Fischer, H. R.
Math. Annalen, Bd. 137, S. 269—303 (1959)

Limesräume

Von

H. R. Fischer in Zürich

In der vorliegenden Arbeit unternehmen wir den Versuch, eine Theorie der Konvergenz unabhängig von der mengentheoretischen Topologie aufzubauen. Es ist bekannt, daß schon vor längerer Zeit ähnliche Versuche unternommen wurden (s. z. B. die $\mathcal{L}^*$-Strukturen bei Kuratowsky, Topologie I). Es scheint aber – und wird durch Beispiele sogar aus der Topologie klar – daß es kaum gelingen kann, eine befriedigende Konvergenztheorie unter Verwendung der (abzählbaren) Folgen allein zu erhalten: die Beschränkung auf abzählbare Systeme von Elementen ist bei Untersuchungen von dieser Allgemeinheit nicht verständlich. Man könnte sich jedoch der Moore-Smithschen Folgen bedienen, bei denen diese Beschränkung wegfällt. Es schien uns aber vorteilhafter, die *Filtertheorie* heranzuziehen, die sich ja in der mengentheoretischen Topologie als ein sehr nützliches Hilfsmittel erwiesen hat. Die Theorie der Relationen und Operationen für Filter ist von sehr elementarem Charakter und bereitet keinerlei Schwierigkeiten, so daß der „technische" Aufwand denkbar gering wird. Wir erklären also in geeigneter Weise einen Konvergenzbegriff für Filter, indem wir jedem Element einer Menge E eine gewisse Menge von Filtern zuordnen, die zwei Forderungen rein algebraischer Natur zu genügen hat; die Filter der so dem Element x zugeordneten Menge heißen dann konvergent gegen x. Durch die Angabe der in diesem Sinne konvergierenden Filter wird auf E eine „Limitierung" definiert und E heißt dann ein Limesraum; es stellt sich dabei heraus, daß die Topologien spezielle Limitierungen sind. Viele Begriffe und Sätze der Topologie lassen sich ohne weiteres auf die Limitierungen übertragen, insbesondere in evidenter Weise der Begriff der stetigen Abbildung. Diese Abbildungen ergeben wie im Falle topologischer Räume, wo wir den üblichen Stetigkeitsbegriff zurück erhalten, eine Klasse von Morphismen der Limesräume, so daß man damit eine Kategorie erhält. Diese Kategorie ist additiv, wenn man sich auf abelsche Gruppen und zulässige Limitierungen beschränkt (s. § 3 für diesen Begriff); sie ist eine abelsche Kategorie (mit direkten Produkten), wenn man als Morphismen nur die Homomorphismen im engeren Sinne zuläßt, die wie im Falle topologischer Gruppen ausgezeichnet werden.

Zur Terminologie ist zu bemerken, daß es uns unnötig schien, von „Pseudokonvergenz" und „Pseudostetigkeit" zu sprechen, wie dies etwa geschieht (s. z. B. [6]), um nicht die Ausdrucksweise unnötig zu komplizieren.

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war ein Seminar über die Theorie der Distributionen, wo sich das Bedürfnis zeigte, die dort auftretenden Konvergenzstrukturen ("pseudo-topologies") allgemeiner zu untersuchen. Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle den Herren Prof. R. NEVANLINNA von der Universität, A. PFLUGER von der ETH in Zürich für ihr Interesse und ihre nützlichen Bemerkungen meinen aufrichtigen Dank auszusprechen. Ganz besonders aber gilt mein Dank Herrn Prof. B. L. VAN DER WAERDEN, dessen viele kritische Bemerkungen für mich von großer Wichtigkeit waren.

§ I. Limesräume

1.

Wir werden im folgenden von einigen elementaren Begriffen der Verbandstheorie Gebrauch machen, so daß wir diese hier — um vor allem die verwendete Terminologie klar werden zu lassen — zusammenstellen. Im wesentlichen halten wir uns dabei an die Bezeichnungsweise von H. HERMES, Einführung in die Verbandstheorie, Springer 1955.

Ein Verband ist eine Algebra A mit zwei kommutativen, assoziativen und idempotenten Operationen $\wedge, \vee$, die außerdem der folgenden Bedingung genügen:

Für alle a, b aus A ist $a \wedge (b \vee a) = a = a \vee (b \wedge a)$.

Ein Verband heißt distributiv, wenn für $\wedge, \vee$ die Distributivitätsgesetze gelten. In einem Verband läßt sich wie folgt eine Ordnungsrelation $\leqq$ einführen:

$a \leqq b$ gilt genau dann, wenn $a = b \wedge a$ (und also $b = a \vee b$) ist. $\leqq$ ist offensichtlich eine Ordnungsrelation.

Eine Menge A zusammen mit einer darin definierten Ordnungsrelation heißt eine Halbordnung. Gilt für irgendein Paar entweder $a \leqq b$ oder $b \leqq a$, so heißt A eine Kette oder eine total geordnete Menge. Ein Element m einer Halbordnung A heißt maximal (minimal), wenn aus $m \leqq a$ $(a \leqq m)$ folgt $m = a$. a_0 heißt größtes Element, wenn für alle a gilt: $a \leqq a_0$; entsprechend definiert man das kleinste Element. Gibt es in A ein größtes Element, so ist dieses das einzige maximale Element und also insbesondere eindeutig bestimmt.

Sei B eine nichtleere Teilmenge von A. $s \in A$ heißt eine obere Schranke von B, wenn aus $b \in B$ folgt $b \leqq s$; hat die Menge $S(B)$ der oberen Schranken von B ein kleinstes Element s_0, so heißt dieses die obere Grenze von B (in A). Eine Halbordnung A heiße vollständig, wenn in ihr jede nichtleere Teilmenge eine obere Grenze besitzt.

Eine Halbordnung A, in der jede zweielementige Teilmenge $\{a, b\}$ eine obere und eine untere Grenze besitzt, die bzw. mit $a \vee b$, $a \wedge b$, bezeichnet seien, ist bezüglich $\wedge, \vee$ ein Verband. Die Verbände stimmen mit solchen Halbordnungen überein, wie man leicht einsieht. Ist ein Verband A bezüglich der in ihm in natürlicher Weise gegebenen Ordnungsrelation vollständig, so heißt er ein vollständiger Verband. Ein solcher besitzt ein größtes und ein kleinstes Element (mit 1 bzw. 0 bezeichnet), die die folgenden Relationen erfüllen:

$$a \wedge 0 = 0\,,\; a \vee 0 = a;\; a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1\,.$$

Nun sollen zunächst in Verbänden, dann auch in gewissen allgemeineren Halbordnungen, Teilmengen I als $\wedge$-*Ideale* folgendermaßen ausgezeichnet werden:

I heißt ein $\wedge$-Ideal, wenn aus a, b in I folgt, daß auch $a \wedge b \in I$ ist und wenn ferner mit a jedes $b \geqq a$ zu I gehört.

Man zeigt ohne Mühe, daß diese Definition mit der folgenden äquivalent ist:

$I \subset A$ ist ein $\wedge$-Ideal, wenn a und b genau dann in I liegen, wenn $a \wedge b$ in I ist.

Ein $\wedge$-Ideal heißt ein $\wedge$-*Hauptideal*, wenn es aus allen $b \geqq a$ zu einem festen $a \in A$ besteht. a wird dann das erzeugende Element des Hauptideales genannt und dieses selbst mit $[a]$ bezeichnet.

Beim Beweis der Äquivalenz der zwei Definitionen des $\wedge$-Ideales benutzt man nur $\wedge$ und $\leqq$. Daher ist dieser Beweis auch noch in solchen Halbordnungen richtig, in denen irgend zwei Elemente eine untere Grenze haben, ohne daß immer auch eine obere Grenze existierte. Nöbeling [3] nennt solche Halbordnungen „$\wedge$-Vereine". Wir werden im folgenden wesentlichen Gebrauch von $\wedge$-Idealen in solchen Halbordnungen machen, und zwar in der Halbordnung der Filter auf einer Menge E. Wir führen diese Halbordnung $\mathbf{F}(E)$ folgendermaßen ein:

Es sei E eine (nichtleere) Menge, $\mathfrak{P}(E)$ die Potenzmenge. $\mathfrak{P}(E)$ ist ein vollständiger Verband bezüglich den mengentheoretischen Operationen $\cap$, $\cup$ des Durchschnittes und der Vereinigung. Zugehörige Ordnungsrelation ist die Inklusion $\subset$. Damit geben wir die folgende

Definition 1. *Ein von $\mathfrak{P}(E)$ verschiedenes (nichtleeres) $\cap$-Ideal in $\mathfrak{P}(E)$ heißt ein Filter auf E.*

Wir bezeichnen Filter mit großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \ldots$. Ein nichtleeres Mengensystem $\mathfrak{F}$ aus $\mathfrak{P}(E)$ ist mithin genau dann ein Filter auf E, wenn es den folgenden zwei Bedingungen genügt:

(F_1) $\theta \notin \mathfrak{F}$,

(F_2) A und B sind genau dann in $\mathfrak{F}$, wenn $A \cap B \in \mathfrak{F}$ ist.

θ bezeichnet dabei die leere Menge. Aus (F_1) und (F_2) folgt zunächst, daß für $A \in \mathfrak{F}$ und $B \in \mathfrak{F}$ immer $A \cap B \neq \theta$ gilt.

Es sei also $\mathbf{F}(E)$ die Menge aller Filter auf E. $\mathbf{F}(E)$ ist eine Halbordnung bezüglich der wie folgt eingeführten Ordnungsrelation $\leqq$: $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$ bedeute die mengentheoretische Inklusion $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Nach Definition ist $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$ genau dann, wenn es zu jedem $F \in \mathfrak{F}$ ein $G \in \mathfrak{G}$ so gibt, daß $G \subset F$. Man sagt daher für $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ sei *feiner als* $\mathfrak{F}$ (u. ä.) oder auch, $\mathfrak{G}$ sei *Oberfilter zu* $\mathfrak{F}$. Die maximalen Elemente von $\mathbf{F}(E)$ heißen *Ultrafilter* auf E.

Man gelangt zu den Filtern auf einem zweiten Weg: Wir nennen *Raster* (Nöbeling) oder *Filterbasis* (Bourbaki) ein nichtleeres Mengensystem $\mathfrak{B}$, das den folgenden Bedingungen genügt:

(B_1) $\theta \notin \mathfrak{B}$,

(B_2) Zu $B \in \mathfrak{B}$ und $B' \in \mathfrak{B}$ gibt es ein $B'' \in \mathfrak{B}$, so daß $B'' \subset B \cap B'$.

