ROTHSTEIN, W.
Math. Annalen, Bd. 129, S. 96—138 (1955).

Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen.

Von

WOLFGANG ROTHSTEIN in Marburg (Lahn).

Einleitung.

1. In der Arbeit [14] habe ich gezeigt, daß die Singularitäten $(n-1)$-dimensionaler[1]) analytischer Mannigfaltigkeiten — kurz „Flächen" — im Raume C^n von n komplexen Veränderlichen für $n \geqq 3$ ähnlichen Einschränkungen unterliegen wie die der Funktionen mehrerer Variabler. Das wird durch die Erwägung verständlich, daß jede Fläche der Dimension $n-1$ einer Funktion von $n-1$ Veränderlichen entspricht. Die wichtigsten Ergebnisse waren:

I. Die Fläche $\mathfrak{g}^{n-1}$ sei analytisch in der Kugelschale $^1/_2 < \sum\limits_1^n |z_i|^2 < 1$. Dann ist sie es auch in der Kugel $\sum\limits_1^n |z_i|^2 < 1$. Genauer: Es gibt genau eine in der Kugel analytische Fläche $\mathfrak{g}_*^{n-1}$, die in der Kugelschale mit $\mathfrak{g}^{n-1}$ übereinstimmt.

Aus I. geht ein *Kriterium für algebraische Flächen* hervor:

II. Ist $\mathfrak{g}^{n-1}$ außerhalb einer Kugel analytisch, so ist $\mathfrak{g}^{n-1}$ eine algebraische Fläche. Außerdem: Der Durchschnitt einer algebraischen Fläche mit dem Äußeren einer Kugel ist irreduzibel.

Schärfer als I. ist das *Analogon eines Satzes von* HARTOGS[2]):

III. G sei die Vereinigung der Gebiete

$$\left(|z_1| < {}^1/_2;\ \sum_2^n |z_i|^2 < 1\right)$$

und

$$\left(|z_1| < 1;\ {}^1/_2 < \sum_2^n |z_i|^2 < 1\right).$$

Weiter sei

$$H(G) = \left(|z_1| < 1;\ \sum_2^n |z_i|^2 < 1\right).$$

Ist nun $\mathfrak{g}^{n-1}$ in G analytisch, so auch in $H(G)$. Genauer: Es gibt eine und nur eine in $H(G)$ analytische Fläche $\mathfrak{g}_*^{n-1}$, die in G mit $\mathfrak{g}^{n-1}$ übereinstimmt.

Diese Sätze sind an $n \geqq 3$ gebunden; für $n = 2$ sind sie falsch.

Ersetzt man in I.—III. „Fläche $\mathfrak{g}^{n-1}$" durch „Funktion $g(z_1, \ldots, z_n)$" und „analytisch" durch „regulär", so erhält man bekannte Sätze über Funktionen

[1]) Hier ist die „komplexe Dimension" gemeint. Die topologische Dimension ist doppelt so groß. Zu den Begriffen vgl. im übrigen § 1.

[2]) Vgl. [3], S. 39, Satz 8.

von n Veränderlichen. Diese formale Analogie ist überraschend. Denn die Flächen $\mathfrak{g}^{n-1}$ entsprechen ja Funktionen von $n-1$ Veränderlichen. Man gelangt auch nicht durch Spezialisierung von I.—III. zu bekannten Sätzen. Bei der Funktion $z_1 = g(z_2, \ldots, z_n)$ ist z_1 den übrigen Variablen gegenüber bevorzugt, bei der „Fläche $z_1 = g(z_2, \ldots, z_n)$" nicht. Das ist der wesentliche Unterschied. Alle Sätze erweisen sich im übrigen als Konsequenzen des Kontinuitätssatzes [3]).

2. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einheitliche Darstellung der Theorie der Fortsetzung k-dimensionaler Flächen im C^n zu geben. Dabei ist immer $k \geqq 2$ vorausgesetzt; die topologische Dimension der Flächen soll also mindestens vier sein. Das entspricht einer Theorie der Systeme von $n-k$ Funktionen von $k \geqq 2$ Veränderlichen, so wie die Flächen $\mathfrak{g}^{n-1}$ Funktionen von $n-1$ Variablen zugeordnet sind. Daß auch für $k < n-1$ die Dinge ähnlich sind wie bei $k = n-1$, habe ich in [14] schon angedeutet. Jedoch führt die genaue Analyse zu neuen Ergebnissen und einer durchsichtigen Begründung auch der Sätze für $k = n-1$.

Zunächst sei erwähnt, daß die Aussagen I.—III. auch für Flächen $\mathfrak{g}^k$ richtig sind, wenn nur $k \geqq 2$ ist. Sie lassen sich aber erheblich verschärfen. Zum Beispiel gilt über II. hinaus:

IIa. Die Fläche $\mathfrak{g}^k$ sei in der Umgebung der abgeschlossenen Ebene $E^q = (z_1 = \cdots = z_p = 0;\ p = n-q)$ des projektiven C^n analytisch und $\mathfrak{g}^k \cap E^q \neq 0$. Sie sei zudem irreduzibel und $q + k \geqq n + 1$. Dann ist $\mathfrak{g}^k$ eine algebraische Fläche (vgl. die schärferen Sätze 8 und 9, § 7).

Hier ist die wesentliche Bedingung $q + k \geqq n + 1$. Sie sagt aus, daß $\mathfrak{g}^k \cap E^q$ mindestens eindimensional ist. Entsprechende Bedingungen sind in allen Sätzen notwendig.

3. Zur Gliederung der Arbeit ist zu sagen: Die angegebenen Sätze beziehen sich auf Flächen $\mathfrak{g}^k$, welche in den C^n eingebettet sind. Die $\mathfrak{g}^k$ werden als in gewissen Gebieten des C^n analytisch vorausgesetzt. Diese Dinge werden im zweiten Teil (§ 3 — § 8) behandelt. Der erste Teil (§ 1 und § 2) befaßt sich dagegen mit allgemeinen Grundlagen (§ 1) und in § 2 mit den unmittelbaren Konsequenzen, welche sich aus der Existenz der Regularitätshüllen für analytische Flächen mit Parameterdarstellung ergeben. Ein Beispiel mag das erläutern. T sei die Kugelschale $1/2 < \sum_1^k |\tau_j|^2 < 1$ des $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$-Raumes und $H(T)$ die Kugel $\sum_1^k |\tau_j|^2 < 1$. Weiter seien die Funktionen $g_i(\tau)$ in T regulär und die Matrix $\left(\frac{\partial z_i}{\partial \tau_j}\right)$ in T überall vom Range k. Dann bildet $z_i = g_i(\tau)$ das Gebiet T auf eine k-dimensionale analytische Fläche $\mathfrak{E}^k$ des z-Raumes mit der Darstellung $z_i = g_i(\tau)$; $\tau \in T$ ab. $\mathfrak{E}^k$ mit dieser Darstellung nenne ich ein „analytisches Element". Nun bleiben die $g_i(\tau)$ in $H(T)$ notwendig noch regulär (vgl. I. für Funktionen). Auch läßt sich zeigen, daß der Rang von $\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_j}\right)$ innerhalb $H(T)$ höchstens in isolierten Punkten kleiner als k ist.

[3]) Vgl. [3], S. 49 und [2].

Daraus folgt, daß $z_i = g_i(\tau)$ auch $H(T)$ auf eine analytische Fläche $\mathfrak{E}^k_*$ des z-Raumes abbildet. $\mathfrak{E}^k_*$ nenne ich eine Erweiterung von $\mathfrak{E}^k$. Die Erweiterung führt also wieder zu einem Flächenstück mit Parameterdarstellung, einem „Element". In unserem Falle zieht die Fortsetzung der Abbildungsfunktionen eine Fortsetzung der Abbildung nach sich, die wieder eine Erweiterung des Elementes $\mathfrak{E}^k$ zur Folge hat. Die Möglichkeit der Erweiterung gründet sich also auf Eigenschaften des Urbildes T im Parameterraum und der Abbildungsfunktionen. Auf die Einbettung in Gebiete des z-Raumes wird nicht Bezug genommen[4]).

4. Nun zum Inhalt der einzelnen Abschnitte. Im § 1 werden die grundlegenden Begriffe erklärt und die Sätze abgeleitet, die für das folgende unentbehrlich sind. Soweit es möglich ist, habe ich mich auf die Literatur bezogen. Jedoch sind nicht alle Sätze, die ich brauche, soweit mir bekannt, bisher ausdrücklich formuliert und bewiesen worden. Statt des früher üblichen Ausdrucks „Fläche" benutze ich den jetzt gebräuchlichen „analytische Menge". Daneben kommt auch noch „k-dimensionale Fläche" vor in derselben Bedeutung wie „irreduzible k-dimensionale analytische Menge". „Dimension" heißt immer „komplexe" Dimension. Die topologische Dimension ist doppelt so groß. In § 1 ist $k = 1$ noch zugelassen.

Der Inhalt des § 2 ist eine genauere Untersuchung der oben skizzierten Sachverhalte. Der von dem WEIERSTRASSschen abweichende Begriff des „Elementes" ist ausreichend allgemein zu bestimmen. Darauf werden Bedingungen angegeben, unter denen die Abbildungsfunktionen fortsetzbar sind und zu einer Erweiterung des gegebenen Elementes führen. Daß dies keineswegs immer der Fall ist, wenn die Funktionen fortsetzbar sind, geht aus einem bekannten Beispiel hervor (vgl. [12], S. 177). Eine wichtige Rolle spielt hierbei die Aufgabe, zu einer vorgelegten Fläche des z-Raumes passende Parameter zu finden. Diese Dinge werden trotz ihrer grundsätzlichen Bedeutung hier nur soweit behandelt, als sie im folgenden gebraucht werden. Das Ergebnis sind die Sätze 2.4 und 2.5. Letzterer wird im § 4 wesentlich benutzt. — Unmittelbare Folgerungen aus den Ergebnissen des § 2 sollen in einer anderen Arbeit gezogen werden.

Der zweite Teil der Arbeit beginnt in § 3 mit der Kennzeichnung der Konvexitätseigenschaften von Hyperflächen im Anschluß an LEVI[5]) und KRZOSKA. Die von KRZOSKA begonnene Untersuchung muß weitergeführt werden, damit sie für die Flächentheorie ausreicht. Die entscheidende Rolle bei einer Hyperfläche $\varphi = 0$ spielt der Index q (= Anzahl der positiven

[4]) Die Einsicht, daß es grundsätzlich wichtig ist, diese Eigenschaften von denjenigen zu trennen, die auf der Einbettung in den z-Raum beruhen, verdanke ich Unterhaltungen mit Herrn K. REIDEMEISTER über meinen ursprünglichen Beweis des Satzes von der lokalen Fortsetzung (Satz 1 und 2, § 4). Ich bin daher Herrn K. REIDEMEISTER für sein freundliches Interesse und die Anregungen, die ich in diesen Unterhaltungen empfing, sehr zu Dank verpflichtet.

[5]) Vgl. [3], 4. Kap., § 3.

Quadrate in der Normalform) der HERMITEschen Form $\sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} u_\mu \bar{u}_\nu$ auf der Ebene $\sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu} u_\mu = 0$, gebildet in einem Punkte ζ^0 von $\varphi = 0$: Es gibt eine q-dimensionale Fläche durch ζ^0, welche sonst $\varphi \leqq 0$ nicht trifft. Andererseits schneidet jede $(n - q)$-dimensionale Fläche $\varphi > 0$, wenn sie durch ζ^0 geht. — Das sind die für die Existenz und Einzigkeit der „lokalen Fortsetzung" (vgl. § 4) grundlegenden geometrischen Sachverhalte.

§ 4 bringt zwei Sätze über die lokale Fortsetzung. Der eine lautet:

ζ^0 sei ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$, U eine Umgebung von ζ^0 und $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$. q sei der oben erklärte Index in ζ^0. Es sei $\mathfrak{g}^k$ in $\bar{U}$ analytisch und $q + k \geqq n + 1$. Dann gibt es eine Umgebung U_* von ζ^0 und eine in U_* analytische Menge $\mathfrak{g}^k_*$, welche in $U_* \cap \bar{U}$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Je zwei solche Fortsetzungen sind in einer vollen Umgebung von ζ^0 gleich.

Die charakteristische Bedingung ist $q + k \geqq n + 1$. Sie ist unentbehrlich. Für Funktionen kann man formal $k = n$ setzen und erhält die Forderung $q \geqq 1$. Die Hyperfläche muß also — wie zu erwarten — von der Seite $\varphi > 0$ konvex in bezug auf eindimensionale Flächen sein, soll man der Fortsetzbarkeit der Funktion sicher sein.

§ 5 bringt Hilfssätze über den Zusammenschluß lokaler Fortsetzungen zu Fortsetzungen im Großen. Darauf wird die Fortsetzung analytischer Flächen behandelt, die in der Umgebung des Randes eines beschränkten Sterngebietes gegeben sind. Das ist die Grundlage für § 6.

Unabhängig vom § 6, und deshalb hier zuerst besprochen, sind die Sätze 8, 9 des § 7 (vgl. den unter 2. angeführten Satz IIa) und das für weitere Untersuchungen besonders wichtige Analogon von III in § 8.

Im § 6 wird zunächst der Begriff der „*q-Konvexität*" eines Gebietes eingeführt. Er ist ein Analogon zur „*Regulärkonvexität*"[6]) und bezieht sich auf Systeme von $n - q$ Funktionen. Für $q = n - 1$ geht er in die Regulärkonvexität über. Wie regulärkonvexe Gebiete sich von innen durch *analytische Polyeder* approximieren lassen, so q-konvexe durch „*analytische q-Polyeder*". Letztere sind von außen konvex in bezug auf *q-dimensionale analytische Flächen*. Sie können einspringende Kanten haben. Im allgemeinen sind sie keine Regularitätsgebiete[7]). Jedoch haben sie, jedenfalls wenn sie beschränkt sind, wie diese einen zusammenhängenden Rand. Ein einfaches Beispiel im (u, v, w)-Raum: Der Durchschnitt von $|w| < 1$ und $(|u| < 1/_2;\ |v| < 1) \cup \cup (|u| < 1;\ |v| < 1/_2)$ ist ein 1-Polyeder. Es gilt nun der Satz:

G sei beschränkt und q-konvex, G_0 ganz in G gelegen. Die Fläche $\mathfrak{g}^k$ sei in $G - G_0$ analytisch und komme dem Rand von G beliebig nahe. Ist weiter $k \geqq 2s$ $(s = n - q)$, so gilt: Es gibt eine in G analytische Fläche $\mathfrak{g}^k_*$, die $\mathfrak{g}^k$ enthält. Außerdem gibt es ein ganz in G gelegenes Gebiet G_*, so daß $\mathfrak{g}^k_* = \mathfrak{g}^k$ in $G - G_*$ ist (vgl. Satz 7).

[6]) Vgl. [3], S. 72.

[7]) Vgl. [1].

Die Bedingung $k \geqq 2s$ ist zu scharf. Ich werde später zeigen, daß $k \geqq s + 1$ genügt.

5. Auf einen wesentlichen Punkt, der in den Beweisen zu beachten ist, sei noch hingewiesen. Es sei P ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$, U eine Umgebung von P und $\bar{U} = U \cap (\varphi > 0)$. Sind nun g_1 und g_2 in U reguläre Funktionselemente, die in $\bar{U}$ übereinstimmen, so ist auch in U notwendig $g_1 = g_2$. Bei Flächen $\mathfrak{g}_1^k$ und $\mathfrak{g}_2^k$ ist das jedoch keineswegs richtig. Ist etwa $\varphi > 0$ das Kugelinnere, so gibt es bekanntlich von einander verschiedene Flächenstücke $\mathfrak{g}_1^{n-1}$ und $\mathfrak{g}_2^{n-1}$ durch P, welche $\varphi \geqq 0$ überhaupt nicht schneiden. Sie stimmen also in $\bar{U}$ überein (da beide dort keinen Punkt haben), in U jedoch nicht. Auf die Gleichheit von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ in einer vollen Umgebung von P kann erst geschlossen werden, wenn $\varphi > 0$ etwa das Kugeläußere ist. $\varphi > 0$ muß also Konvexitätseigenschaften haben. — Das ist die Ursache dafür, daß I. für Funktionen richtig bleibt (Satz von HARTOGS und OSGOOD), für Flächen aber falsch wird, wenn man die Kugelschale durch die Differenz $G - G_0$ zweier beliebiger Gebiete ($G_0 \Subset G$) ohne Konvexitätseigenschaften ersetzt. Auch die Bedingung $k \geqq 2s$ des Satzes 7 rührt daher.

Inhalt.

§ 1. Grundlagen.

1.1. Analytische Mengen und Gebilde.

1.11 Analytische Mengen [8]).

Die Punktmenge $\mathfrak{M}$ des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen ist *analytisch im Punkte P*, wenn es eine Umgebung $U(P)$ und dort reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ gibt, so daß $\mathfrak{M} \cap U(P)$ genau aus den gemeinsamen Nullstellen der f besteht. Ist $\mathfrak{M}$ in jedem Punkte eines Gebietes G analytisch, so ist $\mathfrak{M}$ *in G analytisch.*

$\mathfrak{M}$ sei analytisch in G. Gibt es nun zwei nichtleere von $\mathfrak{M}$ verschiedene in G analytische Mengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, so daß $\mathfrak{M} \cap G = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ ist, dann ist $\mathfrak{M}$ *in G reduzibel.* Anderenfalls heißt $\mathfrak{M}$ *in G irreduzibel.* $\mathfrak{M}$ ist *im Punkte P irreduzibel*, wenn es beliebig kleine Umgebungen $U(P)$ gibt, in denen $\mathfrak{M}$ irreduzibel ist. — Es gelten die Sätze:

1. $\mathfrak{M} \cap G$ ist die Vereinigung abzählbar vieler in G irreduzibler analytischer Mengen, der *Komponenten.*

---

[8]) Vgl. [7] und vor allem [13], dort auch weitere Literaturangaben.

2. Zu jedem $P \in \mathfrak{M}$ gibt es Umgebungen $U(P)$, so daß $\mathfrak{M} \cap U(P)$ die Vereinigung endlich vieler in $U(P)$ analytischer, in P irreduzibler Mengen — der *Primelemente* — ist.

Jeder (irreduziblen) Komponente $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M} \cap G$ läßt sich wie folgt eine *(„komplexe") Dimension* k zuordnen. Die Punkte P mit Umgebungen $U(P)$ so, daß $\mathfrak{M}' \cap U(P)$ einem $2k$-dimensionalen Simplex homöomorph ist, liegen auf $\mathfrak{M}'$ dicht. k ist dann die Dimension von $\mathfrak{M}'$.

Die Koordinaten seien $(v_1, \ldots, v_m, \tau_1, \ldots, \tau_k)$. Die *Projektion* von $\mathfrak{M}$ in den τ-Raum ist die Menge derjenigen $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, die als Koordinaten von $\mathfrak{M}$-Punkten vorkommen.

Für die Theorie der analytischen Mengen ist der folgende Satz von besonderer Bedeutung. *Dazu setzen wir voraus:* Die Veränderlichen seien $(v_1, \ldots, v_m, \tau_1, \ldots, \tau_k)$, das Gebiet H das Produkt des Zylinders $\bigcap\limits_1^m (|v_j| < 1)$ mit dem Gebiet T des τ-Raumes. $\mathfrak{M}$ sei in H analytisch. Überdies möge jede Ebene $\tau_1 - \tau_1^0 = \cdots = \tau_k - \tau_k^0 = 0$ mit $\mathfrak{M}$ nur isolierte Punkte gemein haben. Dann gilt der

Einbettungssatz[9]. Zu jedem Punkte $P = (v^0, \tau^0) \in \mathfrak{M}$ gibt es eine Polyzylinder-Umgebung $U(P) = (U_v, U_\tau)$ und eine in ihr analytische Menge $\mathfrak{M}^*$, welche $\mathfrak{M} \cap U(P)$ umfaßt, mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Projektionen von $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{M} \cap U(P)$ in den τ-Raum sind identisch.

2. Diese Projektion heiße $\mathfrak{M}^*_\tau$. Sie ist eine analytische Menge, oder der volle Polyzylinder U_τ.

3. Es gibt Polynome mit in U_τ regulären Koeffizienten

$$\omega_i(v_i, \tau) = (v_i - v_i^0)^{\lambda_i} + A_1^{(i)}(\tau)(v_i - v_i^0)^{\lambda_i - 1} + \cdots + A_{\lambda_i}^{(i)}(\tau),$$

so daß $\mathfrak{M}^*$ genau dargestellt wird durch

$$\omega_1 = \cdots = \omega_m = 0; \ \tau \in \mathfrak{M}^*_\tau.$$

Es ist $A(\tau^0) = 0$ und für alle Wurzeln (v_i', τ') von $\omega_i = 0$ gilt $v' \in U_v$.

Zusatz. Alle Komponenten von $\mathfrak{M}$ seien k-dimensional. Dann heiße $\mathfrak{M}$ selbst k-dimensional. Alsdann gilt noch:

4. $\mathfrak{M}^*_\tau$ ist der volle Polyzylinder.

5. $U(P)$ und die ω_i lassen sich so wählen, daß

a) die Projektion von $\mathfrak{M} \cap U(P)$ in den (v_i, τ)-Raum durch $\omega_i = 0$ genau gegeben ist;

b) zu jedem Punkt $P^* = (v^*, \tau^*) \in \mathfrak{M}$, dessen τ^* nicht auf der Vereinigung der Diskriminantenflächen der ω_i liegt, eine Umgebung $U(P^*)$ existiert, in welcher $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ ist.

6. Ist $\mathfrak{M}$ irreduzibel in P, so können die ω_i irreduzibel gewählt werden.

1.12 Ausgezeichnete analytische Gebilde.

Jeder irreduziblen analytischen Menge $\mathfrak{M}$ der Dimension k ist nach Weierstrass ein analytisches Gebilde k-ter Stufe $\widetilde{\mathfrak{M}}$ zugeordnet[10]. Das ist ein

[9] Vgl. [13], Satz 1.
[10] Vgl. [12], S. 170 und [5].

topologischer Raum, dessen Punkte die Paare $(P, \mathfrak{P})$ sind. Hier ist P ein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ ein zugehöriges Primelement. Wir fassen $\widetilde{\mathfrak{M}}$ als Punktmenge über dem C^n auf. Die Spur von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — das ist die Projektion in den C^n — ist $\mathfrak{M}^k$. Die Punkte auf den Selbstdurchdringungen von $\mathfrak{M}^k$ sind mehrfach zu zählen.

Es sei nun $\omega(u, \tau) = (u - u^0)^\lambda + A_1(\tau) \cdot (u - u^0)^{\lambda-1} + \cdots + A_\lambda(\tau)$ ein in $(|u| < \infty; \tau \in T)$ irreduzibles Polynom, A regulär in T. Ist außerdem $A(\tau^0) = 0$ und ω in (u^0, τ^0) irreduzibel, so heißt ω ausgezeichnet.

Definition 1.1. Das durch $\omega = 0$ über $(|u| < \infty; \tau \in T)$ definierte analytische Gebilde werde $\Omega(u, \tau)$ genannt. Ist ω ausgezeichnet, so auch $\Omega(u, \tau)$ und (u^0, τ^0) sein Mittelpunkt.

