HEINZ, E.
Math. Annalen, Bd. 129, S. 451—454 (1955).

Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind.

Von

ERHARD HEINZ in Göttingen.

Wir betrachten ein Flächenstück $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume der Variabeln x, y, z, welches für $x^2 + y^2 < R^2$ in der Form $z = z(x, y)$ darstellbar ist, wobei $z(x, y)$ eine reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion bedeutet. Wenn die Gaußsche Krümmung K oder die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$ dem absoluten Betrage nach oberhalb einer positiven Zahl α bleiben, so hat dies für R eine Ungleichung der Form $R \leqq \varrho(\alpha)$ zur Folge. Dieser Satz ist in den Fällen $K \geqq \alpha > 0$ und $|H| \geqq \alpha > 0$ leicht zu beweisen[1]). Der Vollständigkeit halber wird dafür in § 1 dieser Note ein Beweis gegeben, der im wesentlichen mit der mittleren Krümmung H operiert und zugleich die bestmöglichen Konstanten $\varrho(\alpha)$ liefert.

Der interessantere Fall $K \leqq -\alpha < 0$, der eng mit dem Hilbertschen Theorem von der Nichtexistenz vollständiger Flächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung zusammenhängt, ist kürzlich von JEFIMOW [3], [4] behandelt worden. Dieser zeigte: Wenn $\mathfrak{F}$ eine eineindeutige Projektion auf ein Quadrat der Seitenlänge l gestattet und immer $K \leqq -1$ ausfällt, so gilt $l \leqq 14$. Der a. a. O. geführte Beweis beruht auf dem Studium der Asymptotenlinien von $\mathfrak{F}$ und benötigt geometrisch-topologische Überlegungen. Es ist daher vielleicht von Interesse, einen *analytischen* Beweis dieses Theorems zu geben, welcher auf anderen Prinzipien beruht. Dies geschieht in § 2, wo außerdem eine quantitative Verschärfung dieses Resultates gewonnen wird (Satz 4). Haupthilfsmittel des Beweises ist dabei eine im wesentlichen von S. BERNSTEIN[2]) herrührende Identität, welche in Satz 3 formuliert ist.

§ 1. Die Fälle $|H| \geqq \alpha > 0$ und $K \geqq \alpha > 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall $|H| \geqq \alpha > 0$ und beweisen

Satz 1. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche der Ungleichung

$$|H| = \left| \frac{(1 + z_y^2)\, z_{xx} - 2\, z_x\, z_y\, z_{xy} + (1 + z_x^2)\, z_{yy}}{2\,(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \geqq \alpha > 0$$

genügt. Dann ist $R \leqq \dfrac{1}{\alpha}$.

[1]) Vgl. S. BERNSTEIN [2], insbes. S. 242—244.
[2]) Vgl. S. BERNSTEIN [1], insbes. S. 96.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $H \geqq \alpha > 0$ vorausgesetzt werden. Sei $0 < R_1 < R$. Dann hat man auf Grund der Identität

$$\frac{(1 + z_y^2)\, z_{xx} - 2\, z_x\, z_y\, z_{xy} + (1 + z_x^2)\, z_{yy}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\right)$$

die Gleichung

$$\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqq R_1^2} 2\, H\, dx\, dy = \oint\limits_{x^2 + y^2 = R_1^2} \left(-\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\, dx + \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\, dy\right).$$

Wegen $H \geqq \alpha > 0$ hat man $\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqq R_1^2} 2\, H\, dx\, dy \geqq 2\, \alpha\, \pi\, R_1^2$.

Ferner ist

$$\oint\limits_{x^2 + y^2 = R_1^2} \left(-\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\, dx + \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\, dy\right) \leqq \oint\limits_{x^2 + y^2 = R_1^2} \left(\frac{z_x^2 + z_y^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\, \pi\, R_1\,.$$

Dies ergibt

$$2\, \alpha\, \pi\, R_1^2 \leqq 2\, \pi\, R_1 \quad \text{oder} \quad R_1 \leqq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Für $R_1 \to R$ folgt die Behauptung.

Der Fall positiver Gaußscher Krümmung kann direkt auf Satz 1 zurückgeführt werden. Es gilt

Satz 2. Es sei $z = z(x, y)$ für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbar und

$$K = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \geqq \alpha > 0\,.$$

Dann hat man $R \leqq \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Beweis. Wegen $K \leqq H^2$ ist $|H| \geqq \sqrt{\alpha}$. Nach Satz 1 folgt daher $R \leqq \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, w.z.b.w.