Betrachtet man nun das System aller Obermengen zu den Mengen aus einem Raster $\mathfrak{B}$, so sieht man sofort, daß es ein Filter auf E ist. Wir sagen, dieser Filter werde von B erzeugt. Jeder Raster erzeugt mithin einen Filter. Für Raster erklären wir wie folgt eine Quasiordnung $\leqq$: $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}'$ gelte genau dann, wenn jedes $B \in \mathfrak{B}$ ein $B' \in \mathfrak{B}'$ enthält. Man sagt dann, $\mathfrak{B}'$ sei feiner als $\mathfrak{B}$. Für Filter erhält man die frühere *Ordnungs*relation zurück. Die Konjunktion von $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{B}$ (für Raster) ist eine Äquivalenzrelation (die nicht die Gleichheit zu sein braucht), gelesen: $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ sind *gleichfein*. Gleichfeine Raster erzeugen denselben Filter; umgekehrt sind irgend zwei Raster, die denselben Filter erzeugen, gleichfein. Man hat mithin eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Klassen gleichfeiner Raster und Filtern auf E.

Jede nichtleere Teilmenge A von E ist ein Raster (bzw. korrekter: definiert den Raster $\{A\}$) auf E und erzeugt daher einen Filter $[A]$, nämlich das von A in $\mathfrak{P}(E)$ erzeugte $\cap$-Hauptideal. Ist A insbesondere einelementig: $A = \{x\}$, so ist $[\{x\}]$ ein Ultrafilter auf E, wie man sofort zeigt. Wir bezeichnen diese Ultrafilter in der Folge immer mit $\dot{x}$ (usw.) und nennen sie die x-Ultrafilter ($x \in E$). Allgemeiner zeigt man mit Hilfe des Zornschen Lemmas, daß zu jedem Filter $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$ existiert, der feiner als $\mathfrak{F}$ ist. Schließlich ist für jeden Ultrafilter $\mathfrak{U}$ der Durchschnitt aller $U \in \mathfrak{U}$ höchstens einelementig; er ist genau dann einelementig, wenn $\mathfrak{U}$ ein x-Ultrafilter ist. Für all dies und die weiteren Eigenschaften der Filter, die wir noch verwenden werden, sei auf [1], ch. I, § 5, [3, 4, 5] verwiesen.

Nun seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ Filter auf E. Die untere Grenze $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ existiert immer und ist der von den Vereinigungen $F \cup G$ gebildete Filter, der gleich dem mengentheoretischen Durchschnitt $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ ist. $\mathbf{F}(E)$ ist also eine Halbordnung, in der irgend zwei Elemente immer eine untere Grenze haben. Die obere Grenze $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}$ zweier Filter existiert genau dann, wenn für alle $F \in \mathfrak{F}$ und alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt: $F \cap G \neq \emptyset$; sie besteht dann gerade aus diesen Durchschnitten. Ist $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ eine beliebige Familie von Filtern, so existiert immer die untere Grenze $\inf\limits_\iota \mathfrak{F}_\iota$ oder $\bigcap\limits_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$. Sie wird von den Vereinigungen $\cup F_\iota$, $F_\iota \in \mathfrak{F}_\iota$, erzeugt. Die obere Grenze $\sup\limits_\iota \mathfrak{F}_\iota$ existiert genau dann, wenn jede endliche Teilfamilie von $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ eine obere Grenze besitzt und wird dann von den endlichen Durchschnitten $\bigcap\limits_{i=1}^{p} F_{\iota_i}$ erzeugt.

Nun sei A eine Teilmenge von E, $\mathfrak{F}$ ein Filter auf E. Sind alle Durchschnitte $F \cap A \neq \emptyset$, so erzeugen sie auf A einen Filter $\mathfrak{F}'$, den wir den von $\mathfrak{F}$ *induzierten* Filter nennen wollen („Spur von $\mathfrak{F}$ auf A“ bei Bourbaki). Anstelle von $\mathfrak{F}'$ verwenden wir die Bezeichnungen $\sigma_A \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_A$ für den von $\mathfrak{F}$ induzierten Filter. $\sigma_A : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_A$ ist eine Abbildung *auf* $\mathbf{F}(A)$: sei nämlich $\mathfrak{F}'$ ein Filter auf A. Dann ist $\mathfrak{F}'$ ein Raster in E und erzeugt dort einen Filter $F(\mathfrak{F}')$. Offenbar ist $\sigma_A F(\mathfrak{F}') = \mathfrak{F}'$. σ_A ist eine $\wedge$-treue Abbildung aus $\mathbf{F}(E)$ auf $\mathbf{F}(A)$; sie ist auch $\vee$-treu in dem Sinne, daß $\sigma_A(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}) = \sigma_A \mathfrak{F} \vee \sigma_A \mathfrak{G}$ ist, sofern diese oberen Grenzen existieren. Insbesondere ist also σ_A ein Ordnungshomomorphismus aus $\mathbf{F}(E)$ auf $\mathbf{F}(A)$. Wir führen noch die Bezeichnung $\mathbf{F}_A(E)$ für diejenige Teilmenge von $\mathbf{F}(E)$ ein, die aus den Filtern besteht, für die $\sigma_A \mathfrak{F}$ existiert. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}_A(E)$ ist also gleichbedeutend damit, daß $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathfrak{F}$ gilt. Offenbar ist $\mathbf{F}_A(E)$ $\wedge$-abgeschlossen und enthält mit $\mathfrak{F}$ auch jedes $\mathfrak{G} \leqq \mathfrak{F}$.

Für alles weitere sei auf die schon zitierte Literatur verwiesen.

2.

Es sei E eine nichtleere Menge, $\mathbf{F}(E)$ die Halbordnung der Filter auf E.

Definition 2. *Eine Abbildung τ von E in $\mathfrak{P}(\mathbf{F}(E))$ heißt eine Limitierung auf E, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

(L_1) *Für jedes $x \in E$ ist τx ein $\wedge$-Ideal in $\mathbf{F}(E)$.*

(L_2) *Für jedes $x \in E$ ist $\dot{x} \in \tau x$.*

Ist $\mathfrak{F} \in \tau x$, so sagen wir, $\mathfrak{F}$ konvergiere gegen x (bezüglich τ) und x sei *Limes* von $\mathfrak{F}$. Wir schreiben dafür, sofern daraus keine Mehrdeutigkeiten entstehen, auch etwa $\mathfrak{F} \to x$ und nennen $\mathfrak{F}$ einen x-Filter.

Das Paar (E, τ) heißt dann ein *Limesraum.*

Wir bezeichnen das System aller Limitierungen auf E mit $\mathscr{T}(E)$ oder einfacher $\mathscr{T}$ und schreiten zunächst zur Auszeichnung zweier Teilsysteme $\mathscr{T}_0$, $\mathscr{T}_1$, so daß $\mathscr{T}_0 \subset \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$ gilt:

(L_3) $\tau \in \mathscr{T}_1$ bedeute, daß τx für jedes $x \in E$ ein $\wedge$-Hauptideal ist. Das erzeugende Element von τx wird dann mit $\mathfrak{V}(x)$ bezeichnet und etwa Umgebungsfilter von x bezüglich τ genannt.

Für eine solche „Hauptideal-Limitierung" ist $\mathfrak{F} \in \tau x$ mit $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{V}(x)$ gleichbedeutend. Offensichtlich ist $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$.

Erfüllt nun $\tau \in \mathscr{T}_1$ zusätzlich die Bedingung

(L_4) Zu jedem $V \in \mathfrak{V}(x)$ gibt es ein $W \in \mathfrak{V}(x)$, so daß aus $y \in W$ folgt $V \in \mathfrak{V}(y)$,

so ist τ offensichtlich eine *Topologie* auf E. Das System $\mathscr{T}_0$ aller Topologien ist also ein Teilsystem von $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$. Insbesondere ist daher $\mathscr{T}$ nicht leer und enthält sogar, wenn E unendlich ist (was wir immer voraussetzen wollen), unendlich viele Elemente. Man kann nun zwei Elemente von $\mathscr{T}$ unmittelbar angeben: zunächst sei δ durch $\delta x = \{\dot{x}\}$ für jedes $x \in E$ definiert. Offensichtlich ist $\delta \in \mathscr{T}$. Bekanntlich ist ja sogar $\delta \in \mathscr{T}_0$: δ ist die *diskrete Topologie* auf E. Ein zweites (triviales) Element von $\mathscr{T}$, das ebenfalls eine Topologie ist, erhält man, indem man setzt: $\alpha x = [[E]]$. α ist dadurch charakterisiert, daß jeder Filter auf E bezüglich α gegen *jedes* $x \in E$ konvergiert, denn offenbar ist $\alpha x = \mathbf{F}(E)$ für jedes $x \in E$.

Zu jedem $\tau \in \mathscr{T}$ läßt sich in wohlbestimmter Weise eine Topologie auf E konstruieren, was wir in zwei Schritten durchführen:

Sei $\tau \in \mathscr{T}$. Dann existiert in $\mathbf{F}(E)$ die untere Grenze $\mathfrak{V}(x)$ aller Filter von τx, die im allgemeinen nicht zu τx gehört. Das durch $\mathfrak{V}(x)$ erzeugte Hauptideal in $\mathbf{F}(E)$ ist jedoch durch τx eindeutig bestimmt; die Familie dieser Hauptideale definiert eine Limitierung $\psi\tau$ auf E, für die offenbar $\psi\tau \in \mathscr{T}_1$ gilt. Die so konstruierte Abbildung $\psi: \mathscr{T} \to \mathscr{T}_1$ ist „idempotent": $\psi \circ \psi = \psi$, woraus insbesondere folgt, daß ψ epijektiv ist[1]).

Der zweite Schritt erfordert die

Definition 3. *Es sei $\tau \in \mathscr{T}$. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt τ-offen, wenn aus $x \in A$ folgt, daß $A \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$ gilt.*

[1]) Wir schließen uns der neueren Terminologie Bourbakis und seiner Mitarbeiter an und nennen eine Abbildung φ *injektiv*, wenn sie eineindeutig, *epijektiv*, wenn sie -auf, *bijektiv*, wenn sie beides ist.

Man sieht sofort: Genau dann ist A τ-offen, wenn A $\psi\tau$-offen ist, was wiederum damit gleichbedeutend ist, daß es zu jedem $x \in A$ ein $V \in \mathfrak{V}(x) = \inf_{\tau x} \mathfrak{F}$ so gibt, daß $V \subset A$ ist.

