KLINGEN, H.
Math. Annalen 168, 157—170 (1967)

Über Poincarésche Reihen zur Siegelschen Modulgruppe*

CARL LUDWIG SIEGEL zum 70. Geburtstag in Verehrung gewidmet

HELMUT KLINGEN

Es sei Γ_n die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades, welche aus allen $2n$-reihigen ganz-rationalen symplektischen Matrizen M besteht. Diese Gruppe gestattet bei Aufspaltung von M in n-reihige Untermatrizen die bekannte Darstellung

$$Z \to M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

als Gruppe von biholomorphen Automorphismen der verallgemeinerten oberen Halbebene

$$\mathfrak{H}_n = \{Z = X + iY \mid Z = Z',\ Y > 0\}.$$

Das von H. PETERSSON [7] bei Grenzkreisgruppen erster Art für eine Variable begründete Prinzip der Quersummation wurde von H. MAASS [6] auf Γ_n übertragen für den Entwicklungstypus

$$f(Z) = \sum_{T>0} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)} \tag{1}$$

einer Spitzenform f. Es bezeichnet dabei σ die Spurbildung, und die Summation wird über alle halbganzen positiv definiten T erstreckt. Man gelangt so zu Poincaréschen Reihen, welche die volle Schar der Spitzenformen festen Gewichtes aufspannen. Um alle Modulformen linear zu erzeugen, hat man für $n=1$ lediglich noch die Eisensteinreihen hinzuzunehmen. Für $n>1$ reichen jedoch die genannten Reihen nicht aus. In [6] waren gegenüber dem klassischen Fall $n=1$ neue Überlegungen notwendig, um alle Modulformen durch Funktionen mit explizit formulierter Reihendarstellung zu erzeugen.

In [7] ist das Verfahren der Quersummation für eine Variable auch durchgeführt, wenn man statt der Fourierentwicklung (1) die Taylorentwicklung um einen beliebigen Punkt der oberen Halbebene zum Ausgangspunkt wählt. Dabei gelangt man zu zwei neuen Typen von Poincaréschen Reihen, welche jeweils wieder die Schar der Spitzenformen aufspannen. Einen dieser Typen (Poincarésche Reihen zu festem Entwicklungspunkt) hat R. GODEMENT [1] für beliebiges n untersucht und den betreffenden Vollständigkeitssatz für Spitzenformen bewiesen. — Im ersten Paragraphen dieser Arbeit wird die

* Supported in part by the Army Research Office (Durham) through grant AROD-31-124-G632.

Peterssonsche Metrisierungstheorie für die Siegelsche Modulgruppe bezüglich eines beliebigen Entwicklungspunktes $Z^* \in \mathfrak{H}_n$ dargestellt. Die Untersuchungen von R. GODEMENT werden dabei bis zu den Grundformeln der Metrisierungstheorie vervollständigt, um den Anschluß an die zahlreichen Folgerungen im Sinne von [7] zu haben. Es stellt sich heraus, daß man für $n>1$ die Taylorentwicklung geeignet modifizieren muß, um durch Quersummation zu Poincaréschen Reihen zu gelangen, welche den Grundformeln genügen. Dies liegt an relativ schwachen Symmetrieeigenschaften von $\mathfrak{H}_n$ für $n>1$ verglichen mit dem klassischen Fall $n=1$.

Im zweiten Paragraphen werden die Nichtspitzenformen in die Betrachtung einbezogen. Es werden drei Arten von Poincaréschen Reihen gebildet, von denen jede Art alle Modulformen n-ten Grades erzeugt. Zwei dieser Arten sind neu, die dritte ist der von MAASS behandelte Typus. Wesentlich ist ein Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Typen, der über geeignete Fourier- und Taylorentwicklungen hergestellt wird. Dadurch gelingt eine gleichzeitige Behandlung aller Poincaréschen Reihen mit Einschluß der Darstellungssätze.

Der dritte Paragraph behandelt schließlich die Konvergenzverhältnisse der Poincaréschen Reihen. Es stellt sich heraus, daß sämtliche Reihen so glatte Konvergenzeigenschaften besitzen, daß man mit ihnen handlich in jeder konkreten Situation umgehen kann. Die Ergebnisse sind zum Teil auch neu für $n=1$ (vgl. [8]).

Diese Ausführungen werden für den konkreten Fall der Siegelschen Modulgruppe dargestellt, und es werden explizite Formulierungen angestrebt, obwohl sich die Resultate und Beweise zu einem großen Teil sofort verallgemeinern lassen.

§ 1. Die Grundformeln der Metrisierungstheorie

Es sei $Z^* = X^* + iY^*$ fest in $\mathfrak{H}_n$ gewählt. Man bestimme die reelle Matrix F gemäß $Y^*[F'] = E$, wobei die übliche Abkürzung $A[B] = \bar{B}'AB$ für komplexe Matrizen A, B Verwendung findet. Als neue Variable in $\mathfrak{H}_n$ führe man nun

$$W = U + iV = L_{Z^*}\langle Z\rangle = F(Z-Z^*)(Z-\bar{Z}^*)^{-1}F^{-1} \tag{2}$$

ein. Wegen

$$(E-\bar{W}W)\,[F] = 4Y\,[(Z-\bar{Z}^*)^{-1}] \tag{3}$$

ist leicht zu sehen, daß L_{Z^*} die obere Halbebene $\mathfrak{H}_n$ biholomorph auf den verallgemeinerten Einheitskreis

$$\mathfrak{E}_n = \{W \mid W = W',\, E - \bar{W}W > 0\}$$

abbildet und den ausgezeichneten Punkt Z^* in den Nullpunkt überführt.