Weiter seien $g_1, \ldots, g_n$ auf $\Omega(u, \tau)$ eindeutige reguläre Funktionen. g ist also im Punkte (u', τ') eine reguläre Funktion von τ im gewöhnlichen Sinne, wenn die Diskriminante $D(\tau)$ von ω in τ' nicht verschwindet. In den übrigen Punkten ist g stetig[11]).

Definition 1.2. Die durch $v_i = g_i(P)$; $P \in \Omega(u, \tau)$ über dem (u, τ, v)-Raum erklärte Punktmenge $\Omega(u, \tau, v)$ heißt analytisches Gebilde der Dimension k. Ist $\Omega(u, \tau)$ ausgezeichnet (Mittelpunkt $P^0(u^0, \tau^0)$) und $v_i^0 = g_i(P^0)$, so heißt auch $\Omega(u, \tau, v)$ ausgezeichnet und (u^0, τ^0, v^0) sein Mittelpunkt.

Dem Gebilde $\Omega(u, \tau, v)$ ist zugeordnet erstens die analytische Menge $\overline{\Omega}(u, \tau, v)$ der Spurpunkte im (u, τ, v)-Raum, und zweitens ihre Projektion in den (τ, v)-Raum. Diese gleichfalls analytische, k-dimensionale und irreduzible Menge besitzt dann die Parameterdarstellung $v_i = g_i(P)$. Sie soll kanonisch heißen. Das Gebilde $\Omega(u, \tau)$ tritt hier nur als Hilfsmittel zur Erklärung der g_i auf.

Definition 1.3. Läßt sich die Menge $\mathfrak{M}^k$ des (τ, v)-Raumes als Projektion eines Gebildes $\Omega(u, \tau, v)$ darstellen, so heiße die Parameterdarstellung $v_i = g_i(P)$ (g regulär auf $\Omega(u, \tau)$) kanonisch. Ist $\Omega(u, \tau)$ ausgezeichnet, so ist $\mathfrak{M}^k$ und seine Darstellung ausgezeichnet.

Aus dem Einbettungssatz ergibt sich nun der

Satz von WEIERSTRASS[12]). *Unter den Voraussetzungen des Einbettungssatzes können die Primelemente von $\mathfrak{M}$ in jedem Punkte so gewählt werden, daß sie ausgezeichnete Mengen sind. Sie haben dann also eine ausgezeichnete kanonische Darstellung. Sie mögen ausgezeichnet heißen und (v^0, τ^0) ihr Mittelpunkt.*

Beweis. $U(P) = (U_v(P), U_\tau(P))$ und die ω_i seien gemäß (5), (6) des Einbettungssatzes gewählt und Q ein Punkt des Primelementes $\mathfrak{P}$, der (5 b) genügt. In einer Polyzylinder-Umgebung $U^*(Q) = (U_v^*, U_\tau^*)$ besitzt $\mathfrak{P}$ dann eine reguläre Darstellung $v_i = g_i(\tau)$. Man erhält g_i durch Auflösen der Gleichung $\omega_i = 0$. Es sei U_τ' die an den Diskriminantenflächen der ω_i geschlitzte Umgebung $U_\tau(P)$. In U_τ' sind die g_i unbeschränkt regulär fortsetzbar; der

[11]) Die Argumente der g_i sind die Punkte des Gebildes $\Omega(u, \tau)$, die durch τ ja nicht eindeutig bestimmt sind. Trotzdem werde ich diese Punkte häufig auch mit τ bezeichnen. Mißverständnisse sind nicht zu befürchten.

[12]) Vgl. [12], S. 132.

über U'_τ gelegene Teil $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{P}$ ergibt sich durch gleichzeitige Fortsetzung in der Darstellung $(v_1, \ldots, v_m) = (g_1, \ldots, g_m)$. Die g_i sind in U_τ selbst algebroid und λ_i-wertig. Es gibt nun ein ausgezeichnetes analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ über dem Gebiete $(|u| < \infty;\ U_\tau)$ mit dieser Eigenschaft: Die Funktionen g_i sind auf $\Omega(u, \tau)$ regulär und eindeutig. Zu zwei verschiedenen Punkten von $\Omega(u, \tau)$ mit gleicher Spur gehören verschiedene Systeme $(g_1^*, \ldots, g_m^*)$ von Zweigen der g_i (vgl. [12], S. 118).

$\mathfrak{P}$ erhält man aus $\mathfrak{P}'$, indem man die Häufungsstellen hinzunimmt. Die Darstellung $v_i = g_i(\tau);\ \tau \in \Omega(u, \tau)$ ist die gesuchte.

1.13 Maximumprinzip und Folgerungen[13]).

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{P}$ ein ausgezeichnetes Primelement mit dem Mittelpunkt O, $h(P)$ eine auf $\mathfrak{P}$ eindeutige reguläre Funktion. Ist dann $|h(O)| = \max|h(\mathfrak{P})|$ so ist $h(P)$ eine Konstante.

Beweis. $v_i = g_i(\tau);\ \tau \in \Omega$ sei die Darstellung von $\mathfrak{P}$ gemäß Definition 3. Durch sie geht h in eine Funktion $\bar{h}(\tau)$ über, die auf Ω regulär ist. Sie hat ihr Maximum im Mittelpunkt M von Ω. Ω habe r Blätter; $\bar{h}$ hat also r Zweige $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_r$. Die symmetrischen Grundfunktionen der $\bar{h}_\varrho$ sind in der τ-Projektion T von Ω eindeutig und regulär. Sie sind sämtlich Konstanten. Sei etwa $s(\tau) = \Sigma\, \bar{h}_\varrho$. Dann ist $\max|s| \leqq \max \Sigma |\bar{h}_\varrho| \leqq \Sigma \max |\bar{h}_\varrho| \leqq r\,|\bar{h}(M)| = |s(M)|$. Also ist $s \equiv s(M)$ nach dem Satz vom Maximum. Entsprechend schließt man bei den anderen Grundfunktionen. Da sie nun alle konstant sind, muß auch $\bar{h}$ und dann h selbst konstant sein.

Folgerungen. Die Bedeutung des Einbettungssatzes beruht auf Folgendem. Ist die Menge $\mathfrak{M}$ im Punkte P analytisch, so sind nach geeigneter Wahl affiner Koordinaten und der Umgebung $U(P)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Der WEIERSTRASSsche Satz kann daher auch so ausgesprochen werden: *P sei ein Punkt der analytischen k-dimensionalen Menge $\mathfrak{M}$. Die zu P gehörigen Primelemente und die Koordinaten lassen sich dann so bestimmen, daß die Primelemente ausgezeichnete kanonische Darstellungen besitzen.* Daraus und aus dem Hilfssatz ergeben sich wichtige Aussagen.

Maximumprinzip. *Die Menge $\mathfrak{M}$ sei in G analytisch und irreduzibel. $h(P)$ sei eine auf $\mathfrak{M}$ reguläre eindeutige Funktion. Weiter sei $|h(Q)| = \max|h(\mathfrak{M})|$ und $Q \in \mathfrak{M}$. Dann ist h eine Konstante.*

Der Beweis folgt sofort aus dem Hilfssatz und dem WEIERSTRASSschen Satz.

Satz 1.1. Sei $\mathfrak{M}$ in $U(P)$ analytisch und a eine in $U(P)$ reguläre Funktion mit $|a(P)| = 1$. Schneidet $\mathfrak{M}$ das Gebiet $|a| > 1$ nicht, so muß $\mathfrak{M}$ auf der analytischen Menge $a = a(P)$ liegen.

Das ergibt sich, wenn man das Maximumprinzip auf die Funktionen anwendet, welche a auf den Komponenten von $\mathfrak{M}$ induziert.

Satz 1.2. P sei ein Punkt der analytischen Hyperebene E der topologischen Dimension $2n-1$, $U(P)$ eine Umgebung von P und $\mathfrak{M}$ eine k-dimensionale

---

[13]) Vgl. [16], S. 233.

analytische Menge, welche P enthält. Dann liegt $\mathfrak{M}$ entweder ganz auf E oder aber $\mathfrak{M}$ schneidet beide Seiten von E.

Nach Satz 1.1 ist das richtig, wenn E eine Darstellung $|a| = 1$ mit regulärer Funktion a hat. Das ist der Fall. — Aus diesem Satze folgt, daß es beschränkte, abgeschlossene in allen ihren Punkten analytische Mengen einer Dimension $k \geqq 1$ nicht gibt. Das ist

Satz 1.3. Das Gebiet G sei beschränkt und $\mathfrak{M}^k$ in G analytisch ($k \geqq 1$). Dann kommt $\mathfrak{M}^k$ dem Rand von G beliebig nahe (vgl. [13], Satz 7).

Beweis. Anderenfalls muß es eine Kugel K geben, welche $\mathfrak{M}^k$ umfaßt und deren Rand einen Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ enthält. Die analytische Hypertangente E von K in P wird von $\mathfrak{M}^k$ nur in P berührt. Die andern Punkte von $\mathfrak{M}^k$ liegen alle auf derselben Seite von E. Das widerspricht Satz 1.2.

Ein anderer Beweis des Maximumprinzips (und des Satzes 1.3) folgt aus

Satz 1.4. $\mathfrak{M}$ sei in G analytisch und irreduzibel, $h(P)$ eine auf $\mathfrak{M}$ reguläre eindeutige Funktion. Ist nun $h(Q) = 0$ (Q auf $\mathfrak{M}$) und $\varepsilon > 0$ genügend klein, so gilt: Entweder ist h (auf $\mathfrak{M}$) identisch Null, oder h nimmt alle Werte c' des Kreises $|c| < \varepsilon$ an (insbesondere die reellen Werte).

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, daß $\mathfrak{M}$ erstens ein ausgezeichnetes Primelement mit dem Mittelpunkt Q und zweitens eindimensional ist. Dann hat $\mathfrak{M}$ eine Darstellung $v_i = g_i(\tau_1)$; $\tau_1 \in \Omega(u, \tau_1)$ mit nur einem Parameter τ_1. Die τ_1-Projektion von Ω ist ein Gebiet über der τ_1-Ebene. $h(P)$ gehe in $\bar{h}(\tau_1)$ über. Die Behauptung folgt nun aus der Gebietstreue der Abbildung $w = \bar{h}(\tau_1)$.

Kanonische Darstellung im Großen.

Voraussetzungen. $\mathfrak{M}$ sei eine im Gebiet $\left(\bigcap\limits_1^m (|v_i| < 1);\ \tau \in T\right)$ des (v, τ)-Raumes analytische, irreduzible, k-dimensionale Menge. Überdies möge $\mathfrak{M}$ vom Rande des Gebietes $\bigcap\limits_1^m (|v_i| < 1)$ einen positiven (euklidischen) Abstand haben. Dann gilt der

Satz 1.5. Es gibt über ($|u| < \infty$; $\tau \in T$) ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ und auf $\Omega(u, \tau)$ reguläre eindeutige Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ so, daß $\mathfrak{M}$ durch $v_1 = g_1(\tau); \ldots; v_m = g_m(\tau)$; $\tau \in \Omega$ genau dargestellt wird. $\Omega(u, \tau)$ ist im allgemeinen nicht ein ausgezeichnetes Gebilde. Diese Darstellung heiße kanonisch.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen und von Satz 1.3 trifft jede Ebene $\tau_1 - \tau_1^0 = \cdots = \tau_k - \tau_k^0 = 0$ die Menge $\mathfrak{M}$ nur in isolierten Punkten. Daher sind die Bedingungen für den Einbettungssatz in jedem Punkte von $\mathfrak{M}$ erfüllt. Man überdecke nun $\left(\bigcap\limits_1^m (|v_i| < 1);\ \tau \in T\right)$ mit abzählbar vielen Polyzylinder-Umgebungen $U(P)$ der Art, wie sie im Einbettungssatz vorkommen. Zu jeder $U(P)$ gehören ausgezeichnete Polynome $\omega_i^P(v_i, \tau)$ mit dem Mittelpunkt P. Sei T' das an der Vereinigung der Diskriminantenflächen der ω_i^P

geschlitzte Gebiet T. Wie beim WEIERSTRASSschen Satz folgt: Ist Q ein Punkt von $\mathfrak{M}$, der über T' liegt, so hat $\mathfrak{M}$ in einer Umgebung $U(Q)$ eine reguläre Darstellung $v_i = g_i(\tau)$. Da $\mathfrak{M}$ vom Rande von $\bigcap_1^m (|v_i| < 1)$ einen positiven Abstand hat, sind die g_i in T' unbeschränkt regulär fortsetzbar, endlich-deutig und in T selbst algebroid. Jedes g_i genügt daher einer in $(|v_i| < \infty;\ \tau \in T)$ irreduziblen regulären Gleichung $v_i^{m_i} + A_1^{(i)}(\tau)\, v^{m_i - 1} + \cdots + A_{m_i}^{(i)}(\tau) = 0$. Den über T' gelegenen Teil $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ erhält man durch gleichzeitige Fortsetzung der g_i. Es gibt nun ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau)$ über dem Gebiete $(|u| < \infty;\ \tau \in T)$ des (u, τ)-Raumes mit der Eigenschaft: Die Funktionen sind auf $\Omega(u, \tau)$ regulär und eindeutig. Zu zwei verschiedenen Punkten von Ω mit derselben Spur gehören verschiedene Systeme $(g_1^*, \ldots, g_m^*)$ von Zweigen der g_i (vgl. [12] S. 118). $\mathfrak{M}$ erhält man aus $\mathfrak{M}'$, indem man die Häufungsstellen hinzunimmt. Die Darstellung $v_1 = g_1(\tau); \ldots ; v_m = g_m(\tau)$ ist die gesuchte.

§ 2. Analytische Elemente und ihre Erweiterung.

2.1 Analytische Elemente[14]).

Es sollen besondere analytische Mengen mit bequemen Parameterdarstellungen, die analytischen Elemente, ausgezeichnet werden. Dazu gehen wir von einem Gebilde $\Omega^*(u, \tau)$ aus, definiert im Gebiete $(|u| < \infty;\ \tau \in T^*)$ des (u, τ)-Raumes durch eine irreduzible reguläre Gleichung

$$\omega(u, \tau) = u^\lambda + A_1(\tau)\, u^{\lambda-1} + \cdots + A_\lambda(\tau) = 0.$$

Es sei T ganz in T^* enthalten und $\Omega(u, \tau)$, der über T gelegene Teil von Ω^*, noch irreduzibel. Die Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ seien auf Ω^* regulär und eindeutig. Darüber hinaus wird von der durch $z_i = g_i(\tau)$ vermittelten Abbildung gefordert:

a) Das Gleichungssystem $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat auf Ω^* nur isolierte Lösungen.

b) Die Punkte auf Ω^* (in denen die Diskriminante nicht verschwindet und) für welche der Rang der Matrix $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial \tau_j}\right)$ kleiner als k ist, erfüllen höchstens $(k-1)$-dimensionale analytische Mengen.

Dazu nehmen wir noch eine Bedingung, die nicht immer erfüllt zu sein braucht:

c) Ist R Randpunkt von Ω und z' sein Bild, so hat das System $z_i' = g_i(\tau)$ innerhalb von Ω keine Lösung.

Definition 2.1. 1. Erfüllt die Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ von *Ω^* die Bedingungen a), b), so heiße sie auf Ω^* zulässig und auf Ω zulässig im weiteren Sinne.*

2. Ist auch c) noch erfüllt, so heißt $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω zulässig im engeren Sinne.

Definition 2.2. Die Punktmenge $\mathfrak{E}^k$ des z-Raumes ist ein analytisches Element der Dimension k, wenn sie auf ein Gebilde Ω durch eine auf ihm im engeren

[14]) Vgl. [12], S. 170. Hier wird „Element“ anders erklärt.

Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ bezogen ist. Die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ (g_i regulär auf Ω^*) ist eine zulässige Parameterdarstellung.

Die Berechtigung dieser Definition folgt aus

Satz 2.1. Jedes analytische Element $\mathfrak{E}^k$ ist eine irreduzible, k-dimensionale analytische Menge.

Beweis. 1. *$\mathfrak{E}^k$ ist eine analytische Menge.* Durch $z = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega\,(u, \tau)$ wird nach Definition 1.2 ein analytisches Gebilde $\Omega(u, \tau, z)$ des (u, τ, z)-Raumes erklärt. Seine z-Projektion ist $\mathfrak{E}^k$. Die Menge der Spurpunkte von $\Omega(u, \tau, z)$ sei $\overline{\Omega}$. Sie ist eine analytische Menge. Ist nun (u^0, τ^0, z^0) ein Punkt auf $\overline{\Omega}$, so trifft die Ebene $z_1 - z_1^0 = \cdots = z_n - z_n^0 = 0$ wegen der Bedingung a) $\overline{\Omega}$ nur in isolierten Punkten. Alle diese Schnittpunkte sind wegen c) innere Punkte von $\overline{\Omega}$. Infolgedessen kann man ein Gebiet $H = \bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i$; u, τ beliebig) so angeben, daß gilt: $H \cap \overline{\Omega}$ ist analytisch und beschränkt; auf $H \cap \overline{\Omega}$ treffen die Voraussetzungen des Einbettungssatzes zu. Dabei spielt z die Rolle von τ, (u, τ) die von v. Aus 1., 2. des Satzes geht hervor, daß die z-Projektion von $H \cap \overline{\Omega}$, das ist aber $\mathfrak{E}^k \cap \bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i)$, eine analytische Menge oder der Polyzylinder $\bigcap_1^n (|z_i - z_i^0| < \varepsilon_i)$ ist. Unter 2. ergibt sich mit, daß der erste Fall eintritt.

2. *$\mathfrak{E}^k$ ist k-dimensional.* z^0 sei ein Punkt auf $\mathfrak{E}^k$. Er hat endlich viele Urbilder $P_1, \ldots, P_s$ innerhalb $\Omega\,(u, \tau)$. Seien $U(P_\sigma)$ noch genauer zu bestimmende Umgebungen der P_σ auf $\Omega(u, \tau)$. Dann gibt es eine Umgebung $U(z^0)$, so daß $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ in der Vereinigung der Bilder U'_σ der $U(P_\sigma)$ enthalten ist. Sonst müßte z^0 außerdem noch Bild eines Randpunktes von Ω sein. Das ist wegen c) nicht der Fall. Da $\mathfrak{E}^k$ genau aus den Bildpunkten von Ω besteht, ist also

$$U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k = U(z^0) \cap \bigcup_1^s U'_\sigma.$$

Sei nun zunächst angenommen, daß kein P_σ Verzweigungspunkt von Ω ist. Dann gibt es eine Umgebung $V(P_\sigma)$ auf Ω, welche keinen Verzweigungspunkt enthält. In ihr sind die g_i gewöhnliche reguläre Funktionen von τ. Das Bild einer passenden Umgebung $V^*(P_\sigma) \subset V(P_\sigma)$ ist eine k-dimensionale analytische Menge. Denn wegen der Bedingung a) sind für das jetzt im gewöhnlichen Sinn reguläre System $z_i = g_i(\tau)$ die Voraussetzungen des Satzes über die „Parameterdarstellung eines Elementes"[15]) erfüllt. Es sei $U(P_\sigma) = V^*(P_\sigma)$. Nun folgt

α) *Ist z^0 nicht Bild eines Verzweigungspunktes, so ist $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ genau k-dimensional.*

Da die Bilder der Nicht-Verzweigungspunkte auf $\mathfrak{E}^k$ dicht liegen, gilt noch

β) *$U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ ist überall mindestens k-dimensional.* Schließlich gilt

γ) *Die Bilder der Verzweigungspunkte liegen auf $U(z^0) \cap \mathfrak{E}^k$ nirgends dicht.*

Beweis. Die Verzweigungsfläche $\mathfrak{g}$ von $\Omega(u, \tau)$ läßt sich darstellen als Vereinigung von abzählbar vielen Gebilden $\mathfrak{g}_\nu$, deren Dimensionen zwischen 0

[15]) Vgl. [12], S. 173.

und $k-1$ liegen, mit den Eigenschaften: 1. $\mathfrak{g}_\nu$ hat eine Parameterdarstellung $u = u(\sigma)$; $\tau = \tau(\sigma)$; $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ mit in $\bigcap\limits_1^h (|\sigma_\lambda| < 1)$ regulären Funktionen u, τ ($h = \dim \mathfrak{g}_\nu$). 2. Die Funktionen $g_i(\tau)$ gehen auf $\mathfrak{g}_\nu$ in eindeutige reguläre Funktionen $g_i(\sigma)$ über[16]). Sie definieren eine Abbildung von $\mathfrak{g}_\nu$ in den z-Raum, welche wegen a) den Bedingungen des Satzes über die „Parameterdarstellung eines Elementes" genügt. Also ist das Bild $\mathfrak{g}'_\nu$ von $\mathfrak{g}_\nu$ eine h-dimensionale analytische Menge (h = Dimension von $\mathfrak{g}_\nu$). Da $h \leqq k-1$ ist, liegt $\mathfrak{g}'_\nu$ auf $\mathfrak{E}^k \cap U(z^0)$ nirgends dicht. Dasselbe gilt dann für die Vereinigung $\mathfrak{g}'$ der $\mathfrak{g}'_\nu$. Denn wegen der Stetigkeit der Abbildung folgt aus $P'_\nu \in \mathfrak{g}'_\nu$, und $Q' = \lim P'_\nu$, daß Q' auf dem Bild von $\mathfrak{g}$, also in wenigstens einem $\mathfrak{g}'_\nu$ liegt.

3. *$\mathfrak{E}^k$ ist irreduzibel.*

Es sei $\tilde{\mathfrak{E}}$ das $\mathfrak{E}^k$ zugeordnete analytische Gebilde, dessen Punkte die Paare $(P, \mathfrak{P})$ mit Primelementen $\mathfrak{P}$ sind. Weiter seien $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ Punkte mit Umgebungen $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$, in denen sich $\tilde{\mathfrak{E}}$ auf ein Ebenenstück abbilden läßt. Es ist zu zeigen, daß es eine Kurve $\tilde{C}$ von $\tilde{P}_1$ nach $\tilde{P}_2$ gibt, welche nur Punkte der Art wie $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ enthält. In $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ gibt es nun Punkte $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$ mit Urbildern Q_1, Q_2 auf Ω, die nicht auf der Verzweigungsfläche von Ω liegen und in denen die Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau_j}\right)$ den Rang k hat. Q_1, Q_2 lassen sich auf Ω durch eine Kurve C verbinden, die nur Punkte derselben Art wie Q_1, Q_2 besitzt. Ihr Bild verbindet $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ auf die geforderte Weise. Wird nun noch $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ mit $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$ in $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ verbunden, so hat man eine gesuchte Kurve $\tilde{C}$. Also ist $\tilde{\mathfrak{E}}$ zusammenhängend und $\mathfrak{E}^k$ daher irreduzibel.