Sei nun $\mathfrak{M}_\tau = \mathfrak{M}_{\psi\tau}$ das System aller τ-offenen Mengen aus E. $\mathfrak{M}_\tau$ genügt den Axiomen für die Systeme offener Mengen in topologischen Räumen:

Sei $\mathfrak{N}$ ein beliebiges Teilsystem von $\mathfrak{M}_\tau$, N_0 die Vereinigung aller $N \in \mathfrak{N}$. Dann ist $N_0 \in \mathfrak{M}_\tau$. Ist nämlich $x \in N_0$, so gibt es ein $N \in \mathfrak{N}$ derart, daß $x \in N$ ist. Daher ist dann $N \in \mathfrak{V}(x)$ und, da $N \subset N_0$ und $\mathfrak{V}(x)$ ein Filter ist, $N_0 \in \mathfrak{V}(x)$. Insbesondere ist also $\theta \in \mathfrak{M}_\tau$. Ferner sei (N_i) eine beliebige *endliche* Teilfamilie von $\mathfrak{M}_\tau$. Wir können $\bigcap_i N_i \neq \theta$ annehmen. Ist dann $x \in \bigcap N_i$, so sind alle $N_i \in \mathfrak{V}(x)$ nach Voraussetzung, also, da $\mathfrak{V}(x)$ ein Filter ist, auch $\bigcap N_i \in \in \mathfrak{V}(x)$, woraus folgt, daß $\bigcap N_i \in \mathfrak{M}_\tau$ ist. Insbesondere ergibt sich, daß $E \in \mathfrak{M}_\tau$ ist. Das System $\mathfrak{M}_\tau$ definiert mithin eine *Topologie* $\bar{\omega}\,\tau = \omega(\psi\tau)$ auf E. Die Abbildung $\omega: \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_0$, die wir so erhalten, ist wieder epijektiv, wie sofort aus $\omega \circ \omega = \omega$ folgt. Zusammengefaßt können wir also sagen:

Satz 1. *Jeder Limitierung $\tau \in \mathscr{T}$ läßt sich in eindeutiger Weise eine Topologie $\bar{\omega}\tau = \omega(\psi\tau)$ auf E zuordnen und man erhält so gerade alle Topologien auf E.*

Die Limitierungen sind schwächere Strukturen («structures moins riches», Bourbaki) als die Topologien, und zwar im allgemeinen – wie sich später herausstellen wird – echt schwächer.

3.

Wir erklären in $\mathscr{T}$ eine *Ordnungsrelation* $\leqq$ durch die

Definition 4. *Es seien τ, τ' in $\mathscr{T}$. $\tau \leqq \tau'$ bedeutet, daß für jedes $x \in E$ die Inklusion $\tau' x \subset \tau x$ gilt. Wir sagen dann, τ' sei feiner als τ oder auch, es sei stärker als τ.*

Die von $\leqq$ auf $\mathscr{T}_0$ induzierte Ordnung stimmt mit der üblichen Anordnung von Topologien überein: Dazu ist zu zeigen, daß $\tau \leqq \tau^*$ für irgend zwei Topologien τ, τ^* auf E mit $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_{\tau^*}$ gleichbedeutend ist. Nun wird aber τx von einem Filter $\mathfrak{U}(x)$ erzeugt. Eine Basis von $\mathfrak{U}(x)$ („Umgebungsbasis" von x) erhält man in allen $M \in \mathfrak{M}_\tau$, die x enthalten. Diese M gehören aber zu $\mathfrak{M}_{\tau^*}$, sofern $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_{\tau^*}$ ist, so daß jede τ-Umgebung von x eine τ^*-Umgebung von x ist. Das ergibt $\mathfrak{U}(x) \leqq \mathfrak{U}^*(x)$, d. h. $\tau^* x \subset \tau x$. Umgekehrt bestehe diese Inklusion für jedes $x \in E$. Dann ist $\mathfrak{U}(x) \leqq \mathfrak{U}^*(x)$. Ist dann $M \in \mathfrak{M}_\tau$ und $x \in M$, so folgt aus $M \in \mathfrak{U}(x)$ sofort $M \in \mathfrak{U}^*(x)$, d. h. schließlich $M \in \mathfrak{M}_{\tau^*}$, also $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_{\tau^*}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Über die Abbildungen ψ, ω von Abschnitt 2 läßt sich nun noch etwas mehr aussagen:

Satz 2. *Es sei $\tau \in \mathscr{T}$. Dann ist $\tau \geqq \psi\tau \geqq \omega(\psi\tau)$.*

Beweis. $\tau x \subset (\psi\tau)\,x$ ist klar, da $\mathfrak{V}(x) \leqq \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$ ist, wenn wiederum $\mathfrak{V}(x)$ das erzeugende Element von $(\psi\tau)\,x$ bezeichnet. Sei nun $\tau \in \mathscr{T}_1$. Wir zeigen $\omega\tau \leqq \tau$: es seien $\mathfrak{V}(x)$, $\mathfrak{U}(x)$ die erzeugenden Elemente von τx bzw. $(\omega\tau)\,x$. $\mathfrak{U}(x)$ wird erzeugt von den τ-offenen Mengen, die x enthalten, also zu $\mathfrak{V}(x)$ gehören. Das ergibt $\mathfrak{U}(x) \leqq \mathfrak{V}(x)$ und damit die Behauptung.

Die Halbordnung $\mathcal{T}$ ist ein Verband.

Wir setzen nämlich:

$(\tau \vee \sigma)\,x = \tau x \wedge \sigma x$,

$(\tau \wedge \sigma)\,x =$ das von $\tau x \cup \sigma x$ erzeugte $\wedge$-Ideal in $\mathbf{F}(E)$.

Man sieht leicht, daß $\vee$, $\wedge$ tatsächlich obere und untere Grenze in $\mathcal{T}$ bedeuten. Man schließt nun leicht, daß für eine beliebige Familie von Limitierungen, $(\tau_\iota)_{\iota \in I}$, immer die obere Grenze $\sup\limits_\iota \tau_\iota$ und die untere Grenze $\inf\limits_\iota \tau_\iota$ existieren, so daß $\mathcal{T}$ ein vollständiger Verband ist. Das größte Element von $\mathcal{T}$ ist die schon angegebene diskrete Topologie, wie unmittelbar aus ihrer Definition und (L_2) folgt. Das kleinste Element ist ebenso offensichtlich die Topologie α.

Wir können nun den Satz 2 weiter verschärfen zu dem

Satz 3. *Die Topologie $\bar{\omega}\tau = \omega(\psi\tau)$ ist die feinste Topologie auf E, die schwächer ist als τ.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $\psi\tau$ die feinste Hauptideal-Limitierung ist, die schwächer ist als τ. Sei wieder $(\psi\,\tau)\,x = [\mathfrak{V}(x)]$. Sei ferner $\tau^* \in \mathcal{T}_1$, $\tau^* x = [\mathfrak{V}^*(x)]$, so gewählt, daß $\tau^* \leqq \tau$ gilt. Wegen $\tau\, x \subset \tau^* x$ ist dann $\mathfrak{V}^*(x)$ eine untere Schranke von τx. Nun war aber $\mathfrak{V}(x)$ die untere Grenze von τx, so daß sich $\mathfrak{V}^*(x) \leqq \mathfrak{V}(x)$ für jedes $x \in E$ ergibt, d.h. $[\mathfrak{V}(x)] \subset [\mathfrak{V}^*(x)]$; daher ist $\tau^* \leqq \psi\tau$, wie behauptet wurde.

Nun sei $\sigma \in \mathcal{T}_1$. Wir zeigen, daß $\omega\sigma$ die feinste Topologie auf E ist, die weniger fein als σ ist. Es seien nämlich $\sigma x = [\mathfrak{V}(x)]$, $(\omega\sigma)\,x = [\mathfrak{U}(x)]$ und es sei τ^* eine Topologie $\leqq \sigma$, $\tau^* x = [\mathfrak{U}^*(x)]$. Wegen $\tau^* \leqq \sigma$ ist jede τ^*-offene Menge auch noch σ-offen, denn $x \in M$ hat $M \in \mathfrak{U}^*(x)$ zur Folge, also $M \in \mathfrak{V}(x)$ wegen $\mathfrak{U}^*(x) \leqq \mathfrak{V}(x)$. Daraus ergibt sich unmittelbar $\mathfrak{U}^*(x) \leqq \mathfrak{U}(x)$, weil ja $\mathfrak{U}(x)$ von den σ-offenen Mengen erzeugt wird, die x enthalten. Also ist $\tau^* \leqq \omega\sigma$.

Daraus folgt nun leicht die Behauptung des Satzes, wenn man beachtet, daß für *jede* Limitierung τ gilt: ist τ' eine Topologie $\leqq \tau$, so ist $\tau' \leqq \psi\tau$. Dies folgt nämlich wegen $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ unmittelbar aus dem ersten Teil des Beweises. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

4.

Es ist in den hier behandelten Strukturen möglich, *Trennungsaxiome* einzuführen. Wir erwähnen an dieser Stelle die folgenden zwei

(T_1) Ist $x \neq y$, so ist $\dot{y} \notin \tau x$,

(T_2) Ist $x \neq y$, so ist $\tau x \cap \tau y = \theta$.

Das zweite dieser Axiome bedeutet die Eindeutigkeit der Limites. Ein Limesraum (E, τ), in welchem (T_2) erfüllt ist, heiße *separiert*. Auf topologischen Räumen stimmen (T_1) und (T_2) mit den Trennungsaxiomen von FRÉCHET bzw. HAUSDORFF überein: Sei $\tau \in \mathcal{T}_0$. (T_1) bedeutet dann, daß $\dot{y}$ nicht Oberfilter zu $\mathfrak{U}(x)$ ist, d. h. daß $\mathfrak{U}(x) \not\subset \dot{y}$ ist. Daher gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$, so daß

$U \notin \dot{y}$, d. h. $y \notin U$ ist. Die Umkehrung ist ebenso trivial. Wir zeigen noch die Äquivalenz unseres Axiomes (T_2) mit dem Hausdorffschen Trennungsaxiom: Sei E ein Hausdorff-Raum, $x \neq y$ und $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{U}(x)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ und ein $V \in \mathfrak{U}(y)$, so daß $U \cap V = \theta$ ist. Also existiert kein gemeinsamer Oberfilter zu $\mathfrak{U}(x)$ und $\mathfrak{U}(y)$. Insbesondere ist daher $\mathfrak{F} \notin \tau y$. Umgekehrt sei $\tau x \cap \tau y = \theta$ für $x \neq y$. Wäre dann $U \cap V \neq \theta$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(y)$, so existierte $\mathfrak{U}(x) \vee \mathfrak{U}(y) = \mathfrak{H}$ und es wäre $\mathfrak{H} \in \tau x \cap \tau y$ entgegen der Voraussetzung.