Nun sei $f(Z)$ eine beliebige Spitzenform vom Gewicht k und $kn \equiv 0 \bmod 2$. Man transformiere f vermöge

$$\hat{f}(W) = |Z-\bar{Z}^*|^k f(Z) \tag{4}$$

in den Einheitskreis. Wegen des Transformationsgesetzes

$$f(M\langle Z\rangle) = |CZ+D|^k f(Z) \qquad (M \in \Gamma_n) \tag{5}$$

von Modulformen wird $\hat{f}$ eine automorphe Form auf $\mathfrak{E}_n$ bezüglich der Gruppe $\hat{\Gamma}_n = L_{Z^*}\Gamma_n L_{Z^*}^{-1}$. Als Taylorsche Entwicklung von f an der Stelle Z^* nehme man nun

$$f(Z) = |Z - \bar{Z}^*|^{-k}\mathfrak{P}(L_{Z^*}\langle Z\rangle),$$

wobei $\mathfrak{P}(W)$ die Potenzreihenentwicklung von $\hat{f}$ nach Potenzen der Elemente von W im Nullpunkt ist. Auf diesen Entwicklungstypus wende man das Verfahren der Quersummation an. Es besteht in folgendem Vorgehen: Man bilde formal

$$f(Z) = f(M\langle Z\rangle)\,|CZ+D|^{-k} = |CZ+D|^{-k}\,|M\langle Z\rangle - \bar{Z}^*|^{-k}\,\mathfrak{P}(L_{Z^*}M\langle Z\rangle)$$

und summiere bei fester Wahl des Gliedes von $\mathfrak{P}$ über alle $M \in \Gamma_n$. So gelangt man zu den Poincaréschen Reihen

$$P_{k,n}(Z; Z^*, \varphi) = \sum_{M\in\Gamma_n} \frac{\varphi(L_{Z^*}M\langle Z\rangle)}{|M\langle Z\rangle - \bar{Z}^*|^k\,|CZ+D|^k}, \tag{6}$$

wobei φ ein beliebiges Polynom in $\frac{n(n+1)}{2}$ Variablen sei. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Reihen abgesehen von dem Faktor $|Z - \bar{Z}^*|^{-k}$ mit den gewöhnlichen Poincaréschen Reihen

$$\sum_{M\in\hat{\Gamma}_n} \varphi(M\langle W\rangle)\, j_M^{\frac{k}{n+1}}(W)$$

zu der auf dem beschränkten Gebiet $\mathfrak{E}_n$ operierenden Gruppe $\hat{\Gamma}_n$ übereinstimmen. Dabei bezeichnet j die Funktionaldeterminante der betreffenden Abbildung. Nach einer wohlbekannten einfachen Schlußweise von Poincaré (siehe [2]) hat man also absolut gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum für $k > 2n$. Da aus dem Bildungsgesetz von (6) sofort das Transformationsverhalten (5) abgelesen werden kann, sind diese Reihen also für $k > 2n$ stets Modulformen n-ten Grades. Spitzenformen f sind für die Modulgruppe durch die Eigenschaft

$$\Phi f = \lim_{\lambda\to\infty} f\begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (Z_0 \in \mathfrak{H}_{n-1})$$

gekennzeichnet. Der Nachweis dafür, daß die durch (6) dargestellten Funktionen stets Spitzenformen sind, ist bei R. Godement [1] nur mit tiefliegenden Hilfsmitteln von I. Satake und Harish-Chandra bewiesen. In [5] ist jedoch sehr einfach gezeigt, daß diese Reihen absolut gleichmäßig konvergieren in dem beim Grenzprozeß betroffenen Bereich. Aus der Symmetrierelation

$$|M\langle Z\rangle - \bar{Z}^*|\,|CZ+D| = |\tilde{M}\langle -\bar{Z}^*\rangle + Z|\,|\tilde{C}(-\bar{Z}^*) + \tilde{D}|,\quad \tilde{M} = M^{-1}\left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}\right]$$

wird ersichtlich, daß jedes Glied von (6) den Grenzwert Null besitzt. Die gliedweise Ausführung des Grenzprozesses Φ zeigt also die Spitzenformeigenschaft der durch (6) dargestellten Funktionen jetzt unmittelbar.

Auf der Schar der Spitzenformen vom Gewicht k werde nun das bekannte Skalarprodukt [6]

$$\{f, g\} = \int_{\mathfrak{F}_n} f(Z)\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\,dX\,dY$$

eingeführt. Der Integrationsbereich $\mathfrak{F}_n$ ist irgendein Fundamentalbereich der Modulgruppe Γ_n; es werde etwa der von C. L. SIEGEL angegebene Fundamentalbereich benutzt. Das Skalarprodukt einer beliebigen Spitzenform f vom Gewicht k mit $P_{k,n}(Z; Z^*, \varphi)$ läßt sich leicht wie folgt berechnen. Dabei ist es zweckmäßig, vermöge (2) zu $\mathfrak{E}_n$ überzugehen. Mit der Bedeutung von $\hat{f}$ aus (4) erhält man

$$\begin{aligned}
&\{f(Z), P_{k,n}(Z; Z^*, \varphi)\}\\
&= 2^{n(n-2k+1)}|Y^*|^{-k} \int_{L_{Z^*}\langle\mathfrak{F}_n\rangle} \hat{f}(W)\,\overline{\sum_{M\in\hat{\Gamma}_n} \frac{\varphi(M\langle W\rangle)}{|CW+D|^k}}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV\\
&= 2^{n(n-2k+1)}|Y|^{*-k} \sum_{M\in\hat{\Gamma}_n} \int_{L_{Z^*}\langle\mathfrak{F}_n\rangle} \hat{f}(W)\,\overline{\frac{\varphi(M\langle W\rangle)}{|CW+D|^k}}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV
\end{aligned}$$

$$= 2^{n(n-2k+1)+1}|Y|^{*-k} \int_{\mathfrak{E}_n} \hat{f}(W)\,\overline{\varphi(W)}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV. \tag{7}$$

Da f Spitzenform ist, ist unter Verwendung von (3) und der Abkürzung abs für den absoluten Betrag

$$|Y|^{\frac{k}{2}} \operatorname{abs} f(Z) = 2^{-nk}|Y^*|^{-\frac{k}{2}}|E-\bar{W}W|^{\frac{k}{2}} \operatorname{abs} \hat{f}(W)$$

beschränkt und außerdem

$$I_n(\alpha) = \int_{\mathfrak{E}_n} |E-\bar{W}W|^{\alpha}\,dU\,dV \tag{8}$$

für $\alpha > -1$ konvergent [3]. Somit existiert das Integral (7), und die vorangehenden Umformungen sind für $k > 2n$ legitimiert.