Anmerkung. Der Begriff des Elementes ist bei WEIERSTRASS[17]) etwas anders als hier gefaßt. Er verlangt im wesentlichen, daß die Parameter τ lineare Funktionen der z_i sind. Die Bedingungen a), b), c) sind dann nicht nötig. Diese Einschränkung der Parameter ist jedoch oft lästig. — Legt man den Parametern keine unnatürlichen Beschränkungen auf, so müssen Bedingungen an die g_i gestellt werden. Sonst ist das Bild nicht einmal notwendig eine analytische Menge (vgl. [12], S. 177), geschweige denn k-dimensional. Die wesentliche Bedingung ist nun a). Sie sichert, daß die Bilder der Primelemente von Ω analytische Mengen der Dimension k sind (vgl. unten). b) folgt aus a). Das führe ich nicht aus. Die Bedingung c) ist nur erforderlich, wenn das Bild als analytische Menge des z-Raumes aufgefaßt wird. Dann muß vermieden werden, daß Randpunkte von Ω dasselbe Bild wie innere Punkte haben. *Wird das Bild von Ω dagegen als Gebilde $\tilde{\mathfrak{E}}$, also als Punktmenge über dem z-Raum betrachtet, so ist c) überflüssig.* Das führe ich jetzt aus.

Es sei nun $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω zulässig im weiteren Sinne. Ist $P(u', \tau')$ ein Punkt auf Ω und z' sein Bild, so gibt es Umgebungen $U(P)$ auf Ω, für die gilt: 1. Die τ-Projektion von $U(P)$ ist der Zylinder $T' = \bigcap\limits_1^k (|\tau_j - \tau'_j| < \delta)$; der

16) Vgl. [12], S. 122.

17) Vgl. [12], S. 170.

Rand von $U(P)$ liegt über dem Rande von T'. 2. Das Bild von $U(P)$ ist eine in z' analytische Menge. Genauer: Das Bild von $U(P)$ sei $\tilde{U}$. Es gibt eine Umgebung $V(z')$ so, daß $\tilde{U} \cap V$ eine k-dimensionale analytische in z' irreduzible Menge ist.

Beweis. $U(P)$ sei gemäß 1. gewählt und so klein, daß T' ganz im Inneren von T enthalten ist. Durch $z_i = g_i(\tau)$; $(u, \tau) \in U$ wird im (u, τ, z)-Raum ein analytisches Gebilde definiert. Seine Spur ist eine k-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{M}^k$. Die Ebene $z_1 - z_1' = \cdots = z_n - z_n' = 0$ trifft $\mathfrak{M}^k$ nur in isolierten Punkten. Es gibt also eine Umgebung $W(u', \tau', z')$ so, daß $z_1 - z_1' = \cdots = z_n - z_n' = 0$ mit $W \cap \mathfrak{M}^k$ nur den Punkt (u', τ', z') gemein hat. Daher kann der Einbettungssatz angewendet werden: Es gibt eine Polyzylinder-Umgebung $W^* = (W_u^*, W_\tau^*, W_z^*)$ derart, daß die z-Projektion $\mathfrak{M}_z$ von $W^* \cap \mathfrak{M}^k$ der volle Zylinder W_z^* oder aber eine analytische Menge ist. Man schließt nun wie im Beweis von Satz 2.1 weiter, daß es eine k-dimensionale Menge ist. Es ist noch zu zeigen, daß es beliebig kleine Umgebungen $U(z')$ gibt, in denen $\mathfrak{M}_z$ irreduzibel ist. Nun gibt es aber beliebig kleine Umgebungen von P, deren Bild irreduzibel ist. Das ergibt sich wie unter 3. im Beweis zu Satz 2.1. Daraus folgt die Behauptung.

Auf Grund des Vorhergehenden werden passende Umgebungen der Punkte von Ω auf Primelemente eines irreduziblen k-dimensionalen analytischen Gebildes über dem z-Raum abgebildet. Daraus geht hervor

Satz 2.1a. Durch eine auf $\Omega(u,\tau)$ im weiteren Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ wird $\Omega(u,\tau)$ auf ein irreduzibles analytisches Gebilde der Dimension k abgebildet. Die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$; $\tau \in \Omega$ möge eine zulässige Parameterdarstellung des Gebildes heißen.

2.2. Faserung und Parameterdarstellung.

2.21. Es seien Z, Z_* (Z enthalten in Z_*) Gebiete des z-Raumes im Polyzylinder $\bigcap (|z_i| < 1)$ und T, T_* (T mit Rand in T_* enthalten) Gebiete des τ-Raumes. (Z, T) bezeichne das Produkt von Z und T. Weiter seien in (Z_*, T_*) reguläre Funktionen $f_1(z,\tau), \ldots, f_k(z,\tau)$ gegeben, welche den Bedingungen genügen: 1. Für jedes $\tau' \in T_*$ erklären die Gleichungen $f_1(z,\tau') = \cdots = f_k(z,\tau') = 0$ in Z_* genau eine irreduzible analytische Menge der Dimension $n - k$, „die Faser $\mathfrak{F}(\tau')$". Verschiedene Fasern sind punktfremd: $\mathfrak{F}(\tau') \cap \mathfrak{F}(\tau'') = 0$ für $\tau' \neq \tau''$. 2. Es ist $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ und $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$. Der Rand von $\mathfrak{F}(\tau)$ sei $C(\tau)$ und $C_* = \bigcup C(\tau)/\tau \in T_*$. 3. Die inneren Punkte von Z_* und diejenigen Randpunkte, die nicht zu C_* gehören oder Häufungspunkte von C_* sind, liegen innerhalb $\bigcap_1^m (|z_i| < 1)$.

Definition 2.2. Die Darstellung $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ heißt „Faserung von Z_*". Die τ sind die Faserkonstanten.

2.22. Gegeben sei die in Z_* analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$.

Definition 2.3. Die Faserung $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ ist zulässig für $\mathfrak{g}_*^k$, wenn $\mathfrak{g}_*^k$ von C_* einen positiven (euklidischen) Abstand hat.

Satz 2.2. $\mathfrak{g}_*^k$ *sei in* Z_* *analytisch, irreduzibel und k-dimensional. Die Faserung* $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ *sei für* $\mathfrak{g}_*^k$ *zulässig. Ist dann* T *genügend groß, so ist* $\mathfrak{g}^k = Z \cap \mathfrak{g}_*^k$ *ein analytisches Element im Sinne der Definition 2.2. Das heißt ausführlich:* 1. $\mathfrak{g}^k$ *ist irreduzibel.* 2. *Es gibt ein Gebilde* $\Omega_*(u,\tau)$ *über* $(|u| < \infty; T_*)$ *und auf* $\Omega_*(u,\tau)$ *reguläre eindeutige Funktionen* $g_1, \ldots, g_n$, *so daß* $\mathfrak{g}^k$ *durch* $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$ *genau dargestellt wird. Dabei ist* Ω *der über* T *gelegene Teil von* $\Omega_*(u,\tau)$. *Die* g_i *genügen den Bedingungen a), b), c).*

Beweis. Durch $f_1(z,\tau) = \cdots = f_k(z,\tau) = 0$; $z \in \mathfrak{g}_*^k$ wird im Gebiete (Z_*, T_*) des (z,τ)-Raumes eine k-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{M}^k$ erklärt. Jede Ebene $\tau_1 - \tau_1' = \cdots = \tau_k - \tau_k' = 0$ trifft $\mathfrak{M}^k$ (vgl. Satz 1.3) nur in isolierten Punkten. In diesen ist $\mathfrak{M}^k$ analytisch. Daher ist $\mathfrak{M}^k$ eine in $\bigcap\limits_{n} (|z_i| < 1); T_*$ analytische Menge. Außerdem hat $\mathfrak{M}^k$ vom Rande des Gebietes $\bigcap\limits_{1} (|z_i| < 1)$ einen positiven Abstand. Auf jede Komponente $\mathfrak{M}_\lambda$ von $\mathfrak{M}^k$ treffen daher die Voraussetzungen des Satzes über die kanonische Darstellung im Großen zu (§ 1, letzter Satz). Infolgedessen gibt es über $(|u| < \infty; T_*)$ ein analytisches Gebilde $\Omega_*(u,\tau)$ und auf ihm reguläre eindeutige Funktionen g_i, so, daß $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ durch $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega_*$ genau dargestellt wird.

Man mache nun T so groß, daß der über T gelegene Teil Ω von Ω_* ein zusammenhängendes, also irreduzibles Gebilde ist. Das ist möglich. Dann hat $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}_*^k \cap Z$ die Darstellung $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$.

Beweis: Die Darstellung genügt jedenfalls den Forderungen a), b), c) (vgl. 2.1). Denn es ist $\mathfrak{F}(\tau') \cap \mathfrak{F}(\tau'') = 0$, wenn $\tau' \neq \tau''$, und zu jedem τ' gibt es nur endlich viele P auf Ω_*. Sie erklärt daher eine im engeren Sinne zulässige Abbildung von Ω. Das Bild ist nach Satz 2.1 eine irreduzible k-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{g}_0^k$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}_0^k$ ist. Nun ist ja $\mathfrak{g}_0^k$ die z-Projektion von $\mathfrak{M}_{\lambda_0} \cap (\tau \in T)$, während $\mathfrak{g}^k$ die Vereinigung der z-Projektionen von $\mathfrak{M}_\lambda \cap (\tau \in T)$ für alle Komponenten $\mathfrak{M}_\lambda$ von $\mathfrak{M}^k$ ist. Jede dieser Komponenten wird wie oben $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ auf ein irreduzibles Gebilde des z-Raumes abgebildet, dessen Spur in $\mathfrak{g}_*^k$ enthalten ist. Wären die Spuren dieser Gebilde nicht alle miteinander identisch, so müßte $\mathfrak{g}_*^k$ reduzibel sein. Das ist nach Voraussetzung nicht der Fall. Also ist $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}_0^k$. Die Darstellung $z_i = g_i(P)$; $P \in \Omega$ ist die gesuchte.

2.23. Anmerkung. Es ist ohne weiteres klar, daß der Begriff der Faserung verallgemeinert werden kann. Man darf z. B. statt schlichter Gebiete Z, T analytische Gebilde zugrunde legen. Da im folgenden nur der einfache Faserbegriff benutzt wird, soll das hier nicht weiter ausgeführt werden. Dagegen sei noch auf den engen Zusammenhang mit der analytischen Projektion[18]) von Gebieten hingewiesen. Letztere ist jedoch, so weit mir bekannt, bisher nur im Falle $k = n - 1$ behandelt worden.

2.3 Erweiterung analytischer Elemente.

2.31. Ein Element ist erklärt als analytische Menge des z-Raumes, welche durch eine zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf ein Gebilde $\Omega(u,\tau)$ bezogen ist.

[18]) Vgl. [8], [18].

Ω ist der über T (T ganz in T_*) gelegene Teil eines Gebildes Ω_*:

$$\omega(u,\tau) = u^m + A_1(\tau)\, u^{m-1} + \cdots + A_m(\tau) = 0; \quad A \text{ regulär in } T_*.$$

Es kann nun vorkommen, daß alle $A(\tau)$ noch in einem T_* umfassenden Gebiet T_{**} regulär sind. Dann gibt es ein Ω_* umfassendes Gebilde Ω_{**}, das durch analytische Fortsetzung aus Ω_* entsteht. Die g_i brauchen auf Ω_{**} aber nicht regulär zu bleiben. Dies ist jedoch der Fall, wenn T_{**} die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(T_*)$ von T_* ist.

Satz 2.3. Sind Ω_* und Ω_{**} die durch das irreduzible Polynom $\omega(u,\tau)$ über T_* und $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ erklärten Gebilde, so ist jede auf Ω_* reguläre und eindeutige Funktion g zu einer auf Ω_{**} regulären eindeutigen Funktion fortsetzbar. Kurz: g bleibt auf Ω_{**} regulär.

Beweis. 1. T'_* sei das an der Diskriminantenfläche von ω geschlitzte Gebiet T_*. Über jedem Punkte von T'_* liegen m Punkte von Ω_{**} und auch m Funktionselemente g_μ. Letztere brauchen nicht alle von einander verschieden zu sein. Die symmetrischen Grundfunktionen $E(\tau)$ der g_μ sind in T_* regulär und eindeutig. Sie bleiben es in der Regularitätshülle $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$.

2. Jede irreduzible Komponente $\mathfrak{g}_i$ der Diskriminantenfläche von ω muß T_* schneiden. Denn in dem Regularitätsgebiet T_{**} gilt die erste Aussage von COUSIN[19]): „Zu jeder $(k-1)$-dimensionalen analytischen Fläche gibt es eine in T_{**} meromorphe Funktion h, welche diese Fläche und nur sie als Polfläche hat." Alle Komponenten $\mathfrak{g}_i$ sind $(k-1)$-dimensional. Die zu $\mathfrak{g}_i$ konstruierte Cousin-Funktion h_i muß in T_* Pole haben. Sonst wäre sie auch in T_{**} regulär. Also schneidet $\mathfrak{g}_i$ T_*. Dasselbe gilt für die Komponenten von $\mathfrak{h}$ (vgl. 3.).

3. Wegen 1. genügen die Funktionselemente von g einer (nicht notwendig irreduziblen) Gleichung $G^m + E_1(\tau)\, G^{m-1} + \cdots + E_m(\tau) = 0$ mit in T_{**} regulären eindeutigen Koeffizienten $E(\tau)$. Sei $\mathfrak{h}$ die τ-Projektion der Verzweigungsfläche des zugehörigen Gebildes und $\mathfrak{h}_* = \mathfrak{h} \cap T_*$. Da g auf Ω_* regulär ist. muß $\mathfrak{h}_*$ und dann (wegen 2.) auch $\mathfrak{h}$ in der Diskriminantenfläche $\mathfrak{g}$ von Ω_{**} enthalten sein. Es sei jetzt T'_{**} das an $\mathfrak{g}$ geschlitzte Gebiet T_{**}. In T'_{**} sind sowohl die Funktionselemente von u als auch die von g unbeschränkt regulär fortsetzbar. Die gleichzeitige Fortsetzung der Paare u, g — die Zuordnung des Elementes g zum Element u ist auf Ω_* eindeutig festgelegt — ordnet jedem Punkte von Ω_{**} eindeutig ein Element der Fortsetzung von g zu. Die so auf Ω_{**} in allen über T'_{**} gelegenen Punkten erklärte und dort eindeutige reguläre Funktion g ist in den ausgeschlossenen Punkten noch stetig, da die Grundfunktionen der Zweige auch auf der Diskriminantenfläche $\mathfrak{g}$ regulär sind. g hat also die gewünschten Eigenschaften.

2.32. Zwar sind nun — falls $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ ist — die g_i auch auf Ω_{**} noch als eindeutige reguläre Funktionen erklärt. Es ist aber keineswegs sicher, daß die auf Ω_* zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω_{**} zulässig ist. Dazu wird

[19]) Vgl. [10], [11].

man weitere Voraussetzungen machen müssen. Hier wollen wir zunächst zeigen, daß es genügt anzunehmen:

T_* habe die Eigenschaft E: Jede in $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$ analytische nicht nulldimensionale Menge dringt in T_* ein.

Später wird eine andere Bedingung angegeben, welche für diese Arbeit ausreicht.

Satz 2.4. Ist die Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω_* zulässig und hat T_* die Eigenschaft E, so läßt $z_i = g_i(\tau)$ sich zu einer auf Ω_{**} (definiert über $T_{**} = \mathfrak{H}(T_*)$) im weiteren Sinne zulässigen Abbildung erweitern.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die durch die Fortsetzung nach Satz 2.3 erhaltenen auf Ω_{**} regulären Funktionen g_i den Bedingungen a), b) (vgl. 2.1) genügen.

a) Das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat auf Ω_{**} nur isolierte Lösungen.

Zum Beweise ist zu beachten, daß die Nullstellenmannigfaltigkeit einer auf einem analytischen Gebilde der Dimension k regulären Funktion aus analytischen Gebilden der Dimension $k - 1$ besteht (oder das Gebilde ganz erfüllt) (vgl. [12], S. 120). Daraus geht hervor: Entweder hat das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ auf Ω_{**} nur isolierte Lösungen; dann sind wir am Ziel. Oder die Lösungen erfüllen nicht-nulldimensionale Gebilde auf Ω_{**}. Ihre Projektionen in den τ-Raum sind dann offenbar auch mindestens eindimensional. Sie dringen also nach der Voraussetzung in T_* ein. Das heißt aber, daß auch die Gebilde selbst noch Ω_* schneiden. Und das steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß die Abbildung auf Ω_* zulässig ist.

b) Die Punkte auf Ω_{**} (in denen die Diskriminante nicht verschwindet und), für welche der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau_j}\right)$ kleiner als k ist, erfüllen höchstens $(k-1)$-dimensionale analytische Mengen.

Anderenfalls müßten die k-reihigen Determinanten der Matrix sämtlich in einem k-dimensionalen Gebiet auf Ω_{**} verschwinden. Dann wären sie jedoch auf Ω_{**} identisch Null. Das ist wegen a) nicht der Fall (vgl. [12], S. 157).

Auf Grund dieses Satzes wird jeder Teil $\hat{\Omega}$ von Ω_{**} — er möge der über $\hat{T}$ ($\hat{T}$ ganz in T_{**}) gelegene Teil sein und es sei vorausgesetzt, daß $\hat{\Omega}$ irreduzibel ist — durch $z_i = g_i(\tau)$ auf ein irreduzibles k-dimensionales analytisches Gebilde $\hat{\mathfrak{E}}$ des z-Raumes abgebildet [vgl. Satz 2.1 a)]. Ist $T \subset \hat{T}$ und $\tilde{\mathfrak{E}}$ das Gebilde, auf welches Ω abgebildet ist, so ist $\tilde{\mathfrak{E}} \subset \hat{\mathfrak{E}}$. *Der Erweiterung von Ω zu $\hat{\Omega}$ entspricht daher die Erweiterung von $\tilde{\mathfrak{E}}$ zu $\hat{\mathfrak{E}}$.* Es ist nicht von vornherein sicher, daß die Spur von $\hat{\mathfrak{E}}$ eine analytische Menge ist, wenn dies für die Spur von $\tilde{\mathfrak{E}}$ gilt. Dazu ist zu prüfen, ob auch die Bedingung c) erfüllt ist.

Anmerkung. Die Bedingung E ist z. B. nicht erfüllt, wenn T_* der an der eindimensionalen Ebene $z_1 = z_2 = 0$ geschlitzte Zylinder $|z_1| < 1$; $|z_2| < 1$; $|z_3| < 1$ ist. Um so wichtiger ist die Frage, wann man auf E verzichten kann. Entspringt die Darstellung $z_i = g_i(\tau)$ einer Faserung, die selbst in einem genügend großen Gebiete erklärt ist, so braucht man keine besonderen Voraussetzungen über T_* zu machen. Wir gehen aus von einem Gebiet Z_{**} in der Faserung $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_{**}$ und den Teilgebieten $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ und $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$ mit $T_{**} \supset T_* \Supset T$ gemäß 2.21. Die Faserung ist also von vornherein für Z_{**} erklärt. Außerdem soll der Rand $C(\tau)$ der Fasern auf dem Rande des Polyzylinders $\bigcap\limits_1^n (|z_i| < 1)$ liegen. Ω_{**}, Ω_*, $\hat{\Omega}$, Ω seien wie bisher erklärt, so daß also $\Omega_{**} \Supset \hat{\Omega} \supset \Omega$ und $\Omega_{**} \supset \Omega_* \Supset \Omega$ und alle Gebilde irreduzibel sind. Sie liegen über T_{**}, T_*, $\hat{T}$, T.

Satz 2.5. Die angegebenen Voraussetzungen seien erfüllt und $\mathfrak{g}_*^k$ in Z_* analytisch, irreduzibel und k-dimensional. Die Faserung $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ sei für $\mathfrak{g}_*^k$ zulässig (vgl. Definition 2.3). Dann gibt es genau eine in Z_{**} analytische, irreduzible und k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}_{**}^k$, für die $\mathfrak{g}_*^k = Z_* \cap \mathfrak{g}_{**}^k$ ist. $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{Z} \cap \mathfrak{g}_{**}^k$ ist ein analytisches Element, das Bild von $\hat{\Omega}$. Die Faserung $Z = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T$ ist für $\hat{\mathfrak{g}}$ zulässig.

Beweis. 1. $\mathfrak{g} = Z \cap \mathfrak{g}_*^k$ wird nach Satz 2.2 durch eine im engeren Sinne zulässige Abbildung $z_i = g_i(\tau)$ auf Ω bezogen. Die Funktionen g_i bleiben nach Satz 2.3 auf Ω_{**} noch regulär. Auf Ω_* gilt für jede von ihnen $|g_i| < 1$ [vgl. 2.21, 3.]. Das gilt nun auch noch auf Ω_{**}. Denn sonst müßte es eine Zahl a vom Betrage 1 geben und ein g_i, etwa g_1, welches auf Ω_{**} den Wert a annimmt. Das Produkt der Zweige von $(g_1 - a)$ ist in T_{**} regulär und eindeutig. Die reziproke Funktion ist in T_* regulär, da g_1 dort den Wert a nicht annimmt. Sie muß in der Regularitätshülle T_{**} regulär bleiben. Das heißt: g_1 nimmt auch in T den Wert a nicht an. Das ist ein Widerspruch.

2. *Jeder Punkt $z_i'' = g_i(\tau'')$ des Bildes liegt auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau'')$.* Ein Punkt $z_i^* = g_i(\tau^*)$ liegt genau dann auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau^*)$, wenn $0 = f_1(g(\tau^*), \tau^*) = \cdots = f_k(g(\tau^*), \tau^*)$ ist. Für alle τ^* aus T_* gilt nun $f_j(g(\tau^*), \tau^*) = 0$; $j = 1, \ldots, k$. Es ist zu zeigen, daß diese Relation auch in T_{**} besteht. Gesetzt, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es Punkte $P_1 \in \Omega_*$, $P_2 \in \Omega_{**}$ und auf Ω_{**} eine Kurve L von P_1 nach P_2, so daß nicht in allen Punkten von L die gewünschten Relationen gelten. Darin soll die Möglichkeit enthalten sein, daß diese Gleichungen sinnlos werden, da die Funktionen nicht mehr erklärt sind. Es muß nun auf L einen Punkt Q mit folgender Eigenschaft geben: Die Bilder der Punkte P' auf $P_1 Q$ liegen auf den zugehörigen Fasern. Wegen 1. und da die Ränder der Fasern auf dem Rande von $\bigcap\limits_1^n (|z_i| < 1)$ liegen, sind die Bilder der P' in Z_{**} enthalten. Das gilt auch für das Bild von Q. In allen diesen Punkten sind dann die Funktionen $f_j(g(\tau), \tau)$; $j = 1, \ldots, k$ regulär. Die zweite Eigenschaft von Q müßte sein: Es gibt Punkte $P_\nu'' \to Q$ auf $Q P_2$, deren Bilder nicht auf den zugehörigen Fasern liegen. Aus dem vorhergehenden geht jedoch hervor, daß in einer vollen Umgebung von Q die Gleichungen $f_1(g_1(\tau), \tau) \equiv \cdots \equiv f_k(g(\tau), \tau) \equiv 0$ gelten. Das ist ein Widerspruch.

3. Die Fasern sind nach Definition punktfremd zueinander. Insbesondere ist $\mathfrak{F}(\hat{\tau}) \cap \mathfrak{F}(\tau) = 0$, wenn $\hat{\tau}$ auf dem Rande und τ im Inneren von $\hat{T}$ liegt.