Es gibt separierte Limitierungen, nämlich etwa die diskrete Topologie.

Nun sei A eine nichtleere Teilmenge von E. Wir haben in Abschnitt 1 die Abbildung $\sigma_A : \mathbf{F}_A(E) \to \mathbf{F}(A)$ eingeführt und gesehen, daß sie $\wedge$-treu und epijektiv ist.

Wir wollen nun die von $\tau \in \mathscr{T}$ auf A *induzierte Limitierung* konstruieren:

Wir behaupten zunächst, daß $\dot{x} \in \tau x \cap \mathbf{F}_A(E)$ genau dann gilt, wenn $x \in A$ ist. Sei nämlich $x \in A$, $\dot{x}_A$ der x-Ultrafilter auf A, der aus allen Teilmengen von A besteht, die x enthalten. Auf E ist $\dot{x}_A$ ein Raster, der gerade $\dot{x}$ erzeugt, da $A \in \dot{x}$ ist. Dann ist aber $\sigma_A \dot{x} = \dot{x}_A$ und mithin $\dot{x} \in \tau x \cap \mathbf{F}_A(E)$. Umgekehrt sei $\dot{x} \in \tau x \cap \mathbf{F}_A(E)$. Das bedeutet, daß $X \cap A \neq \theta$ für jedes $X \in \dot{x}$ gilt, woraus offensichtlich $x \in A$ folgt. Wir können somit für jedes $x \in A$ die Menge $\sigma_A(\tau x \cap \mathbf{F}_A(E)) \subset \mathbf{F}(A)$ betrachten, die dann nicht leer ist. Damit geben wir die

Definition 5. *Für jedes $x \in A$ sei $\tau_A x$ das von der Menge $\sigma_A(\tau x \cap \mathbf{F}_A(E))$ in $\mathbf{F}(A)$ erzeugte $\wedge$-Ideal. Dann ist τ_A eine Limitierung auf A und heißt die von τ induzierte Limitierung.*

Die Abbildung $\tau \to \tau_A$ von $\mathscr{T}(E)$ in $\mathscr{T}(A)$ sei mit $\tilde{\sigma}_A$ bezeichnet.

Da σ_A ein $\wedge$-Homomorphismus ist, $\sigma_A(\tau x \cap \mathbf{F}_A(E))$ mit $\mathfrak{F}' = \sigma_A \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}' = \sigma_A \mathfrak{G}$ also auch $\mathfrak{F}' \wedge \mathfrak{G}' = \sigma_A(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})$ enthält, besteht $\tau_A x$ aus allen Oberfiltern zu den Filtern aus $\sigma_A(\tau x \cap \mathbf{F}_A(E))$: $\mathfrak{H}' \in \tau_A x$ gilt dann und nur dann, wenn ein $\mathfrak{H} \in \tau x \cap \mathbf{F}_A(E)$ so existiert, daß $\mathfrak{H}' \geqq \sigma_A \mathfrak{H}$ ist. Dann ist aber der von $\mathfrak{H}'$ auf E erzeugte Filter $F(\mathfrak{H}')$ Oberfilter zu $\mathfrak{H}$, also selbst in $\tau x \cap \mathbf{F}_A(E)$, da er in τx liegt und $\sigma_A F(\mathfrak{H}') = \mathfrak{H}'$, d. h. $F(\mathfrak{H}') \in \mathbf{F}_A(E)$ ist. So ergibt sich der

Satz 4. *Für ein $\mathfrak{F}' \in F(A)$ gilt $\mathfrak{F}' \in \tau_A x$ dann und nur dann, wenn der von $\mathfrak{F}'$ auf E erzeugte Filter $F(\mathfrak{F}')$ in τx liegt. Man sieht unmittelbar, daß mit τ auch τ_A separiert ist.*

Für eine beliebige Familie von Filtern aus $\mathbf{F}_A(E)$, $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$, ist $\sigma_A\left(\bigcap_\iota F_\iota\right) = \bigcap_\iota \sigma_A \mathfrak{F}_\iota$, denn $\sigma_A\left(\bigcap_\iota \mathfrak{F}_\iota\right)$ wird von den Mengen $\left(\bigcup_\iota F_\iota\right) \cap A$, $\bigcap_\iota \sigma_A \mathfrak{F}_\iota$ hingegen von den Mengen $\bigcup_\iota (F_\iota \cap A)$ erzeugt, was offenbar dasselbe ergibt. Daraus folgt zunächst, daß $\tilde{\sigma}_A$ die Teilmenge $\mathscr{T}_1(E)$ in $\mathscr{T}_1(A)$ abbildet. Sei $\tau \in \mathscr{T}_1(E)$, $\tau x = [\mathfrak{B}(x)]$. Dann ist $\tau_A x = [\sigma_A \mathfrak{B}(x)]_A$. Erfüllt $\mathfrak{B}(x)$ außerdem die Forderung (L_4), so tut dies auch noch $\sigma_A \mathfrak{B}(x)$. Für ein $\tau \in \mathscr{T}_0(E)$ ist nämlich $\tilde{\sigma}_A \tau$ nichts anderes als die induzierte Topologie (Relativtopologie) auf A.

5.

Der durch Def. 2 gegebene Konvergenzbegriff für Filter gestattet es nun, den Begriff des *adhärenten Elementes* einzuführen:

Definition 6. *Sei* $\tau \in \mathscr{T}(E)$. $x \in E$ *heißt adhärent an den Filter* $\mathfrak{F}$, *wenn ein Filter* $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ *so existiert, daß* $\mathfrak{G} \in \tau x$ *ist.*

Die Menge aller an einen Filter $\mathfrak{F}$ adhärenten Elemente von E heißt seine Adhärenz und wird mit $\alpha(\mathfrak{F})$ bezeichnet. Aus der Definition ergibt sich leicht, daß $\mathfrak{G} \leqq \mathfrak{F}$ die Inklusion $\alpha(\mathfrak{F}) \subset \alpha(\mathfrak{G})$ zur Folge hat. Ist $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter, so umfaßt $\alpha(\mathfrak{U})$ genau die Limites von $\mathfrak{U}$, da es keine echten Oberfilter zu $\mathfrak{U}$ gibt. Es gilt:

Satz 5. *Ist* τ *separiert und* $\mathfrak{F} \in \tau x$, *so ist* $\alpha(\mathfrak{F}) = \{x\}$.

Beweis: Gesetzt, es gäbe in $\alpha(\mathfrak{F})$ ein $y \neq x$, so existierte nach Definition ein $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ in τy. Andererseits wäre aber auch $\mathfrak{G} \in \tau x$, also $\mathfrak{G} \in \tau x \cap \tau y$ entgegen der Voraussetzung.

Satz 6. *Seien* $\sigma = \tau \vee \tau^*$, α^τ, α^{τ^*} *und* α^σ *die bzw. Adhärenzen. Für jedes* $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ *gilt dann* $\alpha^\sigma(\mathfrak{F}) \subset \alpha^\tau(\mathfrak{F}) \cap \alpha^{\tau^*}(\mathfrak{F})$.

Satz 7. *Für jede Limitierung gelten:*

$$\alpha(\mathfrak{F}) \cup \alpha(\mathfrak{G}) \subset \alpha(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})$$

$$\alpha(\mathfrak{F}) \cap \alpha(\mathfrak{G}) = \alpha(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})\,, \text{ falls } \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} \text{ existiert.}$$

Beweis: Die erste Inklusion ist völlig trivial. In der zweiten ist $\alpha(\mathfrak{F}) \cap \cap\, \alpha(\mathfrak{G}) \supset \alpha(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$ ebenso trivial. Schließlich sei $x \in \alpha(\mathfrak{F}) \cap \alpha(\mathfrak{G})$. Dann existiert ein $\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ in τx. Also ist auch $\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}$, somit $x \in \alpha(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$.

Es sei noch gezeigt, daß Def. 6 auf einem topologischen Raum mit der üblichen Definition der Adhärenz eines Filters zusammenfällt. Sei also E ein topologischer Raum. Für $M \subset E$ bezeichne $\overline{M}$ die Adhärenz (abgeschlossene Hülle) von M. $x \in \overline{M}$ bedeutet demnach, daß $U \cap M \neq \theta$ für jede Umgebung U von x ist. Ist $\mathfrak{F}$ ein Filter auf E, so heißt x adhärent an $\mathfrak{F}$, wenn $x \in \overline{F}$ für jedes $F \in \mathfrak{F}$, also $x \in \bigcap_{\mathfrak{F}} \overline{F}$ ist. Dann ist aber $U \cap F \neq \theta$ für alle $F \in \mathfrak{F}$ und alle $U \in \mathfrak{U}(x)$, so daß $\mathfrak{U}(x) \vee \mathfrak{F}$ existiert. Dieser Filter konvergiert gegen x. Also ist $x \in \alpha(\mathfrak{F})$. Umgekehrt sei $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G} \in \tau x$, d. h. $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{U}(x)$. Dann existiert $\mathfrak{U}(x) \vee \mathfrak{F}$, so daß $U \cap F \neq \theta$ ist für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$, $F \in \mathfrak{F}$, also $x \in \bigcap_{\mathfrak{F}} \overline{F}$, was zu zeigen war.

Definition 7. *Ein Limesraum* (E, τ) *bzw. die Limitierung* τ *heiße kompakt, wenn die folgende Forderung erfüllt ist:*

(C) *Für jedes* $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ *ist* $\alpha(\mathfrak{F}) \neq \theta$.

Im Gegensatz zu Bourbaki verlangen wir hier nicht gleichzeitig die Gültigkeit von (T_2). Man sieht nun:

Genau dann ist τ kompakt, wenn die folgende Forderung erfüllt ist:

(C′) Jeder Ultrafilter auf E konvergiert.

Ist nämlich τ kompakt, so ist $\alpha(\mathfrak{U}) \neq \theta$ für jeden Ultrafilter, so daß diese alle konvergieren. Umgekehrt sei (C′) erfüllt. Zu jedem $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U}(\mathfrak{F}) \geqq \mathfrak{F}$, der nach Voraussetzung konvergiert. Daher ist $\alpha(\mathfrak{F}) \neq \theta$.

Es folgen nun:

Satz 8. *τ sei kompakt. Ist $\sigma \leqq \tau$, so ist auch σ kompakt.*

Die Aussage ist evident wegen $\alpha^\tau(\mathfrak{F}) \subset \alpha^\sigma(\mathfrak{F})$.

