daß die Ecken von $Z_i \cap U$ auf U

vor denen von $Z_{i+1} \cap U$ liegen $(i = 1, \ldots, n-1)$ und jedes Z_i mindestens ein p_ν enthält. Wir werden eine weitere U-Sehne Z_{n+1} konstruieren, so daß $Z_n \cap U$ vor $Z_{n+1} \cap U$ auf U liegt, $Z_{n+1} \cap Z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ leer ist und Z_{n+1} eine Ecke p_ν der gegebenen Folge enthält.

Die endliche Menge der Ecken $\in Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ zuzüglich all der Ecken $\in U$, die auf U vor einer der Ecken von $U \cap Z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ liegen, werde mit M bezeichnet. Weil U zu der Folge der p_ν konjugiert ist, existiert ein endlicher Weg W_1, der eine Ecke p_{ν_1} der Folge mit einem $u_1 \in U$ verbindet (wobei $W_1 \cap U = \{u_1\}$) und M vermeidet. Wegen des zweifachen Zusammenhanges gibt es zwei bis auf p_{ν_1} fremde Wege W_1', W_1'', die von p_{ν_1} ausgehen und zu zwei verschiedenen Ecken $\in U$ führen (wobei $U \cap (W_1' \cup W_1'')$ nur aus diesen beiden Ecken besteht)[4]. Wenn W_1', W_1'' beide M vermeiden, können wir offenbar W_1', W_1'' zu dem verlangten Z_{n+1} zusammensetzen. Wenn W_1', W_1'' aber beide M treffen und $\overline{W}_1'$ bzw. $\overline{W}_1''$ die Anfangsstücke von W_1' bzw. W_1'' bis zum (erstmaligen) Eintreten in M sind, so betrachte man die letzte Ecke l, die W_1 (von p_{ν_1} durchlaufen) mit $\overline{W}_1' \cup \overline{W}_1''$ gemeinsam hat. Ist l etwa $\in \overline{W}_1'$, so ersetzen wir W_1' durch sein Anfangsstück von p_{ν_1} bis l zuzüglich des Reststückes von W_1 von l bis u_1; der entstehende Weg sei Z_1' (Fig. 7). Wir haben damit zwei in p_{ν_1} beginnende Wege Z_1' und Z_1'' $(= \overline{W}_1'')$ in G gefunden, die bis auf p_{ν_1} fremd sind, wobei Z_1' zu M fremd ist und zu $u_1 \in U$ führt, während Z_1'' genau seinen Endpunkt $(\neq p_{\nu_1})$ mit M und keine innere Ecke mit U gemeinsam hat.

Denselben Schluß können wir nun auf $M_1 = M \cup Z_1' \cup Z_1''$ statt auf M anwenden. Es folgt entweder das Vorhandensein einer U-Sehne Z_{n+1} der verlangten Art oder die Existenz eines p_{ν_2} sowie von zwei in p_{ν_2} beginnenden, bis auf p_{ν_2} fremden Wegen Z_2', Z_2'' derart, daß Z_2' zu M_1 fremd ist und p_{ν_2} mit einem $u_2 \in U$ verbindet $(Z_2' \cap U = \{u_2\})$, Z_2'' aber genau den Endpunkt mit M_1 und keine innere Ecke mit U gemeinsam hat. Wenn nun dieser Endpunkt e nicht zu M gehört, so können wir mit Hilfe von Z_2'' und Teilstücken von Z_1'' bzw. Z_1' leicht eine U-Sehne Z_{n+1} der verlangten Art zusammensetzen (Fig. 8).

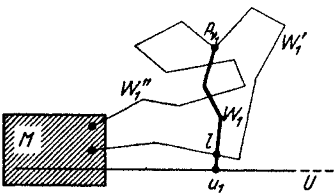

Fig. 7

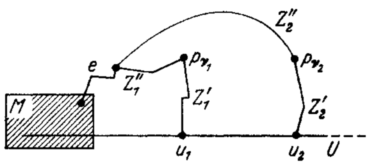

Fig. 8

Andernfalls aber wenden wir auf $M_2 = M_1 \cup Z_2' \cup Z_2''$ wieder diesen Schluß an, usw. Wir erhalten entweder einmal eine U-Sehne der verlangten Art oder aber unendlich viele in M einmündende Wege Z_i'', von denen je zwei außer vielleicht ihren Endpunkten in M niemals eine Ecke gemeinsam haben. Aus dem endlichen M können aber wegen der Lokalfinitheit von G niemals unendlich viele

[4]) Wenn p_{ν_1} auf U liegt (also mit u_1 zusammenfällt), können wir offenbar dieses p_{ν_1} als Z_{n+1} wählen.

verschiedene Kanten herausführen, d. h. wir müssen nach endlich vielen Schritten wirklich einmal zu einem Z_{n+1} der verlangten Art kommen.

Wir erhalten somit eine unendliche Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ von U-Sehnen, die paarweise eckenfremd sind, je ein p_ν enthalten und die Eigenschaft haben, daß die Ecken von $U \cap Z_n$ auf U stets vor denen von $U \cap Z_{n+1}$ kommen ($n = 1, 2, \ldots$). Indem wir den durch die beiden Ecken $\in U \cap Z_n$ eingeschlossenen Teilweg von U durch Z_n ersetzen ($n = 1, 2, \ldots$), gelangen wir zu einem unendlichen Weg V, der unendlich viele Ecken der gegebenen Folge enthält.

Literatur

[1] Halin, R., u. H. A. Jung: Über Minimalstrukturen von Graphen, insbesondere von n-fach zusammenhängenden Graphen. Math. Ann. **152**, 75—94 (1963).

[2] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936.

(Eingegangen am 14. Oktober 1963)