Zur weiteren Berechnung des Skalarproduktes entwickle man $\hat{f}$ in eine Potenzreihe nach W. Da $\mathfrak{E}_n$ für $n > 1$ jedoch kein Reinhardtsches Gebiet ist, kann man die Gültigkeit dieser Potenzreihenentwicklung von $\hat{f}$ in ganz $\mathfrak{E}_n$ nicht erwarten. Durch Zusammenfassen der homogenen Bestandteile gleichen Grades bekommt man jedoch eine in ganz $\mathfrak{E}_n$ gültige Entwicklung von $\hat{f}$. Ist nämlich $W \in \mathfrak{E}_n$ gegeben, so ist

$$g(t) = \hat{f}(tW)$$

eine für $\operatorname{abs}(t) \leq 1$ holomorphe Funktion der komplexen Variablen t. Sie gestattet infolgedessen eine Potenzreihenentwicklung

$$g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} \hat{f}_{\nu}(W) \qquad (\operatorname{abs}(t) \leq 1),$$

wobei die Koeffizienten $\hat{f}_\nu(W)$ nur von W abhängen. Andererseits kann $g(t)$ für genügend kleines $\operatorname{abs}(t)$ in eine Potenzreihe nach Potenzen von tW entwickelt werden. Wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung ist $\hat{f}_\nu(W)$ der homogene Bestandteil ν-ten Grades in der Potenzreihenentwicklung von $\hat{f}$, und für $t=1$ bekommt man

$$\hat{f}(W) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_\nu(W)$$

für alle $W \in \mathfrak{E}_n$. Hierbei ist also $\hat{f}_\nu$ ein homogenes Polynom ν-ten Grades in den Elementen von W. Diese Reihe konvergiert sogar auf jedem Kompaktum von $\mathfrak{E}_n$ absolut gleichmäßig.

Im Hinblick auf die Grundformeln der Metrisierungstheorie werden die homogenen Bestandteile der Potenzreihenentwicklung folgendermaßen umgestaltet. Für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sei $\mathfrak{a}_\nu$ der m_ν-dimensionale Zeilenvektor aller Potenzprodukte vom Grade ν in den Elementen $w_{jl} (j \leqq l)$ von W. Dann ist für $\nu \neq \mu$

$$\int_{\mathfrak{E}_n} \bar{\mathfrak{a}}'_\nu \mathfrak{a}_\mu |E - \bar{W}W|^{k-n-1} dU\, dV = 0,$$

weil der Integrand bei der Substitution $W \to e^{i\psi} W$ mit reellem ψ den Faktor $e^{i(\mu-\nu)\psi} \neq 1$ annimmt. Die Hermitesche Matrix

$$H_\nu = \int_{\mathfrak{E}_n} \bar{\mathfrak{a}}'_\nu \mathfrak{a}_\nu |E - \bar{W}W|^{k-n-1} dU\, dV$$

ist dagegen positiv definit. Bestimmt man A_ν so, daß $H_\nu[A_\nu] = E$ ist, so liefern die Komponenten von $\mathfrak{a}_\nu A_\nu$ ein vollständiges System von homogenen Polynomen $\varphi_{\nu 1}, \varphi_{\nu 2}, \ldots$ ν-ten Grades mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathfrak{E}_n} \varphi_{\nu r}(W) \overline{\varphi_{\mu s}(W)} |E - \bar{W}W|^{k-n-1} dU\, dV = \delta_{\nu\mu}\delta_{rs}. \tag{9}$$

Für $n=1$ und, wie man leicht überlegt, nur in diesem Falle kann man für die φ die normierten Potenzprodukte der Elemente von W selbst nehmen. Es sei noch hervorgehoben, daß dieser Orthogonalisierungsprozeß unabhängig von Z^* ist.

Schreibt man nun die Potenzreihenentwicklung von $\hat{f}$ in der Gestalt

$$\hat{f}(W) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_{\nu\mu} \varphi_{\nu\mu}(W) \right), \tag{10}$$

so läßt sich das Skalarprodukt $\{f(Z), P_{k,n}(Z; Z^*, \varphi_{\nu\mu})\}$ im Anschluß an (7) folgendermaßen weiterberechnen. Man integriere dort zunächst über das Kompaktum

$$\mathfrak{E}_n^{(t)} = \{W \in \mathfrak{E}_n \,|\, tE - \bar{W}W \geqq 0\} \qquad (0 < t < 1).$$

Die Polynome $\varphi_{\nu\mu}$ erfüllen auch die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\mathfrak{E}_n^{(t)}} \varphi_{\nu r}(W) \overline{\varphi_{\mu s}(W)} |E - \bar{W}W|^{k-n-1} dU\, dV = 0 \qquad (\mu \neq \nu),$$

ferner ist (10) gleichmäßig konvergent auf $\mathfrak{E}_n^{(t)}$. Daher bekommt man zunächst

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_n^{(t)}} \hat{f}(W)\,\overline{\varphi_{\nu\mu}(W)}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{E}_n^{(t)}} \sum_{l=1}^{m_\nu} a_{\nu l}\,\varphi_{\nu l}(W)\,\overline{\varphi_{\nu\mu}(W)}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV$$

und nach Ausführung des Grenzüberganges $t\to 1$ vermöge (9)

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_n} \hat{f}(W)\,\overline{\varphi_{\nu\mu}(W)}\,|E-\bar{W}W|^{k-n-1}\,dU\,dV=a_{\nu\mu}.$$

Zusammenfassend kann also der folgende Sachverhalt formuliert werden. Die Taylorentwicklung einer beliebigen Spitzenform f an der Stelle Z^* schreibe man in der Gestalt

$$f(Z)=|Z-\bar{Z}^*|^{-k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_{\nu\mu}(f,Z^*)\,\varphi_{\nu\mu}(L_{Z^*}\langle Z\rangle). \tag{11}$$

Dann gilt für die aus dieser Entwicklung durch Quersummation gewonnenen Poincaréschen Reihen der folgende Satz.