Wegen 2. kann also das Bild eines Randpunktes von $\hat{\Omega}$ nicht auf das Bild eines inneren Punktes fallen. Das ist Bedingung c) für $\hat{\Omega}$.

4. Jeder Bildpunkt liegt auf einer wohlbestimmten Faser. Das System $z_i^0 = g_i(\tau)$ hat also nur die eine Lösung τ^0 (z_i^0 liege auf der Faser $\mathfrak{F}(\tau^0)$). Das ist Bedingung a). Daß auch b) erfüllt ist, sieht man wie im Beweis zu Satz 2.4.

Daher ist nach Satz 2.1 das Bild von $\hat{\Omega}$ ein analytisches Element der Dimension k. Wegen 1. ist die Faserung $\hat{Z} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in \hat{T}$ für $\hat{\mathfrak{g}}$ zulässig. Das gilt für jedes $\hat{\Omega}$. Daraus folgt, daß das Bild von Ω_{**} eine analytische Menge der Dimension k ist, die den Forderungen genügt. Denn es ist $\mathfrak{g}_*^k = Z_* \cap \mathfrak{g}_{**}^k$ und $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{Z} \cap \mathfrak{g}_{**}^k$.

Anmerkung. Hier wird aus dem Fortbestehen der Faserung in Z_{**} auf die Existenz der Erweiterung von $\mathfrak{g}_*^k$ geschlossen. Es ist eine interessante Frage, wann umgekehrt aus der Existenz der Erweiterung von $\mathfrak{g}_*^k$ auf das Fortbestehen der Faserung geschlossen werden darf.

§ 3. Die Differentialbedingung[20]).

3.1. Hilfssatz. Ist die reelle quadratische Form $\sum_1^n a_{ik}^0 x_i x_k$ positiv definit, so auch alle Formen $\Sigma\, a_{ik} x_i x_k$ mit reellen a_{ik}, wenn nur $|a_{ik} - a_{ik}^0| < \varepsilon$ und ε genügend klein ist.

Beweis. Es gibt eine Substitution $x_i = \Sigma\, c_{ik} x_k'$; $|c_{ik}| \neq 0$ so, daß $\Sigma\, a_{ik}^0 x_i x_k = \Sigma\, x_i'^2$. Setzt man $\Sigma\, a_{ik} x_i x_k = \Sigma\, x_i'^2 + \Sigma\, b_{ik} x_i' x_k'$, so sind die b_{ik} stetige Funktionen der a_{ik} und verschwinden für $a_{ik} = a_{ik}^0$. Weiter ist

$$\left|\sum_n^1 b_{ik} x_i' x_k'\right| \leqq \sum_1^n |b_{ik}|\,|x_i' x_k'| \leqq \tfrac{1}{2} \sum_1^n |b_{ik}|\,|x_i'^2 + x_k'^2| \leqq n \cdot \max |b_{ik}| \sum_1^n x_i'^2.$$

Man wähle nun $\varepsilon > 0$ so, daß $|b_{ik}| < \frac{1}{2n}$. Dann ist $|\Sigma\, b_{ik} x_i' x_k'| \leqq \frac{1}{2} \Sigma\, x_i'^2$ und daher $\Sigma\, a_{ik} x_i x_k \geqq \frac{1}{2} \Sigma\, x_i'^2$.

3.2. Im Gebiete G des C^n der Veränderlichen $z_\mu = x_{2\mu-1} + i\, x_{2\mu}$ sei die Funktion $\psi(x)$ reell und zweimal stetig differentiierbar. Nach Einführung der komplexen Koordinaten $z_\mu, \bar{z}_\mu$ gehe $\psi(x)$ in $\varphi(z, \bar{z})$ über. Im folgenden sei ζ ein Punkt aus G, der noch variiert werden kann. ζ^0 aus G soll ein für alle Mal festgelegt sein. Die Umrechnungsformeln lauten:

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu} = \frac{\partial \psi}{\partial x_{2\mu-1}} - i\frac{\partial \psi}{\partial x_{2\mu}}; \quad 2\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\mu} = \frac{\partial \psi}{\partial x_{2\mu-1}} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_{2\mu}};$$

$$4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu-1}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu}}\right\} - i\left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\nu-1} \partial x_{2\mu}}\right\};$$

$$4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu-1}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu} \partial x_{2\nu}}\right\} + i\left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\mu-1} \partial x_{2\nu}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{2\nu-1} \partial x_{2\mu}}\right\};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_\mu \partial \bar{z}_\nu} = \overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu}}.$$

[20]) Vgl. [9], vor allem zu 3.1 bis 3.3.

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}; \quad \varphi_{\bar\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z_\mu}; \quad \varphi_{\mu\bar\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar z_\nu} \text{ usw.};$$

$$h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \text{ und } \varphi_\mu^0 = \varphi_\mu(\zeta^0); \quad \varphi_{\mu\nu}^0 = \varphi_{\mu\nu}(\zeta^0) \text{ usw.}$$

Der Mittelwertsatz

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \sum_1^{2n} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}(\xi) \cdot (x_\mu - \xi_\mu) + Q;$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_1^{2n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\xi^*)\,(x_\mu - \xi_\mu)\,(x_\nu - \xi_\nu)$$

geht über in

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta) + \sum_1^n (\varphi_\mu(\zeta)\, h_\mu + \varphi_{\bar\mu}(\zeta)\, \bar h_\mu) + Q_k;$$

$$Q_k = \tfrac{1}{2} \sum_1^n (\varphi_{\mu\nu}(\zeta^*)\, h_\mu h_\nu + 2\varphi_{\mu\bar\nu}(\zeta^*)\, h_\mu \bar h_\nu + \varphi_{\bar\mu\bar\nu}(\zeta^*)\, \bar h_\mu \bar h_\nu) \text{ mit } |z - \zeta^*| \leqq |z - \zeta|.$$

Q_k ist also die komplexe Darstellung der reellen quadratischen Form Q. In Q_k ist die HERMITEsche Form (H): $\sum_1^n \varphi_{\mu\bar\nu} h_\mu \bar h_\nu$ enthalten.

3.3. In jedem Punkt aus G sei

(1) $$\varphi_n(\zeta) \neq 0.$$

Um für $\varphi(\zeta) \geqq 0$ analytische Flächen durch ζ zu finden, welche $\varphi \leqq 0$ höchstens in ζ treffen, verfährt man nach KRZOSKA wie folgt. Zunächst wird

(2) $$h_n = \sum_1^{n-1} a_\mu h_\mu + \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} h_\mu h_\nu$$

in φ eingesetzt. So entsteht eine Funktion $\chi = \chi(z_1, \bar z_1, \ldots, z_{n-1}, \bar z_{n-1})$, die noch stetig von den Konstanten a, b und dem Punkt ζ abhängt. Durch die Bedingung

(a 1) $$\chi_\mu(\zeta) = \varphi_\mu(\zeta) + \varphi_n(\zeta)\, a_\mu(\zeta) = 0$$

wird $a_\mu(\zeta)$ festgelegt. Da φ reell ist, folgt

(a 2) $$\chi_{\bar\mu}(\zeta) = \varphi_{\bar\mu}(\zeta) + \varphi_{\bar n}(\zeta)\, \bar a_\mu(\zeta) = 0.$$

Weiter werde $b_{\mu\nu}^0$ durch

(b 1) $$\chi_{\mu\nu}(\zeta^0) = \varphi_{\mu\nu}^0 + \varphi_{\mu n}^0 \cdot a_\nu(\zeta^0) + \varphi_{\nu n}^0 \cdot a_\mu(\zeta^0) + \varphi_{nn}^0 \cdot a_\mu(\zeta^0) \cdot a_\nu(\zeta^0) + {} + 2\varphi_n^0\, b_{\mu\nu}^0 = 0$$

bestimmt. Dann gilt auch

(b 2) $$\chi_{\bar\mu\bar\nu}(\zeta^0) = \overline{\chi_{\mu\nu}(\zeta^0)} = 0.$$

KRZOSKA hat unter anderem bewiesen: Es sei in (2) $\zeta = \zeta^0$; $a_\mu = a_\mu(\zeta^0)$ und $b_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}^0$ gesetzt. Ist nun die HERMITEsche Form

(H_*): $$\sum_1^{n-1} \chi_{\mu\bar\nu}(\zeta^0)\, u_\mu \bar u_\nu; \quad u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0$$

positiv definit, so gibt es eine Umgebung U von ζ^0, welche von (2) außer in ζ^0 nur auf der Seite $\varphi > 0$ geschnitten wird. Die Form (H_*) entsteht, wenn in (H): $\sum_1^n \varphi^0_{\mu\bar\nu} u_\mu \bar u_\nu$ u_n durch $\sum_1^n \varphi^0_\mu u_\mu = 0$ eliminiert wird. Also ist (H) auf der Ebene $\sum_1^n \varphi^0_\mu u_\mu = 0$ mit (H_*) gleichwertig. Dies Ergebnis wollen wir ein wenig erweitern.

3.4 Der Trägheitsindex von (H_*) sei q. Dann gibt es eine Substitution

$$u_i = \sum_1^{n-1} c^0_{ik} u'_k; \quad \bar u_i = \sum_1^{n-1} \overline{c^0_{ik}} \bar u'_k; \quad u_i = z_i - \zeta^0_i; \quad u'_i = z'_i - \zeta'^0_i; \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

welche (H_*) in die Normalform

$$(N): \qquad |u'_1|^2 + \cdots + |u'_q|^2 - \sum_{q+1}^{n-1} \delta_k |u'_k|^2 \qquad (\delta_k = 0 \text{ oder } 1)$$

überführt. Auf der q-dimensionalen Ebene $u'_{q+1} = \cdots = u'_{n-1} = 0$ ist (H_*) folglich positiv definit.

3.5. Man setze nun

$$\mathfrak{F}^q\colon\ h_n = \sum_1^{n-1} a_\mu h_\mu + \sum_1^{n-1} b_{\mu\nu} h_\mu h_\nu \quad (h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu; \qquad h'_\mu = z'_\mu - \zeta'_\mu; \quad \zeta_\mu = \zeta'_\mu)$$

und dann $h_i = \sum_1^{n-1} c_{ik} h'_k$; $h'_{q+1} = \cdots = h'_{n-1} = 0$; $i = 1, \ldots, n-1$ mit zunächst willkürlichen Konstanten a, b, c in φ ein. So entsteht eine reelle Funktion $g(z', \bar z') = g(z'_1, \bar z'_1, \ldots, z'_q, \bar z'_q, a, b, c, \zeta')$, welche mit ihren Ableitungen noch stetig von den Parametern a, b, c, ζ' abhängt. Von nun an werde $a_\mu = a_\mu(\zeta')$ eingesetzt. Dann ist $g_\mu(\zeta') = \bar g_\mu(\zeta') = 0$. Um die noch vorhandene Abhängigkeit von b, c, ζ' anzudeuten, schreiben wir $g_{\mu\nu}(z', \bar z') = B_{\mu\nu}(z', b, c, \zeta')$ usw. Der Mittelwertsatz liefert jetzt

$$g(z', \bar z') = g(\zeta', \bar\zeta') + Q_k$$

mit

$$Q_k = \tfrac{1}{2} \sum \{B_{\mu\nu}(\zeta^*, b, c, \zeta') h'_\mu h'_\nu + 2 B_{\mu\bar\nu}(\zeta^*, b, c, \zeta') h'_\mu \bar h'_\nu + B_{\bar\mu\bar\nu}(\zeta^*, b, c, \zeta') \bar h'_\mu \bar h'_\nu\}$$

und

$$|\zeta^*_\mu - \zeta'_\mu| \leqq |\zeta'_\mu - z'_\mu|.$$

Für die speziellen Werte $b^0_{\mu\nu}$, c^0_{ik}, $\zeta' = \zeta^0$ kürzen wir ab: $B_{\mu\nu}(\zeta^0, b^0, c^0, \zeta^0) = B^0_{\mu\nu}$ usw. Dann ist erstens [vgl. (b1) unter 3.3] $B^0_{\mu\nu} = B^0_{\bar\mu\bar\nu} = 0$ und zweitens ist wegen (3.4) die HERMITEsche Form $\sum B^0_{\mu\bar\nu} h'_\mu \bar h'_\nu$ positiv definit.

Da $B^0_{\mu\nu} = B^0_{\bar\mu\bar\nu} = 0$, ist, reduziert sich Q_k für die speziellen Parameterwerte $\zeta' = \zeta^* = \zeta^0$; $b = b^0$; $c = c^0$ auf die positiv definite Form $\sum B^0_{\mu\bar\nu} h'_\mu \bar h'_\nu$. Daher kann nach dem Hilfssatz ein $\varepsilon > 0$ gefunden werden, so daß alle Formen $Q_k(\zeta^*; b; c; \zeta')$ positiv definit sind, wenn nur

$$|\zeta'_\mu - \zeta^0_\mu| < \varepsilon; \quad |\zeta^*_\mu - \zeta^0_\mu| < \varepsilon; \quad |b_{\mu\nu} - b^0_{\mu\nu}| < \varepsilon; \quad |c_{ik} - c^0_{ik}| < \varepsilon$$

ist.

3.6. Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen fassen wir zusammen.

Voraussetzung (v). Im Gebiete G des C^n der Variabeln $z_\mu = x_{2\mu-1} + i\, x_{2\mu}$ sei $\psi(x) = \varphi_*(z, \bar{z}) = \varphi(z)$ eine zweimal stetig differentiierbare, reelle Funktion und $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \neq 0$. Weiter sei $\zeta^0 \in G$ ein Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$. Und endlich sei $q \geqq 1$ der Trägheitsindex der HERMITEschen Form $\Sigma\, \varphi^0_{\mu\bar{\nu}} \cdot u_\mu \bar{u}_\nu$ auf der Ebene $\Sigma\, \varphi^0_\mu\, u_\mu = 0$.

Die zu (c^0_{ik}) inverse Matrix sei (d^0_{ik}); es ist $\det\,(d^0_{ik}) \neq 0$.

Satz A. Unter der Voraussetzung (v) existiert eine Umgebung $U = \bigcap\limits_1^n (|z_i - \zeta^0_i| < \delta)$ *und Konstanten* $b^0_{\mu\nu}, d^0_{\mu\nu}$ *so, daß für alle Werte* $b_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$, *welche den Ungleichheiten* $|b_{\mu\nu} - b^0_{\mu\nu}| < \delta$; $|d_{\mu\nu} - d^0_{\mu\nu}| < \delta$ *genügen, gilt:*

Ist ζ ein beliebiger Punkt aus $U \cap (\varphi \geqq 0)$ und wird $a_\mu(\zeta)$ aus (a 1): $\varphi_\mu(\zeta) + \varphi_n(\zeta) \cdot a_\mu(\zeta) = 0$ *bestimmt, so trifft jede der q-dimensionalen analytischen Flächen*

$$\mathfrak{F}^q(\zeta, b, d) = \begin{cases} h'_n(\zeta, b) = h_n - \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta)\, h_\mu - \sum\limits_1^{n-1} b_{\mu\nu}\, h_\mu\, h_\nu = 0 \\ h'_k(\zeta, d) = \sum\limits_1^{n-1} d_{k\mu}\, h_\mu = 0; \quad k = q+1, \ldots, n-1 \\ h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \end{cases}$$

den Durchschnitt $U \cap (\varphi \leqq 0)$ höchstens in ζ.

3.7. K. STEIN[21]) hat für $n = 2$, $q = 1$ gezeigt, daß es sogar eine dreidimensionale Hyperfläche durch ζ^0 gibt, welche $\varphi \leqq 0$ nur in ζ^0 trifft. Ähnlich ist es auch hier.

In dem folgenden Satz seien b', d' Konstanten, welche den Bedingungen des Satzes A genügen, und τ ein reeller Parameter. Außerdem treten noch Zahlen E, F auf, die passend zu bestimmen sind. Wir betrachten die einparametrige Schar q-dimensionaler analytischer Flächen

$$\mathfrak{F}^q(\tau, E, F) = \begin{cases} u'_n(\zeta^0, b') = u_n - \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu - \sum\limits_1^{n-1} b'_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu = F \cdot \tau + E\,\tau^2. \\ u'_k(\zeta^0, d') = \sum\limits_1^{n-1} d'_{k\mu}\, u_\mu = 0; \quad k = q+1, \ldots, n-1 \\ u_\mu = z_\mu - \zeta^0_\mu. \end{cases}$$

Satz B. Es gibt Zahlen $E \neq 0$, $F \neq 0$ und eine Umgebung $U = \bigcap\limits_1^n (|z_i - \zeta^0_i| < \delta)$, *so daß $U \cap (\varphi \leqq 0)$ von der Schar $\mathfrak{F}^q(\tau, E, F)$ mit $|\tau| \leqq \delta$ nur in $z = \zeta^0$; $\tau = 0$ getroffen wird (τ reell).*

Zusatz. Auch die Teilschar $\mathfrak{F}^q(\tau, E, 0)$ trifft $U \cap (\varphi \leqq 0)$ nur in ζ^0.

Beweis. Man setze (vgl. 3.5) $u'_n = \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu + \sum\limits_1^{n-1} b'_{\mu\nu} u_\mu u_\nu + F \cdot \tau + E \cdot \tau^2$ und dann $u_k = \Sigma\, c_{ki} u'_i$; $u'_{q+1} = \cdots = u'_{n-1} = 0$ in φ ein. Diesmal entsteht eine Funktion $g(z'_1, \bar{z}'_1, \ldots, z'_q, \bar{z}'_q, \tau, \bar{\tau})$. Dabei wird τ zunächst als komplexe Ver-

[21]) Vgl. [17].

änderliche aufgefaßt. Nachträglich ist dann $\tau = \bar{\tau}$ zu setzen. Wir berechnen die Ableitungen von g im Punkte $z' = \zeta^0$; $\tau = \bar{\tau} = 0$. Die reinen Ableitungen nach den z' ändern sich gegen früher nicht. Für die Ableitungen, an denen τ beteiligt ist, bekommt man:

$$\begin{aligned} &g^0_\tau = \varphi^0_n \cdot F;\ g^0_{\bar\tau} = \varphi^0_{\bar n} \cdot \bar F \\ &g^0_{\mu\tau} = \varphi^0_{n\mu} \cdot a_\mu \cdot F;\ g^0_{\mu\bar\tau} = \varphi^0_{\bar n\mu} \cdot \bar F \cdot a_\mu;\ g^0_{\bar\mu\tau} = \varphi^0_{n\bar\mu}\, \bar a_\mu\, F;\ g^0_{\bar\mu\bar\tau} = \overline{g^0_{\mu\tau}} \\ &g^0_{\tau\tau} = \varphi^0_{nn} \cdot F^2 + 2\,\varphi^0_n \cdot E;\ g_{\tau\bar\tau} = \varphi^0_{n\bar n} \cdot F \cdot \bar F;\ g^0_{\bar\tau\bar\tau} = \overline{g^0_{\tau\tau}}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung von g an der Stelle $(\zeta^0, 0)$ lautet nun (mit $\tau = \bar\tau$)

$$\begin{aligned} g(z', \tau) &= g(\zeta^0, 0) + (g^0_\tau + g^0_{\bar\tau})\,\tau + Q_k; \\ Q_k &= \tfrac{1}{2} \Sigma (g_{\mu\nu}\, u'_\mu\, u'_\nu + 2\, g_{\mu\bar\nu}\, u'_\mu\, \bar u'_\nu + g_{\bar\mu\bar\nu}\, \bar u'_\mu \cdot \bar u'_\nu) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\tau\, \Sigma (g_{\mu\tau}\, u'_\mu + g_{\bar\mu\tau}\, \bar u'_\mu + g_{\mu\bar\tau}\, u'_\mu + g_{\bar\mu\bar\tau}\, \bar u'_\mu) + \frac{\tau^2}{2}(g_{\tau\tau} + 2\, g_{\tau\bar\tau} + g_{\bar\tau\bar\tau}). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind an einem Zwischenpunkt (ζ^*, τ^*) zu nehmen, für den $|\zeta^* - \zeta^0| \leqq |z' - \zeta^0|$ und $|\tau^*| \leqq |\tau|$ ist.

Q_k ist die komplexe Darstellung der entsprechenden reellen quadratischen Form in den Veränderlichen $(x'_1, \ldots, x'_{2q}, \tau)$.

Wird in Q_k $F = 0$ gesetzt, so fällt die zweite Summe fort. Der Koeffizient von τ^2 wird $2(\varphi_n E + \varphi_{\bar n} \bar E)$. Man bestimme E so, daß $\varphi^0_n E + \varphi^0_{\bar n} \cdot \bar E$ positiv ist.

Werden in der ersten Summe die $g_{\mu\nu}$ durch die an der Stelle $\zeta' = \zeta^0$; $\tau = 0$ zu bildenden $g^0_{\mu\nu}$ ersetzt, so ist die resultierende Form in den neuen Veränderlichen $(z'_1, \bar z'_1, \ldots, z'_q, \bar z'_q)$ nach Voraussetzung positiv definit. Die durch die Spezialisierung $F = 0$; $g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu}$ usw. bei festem E mit $\varphi^0_n \cdot E + \varphi^0_{\bar\mu} \cdot \bar E > 0$ aus Q_k entstehende Form

$$Q^0_k = \tfrac{1}{2} \Sigma (g^0_{\mu\nu}\, u'_\mu\, u'_\nu + 2\, g^0_{\mu\bar\nu}\, u'_\mu\, \bar u'_\nu + g^0_{\bar\mu\bar\nu} \cdot \bar u'_\mu \cdot \bar u'_\nu) + \cancel{2}\,\tau^2 (\varphi^0_n\, E + \varphi^0_{\bar n} \cdot \bar E)$$

ist daher positiv definit. Nach dem Hilfssatz gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|F| < \delta$; $|\tau| < \delta$; $|z'_i - \zeta^0_i| < \delta$ und daher $|\zeta^*_i - \zeta^0_i| < \delta$; $|\tau^*| < \delta$ auch Q_k positiv definit ist.

Nachdem E festgelegt ist: $\varphi^0_n \cdot E + \varphi^0_{\bar n} \cdot \bar E > 0$, bestimme man nun F so, daß erstens $g^0_\tau + g^0_{\bar\tau} = \varphi^0_n F + \varphi^0_{\bar n} \cdot \bar F = 0$ und zweitens $|F| < \delta$ ist. Dann folgt $g(z', \tau) > 0$ in $|z'_i - \zeta^0_i| < \delta$; $|\tau| < \delta$ außer in $z' = \zeta^0$; $\tau = 0$. Das ist die Behauptung.

Satz C. Ist die Voraussetzung (v) erfüllt, ferner $\varphi(\zeta^0) = 0$ und $q = n - p$, so gilt: Jedes p-dimensionale analytische Flächenstück $\mathfrak{g}^p$ durch ζ^0 schneidet $\varphi > 0$.