Satz 9. *Es sei $\tau \in \mathscr{T}_1$, kompakt und separiert. Ein Filter $\mathfrak{F}$ konvergiert genau dann bezüglich τ, wenn seine Adhärenz einelementig ist.*

Beweis: Die Bedingung ist notwendig nach Satz 5. Sie ist auch hinreichend. Es sei nämlich $\alpha(F) = \{x\}$. Wir müssen $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{V}(x)$ beweisen, wenn $\mathfrak{V}(x)$ wieder das erzeugende Element von τx bezeichnet. Ist $U \in \mathfrak{V}(x)$, so genügt es dazu, die Existenz eines $F \in \mathfrak{F}$ nachzuweisen, für das $F \cap c\, U = \theta$ ist[2]). Gesetzt nun, es wäre immer $F \cap c\, U \neq \theta$, so erzeugten diese Durchschnitte, wenn F ganz $\mathfrak{F}$ durchläuft, einen Filter $\mathfrak{G}$, der wegen der Kompaktheit von τ einen adhärenten Punkt y hätte. Wir zeigen $y \neq x$: $y \in \alpha(\mathfrak{G})$ bedeutet $G \cap V \neq \theta$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$ und $V \in \mathfrak{V}(y)$. Wäre $x = y$, so müßte insbesondere $G \cap U \neq \theta$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$, also auch für $F \cap c\, U$ sein, was absurd ist. Daher ist $y \neq x$. Nun ist aber $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ wegen $F \cap c\, U \subset F$, also $y \in \alpha(\mathfrak{F})$ entgegen der Voraussetzung $\alpha(\mathfrak{F}) = \{x\}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{F}$ konvergiert.

Aus diesem Satz ergibt sich der

Satz 10. *Es sei $\tau \in \mathscr{T}_1$. Ist τ kompakt, $\tau^* \leqq \tau$ und τ^* separiert, so ist $\tau^* = \tau$.*

Beweis: Zunächst ist τ^* kompakt und τ separiert. Ferner ist $\alpha(\mathfrak{F}) \subset \alpha^*(\mathfrak{F})$. Sei dann $\mathfrak{F} \in \tau^* x$. Nach Satz 5 ist $\alpha^*(\mathfrak{F}) = \{x\}$. Da $\alpha(\mathfrak{F}) \neq \theta$ nach Voraussetzung gilt, folgt $\alpha(\mathfrak{F}) = \{x\}$, so daß nach Satz 9 der Filter $\mathfrak{F}$ gegen x bezüglich τ konvergiert. Daher ist $\tau^* x \subset \tau x$ für jedes $x \in E$, d. h. $\tau \leqq \tau^*$, woraus die Behauptung folgt.

Korollar. *τ sei eine kompakte Topologie auf E, τ^* eine separierte Limitierung, so daß $\tau^* \leqq \tau$ ist. Dann ist $\tau^* = \tau$, τ^* also insbesondere eine Topologie.*

6.

Ist τ eine Limitierung auf E, so gestattet τ die Definition eines „Hüllenoperators" in der folgenden Weise:

Für $A \subset E$ sei zunächst εA die Menge aller Limites in E von Filtern auf A, d. h. genauer: $x \in \varepsilon A$ bedeute die Existenz eines solchen $\mathfrak{F}_A \in \mathbf{F}(A)$, daß der davon auf E erzeugte Filter $F(\mathfrak{F}_A)$ gegen x konvergiert.

Zweitens sei, wenn $\alpha(\mathfrak{F})$ wieder die Adhärenz des Filters $\mathfrak{F}$ bedeutet, für jedes $A \subset E$ gesetzt: $\eta A = \alpha([A])$. Explizit bedeutet dies: $x \in \eta A$ ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Filters $\mathfrak{F} \in \tau x$, so daß $\mathfrak{F} \geqq [A]$, d. h. $A \in \mathfrak{F}$ ist. Nun ist immer $\varepsilon A = \eta A$: sei einmal $x \in \varepsilon A$, also $F(\mathfrak{F}_A) \in \tau x$ für ein geeignetes $\mathfrak{F}_A \in \mathbf{F}(A)$. Offenbar ist dann $F(\mathfrak{F}_A) \geqq [A]$ und also $x \in \eta A$. Umgekehrt sei $x \in \eta A$. Es gibt ein $\mathfrak{F} \in \tau x$, so daß $A \in \mathfrak{F}$ ist. Also induziert $\mathfrak{F}$ einen Filter $\mathfrak{F}_A$ auf A und es ist klar, daß $F(\mathfrak{F}_A) \geqq \mathfrak{F}$, also $F(\mathfrak{F}_A) \in \tau x$ ist. Das ergibt nun $x \in \varepsilon A$. Wir setzen daher:

$$\overline{A} = \varepsilon A = \eta A .$$

Man folgert in einfacher Weise den

Satz 11. *$x \in \overline{A}$ ist gleichbedeutend damit, daß ein $\mathfrak{F} \in \tau x$ so existiert, daß $F \cap A \neq \theta$ für alle $F \in \mathfrak{F}$ gilt.*

[2]) $c\, U$ bezeichnet das Komplement von U in E.

Daraus ergibt sich

Satz 12. *Die Abbildung* $A \to \overline{A}$ *von* $\mathfrak{P}(E)$ *in sich hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) $\overline{\theta} = \theta$,

(2) $A \subset \overline{A}$ *für jedes* $A \subset E$,

(3) *Aus* $A \subset B$ *folgt* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *und* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Die Verifikation dieser Beziehungen ist unmittelbar und wird hier nicht ausgeführt.

Satz 13. *Sei* $\tau \in \mathscr{T}_1$. *Dann ist* $x \in \overline{A}$ *gleichbedeutend damit, daß* $U \cap A \neq \theta$ *ist für jedes* $U \in \mathfrak{V}(x)$.

Beweis: Trivial wegen $\mathfrak{V}(x) = \bigcap\limits_{\tau x} \mathfrak{F}$.

Definition 8. $\overline{A}$ *heißt die Adhärenz von* A *bezüglich* τ. *Ist* $\overline{A} = A$, *so heißt* A τ*-abgeschlossen.*

Satz 14. *Genau dann ist* A τ*-abgeschlossen, wenn* cA τ*-offen ist.*

Beweis: Sei $x \in cA$, d. h. $x \notin A$, A τ-abgeschlossen. Ist dann $\mathfrak{F} \in \tau x$, so kann nicht $F \cap A \neq \theta$ für jedes $F \in \mathfrak{F}$ gelten, denn sonst wäre $x \in A$. Es gibt also zu jedem $\mathfrak{F} \in \tau x$ ein $F_0 \in \mathfrak{F}$, so daß $F_0 \cap A = \theta$, d. h. $F_0 \subset cA$ ist. Also ist $cA \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$, was bedeutet, daß cA τ-offen ist.

Umgekehrt sei B τ-offen, $A = cB$. Es sei dann $x \in \overline{A}$. Gesetzt, es wäre $x \notin A$, also $x \in B$, so wäre nach Voraussetzung $B \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$. Also gäbe es in *jedem* Filter $\mathfrak{F} \in \tau x$ eine zu A fremde Menge, nämlich B. Das widerspräche der Annahme $x \in \overline{A}$.

Mit anderen Worten bedeutet der Satz, daß die τ-abgeschlossenen Mengen gerade die $\overline{\omega}\,\tau$-abgeschlossenen Mengen sind, die also ebenso wie früher die τ-offenen Mengen zur Definition von $\overline{\omega}\,\tau$ verwendet werden können.

Satz 15. *Ist* τ *separiert, so ist für jedes* x *die Menge* $\{x\}$ *abgeschlossen.*

Beweis: Sei $y \in \overline{\{x\}}$. Es gibt ein $\mathfrak{F} \geqq \dot{x}$ in τy. Nun ist aber $\mathfrak{F} = \dot{x}$, da $\dot{x}$ ein Ultrafilter ist und $\dot{x} \in \tau x$. Aus der Separiertheit von τ folgt daher $y = x$.

Korollar. *Ist* τ *separiert, so erfüllt* $\overline{\omega}\,\tau$ *das erste Trennungsaxiom.*

Beweis: Die abgeschlossenen Mengen sind für τ und $\overline{\omega}\,\tau$ dieselben. Insbesondere ist für jedes $x \in E$ die Menge $\{x\}$ $\overline{\omega}\,\tau$-abgeschlossen.

Es seien τ, σ Limitierungen auf E, $\overline{A}^\tau$, $\overline{A}^\sigma$ die zugehörigen Adhärenzen. Ist $\tau \leqq \sigma$, so gilt $\overline{A}^\sigma \subset \overline{A}^\tau$, wie man unmittelbar einsieht. Insbesondere folgt daraus, daß jede τ-abgeschlossene Menge auch σ-abgeschlossen ist. Zwei verschiedene Limitierungen können aber sehr wohl dieselben abgeschlossenen Mengen haben (etwa τ und $\overline{\omega}\,\tau$!), während zwei Topologien bekanntlich gleich sind, wenn sie dieselben abgeschlossenen Mengen haben.

Nun sei B eine Teilmenge von E, τ_B die von τ auf B induzierte Limitierung. Dann gilt für $A \subset B$:

$$\overline{A}^{\tau_B} = \overline{A}^\tau \cap B\,.$$

Ist nämlich $x \in \overline{A}^{\tau_B}$, so gibt es ein $\mathfrak{F}_B \in \tau_B x$, so daß $F' \cap A \neq \theta$ für jedes $F' \in \mathfrak{F}_B$. Also ist dann auch $F \cap A \neq \theta$ für jedes $F \in F(\mathfrak{F}_B)$. Wegen $F(\mathfrak{F}_B) \in \tau x$ bedeutet dies, daß $x \in \overline{A}^\tau$ ist. Umgekehrt sei $x \in \overline{A}^\tau \cap B$. Es gibt also ein

$\mathfrak{F} \in \tau x$, so daß $F \cap A \neq 0$ für jedes $F \in \mathfrak{F}$ ist. Dann ist aber auch $F \cap B \neq 0$, so daß $\mathfrak{F}$ einen Filter $\mathfrak{F}_B$ auf B induziert, der dort gegen x konvergiert. Also ist $x \in \overline{A}^{\tau_B}$, da ja $F' \cap A \neq 0$ für jede Menge $F' (= F \cap B) \in \mathfrak{F}_B$ gilt.