Satz 1. *Es sei $k>2n$, $kn\equiv 0 \bmod 2$ und $Z^*\in\mathfrak{H}_n$. Für die Taylorentwicklung* (11) *einer beliebigen Spitzenform f vom Gewicht k an der Stelle Z^* gelten die Grundformeln der Metrisierungstheorie*

$$\{f(Z),P_{k,n}(Z;Z^*,\varphi_{\nu\mu})\}=2^{n(n-2k+1)+1}|Y^*|^{-k}a_{\nu\mu}(f,Z^*).$$

Es lassen sich dann die üblichen Folgerungen gemäß [7] ziehen. Die Beweise sind wörtlich zu übertragen. Die wichtigsten Sätze seien als Folgerungen genannt, wobei auf den Nachweis der Endlichkeit der Dimension der Schar aller Modulformen festen Gewichtes nicht mehr eingegangen (vgl. [1, 6]) und stets $k>2n$ angenommen wird.

Folgerung a. *(Metrische Charakterisierung der Poincaréschen Reihen) $P_{k,n}(Z;Z^*,\varphi_{\nu\mu})$ steht senkrecht auf genau allen Spitzenformen f vom Gewicht k, deren entsprechender Entwicklungskoeffizient $a_{\nu\mu}(f,Z^*)$ an der Stelle Z^* verschwindet. Durch diese Orthogonalitätsbedingung ist $P_{k,n}(Z;Z^*,\varphi_{\nu\mu})$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. $P_{k,n}(Z;Z^*,\varphi_{\nu\mu})$ verschwindet genau dann identisch in Z, wenn $a_{\nu\mu}(f,Z^*)=0$ für alle Spitzenformen f vom Gewicht k gilt.*

Folgerung b. *Hauptsatz über die linearen Relationen zwischen Poincaréschen Reihen auch für verschiedene Entwicklungspunkte Z^*.*

Folgerung c. *(1. Vollständigkeitssatz,* GODEMENT [1]*) Für jedes feste $Z^*\in\mathfrak{H}_n$ gibt es endlich viele Polynome $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, so daß die Poincaréschen Reihen $P_{k,n}(Z;Z^*,\varphi_\nu)$ $(\nu=1,\ldots,p)$ die Schar der Spitzenformen vom Gewicht k aufspannen.*

Folgerung d. *(2. Vollständigkeitssatz) In jeder Umgebung eines Punktes $Z^*\in\mathfrak{H}_n$ gibt es endlich viele Punkte $Z_1^*,\ldots,Z_p^*$, so daß die Poincaréschen Reihen $P_{k,n}(Z;Z_\nu^*,1)$ $(\nu=1,\ldots,p)$ die Schar der Spitzenformen vom Gewicht k aufspannen.*

Folgerung e. *Jede Spitzenform f vom Gewicht k genügt der Integralgleichung*

$$f(Z^*) = \eta \int_{\mathfrak{F}_n} f(Z)\, \overline{P_{k,n}(Z; Z^*, 1)}\, |Y|^{k-n-1}\, dX\, dY,$$

und umgekehrt stimmt jede stetige Lösung der Integralgleichung mit geeignetem Verhalten im Unendlichen mit der Restriktion einer Spitzenform auf $\mathfrak{F}_n$ überein. Der einzige Eigenwert obiger Integralgleichung hat den numerischen Wert

$$\eta = 2^{-n\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}-k\right)-1}\, i^{-kn}\, \pi^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma\left(k - \frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k - \frac{n+\nu}{2}\right)}.$$

Man bestimmt diesen Wert aus obigen Formeln unter Verwendung eines Resultates von L. K. Hua [3], das die Berechnung des Integrales (8) zum Inhalt hat.

§ 2. Zusammenhang zwischen Poincaréschen Reihen verschiedenen Typs und Darstellungssätze

Das Verfahren der Quersummation bezüglich der Taylorentwicklung an der Stelle $Z^* \in \mathfrak{H}_n$ hatte zu zwei Typen von Poincaréschen Reihen geführt, welche jeweils als Funktionen von Z die volle Schar der Spitzenformen vom Gewicht $k > 2n$ erzeugen, nämlich

Typus 1: $\{P_{k,n}(Z; Z^*, 1) \mid \text{Parameter } Z^* \in \mathfrak{H}_n\}$,

Typus 2: $\{P_{k,n}(Z; Z^*, \varphi) \mid Z^* \in \mathfrak{H}_n \text{ fest, Parameter } \varphi \text{ ein beliebiges Polynom}\}$.

Ein dritter Typus wurde von H. Maass [6] durch Quersummation aus der Fourierentwicklung (1) gewonnen

Typus 3:

$$\{g_{k,n}(Z, T) = \sum_{M : \mathfrak{A}_n \backslash \Gamma_n} e^{2\pi i \sigma(T M\langle Z\rangle)} |CZ+D|^{-k} \mid \text{Parameter } T \text{ halbganz und } > 0\},$$

wobei $\mathfrak{A}_n$ die Untergruppe der Translationen von Γ_n ist.

Es sollen nun auch die Nichtspitzenformen durch Bildung geeigneter Poincaréscher Reihen jeden Typs in die Betrachtung einbezogen werden. In diesem Paragraphen werde stets k gerade angenommen. Für $0 \leqq r \leqq n$ sei $\mathfrak{A}_r$ die Untergruppe aller Modulsubstitutionen n-ten Grades der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U & SU'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{B}_r$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{A}_r$, welche aus allen Elementen von $\mathfrak{A}_r$ besteht, bei denen die linke obere r-reihige Untermatrix von S Null ist. Durch den Index 1 bei einer Matrix werde jeweils das r-reihige linke obere Kästchen bezeichnet. In leichter Abänderung der früheren Bezeichnung (Z^* wird durch $-\bar{Z}^*$ ersetzt) definiere man nun für $0 \leqq r \leqq n$, $Z \in \mathfrak{H}_n$ und $Z^* \in \mathfrak{H}_r$

(12) Typus 1: $P_{k,r}(Z, Z^*) = \sum_{M : \mathfrak{B}_r \backslash \Gamma_n} |M\langle Z\rangle_1 + Z^*|^{-k} |CZ+D|^{-k}$.

Diese Poincaréschen Reihen werden die Ergänzung der früheren Reihen vom Typus 1 zur Erzeugung aller Modulformen vom Gewicht k bilden. Während bislang Z^* als fest angesehen wurde, wird sodann $P_{k,r}(Z, Z^*)$ als Funktion von Z und Z^* in $\mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_r$ studiert. Die Taylor- bzw. Fourierentwicklung bezüglich Z^* wird als Koeffizienten Poincarésche Reihen liefern, welche die Ergänzung der Typen 2 und 3 im obigen Sinne darstellen. Die Eigenschaften der Poincaréschen Reihen vom Typus 2 und 3 können dann auf Grund dieses Zusammenhangs aus den entsprechenden Eigenschaften für den ersten Typus gefolgert werden.