Beweis. Nach Satz B trifft die Schar q-dimensionaler Flächen

$$\mathfrak{F}^q(\tau, E, 0) = \begin{cases} E \cdot k = u_n - \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu - \sum\limits_1^{n-1} b^0_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu = E\,\tau^2; & \begin{cases} \tau \text{ reell}, \\ |\tau| < \delta \end{cases} \\ u'_k = \sum\limits_1^{n-1} d'_{k\mu} \cdot u_\mu = 0; \quad k = q+1, \ldots, n-1 & \end{cases}$$

die Punktmenge $\bigcap\limits_{1}^{n}(|z_i-\zeta_i^0|<\delta)\cap(\varphi\leqq 0)$ nur in $(\zeta^0, 0)$. Der Schnitt von $\mathfrak{g}^p$ mit $u'_{q+1}=\cdots=u'_{n-1}=0$ (für $q=n-1$ fallen diese Gleichungen fort und es ist $\mathfrak{g}^p$ selbst zu betrachten) ist eine analytische Menge, deren Komponenten mindestens eindimensional sind. ζ^0 ist innerer Punkt jeder Komponente $\mathfrak{g}_*$. Es ist $k(\zeta^0)=0$. Daher muß $k(\mathfrak{g}_*)$ entweder identisch Null sein oder auch beliebig kleine reelle Werte annehmen (Satz 1.4). Es gibt also einen Punkt $\zeta_*\in\mathfrak{g}_*$; $\zeta_*\neq\zeta^0$ und ein reelles τ_* $(0\leqq|\tau_*|<\delta)$ so, daß $E\,k(\zeta_*)=E\,\tau_*^2$. Daraus folgt, da $\mathfrak{F}^q(\tau_*, E, 0)$ den Bereich $\varphi\leqq 0$ nur in ζ^0 trifft, $\varphi(\zeta_*)>0$.

Folgerung für die Einzigkeit der Fortsetzung.

Satz C hat wichtige Konsequenzen. Zu ihrer Ableitung ist es notwendig, (v) durch die natürliche *Forderung* (v^*) zu ersetzen, daß wenigstens eine der ersten Ableitungen von φ, nicht gerade φ_n, ungleich Null ist. Satz C bleibt dann richtig. Es seien nun in G zwei reelle Funktionen gegeben: φ_1, φ_2, auf die (v^*) zutrifft. q_1, q_2 seien die Indizes im Punkte ζ^0 mit $\varphi_1(\zeta^0)=\varphi_2(\zeta^0)=0$.

Satz D. (Einzigkeit der Fortsetzung). Es sei $\varphi_1(\zeta^0)=\varphi_2(\zeta^0)=0$ und $q_1+q_2+k\geqq 2n$, weiter U eine Umgebung von ζ^0. Endlich seien $\mathfrak{g}_1^k$ und $\mathfrak{g}_2^k$ in U analytische Mengen. Dann gilt: Stimmen $\mathfrak{g}_1^k$ und $\mathfrak{g}_2^k$ in $U\cap(\varphi_1>0)\cap\cap(\varphi_2>0)$ überein, so gibt es eine volle Umgebung U_* von ζ^0, in der $\mathfrak{g}_1^k=\mathfrak{g}_2^k$ ist.

Beweis. In einer passenden Umgebung U_* von ζ^0 läßt sich $\mathfrak{g}_1^k$ (und ebenso $\mathfrak{g}_2^k$) als Vereinigung irreduzibler Komponenten $\mathfrak{h}_1^k,\ldots,\mathfrak{h}_l^k$ darstellen, die alle ζ^0 als inneren Punkt enthalten. Es genügt zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{h}$ in $(\varphi_1>0)\cap(\varphi_2>0)$ eindringt.

Nach Satz A gibt es eine Fläche $\mathfrak{F}^{q_1}$ durch ζ^0, welche $\varphi_1\leqq 0$ nur in ζ^0 trifft. Da $q_2\leqq n-1$ ist folgt aus $q_1+q_2+k\geqq 2n$ die Ungleichung $q_1+k-n\geqq 1$. Die Dimension des Schnittes $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{F}^{q_1}$ und $\mathfrak{h}$ ist wenigstens gleich $q_1+k-n\geqq 1$. Es ist aber $p_2=n-q_2\leqq q_1+k-n$. Die Dimension von $\mathfrak{S}$ ist also mindestens p_2. Daher schneidet $\mathfrak{S}$ nach Satz C auch $\varphi_2>0$. Andererseits ist ζ^0 der einzige Punkt auf $\mathfrak{S}$ in $\varphi_1\leqq 0$; und $\mathfrak{S}$ ist nicht nulldimensional. Infolgedessen dringt $\mathfrak{S}$ und dann auch $\mathfrak{h}$ in $(\varphi_1>0)\cap(\varphi_2>0)$ ein.

Für die Anwendungen ist es bequem, diesen Satz auf mehr als zwei Hyperflächen von einer besonderen Art zu erweitern. Wir legen den Raum von $m=n+s$ Veränderlichen $(w_1,\ldots,w_s,\ z_1,\ldots,z_n)$ zugrunde. Dort seien s Hyperflächen der Form

$$\varphi_\sigma=w_\sigma\overline{w}_\sigma-\psi(z_1,\bar z_1,\ldots,z_n,\bar z_n)=0$$

gegeben, jede (in allen Punkten) vom Index n. $P^0=(\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0,\zeta_1^0,\ldots,\zeta_n^0)$ mit $\alpha_\sigma^0\neq 0$; $\sigma=1,\ldots,s$ sei ein Punkt auf $\varphi_1=\cdots=\varphi_s=0$ und U eine Umgebung von P^0.

Satz D'. $\mathfrak{g}_1^k$ und $\mathfrak{g}_2^k$ seien in U analytische Mengen, die beide die Ebene $z_1-\zeta_1^0=\cdots=z_n-\zeta_n^0=0$ nur in P^0 treffen. Weiter sei $k\geqq s$. Dann gilt: Ist $\mathfrak{g}_1^k=\mathfrak{g}_2^k$ in $U\cap\bigcap\limits_{1}^{s}(\varphi_\sigma>0)$, so gibt es eine volle Umgebung U_* von P^0, in welcher $\mathfrak{g}_1^k=\mathfrak{g}_2^k$ ist.

Beweis. Es genügt wieder, die Behauptung für irreduzible $\mathfrak{g}_1^k, \mathfrak{g}_2^k$ zu beweisen, die durch P^0 gehen.

Zu jedem $\varphi_\sigma = 0$ gibt es eine $(n + s - 1)$-dimensionale Fläche $\mathfrak{F}_\sigma^{m-1}$ $(m = n + s)$, die $\varphi_\sigma \leqq 0$ nur in der Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = w_\sigma - \alpha_\sigma = 0$ schneidet. Der Schnitt $F = \bigcap\limits_1^{s-1} \mathfrak{F}_\sigma^{m-1}$ hat die Dimension $n + s - s + 1 = n + 1$ und trifft $\bigcup\limits_1^{s-1} (\varphi_\sigma \leqq 0)$ nur auf $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = 0$. Also hat jede Komponente von $F \cap \mathfrak{g}_1^k$ mindestens die Dimension $k - s + 1 = 1$. Außerdem trifft $F \cap \mathfrak{g}_1^k$ die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in P^0. Jede in P^0 irreduzible Komponente $\mathfrak{h}$ von $F \cap \mathfrak{g}_1^k$ muß dann $\varphi_s > 0$ schneiden [Beweis wie bei Satz C: $\mathfrak{F}_s^{m-1}$ hat eine Darstellung

$$E \cdot k = (w_s - \alpha_s) - \sum_1^n a_\mu (P^0)(z_\mu - \zeta_\mu^0) - \sum_1^n b_{\mu\nu}^0 (z_\mu - \zeta_\mu^0)(z_\nu - \zeta_\nu^0) = 0.$$

Die Funktion k muß auf $\mathfrak{h}$ entweder identisch verschwinden oder auch beliebig kleine reelle Werte annehmen. In beiden Fällen weist $\mathfrak{h}$ Punkte aus $\varphi_s > 0$ auf. Denn die Flächen $E \cdot k = E\tau^2$ (τ reell, $|\tau| < \delta$) treffen $\varphi_s \leqq 0$ nur in $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = w_s - \alpha_s = 0$ und $\mathfrak{h}$ liegt nicht auf dieser Ebene. $\mathfrak{h}$ trifft ja die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in P^0, da das sogar $\mathfrak{g}_1^k$ tut.], $\mathfrak{h}$ dringt also notwendig in $\varphi_s > 0$ ein.

Jede Komponente von $\mathfrak{g}_1^k$ oder $\mathfrak{g}_2^k$ dringt daher in $\bigcap\limits_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ ein. Daraus folgt die Behauptung.

Zusatz zu Satz D. Ist nur eine Hyperfläche gegeben, so ergibt sich ganz ähnlich

Satz D_1. ζ^0 sei ein Punkt auf $\varphi = 0$, U eine Umgebung von ζ^0 und $\mathfrak{g}_1^k, \mathfrak{g}_2^k$ in U analytische Mengen: $\mathfrak{g}_1^k = \mathfrak{g}_2^k$ in $U \cap (\varphi > 0)$. Ist nun $q + k \geqq n$, so gibt es eine Umgebung U_* von ζ^0, in der $\mathfrak{g}_1^k = \mathfrak{g}_2^k$ ist.

§ 4. Lokale Fortsetzung.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Fortsetzung analytischer Mengen des z-Raumes. Die Voraussetzung ist immer, daß die Dimension k mindestens zwei, die topologische Dimension also wenigstens vier ist. Die Grundlage ist die lokale Fortsetzung.

Satz 1 (lokale Fortsetzung). ζ^0 sei gewöhnlicher Punkt der Hyperfläche $\varphi = 0$. Es sei $n \geqq 3$; $2 \leqq k \leqq n - 1$ und $q + k \geqq n + 1$ (q ist der Index von $\sum \varphi_{\mu\bar\nu}^0 u_\mu \bar u_\nu$ auf der Ebene $\sum \varphi_\mu^0 u_\mu = 0$). Weiter sei U eine Umgebung von ζ^0 und $\mathfrak{g}^k$ eine in $\overline{U} = U \cap (\varphi > 0)$ analytische Menge der Dimension k. Dann gilt:

1. Es gibt eine Umgebung U_* von ζ^0 und eine in U_* analytische k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}_*^k$, so daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}^k$ in $\overline{U} \cap U_*$.

2. Ist U_{**} eine weitere Umgebung von ζ^0 und $\mathfrak{g}_{**}^k$ eine in U_{**} analytische Menge der Dimension k, welche in $\overline{U} \cap U_{**}$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt, so gibt es eine Umgebung U_{***} von ζ^0, in der $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$ ist.

Kurz: Es gibt genau eine lokale Fortsetzung von $\mathfrak{g}^k$ in ζ^0.

Vorbemerkung zum Beweis. Der erste Teil des Beweises (1.—4.) ist eine Verbindung der Ergebnisse von § 2 und § 3. Unter 1. wird eine Faser — $\mathfrak{F}^{n-k}$ genannt — konstruiert, welche ζ^0 enthält und die Eigenschaften hat: (1) $\mathfrak{F}^{n-k}$ trifft $\varphi \leq 0$ nur in ζ^0. (2) $\mathfrak{F}^{n-k}$ trifft $\mathfrak{g}^k$ höchstens in isolierten Punkten. Unter 2. und 3. wird $\mathfrak{F}^{n-k}$ zu einer Faserung $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_{**}$ und $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ von Gebieten Z_{**}, Z_* ergänzt. Z_* liegt in $\varphi > 0$, Z_{**} umfaßt Z_* und enthält den Punkt ζ^0 im Inneren. T_{**} ist die Regularitätshülle von T_*. Die Faserung ist für jede Komponente $\mathfrak{g}_\lambda$ von $\mathfrak{g}^k \cap Z_*$ zulässig. Aus Satz 2.5 folgt dann, daß jedes $\mathfrak{g}_\lambda$ eine in Z_{**} analytische Erweiterung $\mathfrak{g}_\lambda^*$ besitzt.

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß $\mathfrak{g}_k \cap U_*$ in der Vereinigung der $\mathfrak{g}_\lambda^*$ enthalten ist. Das ist nicht selbstverständlich. Denn Z_* ist nur ein Ausschnitt von $\varphi > 0$. Es wäre denkbar, daß $\mathfrak{g}^k \cap Z_*$ leer ist. Dann wäre gar nichts bewiesen.

I. Beweis von (1). $b^0_{\mu\nu}$, $d^0_{\mu\nu}$, δ seien die in Satz A, § 3 vorkommenden Zahlen und $U = \bigcap\limits_{1}^{n} (|z_i - \zeta_i^0| < \delta)$, so daß die Ergebnisse von § 3 unmittelbar benutzt werden dürfen. Alles soll sich in U abspielen. Wir nehmen an, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n}(\zeta^0) \neq 0$ ist.

1. Nach Hilfssatz 4 (s. u.) fixiere man $b'_{\mu\nu}, d'_{\mu\nu} : |b'_{\mu\nu} - b^0_{\mu\nu}| < \delta$; $|d'_{\mu\nu} - d^0_{\mu\nu}| < \delta$ so, daß die $(n-k)$-dimensionale Fläche

$$\mathfrak{F}^{n-k} = \begin{cases} u'_n = u_n - \sum\limits_{1}^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu - \sum\limits_{1}^{n-1} b'_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu = 0;\; u_\mu = z_\mu - \zeta^0_\mu \\ u'_j = \sum\limits_{1}^{n-1} d'_{jk}\, u_k = 0;\; j = n-k+1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

die Menge $\mathfrak{g}^k$ nur in isolierten Punkten — falls überhaupt — trifft. Da $q \geqq n - - k + 1$ ist, liegt $\mathfrak{F}^{n-k}$ auf $\mathfrak{F}^q(\zeta^0, b', d') = (u'_n = \cdots = u'_{q+1} = 0)$ und schneidet daher $U \cap (\varphi \leq 0)$ nach Satz A nur in ζ^0.

Vorbemerkung zu 2.—4. Die d'_{ik} seien so gewählt, daß die Determinanten $|d'_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, n-1)$ und $|d_{\varrho,\sigma}|$ $(\varrho, \sigma = n-k+1, \ldots, n-1)$ ungleich Null sind (vgl. Beweis des Hilfssatzes 4, Schluß). Dann schneidet der Polyzylinder $\bigcap\limits_{1}^{n-k} (|u_i| < A)$ aus jeder Fläche $u'_j - c'_j = 0$ $(j = n-k+1, \ldots, n)$ ein einziges Gebiet heraus, die „Faser $\mathfrak{F}^{n-k}(c')$". Die Flächen und die Fasern sind $(n-k)$-dimensional. — Ist $C = 2\,\delta$, so liegen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ (vgl. 2. und 3.) in $\bigcap\limits_{r}^{n} (|u_i| < C)$. Infolgedessen sind Z_* und Z_{**} ganz in $\bigcap\limits_{r}^{n} (|u_i| < C)$ enthalten (vgl. 4.). Die Faserung genügt also der Bedingung (3), 2.21 in bezug auf den Polyzylinder $\bigcap\limits_{1}^{n-k} (|u_i| < A) \cap \bigcap\limits_{r}^{n} (|u_i| < C)$. Die Voraussetzungen des Satzes 2.5 sind erfüllt.

2. $\mathfrak{Z}(A)$ sei der Polyzylinder $\bigcap\limits_{1}^{n-k} (|u_i| < A)$ und $R(A)$ sein Rand. Wir setzen $r = n - k + 1$. Man bestimme nun A so, daß auf $(u'_n = \cdots = u'_r = 0;\; R(A))$ kein Punkt von $\mathfrak{g}^k$ liegt.

$(u'_n = \cdots = u'_{r+1} = 0)$ liegt auf $\mathfrak{F}^q(\zeta^0, b', d')$ und trifft daher $U \cap (\varphi \leqq 0)$ nur in ζ^0. Infolgedessen gibt es ein $B > 0$ so, daß $(u'_n = \cdots = u'_{r+1} = 0; |u'_r| = B; \mathfrak{Z}(A))$ in $\overline{U} = U \cap (\varphi > 0)$ enthalten ist. Außerdem möge auf $(u'_n = \cdots = u'_{r+1} = 0; |u'_r| = B; R(A))$ kein Punkt von $\mathfrak{g}^k$ liegen. Dann läßt sich ein δ_1 fixieren, so daß

$$\mathfrak{R} = \{|u'_n|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1;\ B - \delta_1 < |u'_r| < B + \delta_1;\ \mathfrak{Z}(A + \delta_1)\}$$

in $\overline{U} = U \cap (\varphi > 0)$ enthalten ist und außerdem $\mathfrak{g}^k$ das Gebiet $\mathfrak{R} \cap \{\mathfrak{Z}(A + \delta_1) - \mathfrak{Z}(A - \delta_1)\}$ nicht trifft. In $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{g}_k$ analytisch.

3. Schließlich bestimme man $\tau_0 (0 < \tau_0 < \delta)$ und E gemäß Satz B und zudem so, daß $|E\tau_0^2| < \delta_1$. Es sei $a = E\tau_0^{\frac{1}{2}}$. Darauf mache man $\varepsilon > 0$ so klein, daß gilt:

(3.1) $$|u'_n - a|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \varepsilon$$

liegt in

$$|u'_n|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1$$

(3.2) $$\mathfrak{D} = \{|u'_n - a|^2 + |u'_{n-1}|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \varepsilon;\ |u'_r| < B + \delta_1;\ \mathfrak{Z}(A + \delta_1)\}$$

liegt in $\overline{U} = U \cap (\varphi > 0)$.

(3.2) ist erfüllbar, da nach Satz B die Fläche $(u'_n = a; u'_{n-1} = \cdots = u'_{r+1} = 0)$ das Gebiet $U \cap (\varphi \leqq 0)$ nicht trifft. Dann ist also $\mathfrak{g}^k$ auch in $\mathfrak{D}$ analytisch.

4. Infolge 2. und 3. ist $\mathfrak{g}^k$ in $Z_* = (\mathfrak{R} \cup \mathfrak{D}) \cap \mathfrak{Z}(A)$ analytisch und schneidet das Gebiet $(\mathfrak{Z}(A + \delta_1) - \mathfrak{Z}(A - \delta_1))$ nicht. Es sei weiter

$$Z_{**} = \{|u'_n|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1;\ |u'_r| < B + \delta_1;\ \mathfrak{Z}(A)\}.$$

Als Fasern $\mathfrak{F}(\tau)$ werden die $(n - k)$-dimensionalen Flächen

$$u'_n(z) - \tau_1 = \cdots = u'_r(z) - \tau_k = 0;\ (z) \in \mathfrak{Z}(A)$$

eingeführt. Es ist dann $Z_{**} = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_{**}$ und $Z_* = \bigcup \mathfrak{F}(\tau)/\tau \in T_*$ mit

$$T_{**} = (|\tau_1|^2 + \cdots + |\tau_{k-1}|^2 < \delta_1;\ |\tau_k| < B + \delta_1)$$

und

$$\begin{aligned} T_* = (|\tau_1|^2 + \cdots + |\tau_{k-1}|^2 < \delta_1;\ B - \delta_1 < |\tau_k| < B + \delta_1) \cup \\ \cup (|\tau_1 - a|^2 + |\tau_2|^2 + \cdots + |\tau_{k-1}|^2 < \varepsilon;\ |\tau_k| < B + \delta_1). \end{aligned}$$

Offenbar liegt jeder Punkt von Z_{**} auf einer und nur einer Faser. Die Faserung ist für jede Komponente $\mathfrak{g}_\lambda$ von $\mathfrak{g}^k \cap Z_*$ zulässig. T_{**} ist die Regularitätshülle von T_*. Für jedes $\mathfrak{g}_\lambda$ sind nun die Voraussetzungen des Satzes 2.5 erfüllt. Es gibt daher eine in Z_{**} analytische k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}^*_\lambda$, so daß $\mathfrak{g}^*_\lambda \cap Z_* = \mathfrak{g}_\lambda$ ist. Die Vereinigung $\mathfrak{g}^k_*$ der $\mathfrak{g}^*_\lambda$ ist in Z_{**} analytisch, k-dimensional und es ist $\mathfrak{g}^k_* \cap Z_* = \mathfrak{g}^k \cap Z_*$.

5. Zum vollständigen Beweis der Behauptung (1) ist noch zu zeigen: Es gibt eine Umgebung U_* von ζ^0, so daß $\mathfrak{g}^k_* = \mathfrak{g}^k$ in $\overline{U} \cap U_*$ ist.

Zum Beweis ziehen wir die Flächen

$$\mathfrak{F}^r(\zeta) = \begin{cases} h'_n(z;\zeta) = h_n - \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta)\, h_\mu - \sum\limits_1^{n-1} b'_{\mu\nu}\, h_\mu h_\nu = 0;\ h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu \\ h'_j(z;\zeta) = \sum\limits_1^{n-1} d'_{jk}\, h_k;\ j = r+1, \ldots, n-1;\ r = n - k + 1 \end{cases}$$

heran. Ist nun $l > 0$ klein genug, so liegt für jedes ζ aus $U_* = \bigcap (|\zeta_i - \zeta_i^0| < l)$ die Punktmenge

$$S(\zeta) = \begin{cases} h'_n = \cdots = h'_{r+1} = 0;\ |h'_r| = B \\ |h'_1| + \cdots + |h'_{r-1}|^2 < A \end{cases}$$

innerhalb

$$\mathfrak{R} = \begin{cases} |u'_n|^2 + \cdots + |u'_{r+1}|^2 < \delta_1;\ B - \delta_1 < u'_r < B + \delta_1 \\ |u'_1|^2 + \cdots + |u'_{r-1}|^2 < A + \delta_1. \end{cases}$$

Denn in jedem Gebiet des z-Raumes gilt gleichmäßig $\lim\limits_{\zeta \to \zeta^0} h'_\mu(z;\zeta) = u'_\mu$, da $h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu$; $u_\mu = z_\mu - \zeta_\mu^0$ und $a_\mu(\zeta)$ stetig ist.

Daraus folgt sehr leicht die Behauptung. Denn jede auf $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ gelegene nicht nulldimensionale analytische Fläche muß $S(\zeta)$, also erst recht $\mathfrak{R}$ schneiden (vgl. Satz 1.3, § 1). Nun liegt $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ auf $\mathfrak{F}^q(\zeta, b', d')$, somit — für $\varphi(\zeta) > 0$ — ganz in $\varphi > 0$ (Satz A). Sei $\bar{U}_* = U_* \cap (\varphi > 0)$ und ζ aus $\bar{U}_*$. Liegt ζ auf $\mathfrak{g}^k$, so ist jede Komponente von $\mathfrak{g}^k \cap \mathfrak{F}^r(\zeta)$ wegen $r + k = n + 1$ wenigstens eindimensional, trifft also $\mathfrak{R}$. Infolgedessen liegt ζ auch auf $\mathfrak{g}_*^k$. Umgekehrt: Liegt ζ auf $\mathfrak{g}_*^k$, so ist jede Komponente von $\mathfrak{g}_*^k \cap \mathfrak{F}^r(\zeta)$ mindestens eindimensional, schneidet daher $\mathfrak{R}$. Folglich liegt ζ auch auf $\mathfrak{g}^k$.

II. Die Behauptung (2) folgt sofort aus Satz D_1.

Es steht noch aus der

Hilfssatz 4. Es gibt Zahlen $b'_{\mu\nu}, d'_{\mu\nu}$ ($|b'_{\mu\nu} - b^0_{\mu\nu}| < \delta$; $|d'_{\mu\nu} - d^0_{\mu\nu}| < \delta$), so daß die analytische Fläche

$$\mathfrak{F}^{n-k} = \begin{cases} u'_n = u_n - \sum\limits_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu - \sum\limits_1^{n-1} b'_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu = 0;\ u_i = z_i - \zeta_i^0 \\ u'_j = \sum\limits_1^{n-1} d'_{jk}\, u_k = 0;\ j = n - k + 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

die Menge $\mathfrak{g}^k$ nur in isolierten Punkten schneidet.