Definition 9. *Sei τ eine Limitierung auf E. Eine Teilmenge A von E heißt τ-dicht in E, wenn $\overline{A} = E$ ist (d. h. wenn sie bezüglich $\overline{\omega}\, \tau$ in E dicht liegt). Allgemeiner heiße die Teilmenge A dicht bezüglich der Teilmenge B, wenn $B \subset \overline{A}$ ist.*

Für Topologien stimmen diese Begriffe offenbar mit den üblichen überein. Es sei noch an zwei Beispielen gezeigt, wie topologische Eigenschaften auf Limitierungen übertragen werden können:

a) Eine Limitierung τ heißt *regulär*, wenn mit $\mathfrak{F}$ auch der von den Adhärenzen $\overline{F}$ erzeugte Filter $\overline{\mathfrak{F}}$ gegen x konvergiert. Das ergibt für Topologien den üblichen Begriff: Eine Topologie heißt regulär, wenn für jedes x gilt, daß es zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x derart gibt, daß $\overline{V} \subset U$ ist. Dann ist also $\overline{\mathfrak{V}}(x) = \mathfrak{V}(x)$ für jedes x. Da $\mathfrak{F} \to x$ gerade $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{V}(x)$ bedeutet, folgt dann $\overline{\mathfrak{F}} \geqq \overline{\mathfrak{V}}(x)$, also $\overline{\mathfrak{F}} \to x$. Umgekehrt sei $\overline{\mathfrak{F}} \to x$ für jedes $\mathfrak{F} \to x$ und jedes x. Da insbesondere $\mathfrak{V}(x) \to x$ gilt, folgt $\overline{\mathfrak{V}}(x) \geqq \mathfrak{V}(x)$.

b) Eine Limitierung τ heißt normal, wenn die Topologie $\overline{\omega}\, \tau$ es ist.

Wir gehen hier nicht näher auf andere Eigenschaften der bisher definierten Limesräume ein.

7.

Es sei in diesem Abschnitt immer $\tau \in \mathscr{T}_1$. Es gilt der

Satz 16. *Genau dann konvergiert ein Filter $\mathfrak{F}$ gegen x, wenn jeder Ultrafilter, der feiner als $\mathfrak{F}$ ist, gegen x konvergiert.*

Beweis: Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sie ist aber auch hinreichend, denn jeder Filter ist der Durchschnitt aller Ultrafilter, die feiner als er sind. Wenn also jeder solche Ultrafilter gegen x konvergiert, so tut dies wegen $\tau \in \mathscr{T}_1$ auch noch $\mathfrak{F}$.

Der Satz gilt natürlich insbesondere für Topologien. Von da her ergibt sich eine andere Methode, allgemeinere Konvergenzstrukturen zu definieren:

Man definiert die Konvergenz folgendermaßen: Es sei eine Relation ϱ zwischen den Ultrafiltern auf E und den Punkten von E gegeben, von der nur verlangt wird, daß für jedes $x \in E$ $\varrho(\dot{x}, x)$ richtig ist. Dann sagt man, der Filter $\mathfrak{F}$ konvergiere gegen $x \in E$, wenn für jeden Ultrafilter $\mathfrak{U} \geqq \mathfrak{F}$ die Relation $\varrho(\mathfrak{U}, x)$ besteht.

Die Theorie dieser Konvergenzstrukturen findet sich in der Arbeit "Convergences" von G. CHOQUET (Ann. Univ. Grenoble, 1947/48), auf die ich freundlicherweise von Herrn L. SCHWARTZ aufmerksam gemacht wurde. Der Vergleich der Theorie von CHOQUET mit unseren Limitierungen ist nicht ganz einfach durchzuführen. Es läßt sich vorerst etwa folgendes dazu sagen:

Eine Konvergenzstruktur im Sinne von CHOQUET ("pseudo-topologie") ist im allgemeinen nicht eine Limitierung. Ist nämlich ϱx die Menge aller Filter $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$, so daß $\varrho(\mathfrak{F}, x)$ gilt, so ist ϱx nicht unbedingt ein $\wedge$-Ideal, da die untere Grenze zweier Filter aus ϱx nicht zu ϱx zu gehören braucht.

Umgekehrt gilt der Satz 16 im allgemeinen nicht für beliebige Limitierungen, sondern erst für die Hauptideal-Limitierungen, so daß ein $\tau \in \mathscr{T}$, das nicht in $\mathscr{T}_1$ liegt, nicht durch eine Relation ϱ nach CHOQUET definiert werden kann. Dies gilt erst in $\mathscr{T}_1$; die Hauptideal-Limitierungen stimmen mit den bei CHOQUET so genannten "pré-topologies" überein (loc. cit. no. 6, p. 83).

Wir entnehmen der erwähnten Arbeit noch den folgenden

Satz 17. *Sei E eine Menge. Es sei eine Abbildung $A \to \overline{A}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$ in sich gegeben, die die folgenden zwei Eigenschaften hat:*

(1) $A \subset \overline{A}$ *für jedes* $A \in \mathfrak{P}(E)$; $\overline{\theta} = \theta$,

(2) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ *für alle* A, B *aus* $\mathfrak{P}(E)$.

Nun sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf E. $\mathfrak{U}$ heiße konvergent gegen $x \in E$ (in Zeichen: $\varrho(\mathfrak{U}, x)$), wenn $x \in \overline{U}$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$ gilt. Dann definiert ϱ eine Hauptideal-Limitierung τ auf E, für die die Adhärenz $A \to \overline{A}^\tau$ gerade mit $A \to \overline{A}$ übereinstimmt.

Beweis: Wir geben zunächst für jedes $x \in E$ den „Umgebungsfilter" $\mathfrak{V}(x)$ an: $\mathfrak{V}(x)$ bestehe aus den Komplementen derjenigen Teilmengen A von E, für welche $x \notin \overline{A}$ ist. Das heißt: $V \in \mathfrak{V}(x)$ ist gleichbedeutend damit daß $x \notin \overline{cV}$ ist. $\mathfrak{V}(x)$ ist ein Filter, denn ist $V \in \mathfrak{V}(x)$, so ist $V \neq \theta$ wegen $x \in V$, das aus $x \in c(\overline{cV})$ vermöge (1) folgt. Sind U und V in $\mathfrak{V}(x)$, so auch ihr Durchschnitt, denn ist $x \notin \overline{cU}$ und $x \notin \overline{cV}$, so ist $x \notin \overline{cV} \cup \overline{cU} \subset \overline{cV \cup cU} = \overline{c(U \cap \cap V)}$, woraus $U \cap V \in \mathfrak{V}(x)$ folgt. Ist schließlich $U \in \mathfrak{V}(x)$ und $U \subset V$, so ist $V \in \mathfrak{V}(x)$ wegen $cV \subset cU$, woraus vermöge (2) $\overline{cV} \subset \overline{cU}$ folgt, also $x \notin \overline{cV}$. Wir haben schon gesehen, daß $\mathfrak{V}(x) \leqq \dot{x}$ ist. Also ist $\tau : x \to [\mathfrak{V}(x)]$ eine Hauptideal-Limitierung auf E. Nun zeigen wir: Für einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ sind $\varrho(\mathfrak{U}, x)$ und $\mathfrak{U} \geqq \mathfrak{V}(x)$ gleichbedeutend. Sei zunächst $\mathfrak{U} \geqq \mathfrak{V}(x)$; wir müssen zeigen, daß $x \in \overline{U}$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$ gilt. Wäre etwa $x \notin \overline{U}_0$, so wäre $cU_0 \in \mathfrak{V}(x)$ nach Definition, also $\in \mathfrak{U}$, was wegen $U_0 \in \mathfrak{U}$ nicht geht. Umgekehrt sei $x \in \overline{U}$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, gehört entweder V oder cV zu $\mathfrak{U}$ (für beliebiges $V \subset E$, also auch für $V \in \mathfrak{V}(x)$). Nun ist $cV \in \mathfrak{U}$ wegen $x \notin \overline{cV}$ unmöglich, so daß $V \in \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{V}(x) \leqq \mathfrak{U}$ folgt.

Der Satz 16 ergibt damit, daß ϱ und τ dieselben konvergenten Filter haben.

Nun sei $x \notin \overline{A}$. Dann ist $cA \in V(x)$ nach Definition. Also ist $x \notin \overline{A}^\tau$, da ja $cA \cap A = \theta$ ist. Das bedeutet: $\overline{A}^\tau \subset \overline{A}$.

Umgekehrt sei $x \notin \overline{A}^\tau$. Wäre $x \in \overline{A}$, so gäbe es einen Oberfilter $F \geqq [A]$, der bezüglich ϱ gegen x konvergierte (vgl. CHOQUET, loc. cit., no. 6, th. 2, p. 84), also auch bezüglich τ, nach dem, was wir eben zeigten. Also wäre $x \in \overline{A}^\tau$ entgegen der Annahme.

So folgt schließlich $\overline{A}^\tau = \overline{A}$ für jede Teilmenge A von E, womit der Satz 17 bewiesen ist.

Bemerkung: Wir haben verwendet, daß $x \in \overline{A}$, damit gleichbedeutend ist, daß ein Oberfilter zu $[A]$ existiert, der bezüglich ϱ gegen x konvergiert, d. h. daß $A \to \overline{A}$ mit der durch ϱ bestimmten Adhärenz übereinstimmt. Dieser Satz folgt daraus, daß $\alpha(\mathfrak{U}) = \bigcap\limits_{\mathfrak{U}} \overline{U}$ für $\mathfrak{U}$ gilt, wenn $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, was unmittelbar aus der Definition folgt, obschon wir gegenüber CHOQUET in (2) nur Inklusion, nicht Gleichheit verlangen.

Wesentlich mehr läßt sich hier noch nicht über den Zusammenhang zwischen Limitierungen und Konvergenzstrukturen nach CHOQUET aussagen.

§ II. Morphismen von Limesräumen

1.

Es seien E, E' zwei Mengen. Wir erinnern hier daran, daß wir uns bezüglich der Abbildungen $\varphi : E \to E'$ im wesentlichen an die Terminologie BOURBAKIs halten; mithin heißt φ

injektiv, wenn φ eineindeutig,

epijektiv, wenn φ eine Abbildung *auf*,

bijektiv, wenn φ eineindeutig — auf ist.

Anstelle von „epijektiv" verwendet BOURBAKI die Bezeichnung «(application) surjective»; unsere Bezeichnung entnehmen wir dem Séminaire SCHWARTZ, 1, 1953/54, exposé 7.