Zunächst sind die Konvergenzverhältnisse der Reihen (12) leicht zugänglich und in [5] untersucht. Nennt man

$$\mathfrak{V}_m = \{Z \in \mathfrak{H}_n | \sigma(X^2) \leqq m,\ Y \geqq m^{-1} E\} \qquad (m>0)$$

kurz einen Vertikalstreifen in $\mathfrak{H}_n$, so hat man für $k > \mathrm{Min}(2n, n+r+1)$ absolut gleichmäßige Konvergenz bezüglich Z, Z^* in jedem Produkt zweier Vertikalstreifen, genauer gilt dort

$$P_{k,r}(Z, Z^*) \prec P_{k,r}(iE, iE)\,. \tag{13}$$

Insbesondere stellen also diese Reihen als Funktionen von Z Modulformen n-ten Grades dar; für $r=0$ bekommt man die gewöhnlichen Eisensteinreihen.

Die Fourierentwicklung von (12) bezüglich Z^* ist in [5] beschrieben. Man spalte $P_{k,r}(Z, Z^*)$ gemäß

$$P_{k,r}(Z, Z^*) = \sum_{M:\,\mathfrak{A}_r\backslash\Gamma_n} |CZ+D|^{-k} \sum_{S_1} |M\langle Z\rangle_1 + S_1 + Z^*|^{-k}$$

auf, wobei S_1 über alle ganzen r-reihigen symmetrischen Matrizen läuft. Die zweite Summe stellt dann eine periodische Funktion in den Elementen von Z^* dar, und ihre Fourierentwicklung lautet

$$\tau(r,k) \sum_{S_1} |M\langle Z\rangle_1 + S_1 + Z^*|^{-k} =$$
$$= \sum_{T_1>0} |T_1|^{k-\frac{r+1}{2}} e^{2\pi i \sigma(T_1(M\langle Z\rangle_1 + Z^*))} \qquad (k > r+1)\,,$$

wobei über alle halbganzen positiven r-reihigen T_1 summiert wird und

$$\tau(r,k) = (4\pi)^{\frac{r(r-1)}{4}} (2\pi i)^{-rk}\, \Gamma(k)\, \Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(k-\frac{r-1}{2}\right)$$

ist. Man bekommt also

$$P_{k,r}(Z, Z^*) = \tau^{-1}(r,k) \sum_{T_1>0} |T_1|^{k-\frac{r+1}{2}} g_{k,r}(Z, T)\, e^{2\pi i \sigma(T_1 Z^*)} \tag{14}$$

mit Typus 3:

$$g_{k,r}(Z, T) = \sum_{M:\,\mathfrak{A}_r\backslash\Gamma_n} e^{2\pi i \sigma(TM\langle Z\rangle)} |CZ+D|^{-k}, \quad \left(T = \begin{pmatrix} T_1^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_1 > 0\right). \tag{15}$$

Zugleich ergibt sich, daß die letztgenannten Reihen für $k > \operatorname{Min}(2n, n+r+1)$ auf Grund obiger Umformungen absolut gleichmäßig bezüglich Z in jedem Vertikalstreifen konvergieren (vgl. [5]).

Aus (14) ergeben sich sofort die in [6] aufgestellten Grundformeln der Metrisierungstheorie für die Reihen $g_{k,n}(Z, T)$, wenn man die Ergebnisse des ersten Paragraphen benutzt. Bildet man nämlich das Skalarprodukt einer beliebigen Spitzenform $f(Z)$ mit $P_{k,n}(Z, Z^*)$, so bekommt man einerseits nach Folgerung e

$$\{f(Z), P_{k,n}(Z, Z^*)\} = \eta^{-1} f(-\bar{Z}^*)\,; \tag{16}$$

andererseits erhält man durch gliedweise Integration aus (14)

$$\{f(Z), P_{k,n}(Z, Z^*)\} = \bar{\tau}^{-1}(n, k) \sum_{T>0} |T|^{k-\frac{n+1}{2}} \{f, g_{k,n}(Z, T)\}\, e^{-2\pi i\sigma(T\bar{Z}^*)}.$$

Setzt man für f in (16) auf der rechten Seite die Fourierentwicklung (1) an und macht Koeffizientenvergleich, so folgt mit dem angegebenen numerischen Wert von η für $T > 0$

$$\{f(Z), g_{k,n}(Z, T)\} = 2a(T)\,|T|^{\frac{n+1}{2}-k}\, \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}-nk} \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(k - \frac{n+\nu}{2}\right).$$

Die Rechtfertigung für die Vertauschung von Summation und Integration ergibt sich aus folgender Betrachtung. Für die Fourierkoeffizienten von (14) hat man die Formel

$$\tau^{-1}(n, k)\,|T|^{k-\frac{n+1}{2}}\, g_{k,n}(Z, T) = \int_{\mathfrak{W}} P_{k,n}(Z, R)\, e^{-2\pi i\sigma(TR)}\, dQ\,,$$

wobei Q den Realteil von R und $\mathfrak{W}$ den Einheitswürfel im Q-Raum bezeichnet. Wegen (13) gibt es also zu jedem $\delta > 0$ eine von Z und T unabhängige Konstante c, so daß diese Fourierkoeffizienten dem Betrage nach kleiner als $c e^{2\pi\delta\sigma(T)}$ sind für alle Z aus einem gegebenen Vertikalstreifen und alle halbganzen $T > 0$. Außerdem ist $|Y|^k \operatorname{abs} f(Z)$ für jede Spitzenform im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_n$ beschränkt, und es existiert

$$\int_{\mathfrak{F}_n} \frac{dX\, dY}{|Y|^{n+1}}.$$

Der Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_n$ ist bekanntlich in einem geeigneten Vertikalstreifen enthalten. Folglich besitzt die zu integrierende Reihe für $Z \in \mathfrak{F}_n$ die von Z unabhängige Majorante

$$\sum_{T>0} e^{-2\pi\sigma(T(Y^*-\delta E))},$$

welche für $Y^* > \delta E$ konvergiert.