Beweis. 1. Für $\mu \neq \nu$ sei $b'_{\mu\nu} = b^0_{\mu\nu}$, sonst $b'_{\mu\mu} = b^0_{\mu\mu} + b_\mu$ und $d'_{\mu\nu} = d^0_{\mu\nu} + d_{\mu\nu}$. Weiter werde gesetzt

$$h_n(z, b') = u_n - \sum_1^{n-1} a_\mu(\zeta^0)\, u_\mu - \sum_1^{n-1} b'_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu = h_n^0 - \Sigma\, b_\mu\, u_\mu^2$$

$$h_j(z, d') = \sum_1^{n-1} d'_{jk}\, u_k = h_j^0 + \sum_1^{n-1} d_{j\nu}\, u_\nu.$$

Die Zahlen b_μ, $d_{j\nu}$ sind noch zu bestimmen.

2. Der Schnitt der Fläche $h^0_{n-k+1} = \cdots = h^0_n = 0$ mit dem Rand von $U = \bigcap\limits_1^n (|z_i - \zeta_i^0| < \delta)$ sei S. Man lege Zylinder $Z_1, \ldots, Z_l$ so fest, daß $V = \bigcup Z_\lambda$ in $\varphi > 0$ liegt, S ganz in V enthalten ist und $\mathfrak{g}^k$ in V die Vereinigung nur endlich vieler irreduzibler Komponenten $\mathfrak{g}_1^k, \ldots, \mathfrak{g}_s^k$ ist. Weiter sei $S(b', d')$ der Schnitt von $\mathfrak{F}(b', d') = \{h_{n-k+1}(z, d') = \cdots = h_{n-1}(z, d') = h_n(z, b') = 0\}$ mit dem Rand von U. Ist $\varepsilon > 0$ genügend klein und $|b_\mu| < \varepsilon$; $|d_{jk}| < \varepsilon$, so liegt $S(b', d')$ ganz in V.

3. Jede nicht nulldimensionale Komponente des Schnittes von $\mathfrak{g}^k$ und $\mathfrak{F}(b', d')$ muß den Rand von U schneiden, also in V eindringen (Satz 1.3). Es genügt somit dafür zu sorgen, daß $\mathfrak{g}^k \cap \mathfrak{F}(b', d')$ in V nur aus isolierten Punkten besteht. Daher brauchen nur die $\mathfrak{g}_\sigma^k$ (vgl. 2.) betrachtet zu werden.

4. Die Fläche $h_n(z, b') = 0$ schneidet $u_1 = \cdots = u_{n-1} = 0$ nur in $u_1 = \cdots = u_n = 0$. Also weist jede auf $h_n(z, b') = 0$ gelegene analytische nicht nulldimensionale Fläche Punkte auf, für die $|u_1|^2 + \cdots + |u_{n-1}|^2 > 0$ ist. Ferner benutzen wir, daß eine analytische Funktion h auf einer irreduziblen analytischen Fläche $\mathfrak{h}^\lambda$ der Dimension λ, wenn sie dort überhaupt Null wird, entweder identisch verschwindet, oder aber $(h = 0) \cap \mathfrak{h}^\lambda$ eine analytische Menge der Dimension $\lambda - 1$ ist[22]).

Man wähle auf jeder $\mathfrak{g}_\sigma^k$ einen Punkt $P_\sigma = (u_1^\sigma, \ldots, u_n^\sigma)$, für den $|u_1^\sigma|^2 + \cdots + |u_{n-1}^\sigma|^2 > 0$. Dann können die $b_\mu (|b_\mu| < \varepsilon)$ offenbar so fixiert werden, daß $h_n(P_\sigma, b') \neq 0$ ist. Infolgedessen ist der Schnitt von $\bigcup \mathfrak{g}_\sigma^k$ und $h_n(z, b') = 0$ $(k-1)$-dimensional.

Darauf werden die d_{1k} so bestimmt, daß $(h_n(z, b') = h_{n-1}(z, d') = 0) \cap \bigcup \mathfrak{g}_\sigma^k$ $(k-2)$-dimensional ist. Das geht wie oben. Fährt man so fort, so erniedrigt sich die Dimensionszahl bei jedem Schritt um 1.

Die d können in der Umgebung eines beliebigen Punktes gewählt werden.

Es ist zweckmäßig, den Satz auf mehrere Hyperflächen zu erweitern. Dazu seien im $(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_n)$-Raum Hyperflächen der Form

$$\varphi(w_\sigma, \overline{w}_\sigma, z, \overline{z}) = w_\sigma \overline{w}_\sigma - \chi_\sigma(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n) = 0; \; \sigma = 1, \ldots, s$$

gegeben, die sich im Punkte $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ schneiden. Der Index aller $\varphi_\sigma = 0$ in P^0 soll n und $w_\sigma^0 = \alpha_\sigma^0 \neq 0$ sein. U sei eine Umgebung vom P^0 und $\overline{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$.

Satz 1a: Es sei $\mathfrak{g}^k$ eine in $\overline{U}$ analytische k-dimensionale Menge, welche auf der Ebene $w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0$ liegt. Ist weiter $k \geqq s + 1$, so existiert in P^0 die lokale Fortsetzung von $\mathfrak{g}^k$ und ist eindeutig bestimmt. Es gilt also:

1. Es gibt eine Umgebung U_* von P^0 und eine in ihr analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, so daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}^k$ in $\overline{U} \cap U_*$.

2. Ist U_{**} eine andere Umgebung von P^0 und $\mathfrak{g}_{**}^k$ eine in ihr analytische Menge, für die $\mathfrak{g}_{**}^k = \mathfrak{g}^k$ in $\overline{U} \cap U_{**}$, so existiert eine Umgebung U_{***} von P^0, in welcher $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$.

3. $\mathfrak{g}_*^k$ liegt auf $w_1 - z_1 = \cdots + w_s - z_s = 0$.

Beweis. Wird Satz A auf alle $\varphi_\sigma = 0$ und Satz B auf $\varphi_s = 0$ angewendet, so findet sich: Es gibt eine δ-Umgebung U von $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ — es sei $\alpha^0 = (\zeta_1^0, \ldots, \zeta_s^0)$ — eine Zahl $E \neq 0$ und Zahlen $b_{\mu\nu,\sigma}^0 (\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ so, daß für alle $b_{\mu\nu,\sigma}$, welche der Bedingung $|b_{\mu\nu,\sigma} - b_{\mu\nu,\sigma}^0| < \delta$ genügen, gilt:

[22]) Vgl. [12], S. 132, Satz.

1) Ist $P = (\alpha, \zeta)$ ein Punkt aus $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma \geqq 0)$, so trifft jede Fläche

$$\mathfrak{F}^n(P,b) = \begin{cases} h_{n+1}(P,b) = \cdots = h_{n+s}(P,b) = 0 \quad \text{mit} \\ h_{n+\sigma}(P,b) = (w_\sigma - \alpha_\sigma) - \sum_1^n a_{\mu\sigma}(P)(z_\mu - \zeta_\mu) - \sum_1^n b_{\mu\nu,\sigma}(z_\mu - \zeta_\mu)(z_\nu - \zeta_\nu) \end{cases}$$

den Schnitt von $w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0$ und $U \cap \bigcup_1^s (\varphi_\sigma \leqq 0)$ höchstens in P.

2) Ist $0 < \tau < \delta$, so trifft $h_{n+1}(P^0, b^0) = \cdots = h_{n+s-1}(P^0, b^0) = h_{n+s}(P^0, b^0) - E\tau^2 = 0$ den Schnitt von $w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0$ und $U \cap \bigcup_1^s (\varphi_\sigma \leqq 0)$ überhaupt nicht.

Da $\mathfrak{g}^k$ auf der Ebene $w_1 - z_1 = \cdots = w_s = z_s = 0$ liegt und deshalb die Ebene $z_1 - \zeta_1^0 = \cdots = z_n - \zeta_n^0 = 0$ nur in $P^0 = (\alpha^0, \zeta^0)$ schneidet, können ähnlich wie beim Hilfssatz 4 Zahlen $b'_{\mu\nu,\sigma}(|b'_{\mu\nu,\sigma} - b^0_{\mu\nu,\sigma}| < \delta)$ und $d'_{\mu\nu}(|d'_{\mu\nu} - \delta^\nu_\mu| < \delta$; $\delta^\mu_\mu = 1$; $\delta^\nu_\mu = 0$, $\mu \neq \nu)$ bestimmt werden, so daß

$$\mathfrak{F}^{m-k} = \begin{cases} u'_{n+1} = \cdots = u'_m = 0;\; m = n+s;\; u'_{n+\sigma} = h_{n+\sigma}(P^0, b') \\ u'_j = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta_k^0) = 0;\; j = m-k+1, \ldots, n \end{cases}$$

die Menge $\mathfrak{g}^k$ nur in diskreten Punkten trifft. Außerdem mögen die Determinanten $|d'_{jk}|$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ und $|d'_{\varrho\sigma}|$ $(\varrho, \sigma = m-k+1, \ldots, n)$ ungleich Null sein.

Im Beweis zu Satz 1 ersetze man nun n durch $m = n + s$, so daß $r = m - k + 1$ ist, und erkläre u'_μ durch $u'_{n+\sigma} = h_{n+\sigma}(P^0, b')$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$; $u'_j = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta^0)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Im übrigen kann man nun formal genau so wie unter 1.—4. verfahren. Dabei ist jedoch folgendes zu beachten: Zwar liegen die Gebiete $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}$ jetzt nicht in $\overline{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$. Trotzdem ist $\mathfrak{g}^k$ in $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{H}$ analytisch — und das allein ist wichtig —, da die Schnitte von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}$ mit der Ebene $w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0$ in $\overline{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ enthalten sind. Man bekommt so wieder eine in Z_{**} analytische k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}^k_*$, für die $Z_* \cap \mathfrak{g}^k_* = Z_* \cap \mathfrak{g}^k$ ist.

Unter 5. sind jetzt statt der $\mathfrak{F}^r(\zeta)$ die Flächen

$$\mathfrak{F}^r(P) = \begin{cases} h_{n+1}(P, b') = \cdots = h_{n+s}(P, b') = 0 \\ h_j(P, d') = \sum_1^n d'_{jk}(z_k - \zeta_k) = 0;\; j = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

für P aus $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ zu nehmen. Wieder ist zu bedenken, daß zwar $\mathfrak{F}^r(P) \cap U_*$ nicht in $\bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ liegt, dies jedoch für den Schnitt von $\mathfrak{F}^r(P) \cap U_*$ mit der

Ebene $w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0$ gilt. Auf dieser Ebene liegt $\mathfrak{g}^k$. Aber auch $\mathfrak{g}^k_*$ liegt auf ihr. Denn $\mathfrak{g}^k_*$ ist aus $\mathfrak{g}^k$ durch analytische Fortsetzung entstanden. Dabei bleiben die Identitäten $w_\sigma - z_\sigma \equiv 0$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ auf jeder Komponente erhalten. Infolgedessen bleiben die Schlüsse von 5. gültig.

Anmerkung. Auch beim Beweis des Analogons zu Hilfssatz 4 hat man geringfügige Änderungen anzubringen. Man geht aus von der Fläche $\mathfrak{F}^{m-k}$ und verfährt zunächst wie früher. Dann aber ist S zu erklären als Schnitt von $h^0_{m-k+1} = \cdots = h^0_m = 0$ mit dem Rand von $U \cap (w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0)$ und entsprechend $S(b', d')$ als Schnitt von $\mathfrak{F}(b', d')$ mit dem Rand von $U \cap$ $\cap (w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0)$. Sonst geht es wie früher.

Dieser Satz wird zur Untersuchung der analytischen Mengen des z-Raumes wie folgt benutzt. Es seien s Hyperflächen $\varphi_\sigma = z_\sigma \cdot \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ gegeben, und $\zeta^0_\sigma \neq 0$. Für sie soll gelten: Der Index der Hyperfläche im (w, z)-Raum $\varphi^*_\sigma = w_\sigma \overline{w}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ ist in allen Punkten gleich n. In Zukunft haben wir es nur mit solchen $\varphi_\sigma = 0$ zu tun. Sie mögen „*normal*" heißen.

Satz 2. Die $\varphi_\sigma = z_\sigma \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ *seien normal. Ferner sei* ζ^0 *mit* $\zeta^0_\sigma \neq 0$; $\sigma = 1, \ldots, s$ *ein Punkt auf* $\varphi_1 = \cdots = \varphi_s = 0$, U *eine Umgebung von* ζ^0 *und* $\overline{U} = U \cap \bigcap\limits_1^s (\varphi_\sigma > 0)$. *Endlich sei* $\mathfrak{g}^k$ *eine in* U *analytische Menge und* $k \geqq s + 1$. *Dann existiert in* ζ^0 *die lokale Fortsetzung von* $\mathfrak{g}^k$ *und ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1. Man ordne $\mathfrak{g}^k$ die Menge $\mathfrak{G}^k$ des (w, z)-Raumes:

$$\mathfrak{G}^k = (w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0;\ (z) \in \mathfrak{g}^k)$$

zu. Setzt man $\varphi^*_\sigma = w_\sigma \overline{w}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)$, so treffen auf sie und eine Umgebung des Punktes $P^0 = (\zeta^0_1, \ldots, \zeta^0_s;\ \zeta^0_1, \ldots, \zeta^0_n)$ die Voraussetzungen des Satzes 1a zu. Also gibt es eine Umgebung U_* von P^0 und eine in ihr analytische Menge $\mathfrak{G}^k_*$, für die $\mathfrak{G}^k_* = \mathfrak{G}^k$ in $\overline{U}_* = U_* \cap \bigcap\limits_1^s (\varphi^*_\sigma > 0)$ ist. Jede Komponente $\mathfrak{G}_\lambda$ von $\mathfrak{G}^k_*$ trifft $\overline{U}_*$. Außerdem liegt $\mathfrak{G}^k_*$ auf $(w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0)$.

2. $\mathfrak{G}_\lambda$ trifft die Ebene $z_1 - \zeta^0_1 = \cdots = z_n - \zeta^0_n = 0$ nur in P^0. In einer Polyzylinder-Umgebung $U = (U_w, U_z)$ von P^0 besitzt $\mathfrak{G}_\lambda$ nach dem Einbettungssatz eine Einbettungsmenge $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit einer Darstellung

$$\mathfrak{G}'_\lambda = (w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0;\ (z) \in \mathfrak{g}_\lambda;\ \mathfrak{g}_\lambda \text{ analytisch in } U_z).$$

Die Komponenten von $\mathfrak{G}'_\lambda$ bekommt man offenbar, indem man $\mathfrak{g}_\lambda$ in seine Komponenten zerlegt. $\mathfrak{G}_\lambda$ selbst hat dann eine Darstellung

$\mathfrak{G}_\lambda = (w_1 - z_1 = \cdots = w_s - z_s = 0;\ (z) \in \mathfrak{h}_\lambda;\ \mathfrak{h}_\lambda$ analytisch und irreduzibel in $U_z)$.

Die Vereinigung der $\mathfrak{h}_\lambda$ ist die gesuchte Fortsetzung von $\mathfrak{g}^k$. Denn nach Konstruktion umfaßt sie $U_z \cap \mathfrak{g}^k$ und ihr Durchschnitt mit $\bigcap\limits_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ ist in $\mathfrak{g}^k$ enthalten.

Ähnlich geht aus § 3, Satz D' hervor

Satz D''. Es seien s normale Hyperflächen $\varphi_\sigma = z_\sigma \bar{z}_\sigma - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ *gegeben,* ζ^0 *ein Punkt auf* $\varphi_1 = \cdots = \varphi_s = 0$ *und* U *eine Umgebung von* ζ^0.

$\mathfrak{g}_1^k, \mathfrak{g}_2^k$ *seien in* U *analytische Mengen, welche in* $\bar{U} = U \cap \bigcap_1^s (\varphi_\sigma > 0)$ *übereinstimmen. Dann gilt:*

Ist $k \geqq s$*, so gibt es eine Umgebung* U_* *von* ζ^0*, in der* $\mathfrak{g}_1^k = \mathfrak{g}_2^k$ *ist.*

Anmerkung. Bei einer normalen Hyperfläche $z_1 \bar{z}_1 - \chi(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n) = 0$ kann die linke Seite nicht in Wahrheit unabhängig von z_1 sein. Das ist leicht zu sehen. — Es ist möglich und erlaubt, daß $\bigcap (\varphi_\sigma > 0)$ etwa der Durchschnitt der Außengebiete zweier Kugeln ist, die sich in ζ^0 berühren und sonst punktfremd sind. $U - \bar{U}$ ist dann nicht zusammenhängend. Das spielt keine Rolle.

§ 5. Fortsetzung im Großen.

Im folgenden werden mehrere Hyperflächen $\varphi = 0$ betrachtet. Sie sollen alle zweimal stetig differenzierbar sein und nur gewöhnliche Punkte haben. Die Bedingung (v^*) ist dann erfüllt. Jedem ζ auf $\varphi = 0$ ist ein Index $q(\zeta)$ zugeordnet, der Index von $\Sigma\, \varphi_{\mu\bar{\nu}}(\zeta)\, u_\mu \bar{u}_\nu$ auf $\Sigma\, \varphi_\mu(\zeta)\, u_\mu = 0$. Als „Index von $\varphi = 0$" wird das min $q(\zeta)$ auf $\varphi = 0$ bezeichnet. Aus den Sätzen D und D′ ergeben sich zwei Aussagen, die für die Fortsetzung im Großen nützlich sind.

Hilfssatz 5.1. *Voraussetzungen.* 1. Φ sei die Vereinigung von l Hyperflächen $\varphi_\lambda = 0$ und q_λ der Index von $\varphi_\lambda = 0$. Es sei $q_\lambda + k \geqq n$. Die Vereinigung der Außengebiete $\varphi_\lambda > 0$ heiße A.

2. M sei eine abgeschlossene Punktmenge auf Φ.

3. Jedem $\zeta \in M$ sei eine Kugel $U(\zeta)$ und eine in $U(\zeta)$ analytische Menge $\mathfrak{g}^k(\zeta)$ zugeordnet, und zwar so, daß in A die Verträglichkeitsbedingung: $\mathfrak{g}^k(\zeta') = \mathfrak{g}^k(\zeta'')$ in $U(\zeta') \cap U(\zeta'') \cap A$ erfüllt ist. Dann ist also $\mathfrak{g}^k = \bigcup \mathfrak{g}^k(\zeta)$ eine in $A \cap \bigcup U(\zeta)$ analytische Menge.

Behauptung. Es gibt ein Gebiet B, welches M im Inneren enthält, und eine in B analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, so daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}^k$ in $B \cap A$ ist.

Anmerkung. Da stets $q_\lambda \leqq n - 1$ ist und natürlich auch $k \leqq n - 1$ sein soll, so folgt aus $q_\lambda + k \geqq n + 1$, daß $n \geqq 3$ und $k \geqq 2$ ist. — Der Satz ist etwas allgemeiner gefaßt, als man ihn hier braucht. Aber der Beweis wird nicht erschwert.

Beweis. 1. Zu jedem $P \in M$ fixiere man eine ganz in $U(P)$ gelegene Kugel $U'(P)$. Da M abgeschlossen ist, gibt es Punkte $P_1, \ldots, P_m$, so daß M innerhalb $B' = U'(P_1) \cup \cdots \cup U'(P_m)$ liegt. Es sei $\mathfrak{g}'_\mu = \mathfrak{g}^k(P_\mu) \cap U'(P_\mu)$. Die Vereinigung der $\mathfrak{g}'_\mu$ stimmt in $B' \cap A$ offenbar mit $\mathfrak{g}^k$ überein.

2. Außerdem aber genügen die $(\mathfrak{g}'_\mu, U'(P_\mu))$ in einer vollen Umgebung B von M den Äquivalenzbedingungen.

Zum Beweise sei $Q \in M$ ein Punkt des abgeschlossenen Durchschnitts von $U'_1, \ldots, U'_r$ (jedes U'_ϱ ein $U'(P_\mu)$). Dann existiert eine Umgebung $V(Q)$, in der die beteiligten $\mathfrak{g}(P_\mu)$ miteinander übereinstimmen.

Denn Q liegt, da $U'(P_\mu) \Subset U(P_\mu)$, im Inneren aller beteiligten $U(P_\mu)$: alle beteiligten $\mathfrak{g}(P_\mu)$ sind also in einer Umgebung $V'(Q)$ noch analytisch. Sie stimmen ferner in $V'(Q) \cap A$ paarweis überein. Nach Satz D_1 gibt es eine volle Umgebung $V(Q)$, in welcher sie gleich sind. $V(Q)$ sei so klein, daß $V(Q) \cap U'(P_\mu) = 0$ für alle nicht beteiligten $U'(P_\mu)$ ist.

Sei nun B der Durchschnitt von B' und der Vereinigung der $V(Q)$ für alle Q aus M. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{g}_i'$ und $\mathfrak{g}_k'$ in $\mathfrak{D}_{ik} = U'(P_i) \cap U'(P_k) \cap B$ übereinstimmen. Das ist jedoch klar. Denn jeder Punkt $R \in \mathfrak{D}_{ik}$ liegt in einer Umgebung $V(Q)$ um einen Punkt Q aus M. Und in $V(Q)$ stimmen $\mathfrak{g}^k(P_i)$ und $\mathfrak{g}^k(P_k)$ miteinander und mit $\mathfrak{g}_i'$ und $\mathfrak{g}_k'$ überein.

3. Aus 1. und 2. folgt, daß die Vereinigung der $\mathfrak{g}_\mu'$ in B eine analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$ bildet, welche in $B \cap A$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt, w. z. b. w.

In dem nun folgenden Hilfssatz werden $l \cdot s$ Hyperflächen $w_{\lambda\sigma} \cdot \bar{w}_{\lambda\sigma} - \psi(z,\bar{z}) = \varphi_{\lambda\sigma} = 0$ betrachtet. Es sei $\mathfrak{D}_\lambda = \bigcap_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$, also der (bei festem λ) von den $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$ begrenzte Durchschnitt der $\varphi_{\lambda\sigma} > 0$. Weiter sei A nun die Vereinigung der $\mathfrak{D}_\lambda$, also $A = \bigcup_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{D}_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{l} \bigcap_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$.

Hilfssatz 5.2. In den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5.1 sei jetzt Φ die Vereinigung der $l \cdot s$ normalen Hyperflächen $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$. Weiter *sei* $q_{\lambda\sigma} = n$ und $s \leqq k$. Schließlich sei $A = \bigcup_{\lambda=1}^{l} \bigcap_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda\sigma} > 0)$. Im übrigen braucht weder an der Voraussetzung von 5.1 noch an der Behauptung etwas geändert zu werden.

Der Beweis geht genau wie oben. Nur wird statt des Satzes D jetzt Satz D'' benutzt.