Sei $\varphi : E \to E'$ gegeben. φ induziert zunächst in evidenter Weise eine Abbildung $\mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E')$; diese Erweiterung ist $\cup$-treu: $\varphi(\bigcup_\iota A_\iota) = \bigcup_\iota \varphi(A_\iota)$ für eine beliebige Familie $(A_\iota)_{\iota \in I}$ von Teilmengen von E. Hingegen ist φ im allgemeinen nicht $\cap$-treu, sondern es gilt nur $\varphi(\bigcap_\iota A_\iota) \subset \bigcap_\iota \varphi(A_\iota)$. φ induziert aber auch eine Abbildung $\varphi^{-1} : \mathfrak{P}(E') \to \mathfrak{P}(E)$, indem man $A' \subset E'$ das vollständige Urbild unter φ zuordnet, d. h. die Menge aller $x \in E$ derart, daß $\varphi(x) \in A'$ ist. Dieses vollständige Urbild sei mit $\varphi^{-1}(A')$ bezeichnet. Ist $A' \subset \varphi(E)$, so ist $\varphi(\varphi^{-1}(A')) = A'$. φ^{-1} ist immer $\cup$- und $\cap$-treu.

Außerdem aber induziert φ eine Abbildung $\mathbf{F}(E) \to \mathbf{F}(E')$ in der folgenden Weise: sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf E. Dann bezeichne $\varphi(\mathfrak{F})$ den vom Raster $\{\varphi(F) / F \in \mathfrak{F}\}$ erzeugten Filter auf E'. Die Menge der $\varphi(F)$, $F \in \mathfrak{F}$, ist ein Raster wegen $\varphi(F \cap G) \subset \varphi(F) \cap \varphi(G)$. Wir weichen mit dieser Bezeichnung von BOURBAKI ab, der mit $\varphi(\mathfrak{F})$ den *Raster* $\{\varphi(F) / F \in \mathfrak{F}\}$ bezeichnet. Die Erweiterung von φ auf $\mathbf{F}(E)$ ist $\wedge$-treu wegen der $\cup$-Treue von φ auf $\mathfrak{P}(E)$; sie ist also auch ordnungstreu. Insbesondere ist $\varphi(\mathbf{F}(E)) \subset \mathbf{F}(E')$ $\wedge$-abgeschlossen. Nun sei $\mathfrak{F}' \in \mathbf{F}(E')$. Genau dann läßt sich ein Urbild von $\mathfrak{F}'$ unter φ definieren, das wir dann mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$ bezeichnen, wenn $\mathfrak{F}' \in \mathbf{F}_{\varphi(E)}(E')$ ist, d. h. wenn jedes $F' \in \mathfrak{F}'$ die Bildmenge $\varphi(E)$ trifft. Insbesondere ist diese Bedingung offensichtlich für alle $\varphi(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$, erfüllt, und man sieht sofort, daß $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{F})) \leqq \mathfrak{F}$ ist.

Ist φ epijektiv $E \to E'$, so ist es auch $\varphi : \mathbf{F}(E) \to \mathbf{F}(E')$: sei nämlich $\mathfrak{F}' \in \mathbf{F}(E')$. Nach Voraussetzung existiert dann $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$ und es ist klar, daß $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}')) = \mathfrak{F}'$ ist.

$\varphi^{-1} : \mathbf{F}_{\varphi(E)}(E') \to \mathbf{F}(E)$ ist immer $\wedge$- und $\vee$-treu, insbesondere also wieder ordnungstreu.

2.

Definition 1. *Es seien (E, τ) und (E', τ') zwei Limesräume, φ sei eine Abbildung $E \to E'$. φ heißt an der Stelle $x \in E$ stetig, wenn für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$ $\varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' \varphi(x)$ gilt.*

Stetigkeit (an einer Stelle) bedeutet mithin Konvergenztreue (an dieser Stelle). Ist $\varphi : E \to E'$ für jedes $x \in A$ stetig, so sagen wir, φ sei *auf A stetig*; ist insbesondere $A = E$, so heißt φ einfach eine stetige Abbildung von E in E', bzw. genauer von (E, τ) in (E', τ').

$\varphi : (E, \tau) \to (E', \tau')$ sei stetig. Sind dann σ, σ' zwei weitere Limitierungen auf E bzw. E', so daß $\tau \leqq \sigma$ und $\sigma' \leqq \tau'$ bestehen, so ist $\varphi : (E, \sigma) \to (E', \sigma')$ immer noch stetig.

Man folgert nun unmittelbar den

Satz 1. *$\varphi : (E, \tau) \to (E', \tau')$ sei an der Stelle $x \in E$, $\chi : (E', \tau') \to (E'', \tau'')$ an der Stelle $\varphi(x) \in E'$ stetig. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung $\chi \circ \varphi$: $(E, \tau) \to (E'', \tau'')$ an der Stelle $x \in E$ stetig.*

Insbesondere also:

Korollar. *Die zusammengesetzte Abbildung zweier stetiger Abbildungen ist selbst stetig.*

Die identische Selbstabbildung von E ist in jeder Limitierung stetig. Daraus folgt, daß die stetigen Abbildungen eine Familie von Morphismen (im Sinne BOURBAKIs) für die Limesräume bilden. Insbesondere ergibt die Klasse der Limesräume zusammen mit den stetigen Abbildungen solcher Räume eine Kategorie im heute üblichen Sinne dieses Wortes (s. etwa EILENBERG/STEENROD, Foundations of Algebraic Topology, ch. IV; A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. Journal, vol. 9, nrs. 2, 3 (1957), usw.).

Satz 2. *φ sei eine an der Stelle x stetige Abbildung $(E, \tau) \to (E', \tau')$. Ist A eine solche Teilmenge von E, daß $x \in A$ ist, so ist die Restriktion $\varphi_A = \varphi \mid A$ von φ auf A eine an der Stelle $x \in A$ stetige Abbildung von (A, τ_A) auf $(\varphi(A), \tau'_{\varphi(A)})$.*

Beweis: Sei $x' = \varphi_A(x) = \varphi(x)$. Für jedes $\mathfrak{F}_A \in \tau_A x$ ist zu zeigen, daß $\varphi_A(\mathfrak{F}_A) \in \tau'_{\varphi(A)} x'$ ist. $\mathfrak{F}_A \in \tau_A x$ bedeutet aber nach Definition, daß $F(\mathfrak{F}_A) \in \tau x$ gilt. Nach Voraussetzung ist daher $\varphi(F(\mathfrak{F}_A)) \in \tau' x'$. Wir zeigen nun $\varphi_A(\mathfrak{F}_A) \geqq$ $\geqq \sigma_{\varphi(A)}[\varphi(F(\mathfrak{F}_A))]$: zunächst existiert der rechts stehende Filter, denn jedes $F' \in \varphi(F(\mathfrak{F}_A))$ enthält ein $\varphi(F_A)$, so daß $F' \cap \varphi(A) \neq \emptyset$ folgt. Außerdem ist aber $\varphi(F_A) = \varphi_A(F_A)$ für jedes $F_A \in \mathfrak{F}_A$, so daß also jedes $F' \cap \varphi(A)$, $F' \in \varphi(F(\mathfrak{F}_A))$, zu $\varphi_A(\mathfrak{F}_A)$ gehört. Aus $\varphi(F(\mathfrak{F}_A)) \in \tau' x'$ folgt damit $\varphi_A(\mathfrak{F}_A) \in$ $\in \tau'_{\varphi(A)} x'$, was zu zeigen war.

Korollar. *φ sei eine auf $A \subset E$ stetige Abbildung von (E, τ) in (E', τ'). Dann ist φ_A eine stetige Abbildung von (A, τ_A) auf $(\varphi(A), \tau'_{\varphi(A)})$.*

Aus der Ordnungstreue von φ ergibt sich sofort, daß eine stetige Abbildung auch adhärenztreu ist:

Satz 3. *Es seien (E, τ), (E', τ') Limesräume, φ eine stetige Abbildung $(E, \tau) \to (E', \tau')$. Ist $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ und $x \in \alpha(\mathfrak{F})$, so ist $\varphi(x) \in \alpha'(\varphi(\mathfrak{F}))$.*

Das ergibt sofort den

Satz 4. *(E, τ) sei kompakt; ist $\varphi : (E, \tau) \to (E', \tau')$ stetig, so ist $(\varphi(E), \tau'_{\varphi(E)})$ kompakt.*

In § 1, Abschnitt 6 wurde die Adhärenz $\overline{A}$ für Teilmengen A eines Limesraumes definiert. Da diese als die Adhärenz des Filters $[A]$ definiert ist, schließt man:

Satz 5. *$\varphi : (E, \tau) \to (E', \tau')$ sei stetig. Für jede Teilmenge $A \subset E$ gilt dann*

$$\varphi(\bar{A}) \subset \overline{\varphi(A)}\,.$$

Korollar. *Ist A dicht in (E, τ) und $\varphi : (E, \tau) \to (E', \tau')$ stetig, so ist $\varphi(A)$ dicht in $(\varphi(E), \tau'_{\varphi(E)})$.*

Satz 6. *Es seien φ, χ zwei stetige Abbildungen $(E, \tau) \to (E', \tau')$, τ' sei separiert. Gilt dann $\varphi(x) = \chi(x)$ für alle x aus einer in E überall dichten Teilmenge A, so ist $\varphi = \chi$.*

Beweis: Sei $x \in E$, d. h. $x \in \bar{A}$. Es gibt ein $\mathfrak{F}_A \in \mathbf{F}(A)$, so daß $F(\mathfrak{F}_A) \in \tau x$ ist. Nach Voraussetzung ist daher $\varphi(F(\mathfrak{F}_A)) \in \tau' \varphi(x)$ und $\chi(F(\mathfrak{F}_A)) \in \tau' \chi(x)$. Nun wird $\varphi(F(\mathfrak{F}_A))$ vom Raster $\varphi(\mathfrak{F}_A)$, $\chi(F(\mathfrak{F}_A))$ von $\chi(\mathfrak{F}_A)$ erzeugt und es ist $\varphi\,|A = \chi|\,A$. Also gilt auch $\varphi(F(\mathfrak{F}_A)) = \chi(F(\mathfrak{F}_A))$. Die Separiertheit von τ' hat zur Folge, daß dieser Filter nur einen Limes haben kann, womit $\varphi(x) = \chi(x)$ gezeigt ist. Damit folgt auch $\varphi = \chi$.

Definition 2. *Es seien (E, τ), (E', τ') Limesräume, $\varphi : E \to E'$ eine Abbildung. φ heißt ein Isomorphismus der beiden Limesräume, wenn φ bijektiv ist und zudem φ und φ^{-1} stetig sind. φ heißt ein Monomorphismus oder eine Einbettung, wenn φ einen Isomorphismus zwischen (E, τ) und $(\varphi(E), \tau'_{\varphi(E)})$ stiftet.*

Diese Definition steht offenbar in Übereinstimmung mit Def. 1. Es gilt der

Satz 7. *Es sei (E, τ) kompakt, $\tau \in \mathcal{T}_1$, (E', τ') separiert. Gibt es dann eine bijektive Abbildung $\varphi : E \to E'$, die bezüglich τ und τ' stetig ist, so sind (E, τ) und (E', τ') isomorph:*

$$\varphi : (E, \tau) \cong (E', \tau')\,.$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß φ^{-1} stetig ist. Dazu zeigen wir, daß φ^{-1} auf E eine Limitierung τ^* definiert, die separiert und von solcher Art ist, daß $\varphi^{-1}: (E', \tau') \to (E, \tau^*)$ stetig ist. Wegen der Separiertheit von τ^* ergibt dann § 1, Satz 10, daß $\tau^* = \tau$ ist, also die Behauptung.