Schließlich werde nun die Taylorsche Entwicklung von $P_{k,r}(Z, Z^*)$ bezüglich Z^* an einer beliebigen Stelle $R \in \mathfrak{H}_r$ betrachtet. Führt man

$$W^* = L_R\langle Z^*\rangle$$

nach (2) ein, wobei jetzt alle Matrizen r-reihig sind, so bekommt man nach naheliegender Rechnung

$$\frac{|Z^* - \bar{R}|}{|M\langle Z\rangle_1 + Z^*|} = \frac{|R-\bar{R}|}{|M\langle Z\rangle_1 + R|\,|E - W^* L_{-\bar{R}}(M\langle Z\rangle_1)|}.$$

Erhebt man diesen Ausdruck in die k-te Potenz und entwickelt nach Potenzen von W^* um den Nullpunkt, so erhält man nach (12)

$$P_{k,r}(Z, Z^*) = |Z^* - \bar{R}|^{-k}\,|R-\bar{R}|^k \sum_\nu P_{k,r}(Z; R, \psi_\nu)\,\varphi_\nu(L_R\langle Z^*\rangle) \tag{17}$$

mit

$$\text{Typus 2:}\quad P_{k,r}(Z; R, \psi) = \sum_{M:\mathfrak{B}_r\diagdown\Gamma_n} \frac{\psi(L_{-\bar{R}}(M\langle Z\rangle_1))}{|CZ+D|^k\,|M\langle Z\rangle_1 + R|^k}. \tag{18}$$

Hierbei durchläuft φ_ν etwa alle Potenzprodukte in den Elementen von W^*, und die ψ_ν sind gewisse Polynome, welche nicht von dem Entwicklungspunkt R abhängen. Die Reihen (18) stellen wieder Modulformen n-ten Grades bezüglich Z dar. Damit ist der folgende Satz gezeigt, wodurch der Zusammenhang zwischen den drei Typen von Poincaréschen Reihen hergestellt wird.

Satz 2. *Es sei* $0 \leqq r \leqq n$, $k > \operatorname{Min}(2n, n+r+1)$ *und* $k \equiv 0 \bmod 2$. *Die durch* (18) *bzw.* (15) *definierten Poincaréschen Reihen vom Typus 2 bzw. 3 sind abgesehen von von Z unabhängigen Faktoren die Taylor- bzw. Fourierkoeffizienten der Poincaréschen Reihen* (12) *vom Typus 1, wenn man diese bezüglich Z^* entwickelt.*

Es ist aber zu beachten, daß in (17) nicht alle Polynome als ψ_ν auftreten.

Auf Grund dieses Zusammenhangs läßt sich jetzt leicht ein Darstellungssatz für jeden der drei Typen von Poincaréschen Reihen beweisen. Zu diesem Zweck werde die Wirkungsweise des Φ-Operators auf jeden Reihentyp untersucht.

Satz 3. *Es sei* $0 \leqq r \leqq n$, $k > \operatorname{Min}(2n, n+r+1)$, $k \equiv 0 \bmod 2$. *Dann gilt für* $Z_0 \in \mathfrak{H}_{n-1}$

$$\Phi P_{k,r}(Z, Z^*) = \begin{cases} P_{k,r}(Z_0, Z^*) & \textit{für } r < n \\ 0 & \textit{für } r = n \end{cases}$$

$$\Phi P_{k,r}(Z; Z^*, \psi) = \begin{cases} P_{k,r}(Z_0; Z^*, \psi) & \textit{für } r < n \\ 0 & \textit{für } r = n \end{cases}$$

$$\Phi g_{k,r}(Z, T) = \begin{cases} g_{k,r}(Z_0, T_0) & \textit{für } r < n \\ 0 & \textit{für } r = n, \end{cases}$$

wobei T_0 aus T durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

Beweis. Wegen der absolut gleichmäßigen Konvergenz in Vertikalstreifen kann bei $P_{k,r}(Z, Z^*)$ der Φ-Operator in (12) gliedweise angewendet werden. Die Grenzwerte der einzelnen Glieder berechnen sich wie in [6], woraus die erste Aussage folgt. Die Reihen vom Typus 2 und 3 sind nach Satz 2 die Taylor- bzw. Fourierkoeffizienten der Funktionen $P_{k,r}(Z, Z^*)$ in ihren Entwicklungen bezüglich Z^* und lassen sich also nach der Cauchyschen Integralformel bzw. der Formel für die Fourierkoeffizienten durch eine Integraltransformation aus $P_{k,r}(Z, Z^*)$ gewinnen. Wegen (13) gilt die erste Aussage des Satzes gleichmäßig in Z^* aus einem gegebenen Kompaktum. Man kann also den Φ-Operator mit der Integration vertauschen und bekommt so die zweite und dritte Aussage des Satzes unmittelbar aus der ersten. Dabei werden allerdings nur die Polynome ψ erfaßt, welche bei der Taylorentwicklung (17) wirklich auftreten. Es ist aber leicht direkt zu sehen, daß die Aussage für beliebige Polynome richtig ist.

Es ergibt sich jetzt durch den üblichen Induktionsschluß der Beweis der Darstellungssätze. Dabei werden die Poincaréschen Reihen jeweils als Funktionen von Z betrachtet, beim ersten Typus ist $Z^* \in \mathfrak{H}_r$, beim zweiten Typus das Polynom ψ ($Z^* = R$ fest) und beim dritten Typus T als Parameter anzusehen.