Man erkennt an dem Beispiel $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, daß die in Satz 1 und Satz 2 bewiesenen Ungleichungen nicht verbessert werden können.

§ 2. Der Fall $K \leqq -\alpha < 0$.

Wir wenden uns jetzt dem Studium von Flächen mit negativer Gaußscher Krümmung zu und beweisen zunächst

Satz 3. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $0 < r < R$ die Identität

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 d\varphi\right) = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r}\right)^2 d\varphi + 2\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqq r^2} (z_{xy}^2 - z_{xx}\, z_{yy})\, dx\, dy\,.$$

Beweis. Setzen wir zur Abkürzung $\tilde{z}(\varrho, \varphi) = z(\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi)$, so wird

$$2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2)\, dx\, dy = \oint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} (z_x\, d z_y - z_y\, d z_x)$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\tilde{z}_\varphi^2}{\varrho^2} + \tilde{z}_\varrho^2 + \frac{\tilde{z}_\varrho \tilde{z}_{\varphi\varphi}}{\varrho} - \frac{\tilde{z}_{\varrho\varphi} \tilde{z}_\varphi}{\varrho} \right)_{\varrho = r} d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\tilde{z}_\varphi^2}{\varrho^2} + \tilde{z}_\varrho^2 \right)_{\varrho = r} d\varphi - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int\limits_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varphi^2)_{\varrho = r}\, d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varrho^2)_{\varrho = r}\, d\varphi - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int\limits_0^{2\pi} (\tilde{z}_\varphi^2)_{\varrho = r}\, d\varphi \right)$$

für $0 < r < R$, was mit der Behauptung identisch ist.

Mit Hilfe der in Satz 3 bewiesenen Gleichung können wir das Hauptergebnis dieser Note beweisen, nämlich

Satz 4. Es sei $z = z(x, y)$ eine für $x^2 + y^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion, welche der Ungleichung

$$K = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \leqq -\alpha < 0$$

genügt. Dann gilt $R \leqq e \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$.

Beweis. Die Funktion

$$f(r) = \int\limits_0^r \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial z(\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi)}{\partial\varphi} \right)^2 \right) d\varphi$$

ist für $0 < r < R$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$f''(r) = 2\pi + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi} \right)^2 d\varphi \right).$$

Ferner ist

$$\pi r^2 \leqq f(r) \leqq \pi^{\frac{1}{2}} r \left(\iint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} (1 + z_x^2 + z_y^2)^2\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit Benutzung von Satz 3 sowie der Ungleichung $K \leqq -\alpha < 0$ erhält man hieraus

$$f''(r) \geqq 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} (z_{xy}^2 - z_{xx} z_{yy})\, dx\, dy$$

$$\geqq 2\alpha \iint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} (1 + z_x^2 + z_y^2)^2\, dx\, dy \geqq \frac{2\alpha}{\pi r^2} f(r)^2,$$

also

$$\frac{d}{d\varrho} (f'(\varrho)^2) \geqq \frac{4\alpha}{3\pi r^2} \frac{d}{d\varrho} (f(\varrho)^3) \qquad \text{für } 0 < \varrho \leqq r.$$

Es folgt

$$f'(r)^2 \geqq \frac{4\alpha}{3\pi r^2} f(r)^3$$

oder

$$-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geqq \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{r} \qquad \text{für } 0 < r < R.$$

Sei jetzt $0 < R_1 < R_2 < R$. Dann erhält man durch Integration die Ungleichung

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{1}{2}} R_1^{-1} &\geqq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geqq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} - f(R_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\geqq \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Läßt man hierin R_2 gegen R konvergieren, so folgt

$$\log\left(\frac{R}{R_1}\right) \leqq \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} R_1^{-1} \qquad \text{für } 0 < R_1 < R$$

und somit auch für $0 < R_1 < \infty$. Setzt man $R_1 = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, so ergibt sich $R \leqq e\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, womit Satz 4 bewiesen ist.

Literatur.

[1] BERNSTEIN, S.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Ann. **69**, 82—136 (1910). — [2] BERNSTEIN, S.: Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale, Ann. Ec. Norm. Sup. 27 (1909), S. 233—256. [3] JEFIMOW, N. V.: Untersuchung einer vollständigen Fläche negativer Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **93**, 393—395 (1953) (russ.). — [4] JEFIMOW, N. V.: Untersuchung der eindeutigen Projektion einer Fläche negativer Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **93**, 609—611 (1953) (russ.).

(Eingegangen am 11. März 1955.)