Satz 3 (sternartige Gebiete). Das Gebiet G sei beschränkt, sternartig und ganz in G' enthalten. G werde von l Hyperflächen $\varphi_\lambda = 0$ begrenzt, und zwar so, daß $G = \bigcap_{\lambda=1}^{l} (\varphi_\lambda < 0)$ ist. Die φ_λ sollen der Voraussetzung (v^*) genügen und die Indexrelation $q_i + q_j + k \geqq 2n$ für jedes Paar i, j befriedigen. $\mathfrak{g}^k$ sei eine in $G' - G$ analytische Menge $(k \geqq 2)$. Dann gibt es eine und nur eine in G' analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, welche in $G' - G$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Jede Komponente von $\mathfrak{g}_*^k$ enthält mindestens eine Komponente von $\mathfrak{g}^k$.

Anmerkung. Aus $q_i + q_j + k \geqq 2n$ und $q_i \leqq n - 1$ folgt $q_j + k \geqq n + 1$. Also darf im Beweis außer Satz D auch der Satz 1 benutzt werden. Ferner folgt aus $q_i = q_j = n - 1$ und $k \geqq 2$ wieder $q_i + q_j + k \geqq 2n$. Ist das Gebiet G also nur von Hyperflächen mit dem Höchstindex berandet, so sind die Bedingungen erfüllt. Aber die Hyperflächen brauchen nicht den Höchstindex zu haben, außer für $n = 3$. G braucht also durchaus kein Regularitätsgebiet zu sein, wenn $n > 3$ ist.

Beweis. a) Existenz.

1. Der Ursprung 0 sei Mittelpunkt des Sterngebietes G. Durch die Abbildung $z' = r \cdot z$ $(0 < r < 1)$ gehe G in $G(r)$ über. Wird $\varphi_\lambda^{(r)} = \varphi_\lambda\left(\frac{z}{r}\right)$ gesetzt, so ist $G(r) = \bigcap_{\lambda=1}^{l} (\varphi_\lambda^{(r)} < 0)$. Der Index von $\varphi_\lambda^{(r)} = 0$ ist derselbe wie der von $\varphi_\lambda = 0$. Für je zwei der Hyperflächen ist die Indexrelation also erfüllt.

2. Es ist zunächst zu zeigen: Zu jedem $r\,(0 < r < 1)$ gibt es eine in $G' - G(r)$ analytische Menge $\mathfrak{g}(r)$, so daß $\mathfrak{g}(r) = \mathfrak{g}^k$ in $G' - G(r)$. Kurz: Die Fortsetzung existiert in $G' - G(r)$.

Gesetzt, diese Behauptung sei falsch. Dann muß es ein kleinstes $r' > 0$ geben, so daß die Fortsetzung $\mathfrak{g}(r')$ in $G' - G(r')$ noch existiert. Der Rand von $G(r')$ sei $\mathfrak{R}$.

2.1. Der Randpunkt $R \in \mathfrak{R}$ liege auf nur einer Hyperfläche $\varphi_{\sigma'}^{(r')} = 0$. Dann gibt es nach Satz 1 eine Umgebung $U(R)$ und eine in ihr analytische Menge $\mathfrak{g}_R$, so daß $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}(r')$ in $U(R) \cap (\varphi_{\sigma'}^{(r')} > 0)$. Man mache $U(R)$ so klein, daß in $U(R)$ für die übrigen σ gilt: $\varphi_\sigma^{(r')} < 0$. Dann ist also $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}(r')$ im Durchschnitt von $U(R)$ und $G' - G(r')$.

2.2 $R \in \mathfrak{R}$ liege auf den Hyperflächen $\chi_1 = 0; \ldots; \chi_m = 0$ (jedes χ_μ ein $\varphi_\sigma^{(r')}$) und keiner weiteren. Dann gibt es nach Satz 1 eine Umgebung $U'(R)$ und m in ihr analytische Mengen $\mathfrak{g}_\mu$, so daß jeweils $\mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}(r')$ in $U'(R) \cap (\chi_\mu > 0)$. Die Mengen $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{g}_j$ stimmen daher in $U'(R) \cap (\chi_i > 0) \cap (\chi_j > 0)$ überein. Nach Satz D gibt es aber eine Umgebung U_{ij} von R, in der $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_j$ ist. Daher existiert auch eine Umgebung $U(R)$ (man sorge nur dafür, daß $U(R)$ im Durchschnitt aller U_{ik} liegt und daß für alle nicht beteiligten $\varphi_\sigma^{(r')}$ in $U(R)$ gilt: $\varphi_\sigma^{(r')} < 0$), so daß alle $\mathfrak{g}_\mu$ in $U(R) \cap (G' - G(r'))$ untereinander und mit $\mathfrak{g}^k(r')$ übereinstimmen.

2.3. Nach 2.1 und 2.2 gibt es zu jedem R auf $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $U(R)$ und eine in ihr analytische Menge $\mathfrak{g}(R)$, so daß die Vereinigung der $\mathfrak{g}(R)$ im Durchschnitt von $G' - G(r')$ und $\bigcup\limits_{R \in \mathfrak{R}} U(R)$ mit $\mathfrak{g}^k(r')$ übereinstimmt. Nach Hilfssatz 5.1 existiert dann ein Gebiet B, welches $\mathfrak{R}$ im Innern enthält, und eine in B analytische Menge $\mathfrak{g}_0$, so daß $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^k(r')$ in $B \cap (G' - G(r'))$. Ist $r' - r'' > 0$ klein genug, so liegt $G' - G(r'')$ sicher in $B \cup (G' - G(r'))$. Die Vereinigung von $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}^k(r')$ ist also eine in $G' - G(r'')$ analytische Menge, die in $G' - G$ gleich $\mathfrak{g}^k$ ist. Das widerspricht der Definition von r'.

3. Wegen 2. gibt es eine in $G' - O$ analytische Menge $\mathfrak{g}_+$, die in $G' - G$ gleich $\mathfrak{g}^k$ ist. Nach der von Remmert und Stein[23]) bewiesenen Erweiterung eines bekannten Satzes von Thullen[24]) gibt es jedoch keine isolierten Singularitäten mindestens eindimensionaler analytischer Mengen. Infolgedessen muß $\mathfrak{g}_+$ auch in O noch analytisch bleiben. Die durch den Punkt O ergänzte Menge $\mathfrak{g}_+$ hat die von $\mathfrak{g}_*^k$ geforderten Eigenschaften.

Anmerkung. Den tiefliegenden zuletzt benutzten Satz kann man im vorliegenden Fall $k \geqq 2$ vermeiden. Man betrachte die Kugeln

$$\varphi_1 = |z_1 - \varepsilon|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - \varepsilon^2 = 0$$

und

$$\varphi_2 = |z_1 + \varepsilon|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - \varepsilon^2 = 0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Sie berühren sich nur in O. Es gibt eine Umgebung $U(O)$ und dort analytische Mengen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, so daß $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_+$ in $U(O) \cap (\varphi_1 > 0)$; $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_+$ in $U(O) \cap (\varphi_2 > 0)$.

[23]) Vgl. [13] und [16].
[24]) Vgl. [19].

Da $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ in $U(O) \cap (\varphi_1 > 0) \cap (\varphi_2 > 0)$, so nach Satz D auch $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ in einer vollen Umgebung $U_*(O)$. In $U_*(O) - O$ ist aber nun $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_+$ (vgl. auch die Anmerkung zu Satz 2, § 4).

b) Gesetzt, es seien $\mathfrak{g}_*^k$, $\mathfrak{g}_{**}^k$ zwei in G' analytische Mengen und $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$ in $G' - G$. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$ in G' ist.

Angenommen, das sei nicht der Fall. Dann muß es ein kleinstes $r_* > 0$ geben, so daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$ in $G' - G(r^*)$. Ist $r_* > 0$, so muß es dann einen Randpunkt R von $G(r^*)$ geben, derart, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von R $\mathfrak{g}_*^k \neq \mathfrak{g}_{**}^k$ ist. Das steht im Widerspruch zu Satz D.

Ist $r_* = 0$, so kann man den gleichen Schluß anwenden. Es ist nur eine Hilfskugel zu betrachten, auf deren Rand 0 liegt.

Daher muß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k$ in G' sein.

Satz 3a. G, G' seien schlichte Gebiete des z-Raumes, G ganz in G' enthalten und G sternartig und beschränkt. G werde von $l \cdot s$ normalen Hyperflächen $\varphi_{\lambda\sigma} = 0$ berandet, und zwar so, daß $G = \bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda\sigma} < 0)$. Es sei $2s \leqq k$ und $s \geqq 1$. Dann gilt: Ist $\mathfrak{g}^k$ eine in $G' - G$ analytische Menge, so gibt es genau eine in G' analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, die in $G' - G$ gleich $\mathfrak{g}^k$ ist. Jede Komponente von $\mathfrak{g}_*^k$ enthält wenigstens eine Komponente von $\mathfrak{g}^k$.

Beweis. Im Beweis zu Satz 3 ersetze man eine Hyperfläche $\varphi_{\lambda'} = 0$ durch den Rand von $\bigcup_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda'\sigma} < 0)$, die Gebiete $\varphi_{\lambda'} < 0$ (bzw. $\varphi_{\lambda'} > 0$) durch $\bigcup_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda'\sigma} < 0)$ (bzw. $\bigcap_{\sigma=1}^{s} (\varphi_{\lambda'\sigma} > 0)$). Man stützt sich jetzt auf Satz D'', Hilfssatz 5.2 und Satz 2 statt Satz D, Hilfssatz 5.1 und Satz 1. Sonst geht alles wie früher. Auf die Durchführung im einzelnen wird daher verzichtet.

Anwendung von Satz 3.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind offenbar erfüllt, wenn

$$\varphi_\lambda = z_\lambda \bar{z}_\lambda + \alpha \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i - \beta \qquad (\alpha, \beta > 0;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und $G = \bigcap_{\lambda=1}^{n} (\varphi_\lambda < 0)$ ist. Der Polyzylinder $\mathfrak{Z} = \bigcap_{\lambda=1}^{n} (|z_\lambda| < 1)$ läßt sich durch solche Gebiete G, welche ihn ganz im Inneren enthalten, beliebig genau approximieren. Also folgt

Satz 4. Sei $\mathfrak{Z} = \bigcap_{\lambda=1}^{n} (|z_\lambda| < 1)$ und $\mathfrak{Z}' = \bigcap_{\lambda=1}^{n} (|z_\lambda| < 1 + \varepsilon)$, ferner $\mathfrak{g}^k$ eine in $\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}$ analytische Menge der Dimension $k \geqq 2$.

Dann gibt es genau eine in $\mathfrak{Z}'$ analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, die in $\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Jede Komponente von $\mathfrak{g}_*^k$ enthält wenigstens eine Komponente von $\mathfrak{g}^k$.

§ 6. Konvexität in bezug auf q-dimensionale analytische Flächen.

Untersucht wird die Frage, für welche (zunächst beschränkten) Gebiete G' die folgende Aussage richtig ist:

G sei ein ganz in G' gelegenes Gebiet. Die in $G' - G$ analytische irreduzible Menge $\mathfrak{g}^k$ der Dimension $k \geqq 2$ komme dem Rand von G' beliebig nahe. Dann existiert ein Gebiet $G_0 : G \Subset G_0 \Subset G'$ und eine in G' analytische irreduzible Menge $\mathfrak{g}^k_*$, welche in $G' - G_0$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt.

Eine jedenfalls ausreichende Bedingung für die Richtigkeit dieser Aussage ist die „q-Konvexität", die eine Erweiterung der Regulärkonvexität[25]) auf Systeme von Funktionen ist.

Definition. G ist q-konvex, wenn es zu jedem ganz in G gelegenen Teilgebiet G_0 ein Zwischengebiet $G_0' : G_0 \Subset G_0' \Subset G$ gibt, so daß gilt: Zu jedem Randpunkt R von G_0' existieren $s = n - q$ in G reguläre Funktionen $f_R^{(1)}, \ldots, f_R^{(s)}$, so daß $|f_R^{(\sigma)}(R)| > 1$ ist und G_0 ganz in $\bigcup\limits_{\sigma=1}^{s} (|f_R^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist.

Offenbar ist G genau dann regulärkonvex, wenn es $(n-1)$-konvex ist. Ist G regulärkonvex, so ist es bekanntlich durch ganz in G gelegene (bezüglich G) analytische Polyeder $\mathfrak{P}$ approximierbar. Das sind Gebiete, zu denen l in G reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_l$ existieren, so daß $\mathfrak{P}$ in $\bigcap\limits_{\lambda=1}^{l} (|f_\lambda| < 1)$ enthalten und in jedem Randpunkt für mindestens ein $\lambda' : |f_{\lambda'}| = 1$ ist. Analog führen wir bezüglich G analytische q-Polyeder ein.

Definition. Das Gebiet $\mathfrak{P} \Subset G$ ist ein (bezüglich G) analytisches q-Polyeder, wenn es $l \cdot s$ $(s = n - q)$ in G reguläre Funktionen $g_\lambda^{(\sigma)}$ gibt, so daß $\mathfrak{P}$ in $\bigcap\limits_{\lambda=1}^{l} \bigcup\limits_{\sigma=1}^{s} (|g_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist und zu jedem Randpunkt von $\mathfrak{P}$ für mindestens ein λ' gilt: $|g_{\lambda'}^{(\sigma)}| \geqq 1$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$.

Auch hier gilt der

Hilfssatz. Jedes q-konvexe Gebiet G kann beliebig genau durch ganz in seinem Inneren gelegene (bezüglich G) analytische q-Polyeder approximiert werden.

Der Beweis geht wie bei regulärkonvexen Gebieten. Zu jedem $G_0 \Subset G$ gibt es nach Voraussetzung ein $G_0' : G_0 \Subset G_0' \Subset G$, für dessen Randpunkte R gilt: Es gibt eine Umgebung $U(R)$ und s Funktionen $f_R^{(1)}, \ldots, f_R^{(s)}$, so daß $|f_R^{\sigma}(U(R))| > 1$ ist und G_0 ganz in $\bigcup\limits_{\sigma=1}^{s} (|f_R^{(\sigma)}| < 1)$ liegt. Man fixiere Randpunkte $R_1, \ldots, R_l$, so daß der Rand von G_0' ganz in $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{l} U(R_\lambda)$ enthalten ist. Setzt man $f_{R_\lambda}^{(\sigma)} = g_\lambda^{(\sigma)}$, so gilt: G_0 liegt ganz in $\mathfrak{P} = \bigcap\limits_{\lambda=1}^{l} \bigcup\limits_{\sigma=1}^{s} (|g_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$. Andererseits liegt die G_0 enthaltende Komponente von $\mathfrak{P}$ ganz in G.

Das einfachste analytische Polyeder ist der Polyzylinder. Ein einfaches beschränktes q-Polyeder, das für unseren Zweck geeignet ist, erhält man so. Wir legen den Raum der $n + l \cdot s$ Veränderlichen

$$(w_{\lambda\sigma}, z_i); \quad \begin{aligned} \lambda &= 1, \ldots, l \\ \sigma &= 1, \ldots, s \\ i &= 1, \ldots, n \end{aligned}$$

[25]) Vgl. [3], S. 72.

zugrunde. Das q-Polyeder sei

$$\Pi_{AB} = \left\{\bigcap_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} (|w_{\lambda\sigma}| < A)\right\} \cap \left\{\bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (|w_{\lambda\sigma}| < B)\right\} \cap \left\{\bigcap_{1}^{n} (|z_i| < A)\right\}$$

mit $0 < B < A$.

Es ist demnach der Durchschnitt eines Polyzylinders im (w, z)-Raum mit einem unbeschränkten q-Polyeder im w-Raum. Man kann es leicht auf die frühere Form bringen, indem man z. B. $|z_1| < A$ durch $\bigcup_{1}^{s} (|z_1^{(\sigma)}| < 1)$ $(z_1 = A z_1^{(\sigma)})$ ersetzt und mit den anderen Variabeln genau so verfährt.

Analog zu Satz 4 erhält man

Satz 5. Es sei $A > A' > B > B' > 0$, also $\Pi_{A'B'} \Subset \Pi_{AB}$. Ferner sei $2s \leqq k \geqq 2$ und $\mathfrak{g}^k$ in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ analytisch. Dann gibt es genau eine in Π_{AB} analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$, welche in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gleich $\mathfrak{g}^k$ ist. Jede Komponente von $\mathfrak{g}_*^k$ enthält wenigstens eine Komponente von $\mathfrak{g}^k$.

Beweis. Bei zunächst willkürlichem $\alpha > 0$ bilde man die Funktionen

$$\varphi_j = |z_j|^2 + \alpha \sum_{1}^{n} |z_i|^2 + \alpha \sum_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} |w_{\lambda\sigma}|^2$$

$$\psi_{\lambda\sigma} = |w_{\lambda\sigma}|^2 + \alpha \sum_{1}^{n} |z_i|^2 + \alpha \sum_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} |w_{\lambda\sigma}|^2$$

und mache nun α, $\beta > 0$ so klein, daß für

$$\mathfrak{P} = \left\{\bigcap_{1}^{n} (\varphi_j - A^2 + \beta < 0)\right\} \cap \left\{\bigcap_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} (\psi_{\lambda\sigma} - A^2 + \beta < 0)\right\} \cap$$
$$\cap \left\{\bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (\psi_{\lambda\sigma} - B^2 + \beta < 0)\right\}$$

die Beziehung $\Pi_{A'B'} \Subset \mathfrak{P} \Subset \Pi_{AB}$ richtig ist. Das ist offenbar möglich. Jede der Randhyperflächen ist normal. Weiter ist $\mathfrak{P}$ sternartig. Schließlich kann man $\mathfrak{P}$ auf die in Satz 3a zugrunde gelegte Form $\mathfrak{P} = \bigcap_{\mu=1}^{m} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (\chi_{\mu\sigma} < 0)$ bringen, worin jedes χ eine der Funktionen φ, ψ ist. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 3a erfüllt. Infolgedessen gibt es genau eine in $\mathfrak{P}$ analytische Menge $\mathfrak{g}_0$, welche in $\Pi_{AB} - \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt.

Die Vereinigung $\mathfrak{g}^k \cup \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_*^k$ ist die gesuchte Menge. Denn sie ist in Π_{AB} analytisch und stimmt in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ mit $\mathfrak{g}^k$ überein. Sie ist ferner die einzige ihrer Art. w. z. b. w.

Es mögen jetzt drei Gebiete $G \supseteq G_1 \supseteq G_2$ gegeben sein. G sei schlicht und beschränkt, sonst beliebig. G_1 sei ein bezüglich G analytisches q-Polyeder: Es gibt l in G reguläre Funktionensysteme $(f_\lambda^{(1)}, \ldots, f_\lambda^{(s)})$, so daß G_1 in $\bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (|f_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$ enthalten ist, und in jedem Randpunkt von G_1 für wenigstens ein λ' und alle σ $|f_{\lambda'}^{(\sigma)}| \geqq 1$ ist $(s = n - q)$. Es ist denkbar und erlaubt, daß

$\bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (|f_{\lambda'}^{(\sigma)}| < 1)$ in mehrere Gebiete zerfällt, welche zum Teil in $G - G_1$ liegen. G_2 sei eine der in G_1 gelegenen Komponenten von $\mathfrak{P}_\varepsilon = \bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=1}^{s} (|f_\lambda^{(\sigma)}| < 1 - \varepsilon)$, also eines der in G_1 enthaltenen maximalen Teilgebiete von $\mathfrak{P}_\varepsilon$. Dann gilt

Satz 6. Ist $\mathfrak{g}^k$ eine in $G_1 - G_2$ irreduzible analytische Menge ($k \geqq 2$; $k \geqq 2s$), welche dem Rand von G_1 beliebig nahe kommt, so gibt es genau eine in G_1 analytische Menge $\mathfrak{g}_*^k$ und eine Umgebung U des Randes von G_1, so daß $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}^k$ in $G_1 \cap U$ ist.

Anmerkung. Die Voraussetzungen sind enger als im letzten Satz. Damit soll vermieden werden, daß $\mathfrak{g}^k$ in $(G_1 - G_2) \cap \mathfrak{P}_\varepsilon$ enthalten ist. Auch die Behauptung sagt weniger aus. Ob überall in $G_1 - G_2$ auch $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}^k$ ist, wird nicht untersucht.

Beweis. 1. $A > 1$ sei so groß, daß G ganz im Polyzylinder $\bigcap_1^n (|z_i| < A - \varepsilon)$ enthalten ist und in G_1 $|f_\lambda^{(\sigma)}(z)| < A - \varepsilon$ ist. Nach dem Vorbild OKAs[28]) wird G_1 das n-dimensionale analytische Flächenstück

$$\mathfrak{S}_1^n = \{w_{\lambda\sigma} = f_\lambda^{(\sigma)}(z);\ z \in G_1\}$$

im Raume der $m = n + l \cdot s$ Veränderlichen $(w_{\lambda\sigma}, z_i)$ zugeordnet. $\mathfrak{S}_1^n$ ist in

$$\Pi_{AB} = \bigcap_1^n (|z_i| < A) \cap \bigcap_{\lambda,\sigma}^{l,s} (|w_{\lambda\sigma}| < A) \cap \bigcap_{\lambda=1}^{l} \bigcup_{\sigma=k}^{s} (|w_{\lambda\sigma}| < B);\ B = 1$$

analytisch und irreduzibel. Alle seine Randpunkte liegen auf dem Rand von $\bigcap_1^l \bigcup_1^s (|w_{\lambda\sigma}| < 1)$ und im Inneren von $\bigcap_1^n (|z_i| < A) \cap \bigcap_{\lambda,\sigma=1}^{l,s} (|w_{\lambda\sigma}| < A)$.

2. Bei dieser Zuordnung geht $G_1 - G_2$ in einen Teil $\mathfrak{R}^n$ von $\mathfrak{S}_1^n$ über. Es ist denkbar, daß $\mathfrak{R}^n$ das Gebiet $\Pi_{A'B'}$ ($A' = A - \varepsilon$; $B' = B - \varepsilon$) noch schneidet. Jedenfalls aber liegen in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ Teile des Bildes $\tilde{\mathfrak{g}}^k$ von $\mathfrak{g}^k$, da $\mathfrak{g}^k$ dem Rand von G_1 beliebig nahe kommt.

3. Der in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gelegene Teil von $\tilde{\mathfrak{g}}^k$ ist eine analytische k-dimensionale Menge $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$. Auf $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$ treffen die Voraussetzungen des Satzes 5 zu. Infolgedessen gibt es eine in Π_{AB} analytische Menge $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$, welche in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ mit $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$ übereinstimmt.

4. Die Menge $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ hat folgende Eigenschaften: a) Sie ist k-dimensional. b) Jede ihrer Komponenten $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ enthält wenigstens eine der Komponenten von $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$. — Außerdem aber gilt

c) Die z-Projektion $\mathfrak{g}_1$ von $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ liegt in G_1 und ist eine dort analytische k-dimensionale Menge. In der z-Projektion $\mathfrak{S}$ von $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ ist $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^k$.