Satz 4. *Es sei* $k > \mathrm{Min}(2n, n+r+1)$ *und* $k \equiv 0 \bmod 2$. *Jeder der durch* (12), (15) *und* (18) *erklärten Typen von Poincaréschen Reihen mit* $r = 0, 1, \ldots, n$ *erzeugt die volle Schar aller Modulformen vom Gewicht k.*

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz wohlbekannt. Angenommen, der obige Sachverhalt sei richtig für die Poincaréschen Reihen eines bestimmten Typus zur Modulgruppe $(n-1)$-ten Grades. Nach Satz 3 gibt es dann Poincarésche Reihen $f_1, \ldots, f_l$ des betreffenden Typs, so daß $\Phi f_1, \ldots, \Phi f_l$ alle Modulformen $(n-1)$-ten Grades erzeugen. Ist nun f eine beliebige Modulform n-ten Grades vom Gewicht k, so läßt sich die Modulform $(n-1)$-ten Grades Φf als Linearkombination $\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu(\Phi f_\nu)$ darstellen; d. h. $f - \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu f_\nu$ ist Spitzenform. Aus den Grundformeln folgt, daß Spitzenformen durch die Poincaréschen Reihen eines jeden Typs erzeugt werden. Damit ist Satz 4 bewiesen. Man braucht natürlich von den Grundformeln nur den Spezialfall der in Folgerung e genannten Integralgleichung. Hieraus ergibt sich nämlich zunächst der Vollständigkeitssatz für den ersten Typus. Für die übrigen beiden Typen benutze man dann den in Satz 2 genannten Zusammenhang. Gehört eine Spitzenform zur Orthogonalschar aller Poincaréscher Reihen des zweiten oder dritten Typs, so folgt durch gliedweise Ausführung des Skalarproduktes in (14) und (17), daß sie auch auf allen Poincaréschen Reihen des ersten Typs senkrecht steht und damit identisch verschwindet. Also gilt der Vollständigkeitssatz auch für die übrigen beiden Typen.

§ 3. Konvergenz

Im Verlaufe der vorangegangenen Untersuchungen war bereits benutzt worden, daß sämtliche Poincaréschen Reihen absolut gleichmäßig konvergieren, wenn Z und Z^* in gegebenen Vertikalstreifen liegen. Der Beweis ist in [5] ausgeführt; man zeigt nämlich (13) direkt und schließt auf die gleichmäßige Konvergenz von $g_{k,r}(Z, T)$ über die Entwicklung (14). Die Poincaréschen Reihen vom zweiten Typus ordnen sich trivial unter, da das Polynom ψ auf $\mathfrak{E}_n$ beschränkt ist. Für $r = n$ werde noch ein weitergehendes Ergebnis bewiesen, indem man ein früheres Resultat [4] auf Poincarésche Reihen anwendet.

Durch den folgenden Hilfssatz wird das Studium der Reihen $g_{k,n}(Z, T)$ auf dasjenige der Reihen $P_{k,n}(Z, iE)$ zurückgeführt; die ersten lassen sich nämlich in ganz $\mathfrak{H}_n$ gleichmäßig durch die letzteren majorisieren.

Hilfssatz. *Es sei $k>2n$, kn gerade, T halbganz und positiv definit. Dann gilt für alle $Z\in\mathfrak{H}_n$*

$$\sum_{N:\,\mathfrak{A}_n\diagdown\Gamma_n} e^{2\pi i\sigma(TN\langle Z\rangle)}|KZ+L|^{-k} \prec$$
$$\prec \sum_{N:\,\mathfrak{A}_n\diagdown\Gamma_n}\left(\sum_{M\equiv N \bmod \mathfrak{A}_n} \operatorname{abs}|M\langle Z\rangle+iE|^{-k}\operatorname{abs}|CZ+D|^{-k}\right)$$

(K, L ist die zweite Zeile von N). Dabei ist das Verhältnis der Beträge entsprechender Glieder durch eine Konstante beschränkt, welche nur von n, T und k abhängt.

Beweis. Die Glieder der linken Reihe $g_{k,n}(Z, T)$ hängen nur von N modulo $\mathfrak{A}_n$ ab. Man kann also zu gegebenem $Z\in\mathfrak{H}_n$ diese Freiheit dahingehend ausnutzen, daß der Realteil von $N\langle Z\rangle$ elementweise durch $^1/_2$ beschränkt ist. Das allgemeine Reihenglied werde folgendermaßen umgeformt:

$$e^{2\pi i\sigma(TN\langle Z\rangle)}|KZ+L|^{-k}=\frac{e^{2\pi i\sigma(TN\langle Z\rangle)}|N\langle Z\rangle+iE|^{k}}{|KZ+L|^{k}|N\langle Z\rangle+iE|^{k}}.$$

Aus der Beschränktheit des Realteiles von $N\langle Z\rangle$ und $T>0$ folgt, daß der Zähler der rechten Seite unabhängig von Z und N beschränkt ist. Also gilt die Behauptung.

Man nehme nun die folgende wichtige Umformung der Glieder von $P_{k,n}(Z, iE)$ vor. Nach (2) und (3) ist

$$\frac{|Y|^{\frac{k}{2}}}{\operatorname{abs}|M\langle Z\rangle+iE|^{k}\operatorname{abs}|CZ+D|^{k}}=2^{-nk}|E-\overline{\hat M\langle W\rangle}\,\hat M\langle W\rangle|^{\frac{k}{2}},$$

wobei $W=L_{iE}\langle Z\rangle$ und $\hat M=L_{iE}ML_{iE}^{-1}$ gesetzt ist. Somit gilt für die Betragsreihe $\tilde P_{k,n}(Z, iE)$ von $P_{k,n}(Z, iE)$

$$|Y|^{\frac{k}{2}}\tilde P_{k,n}(Z, iE)=2^{-nk}\sum_{\hat M\in L_{iE}\Gamma_n L_{iE}^{-1}}|E-\overline{\hat M\langle W\rangle}\,\hat M\langle W\rangle|^{\frac{k}{2}}.$$

Die rechts stehende Reihe läßt sich nun unter Verwendung des zur symplektischen Metrik gehörigen Laplaceoperators nach [4] einfach untersuchen. Dort wird gezeigt, daß die durch diese Reihe dargestellte Funktion von W ihr Maximum in einem von n allein abhängigen kompakten Teil von $\mathfrak{E}_n$ annimmt, sofern nur $k>n(n+1)$ ist (man beachte, daß gegenüber [4] jetzt die Symmetriebedingung $Z=Z'$ zur Verfügung steht). Dieses Resultat gilt für beliebige diskontinuierliche Gruppen. Man bekommt also

Satz 5. *Die mit $|Y|^{\frac{k}{2}}$ multiplizierte Betragsreihe $\tilde P_{k,n}(Z, iE)$ nimmt ihr Maximum in einem festen Kompaktum von $\mathfrak{H}_n$ an ($k>n(n+1)$) und ist insbesondere auf $\mathfrak{H}_n$ beschränkt*[1].

[1] Ich verdanke Herrn A. BOREL die Kenntnis, daß die zweite Aussage über die Beschränktheit unter Verwendung tieferliegender Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis von HARISH-CHANDRA auch für die übrigen k bewiesen werden kann.

Durch diesen Satz lassen sich die früheren Aussagen über gleichmäßige Konvergenz verbessern. Die Ergebnisse sind auch für $n=1$ schärfer als die Resultate in [8]. Zunächst werden die folgenden Bereiche eingeführt, welche die Vertikalstreifen umfassen.

Definition. *Ein Winkelbereich* $\mathfrak{W}$ *in* $\mathfrak{H}_n$ *ist eine Teilmenge von* $\mathfrak{H}_n$ *mit der Eigenschaft, daß* $\mathfrak{W} \cap \{Z \in \mathfrak{H}_n \,|\, |Y| \leqq c\}$ *kompakt ist für alle positiven c.*

Der Name Winkelbereich wurde gewählt in Anlehnung an folgendes Beispiel für $n=1$. $\mathfrak{W}$ werde berandet von zwei Geraden, deren Schnittpunkt in der oberen Halbebene liegt und welche mit der imaginären Achse einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ bilden. Aus Satz 5 bekommt man dann die

Folgerung. *Die Poincaréschen Reihen* $P_{k,n}(Z, Z^*)$, $g_{k,n}(Z, T)$ *sind absolut gleichmäßig konvergent in* Z *und* Z^*, *wenn das erste Argument* Z *in einem gegebenen Winkelbereich und* Z^* *in einem gegebenen Vertikalstreifen liegt* $(k > n(n+1))$.

Beweis. Wegen des Hilfssatzes und der gleichmäßig in $Z \in \mathfrak{H}_n$, Z^* aus einem Vertikalstreifen geltenden Abschätzung (vgl. [5])

$$\tilde{P}_{k,n}(Z, Z^*) \prec \tilde{P}_{k,n}(Z, iE)$$

kann man sich auf die Reihen $\tilde{P}_{k,n}(Z, iE)$ beschränken. Nun sei $\mathfrak{W}$ ein gegebener Winkelbereich und

$$K = \sup_{Z \in \mathfrak{H}_n} |Y|^{\frac{k}{2}} \tilde{P}_{k,n}(Z, iE).$$

K ist nach Satz 5 endlich. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine endliche von Z unabhängige Teilmenge von $L_{iE} \Gamma_n L_{iE}^{-1}$, so daß die durch Weglassen der entsprechenden Glieder aus $\tilde{P}_{k,n}(Z, iE)$ entstehende Reihe

$$\tilde{P}'_{k,n}(Z, iE) < \varepsilon$$

ist für alle $Z \in \mathfrak{W}$ mit

$$|Y|^{\frac{k}{2}} \leqq \frac{K}{\varepsilon}.$$

Denn nach Definition des Winkelbereiches wird durch die letzte Ungleichung ein Kompaktum von $\mathfrak{H}_n$ beschrieben, und $\tilde{P}_{k,n}(Z, iE)$ ist dort gleichmäßig konvergent. Ist dagegen

$$|Y|^{\frac{k}{2}} > \frac{K}{\varepsilon},$$

so gilt sogar für die volle Reihe auf Grund der Bedeutung von K

$$\tilde{P}_{k,n}(Z, iE) \leqq K |Y|^{-\frac{k}{2}} < \varepsilon .$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz in dem behaupteten Umfang bewiesen.

Schließlich bekommt man aus dem genannten Verhalten von $|Y|^{\frac{k}{2}}\tilde{P}_{k,n}(Z,iE)$ noch die Abschätzung

$$\tilde{P}_{k,n}(Z,iE) \leqq \frac{a}{b^k} \qquad \text{für } |Y| \geqq c > 0,$$

wobei a nur von n und b nur von c abhängt in Verschärfung eines Satzes von H. PETERSSON für $n=1$.

Zusatz bei der Korrektur am 15. 10. 1966: Die vorliegende Arbeit, welche bereits im Juni 1965 den Mathematischen Annalen in einer ersten Fassung vorlag, berührt sich in einem Punkte mit einer demnächst in den Annals of Mathematics erscheinenden Publikation von W. BAILY und A. BOREL. Auch dort werden neuartige Reihen unter der Bezeichnung „Poincaré-Eisenstein-series" eingeführt. In Gesprächen mit diesen beiden Autoren konnte nachträglich geklärt werden, daß diese Reihen mit dem obigen Typus 2 identisch sind. Die Größe Z^* tritt also als Variable gar nicht auf. In dieser Hinsicht gewinnt Satz 2 an Bedeutung, weil vermöge der Einführung der Variablen Z^* auch der Zusammenhang zwischen den Poincaré-Eisenstein-series und den Maasschen Reihen aufgeklärt wird durch den Nachweis einer gemeinsamen erzeugenden Funktion (Typus 1), die zudem den einfachsten Zugang zu sämtlichen Poincaréschen Reihen darstellt.

Literatur

[1] GODEMENT, R.: Séminaire Henri Cartan 1957/58, Fonctions automorphes, Vol. 1, Paris, Exposée 10.
[2] GOTTSCHLING, E.: Über Poincarésche Reihen und einen Fundamentalbereich diskontinuierlicher Gruppen. Math. Ann. **148**, 125—146 (1962).
[3] HUA, L. K.: Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains. Translations of Mathematical Monographs, Vol. **6**, 1963.
[4] KLINGEN, H.: Eine potentialtheoretische Methode zur Behandlung von Poincaréschen Reihen. Nachr. Akadem. Wiss. Göttingen 1965, 17—29.
[5] — Bemerkungen zur Konvergenz von Poincaréschen Reihen. Nachr. Akadem. Wiss. Göttingen 1966, 1—9.
[6] MAASS, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1951).
[7] PETERSSON, H.: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **14**, 22—60 (1941).
[8] — Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen. Acta Math. **80**, 23—63 (1948).

Prof. Dr. HELMUT KLINGEN
Mathematisches Institut der Universität
78 Freiburg/Br., Hebelstr. 40

(Eingegangen am 12. Dezember 1965)