Beweis. (1) Auf jeder Komponente $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ von $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ gilt identisch $w_{\lambda\sigma} = f_\lambda^{(\sigma)}(z)$ und es ist $z \in G_1$. Denn das ist richtig auf dem in $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ gelegenen Teil von $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$; da dort $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k = \tilde{\mathfrak{g}}_0^k$ und auf $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$ doch $w_{\lambda\sigma} = f^{(\sigma)}(z)$ ist. Dann bleibt die Gleichung nach dem Identitätssatz auf ganz $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ erhalten, soweit die $f_\lambda^{(\sigma)}$ noch

[28]) Vgl. [10], [11].

regulär sind. Nun ist auf $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ aber $w \in \bigcap \bigcup (|w_{\lambda\sigma}| < 1)$. Also ist auch $z \in \bigcap \bigcup (|f_\lambda^{(\sigma)}| < 1)$ und infolgedessen $z \in G_1$ und $f_\lambda^{(\sigma)}(z)$ regulär.

(2) Wegen (1) trifft jede Ebene $z_1 - z_1^0 = \cdots = z_n - z_n^0 = 0$ die Fläche $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ höchstens in isolierten Punkten. Zu jedem Punkt $P(w^0, z^0)$ von $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ gibt es also nach dem Einbettungssatz eine Polyzylinder-Umgebung $U(P) = (U_w(P), U_z(P))$ und eine in ihr analytische Menge $\tilde{\mathfrak{g}}_* = (w_{\lambda\sigma} = f_\lambda^{(\sigma)}(z);\ z \in \mathfrak{g}_P)$, deren z-Projektion $\mathfrak{g}_P$ in $U_z(P)$ analytisch ist und dort mit der z-Projektion von $\tilde{\mathfrak{g}}_1^k$ übereinstimmt. Daher ist in $U_z(P) \cap U_z(Q)$ sicher $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}_Q$. Die Vereinigung der $\mathfrak{g}_P$ ist folglich eine in G_1 analytische Menge $\mathfrak{g}_1$. In der z-Projektion $\mathfrak{S}$ von $\Pi_{AB} - \Pi_{A'B'}$ stimmt $\mathfrak{g}_1$ mit der z-Projektion von $\tilde{\mathfrak{g}}_0^k$ überein; das ist aber $\mathfrak{g}^k \cap \mathfrak{S}$. Also ist $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{S}$ k-dimensional. Da jede Komponente von $\mathfrak{g}_1$ notwendig $\mathfrak{S}$ schneidet (vgl. Satz 1.3; § 1), ist $\mathfrak{g}_1$ s lbst k-dimensional.

Damit ist c) bewiesen.

5. Wird $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}^k$ und $G_1 \cap U = \mathfrak{S}$ gesetzt, so erfüllt $\mathfrak{g}_*^k$ alle Forderungen. Das folgt aus c) und der bereits erwähnten Tatsache, daß jede Komponente von $\mathfrak{g}_1$ auch $\mathfrak{S}$ schneidet.

Aus Satz 6 ergibt sich

Satz 7. G sei beschränkt und q-konvex, G_0 ganz in G gelegen. Die Menge $\mathfrak{g}^k$ sei in $G - G_0$ analytisch und irreduzibel und komme dem Rand von G beliebig nahe. Ist $2s \leqq k$ $(s = n - q)$, so gilt: Es gibt eine in G analytische, irreduzible k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}_*^k$, welche $\mathfrak{g}^k$ enthält. Außerdem gibt es ein ganz in G gelegenes Gebiet G_*, so daß $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^k$ in $G - G_*$ ist.

Beweis. G ist durch q-Polyeder approximierbar. Es gibt also Gebiete G_1, G_2: $G \supset\!\!\!\supset G_1 \supset\!\!\!\supset G_2 \supset\!\!\!\supset G_0$ von der Art, wie sie im letzten Satz vorkommen. Da $\mathfrak{g}^k$ dem Rand von G beliebig nahe kommt und eine zusammenhängende Punktmenge ist, läßt sich erreichen, daß $(G_1 - G_2) \cap \mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}_1^k$ nicht leer ist und sogar den Rand von G_1 schneidet. Es gibt vielleicht mehrere, jedenfalls aber nur endlich viele Komponenten $\mathfrak{g}_\lambda$ von $\mathfrak{g}_1^k$, die den Rand von G_1 treffen. Nach dem letzten Satz gibt es ein ganz in G_1 gelegenes Gebiet G_* und eine in G analytische Menge $\mathfrak{g}_{**}^k$, welche in $G_1 - G_*$ mit der Vereinigung der $\mathfrak{g}_\lambda$ übereinstimmt. Jede Komponente von $\mathfrak{g}_{**}^k$ enthält wenigstens ein $\mathfrak{g}_\lambda$. Sei nun $\mathfrak{g}_*^k = \mathfrak{g}_{**}^k \cup \mathfrak{g}_k$. Diese Menge $\mathfrak{g}_*^k$ stimmt jedenfalls in $G - G_*$ mit $\mathfrak{g}^k$ überein. Sie ist ferner in G analytisch. Außerdem ist sie nach Konstruktion die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften. Sie ist daher die gesuchte Menge.

Eine besondere und wichtige Folge ist, daß der Rand von G zusammenhängt.

Satz 7a. Sei $\mathfrak{g}_*^k$ in G (G beschränkt und q-konvex) analytisch und irreduzibel ($k \geqq 2(n - q)$). Dann ist G durch Gebiete G_* approximierbar, für welche gilt: In $G - G_*$ ist $\mathfrak{g}_*^k$ irreduzibel.

Daraus ergibt sich, daß der Rand von G zusammenhängend ist.

Der Beweis geht fast unmittelbar aus Satz 7 hervor. Gesetzt, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es nach Satz 7 ein Gebiet $G_* \Subset G$, so daß gilt: 1. $\mathfrak{g}_*^k$ hat in $G - G_*$ mindestens zwei verschiedene irreduzible Komponenten $\mathfrak{g}_1^k, \mathfrak{g}_2^k$. 2. Es ist $\mathfrak{g}_*^k \cap (G - G_*) = \mathfrak{g}_1^k$ und $\mathfrak{g}_*^k \cap (G - G_*) = \mathfrak{g}_2^k$. — Das ist absurd.

§ 7. Unbeschränkte Gebiete.

Im projektiven Raum C^n der (inhomogenen) Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$ sind zum Beispiel die Gebiete

$$U(\tau) = (\varphi_\tau = -\tau\,(|z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2) + \alpha\,(|z_{p+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2) + 1 > 0) \qquad (\alpha > 0;\ \tau > 0)$$

Umgebungen der abgeschlossenen Ebene $E^q = (z_1 = \cdots = z_p = 0;\ q = n - p)$. Die Hyperflächen $\varphi_\tau = 0$ haben in allen ihren Punkten den Index q. Und nur die Fernpunkte der Ebene $z_{p+1} = \cdots = z_n = 0$ liegen außerhalb aller $U(\tau)$. Es gilt dann

Satz 8. Die Menge $\mathfrak{g}^k$ sei in $U(T) - E^q$ $(T > 0)$ analytisch und irreduzibel. Es sei $q + k \geqq n + 1$ und $k \geqq 2$. Dann gibt es eine (und nur eine) in $C^n - E^q$ analytische Menge $\mathfrak{g}^k_*$, welche in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Sie ist irreduzibel.

Der Beweis ist dem des Satzes 3 ganz ähnlich.

1. Zu jedem $\tau' > 0$ gibt es eine in $U(\tau') - E^q$ analytische Menge $\mathfrak{g}(\tau')$, welche in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt.

Gesetzt, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein kleinstes positives τ_*, zu dem noch eine in $U(\tau_*) - E^q$ analytische Menge $\mathfrak{g}(\tau_*)$ existiert, welche in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Nach dem Satz von der lokalen Fortsetzung und den Sätzen des § 5 läßt sich dann aber eine Umgebung des Randes B von $U(\tau_*)$ und eine in B analytische Menge $\mathfrak{g}_{**}$ finden, so daß $\mathfrak{g}_{**} = \mathfrak{g}(\tau_*)$ in $U(\tau_*) \cap B$ ist. Infolgedessen muß es auch ein $\tau_{**} < \tau_*$ geben, so daß $\mathfrak{g}_{**} \cup \mathfrak{g}(\tau_*)$ in $U(\tau_{**}) - E^q$ analytisch ist und in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Das widerspricht der Definition von τ_*.

2. M sei die Menge der Fernpunkte der Ebene $E^p = (z_{p+1} = \cdots = z_n = 0;\ q = n - p)$. Aus 1. folgt die Existenz einer Menge $\mathfrak{g}^k_0$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{g}^k_0$ ist in $C^n - E^q - M$ analytisch und stimmt in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ überein. M ist nun eine analytische Ebene der Dimension $p - 1 = n - q + 1$. Da aber $k \geqq n - q + 1 > p - 1$ ist, bleibt nach der Verallgemeinerung eines Satzes von THULLEN[27]) $\mathfrak{g}^k_0$ auf M noch analytisch. Genauer: Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{g}^k_0$ ist eine in $C^n - E^q$ analytische k-dimensionale Menge. Sie ist die gesuchte Menge $\mathfrak{g}^k_*$. Denn sie ist in $U(T) - E^q$ mit $\mathfrak{g}^k$ identisch. Jede ihrer Komponenten trifft nach Konstruktion $U(T) - E^q$. Daher ist $\mathfrak{g}^k$ irreduzibel.

Anmerkung. Einen dem Satz 8 gleichwertigen Satz erhält man, wenn man die Umgebungen $U(\tau)$ folgendermaßen erklärt:

$$U(\tau) = \left\{\begin{array}{l} (1+\tau)\,|z_1|^2 - \sum\limits_1^n |z_i|^2 - 1 = -\varphi_1 < 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1+\tau)\,|z_p|^2 - \sum\limits_1^n |z_i|^2 - 1 = -\varphi_p < 0 \end{array}\right. \qquad \tau > 0.$$

Jede der Hyperflächen φ ist normal. Die $U(\tau)$ sind für alle $\tau > 0$ zusammenhängend, jedoch das Komplement für kleine τ nicht mehr. Nur die p Fernpunkte:

---

[27]) Vgl. [13], [19].

$F_1 = (1, 0, \ldots, 0); \ldots; F_p = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (homogene Koordinaten) liegen außerhalb aller $U(\tau)$. *Der Satz von* THULLEN *ist hier also für den Beweis nicht mehr nötig.* Man vermeidet ihn wie im Beweis zu Satz 3. Im übrigen geht der Beweis wie beim Satz 8. Das Zerfallen des Komplementes von $U(\tau)$ spielt gar keine Rolle.

Folgerung. Nach einem Satz von CHOW[28]) ist jede im C^n analytische Menge eine algebraische Menge. Aus der Erweiterung des Satzes von THULLEN folgt, daß jede isolierte analytische Singularitätsebene einer $\mathfrak{g}^k$ mindestens k-dimensional ist. Wenn also $q < k$ ist, so folgt aus den Voraussetzungen von Satz 8: $\mathfrak{g}^k$ ist in $U(T)$ analytisch. Aus Satz 8 in Verbindung mit dem zitierten Satz von CHOW ergibt sich so

Satz 9. Ist $k \geqq 2$, $q + k \geqq n + 1$ und $q < k$, ferner $\mathfrak{g}^k$ in $U(T) - E^q$ analytisch und irreduzibel, so gibt es eine irreduzible algebraische Menge der Dimension k, welche $\mathfrak{g}^k$ enthält.

Zusatz. Insbesondere ergibt sich noch aus Satz 8: *Jede in $C^n - E^q$ analytische und irreduzible Menge $\mathfrak{g}^k$ ist auch in $U(T) - E^q$ irreduzibel.*

Beweis. Zerfiele $\mathfrak{g}^k$ in $U(T) - E^q$ in mehrere Komponenten, so würde sich jede von ihnen zu einer in $C^n - E^q$ analytischen irreduziblen Menge ergänzen lassen. Sie müssen alle voneinander verschieden sein. Denn in $U(T)$ sind sie verschieden. Das ist offenbar nicht möglich.

Daß Satz 9 richtig bleibt, wenn E^q durch eine beliebige irreduzible algebraische Fläche der Dimension q ersetzt wird, soll in einer späteren Arbeit gezeigt werden.

§ 8. Das Analogon eines HARTOGSschen Satzes.

Der folgende Satz ist schärfer als die bisherigen. Er ist — für Funktionen ausgesprochen — der eigentliche Kern des „Kontinuitätssatzes". Ich werde später zeigen, daß mit seiner Hilfe die Voraussetzungen des Satzes 6 auf das unerläßliche Maß reduziert werden können. Die Veränderlichen seien $z_1, \ldots, z_p$, $w_1, \ldots, w_q$ und $Z(r)$, $W(r)$ die Polyzylinder $\bigcap (|z_i| < r)$; $\bigcap (|w_j| < r)$. $(q + p = n)$.

Satz 10. Die Menge $\mathfrak{g}^k$ sei analytisch und irreduzibel in der Vereinigung von $(Z(\varepsilon), W(1))$ und $(Z(1), W(1) - W(1/2))$. Es sei $k \geqq 2$ und $q + k \geqq n + 1$. $\mathfrak{g}^k$ komme der Hyperfläche $(Z(1)$, Rand von $W(1))$ beliebig nahe. Dann gilt: 1. Es gibt eine in $(Z(1), W(1))$ analytische irreduzible und k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}^k_*$, welche $\mathfrak{g}^k$ enthält.

2. *Es ist $\mathfrak{g}^k_* = \mathfrak{g}^k$ in $(Z(1), W(1) - W(1/2))$.*

Beweis. Bei festem $\tau > 0$; $1 > \alpha > 0$ sei $U(\tau, \alpha)$ das Gebiet

$$\begin{cases} |z_1|^2 - \alpha\left(\sum\limits_1^p |z_i|^2 + \sum\limits_1^q |w_j|^2\right) - \tau < 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |z_p|^2 - \alpha\left(\sum\limits_1^p |z_i|^2 + \sum\limits_1^q |w_j|^2\right) - \tau < 0 \\ w \text{ aus } W(1). \end{cases}$$

[28]) Vgl. [6] und auch [7], [4], [13].

Man wähle $e, E > 0$ ($e < \varepsilon$; $E < 1$) beliebig und darauf α so, daß $U(e, \alpha) \subset (Z(e), W(1))$ und $(Z(E), W(1)) \subset U(E, \alpha) \subset (Z(1), W(1))$ ist.

Es genügt nun zu zeigen, daß es eine in $U(E, \alpha)$ analytische k-dimensionale Menge gibt, welche in $U(E, \alpha) \cap (Z(1), W(1) - W(1/2))$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt

Gesetzt, dies sei nicht der Fall. Dann muß es ein *größtes* $\tau_* < E$ mit folgender Eigenschaft geben: In $U(\tau_*, \alpha)$ existiert eine analytische k-dimensionale Menge $\mathfrak{g}(\tau_*)$, welche in $U(\tau_*, \alpha) \cap (Z(1), W(1) - W(1/2))$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt. Wir zeigen, daß es ein solches τ_* nicht geben kann.

1. Es sei F der in $W(^2/_3)$ gelegene Teil des Randes von $U(\tau_*, \alpha)$ mit Einschluß der (auf dem Rande von $W(^2/_3)$ gelegenen) Häufungsstellen. Die Menge dieser Randpunkte von F sei $\mathfrak{R}$. In jedem Punkte P von F existiert die lokale Fortsetzung $\mathfrak{g}(P)$ von $\mathfrak{g}(\tau_*)$ (aus $U(\tau_*, \alpha)$ heraus in den Punkt P). Insbesondere gilt für die Punkte R von $\mathfrak{R}$: Es gibt eine Umgebung $U(R)$, so daß $U(R) \cap \mathfrak{g}(R) = U(R) \cap \mathfrak{g}^k$ ist. Nach Hilfssatz 5.1, § 5 können die $U(P)$ so gewählt werden, daß die Vereinigung der $\mathfrak{g}(P)$ in $\bigcup U(P)$ (P auf F) eine analytische k-dimensionale Menge $\hat{\mathfrak{g}}$ ist. Dabei ist die Vereinigung der $\mathfrak{g}(R)$ (mit $R \in \mathfrak{R}$) identisch mit $\bigcup (\mathfrak{g}^k \cap U(R))$ (R auf $\mathfrak{R}$).

Infolgedessen läßt sich ein $\tau_{**} > \tau_*$ so finden, daß die Vereinigung $\bar{\mathfrak{g}}$ von $\hat{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}^k \cap (W(1) - W(^2/_3))$ eine in $U(\tau_{**}, \alpha)$ analytische k-dimensionale Menge ist, die im Durchschnitt von $U(\tau_{**}, \alpha)$ und $(W(1) - W(^2/_3)$ mit $\mathfrak{g}^k$ übereinstimmt.

2. Es muß noch nachgewiesen werden — und das ist ganz wesentlich —, daß auch in $(W(1) - W(^1/_2))$ noch $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^k$ ist.

Zum Beweise wähle man zunächst ein $\tau' : \tau_* < \tau' < \tau_{**}$. Die Mengen $\bar{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}^k$ sind im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $(W(1) - W(^1/_2))$ analytisch: sie sind es sogar noch in allen Randpunkten, die im Inneren von $(W(1) - W(^1/_2))$ liegen. Da τ' beliebig ist, reicht es aus, die Gleichheit von $\bar{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}^k$ im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $(W(1) - W(^1/_2))$ nachzuweisen.

Es sei nun $V(t, \beta)$ das Gebiet

$$
\begin{gathered}
|w_1|^2 + \beta\left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2\right) - t = \chi_1 \lessgtr 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|w_q|^2 + \beta\left(\sum_1^p |z_i|^2 + \sum_1^q |w_j|^2\right) - t = \chi_q \lessgtr 0 .
\end{gathered}
$$

Man wähle $^1/_2 < d < 1$; $D < 1$ beliebig und darauf $\beta > 0$ so, daß $W(^2/_3) \subset V(D, \beta) \subset W(1)$ und $W(^1/_2) \subset V(d, \beta) \subset W(d)$ ist. Wir zeigen, daß im Durchschnitt von $U(\tau', \alpha)$ und $V(d, \beta)$ noch $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^k$ ist. Das genügt, da d beliebig nahe an $^1/_2$ genommen werden kann.

Wäre das nämlich nicht richtig, so müßte es ein *kleinstes* $t_* > d$ geben, für welches gilt: In $U(\tau', \alpha) \cap V(t_*, \beta)$ ist $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^k$. — Das aber besagt: Auf dem Teil des Randes von $U(\tau', \alpha) \cap V(t_*, \beta)$, der zum Rande von $V(t_*, \beta)$ gehört, gibt es wenigstens einen Punkt R mit beliebig kleinen Umgebungen $U(R)$, in denen $\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{g}^k$ ist. In $U(R)$ sind $\bar{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}^k$ analytisch. Das jedoch widerspricht Satz D'', § 4: Es sei etwa $\chi_1(R) = 0$. Die Mengen sind k-dimensional und stimmen in $U(\tau', \alpha) \cap (\chi_1 > 0)$ miteinander überein. Es ist $k \geqq n + 1 - q = p + 1$, also k mindestens gleich der Anzahl der beteiligten (normalen) Hyperflächen. Dann gibt es (Satz D″) eine Umgebung von R, in der $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^k$ ist.

Damit ist gezeigt, daß in $W(1) - W(^1/_2)$ noch $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^k$ ist. 1. und 2. zusammen ergeben, daß τ_* nicht das größte τ seiner Art ist im Widerspruch zu seiner Definition, w.z.b.w.

Erweiterungen dieses Satzes ergeben sich sofort. Im Teil 1. des Beweises kommt es nur darauf an, daß die lokale Fortsetzung existiert. Im 2. Teil muß der Eindeutigkeitssatz anwendbar sein. Ersetzt man nun $W(1)$, $W(^1/_2)$ durch zwei q'-Polyeder des w-Raumes Π_1, Π_2 ($\Pi_2 \Subset \Pi_1$), welche nur von Hyperflächen $|w_j| =$ const. begrenzt werden, so hat man $k \geqq p + n - q'$ zu fordern. Verfährt man dann wie früher, so hat man die Übereinstimmung der Mengen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^k$ in $U(\tau', \alpha) \cap \bigcap_1^{n-q'} (\chi_{1\sigma} > 0)$ (anstatt in $U(\tau', \alpha) \cap (\chi_1 > 0)$). Wieder ist k mindestens gleich der Anzahl der beteiligten Hyperflächen. Also gibt es eine Umgebung $U(R)$, in welcher $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^k$ ist. Daher gilt

Satz 10a. Es seien $\Pi_1, \Pi_2 (\Pi_2 \Subset \Pi_1)$ beschränkte analytische q'-Polyeder des w-Raumes, die nur von Hyperflächen $|w_j| =$ const. begrenzt werden. Weiter sei $k \geqq 2$ und $k \geqq p + n - q'$. Dann bleibt Satz 10 richtig, wenn $W(1)$, $W(^1/_2)$ durch Π_1, Π_2 ersetzt werden. — Ist $p = 1$, so muß demnach $k + q' \geqq n + 1$ sein ($p = n - q$).

Zusatz. Es liegt nahe, $W(^1/_2)$ in Satz 10 durch ein beliebiges Gebiet $W \Subset W(1)$ zu ersetzen und auf die Aussage (2) zu verzichten. Das ist offenbar möglich. Entsprechendes gilt für Satz 10a. Im Beweis des Satzes scheint der 2. Teil jedoch unumgänglich zu sein. Man wird also $W(1)$ nicht ohne weiteres durch ein beliebiges Gebiet ohne Konvexitätseigenschaften ersetzen dürfen. Gleichwohl vermute ich, daß Satz 10 (ohne Teil (2)) für beliebige Gebiete W_1, W_2 anstelle von $W(1)$, $W(^1/_2)$ richtig ist. Nur wird man ein Beweisverfahren wie in meiner Arbeit [15] benutzen müssen.

Literatur.

[1] Behnke, H.: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg Univ. 4, 347—365 (1926). — [2] Behnke, H., u. F. Sommer: Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes. Math. Ann. 121, 356—378 (1950). — [3] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3, 3 (1934). [4] Cartan, H.: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Proc. Intern. Congr. of Math., Vol. I, 152—164. 1950 — [5] Cartan, H.: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 61, 179—197 (1944), Appendice II. — [6] Chow, W. L.: On compact analytic varieties. Amer. J. Math. 71, 893—914 (1949). — [7] Kneser, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51). — [8] Koch, K.: Die analytische Projektion. Schriftenreihe des Math. Instituts der Univ. Münster, H. 6 (1953). — [9] Krzoska, J.: Über die natürlichen Grenzen der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dissertation Greifswald 1933. — [10] Oka, K.: Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. J. Sci. Hirosima

Univ., Ser. A, Vol. 6, Nr. 3 (1936). — [11] OKA, K.: Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A, Vol. 7, Nr. 2 (1937). — [12] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Lieferung (2. Aufl.). Leipzig 1929. — [13] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [14] ROTHSTEIN, W.: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{2n} ($n \geqq 3$). Math. Ann. **121**, 340—355 (1950). — [15] ROTHSTEIN, W.: Über die Fortsetzung analytischer Flächen. Math. Ann. **122**, 424—434 (1951). — [16] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. **126**, 221—238 (1953). — [17] STEIN, K.: Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **114**, 543—569 (1937). — [18] STEIN, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. C.B.R.M. 1953. — [19] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1935).

(Eingegangen am 8. Juli 1954.)