Wir setzen dazu:

$$\tau^* x = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{F}') \mid \mathfrak{F}' \in \tau' \varphi(x)\}\,.$$

$\tau^* x$ ist ein $\wedge$-Ideal: Wegen $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}' \wedge \mathfrak{G}') = \varphi^{-1}(\mathfrak{F}') \wedge \varphi^{-1}(\mathfrak{G}')$ ist mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ in $\tau^* x$. Ist $\mathfrak{G} \geqq \varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$, so ist $\varphi(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{F}'$ wegen $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id.}$; da außerdem $\mathfrak{G} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{G}))$ ist, folgt damit, daß auch $\mathfrak{G}$ zu $\tau^* x$ gehört. Schließlich ist $\dot{x}$ Urbild unter φ des $\varphi(x)$-Ultrafilters auf E'. Also ist $\tau^* : x \to \tau^* x$ eine Limitierung auf E. Nun ist φ stetig, also $\varphi(\tau x) \subset \tau' \varphi(x)$. Das ergibt sofort $\varphi^{-1}(\tau' x') \supset \tau x$ (für $x = \varphi^{-1}(x')$), also $\tau^* x \supset \tau x$ für jedes $x \in E$, d. h. gerade $\tau^* \leqq \tau$. Schließlich ist τ^* separiert: gesetzt, es wäre $\mathfrak{F} \in \tau^* x \cap \tau^* y$ für $x \neq y$, so wäre $\varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' x' \cap \tau' y'$ mit $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$, $x' \neq y'$, was der Voraussetzung widerspräche, wonach τ' separiert ist. Also ist $\tau^* = \tau$ nach § 1, Satz 10 und damit ist alles bewiesen, da $\varphi^{-1}(\tau' x') = \tau^* x = \tau x$ $(x = \varphi^{-1}(x'))$ ist, mithin φ^{-1} stetig.

Satz 8. *φ sei eine stetige Abbildung von E in E'. Ist dann M' eine τ'-offene Teilmenge von E', so ist $\varphi^{-1}(M')$ eine τ-offene Menge in E. Insbesondere ist daher φ eine stetige Abbildung des topologischen Raumes $(E, \bar{\omega}\,\tau)$ in den topologischen Raum $(E', \bar{\omega}\,\tau')$.*

Beweis: Sei $x \in M = \varphi^{-1}(M')$ und $\mathfrak{F} \in \tau x$. Wir müssen $M \in \mathfrak{F}$ zeigen. Nach Voraussetzung ist $\varphi(x) = x' \in M'$, ferner $\varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' x'$, was $M' \in \varphi(\mathfrak{F})$ ergibt. Daraus folgt $M \in \mathfrak{F}$: M' enthält ein $F' \in \varphi(\mathfrak{F})$, d. h. ein $\varphi(F)$, $F \in \mathfrak{F}$. Also enthält $M = \varphi^{-1}(M')$ die Menge $\varphi^{-1}(\varphi(F))$, also insbesondere F. Daher ist $M \in \mathfrak{F}$.

Korollar. *φ sei ein Isomorphismus der Limesräume (E, τ), (E', τ'). Ein $M \subset E$ ist genau dann τ-offen, wenn $\varphi(M)$ τ'-offen ist. Insbesondere ist daher φ ein Homöomorphismus der topologischen Räume $(E, \bar{\omega}\,\tau)$, $(E', \bar{\omega}\,\tau')$.*

Es seien (E', τ') ein Limesraum, $\varphi : E \to E'$ eine Abbildung der Menge E in E'. Dann definieren φ und τ' auf E eine wohlbestimmte Limitierung τ_φ, die das *reziproke Bild* von τ' unter φ heiße; vgl. den Beweis von Satz 7. τ_φ wird in der folgenden Weise konstruiert:

Für $x \in \varphi^{-1}(x')$ sei $\tau_\varphi x$ das von der Menge aller $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$, $\mathfrak{F}' \in \tau' \varphi(x)$, erzeugte $\wedge$-Ideal in $\mathbf{F}(E)$. Da φ^{-1} $\wedge$-treu ist, besteht $\tau_\varphi x$ aus allen Oberfiltern zu den $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$, $\mathfrak{F}' \in \tau' x'$. Insbesondere enthält es daher den x-Ultrafilter $\dot{x}$, da ja $\dot{x} \geqq \varphi^{-1}(\dot{x}') \in \tau_\varphi x$ ist. Ist dann $\mathfrak{F} \in \tau_\varphi x$, so ist $\varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' \varphi(x)$ klar, so daß $\varphi : (E, \tau_\varphi) \to (E', \tau')$ eine stetige Abbildung ist.

Ferner sei $\varphi(\mathfrak{G}) \in \tau' \varphi(x)$. Dann ist $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{G})) \in \tau_\varphi x$, wegen $\mathfrak{G} \geqq \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{G}))$ also auch $\mathfrak{G} \in \tau_\varphi x$. Man kann daher τ_φ auch folgendermaßen definieren:

$$\mathfrak{F} \in \tau_\varphi x \text{ gilt genau dann, wenn } \varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' \varphi(x) \text{ ist.}$$

Damit ergibt sich, daß τ_φ die schwächste Limitierung auf E derart ist, daß φ stetig ist. Sei nämlich τ eine solche Limitierung. Dann ist $\varphi(\tau x) \subset \subset \tau' \varphi(x)$, woraus aber folgt, daß $\tau x \subset \tau_\varphi x$ ist, wie wir soeben sahen. Daher ist $\tau_\varphi \leqq \tau$.

Das reziproke Bild $(\bar{\omega}\,\tau)_\varphi$ der Topologie $\bar{\omega}\,\tau'$ ist die Topologie auf E, deren offene Mengen gerade die vollständigen Urbilder unter φ der τ'-offenen Mengen von E' sind. $(\bar{\omega}\,\tau')_\varphi$ ist bekanntlich die schwächste Topologie auf E, für welche φ eine stetige Abbildung in $(E', \bar{\omega}\,\tau')$ ist (s. [1], ch. I, § 3, no. 1). Nach Satz 8 ist $\varphi : (E, \bar{\omega}\,\tau_\varphi) \to (E', \bar{\omega}\,\tau')$ stetig, so daß $(\bar{\omega}\,\tau')_\varphi \leqq \bar{\omega}\,\tau_\varphi$ folgt. φ ist zudem eine offene Abbildung $(E, (\bar{\omega}\,\tau')_\varphi) \to (E', \bar{\omega}\,\tau')$; es ist immer noch eine offene Abbildung $(E, \bar{\omega}\,\tau_\varphi) \to (E', \bar{\omega}\,\tau')$: sei nämlich M τ_φ-offen. Das heißt: aus $x \in M$ folgt $M \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau_\varphi x$. Dies ergibt $M \in \varphi^{-1}(\mathfrak{F}')$ für jedes $\mathfrak{F}' \in \tau' \varphi(x)$, also $\varphi(M) \in \mathfrak{F}'$ für alle diese $\mathfrak{F}'$. Das bedeutet, daß $\varphi(M)$ τ'-offen ist.

3.

Es sei $P(E)$ die Menge aller *Äquivalenzrelationen* auf der Menge E. Die logische Implikation definiert in $P(E)$ eine Ordnungsrelation $\leqq$ in der folgenden Weise: sind ϱ, σ in $P(E)$, so bestehe $\varrho \leqq \sigma$ genau dann, wenn für alle $(x, y) \in E \times E$ gilt: $\sigma(x, y) \Rightarrow \varrho(x, y)$. Für die Graphen $X_\varrho = \{(x, y) \mid \varrho(x, y)\}$ und $X_\sigma = \{(x, y) \mid \sigma(x, y)\}$ bedeutet dies die Inklusion $X_\sigma \subset X_\varrho$. Ist $\varrho \leqq \sigma$, so sagen wir, σ sei feiner als ϱ oder stärker als ϱ.

Eine zweistellige Relation ϱ auf E ist bekanntlich genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn ihr Graph X_ϱ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $$\Delta \subset X_\varrho$$

(2) $$X_\varrho \circ X_\varrho \subset X_\varrho$$

(3) $$X_\varrho^{-1} \subset X_\varrho .$$

Dabei ist Δ die Diagonale von $E \times E$; $\ldots \circ \ldots, ^{-1}$ bezeichnen die üblichen Operationen in $\mathfrak{P}(E \times E)$, s. etwa BOURBAKI, Théorie des ensembles, fasc. de rés., 3^e éd., §3, nos. 4, 10.

Sind ϱ, σ Äquivalenzrelationen, so genügt $X_\varrho \cap X_\sigma$ offenbar immer noch (1) bis (3) und definiert mithin wieder eine Äquivalenzrelation, die wir mit $\varrho \vee \sigma$ bezeichnen. $\varrho \vee \sigma$ ist bezüglich $\leqq$ die obere Grenze von $\{\varrho, \sigma\}$, wie man sofort sieht. Es ist leicht zu sehen, daß jede Familie von Äquivalenzrelationen $\varrho_\iota, \iota \in I$, in $P(E)$ eine obere Grenze besitzt.

Für jedes $\varrho \in P(E)$ bezeichnen wir mit E_ϱ oder E/ϱ den *Quotienten* von E nach ϱ. Ist $x \in E$, so werde das durch x bestimmte Element von E_ϱ mit x_ϱ bezeichnet. Die kanonische Abbildung $E \to E_\varrho$ sei γ_ϱ. Dann ist $\gamma_\varrho^{-1}(x_\varrho)$ die Klasse von x nach ϱ, aufgefaßt als Teilmenge von E.

Es sei $\varrho \leqq \sigma$. Dann wird durch $\gamma_{\sigma\varrho}(x_\sigma) = \gamma_\varrho(\gamma_\sigma^{-1}(x_\sigma))$ eine Abbildung von E_σ auf E_ϱ definiert, die ihrerseits in E_σ eine Äquivalenzrelation definiert: $x_\sigma \sim y_\sigma$ besteht genau dann, wenn $\gamma_{\sigma\varrho}(x_\sigma) = \gamma_{\sigma\varrho}(y_\sigma)$ ist, d. h. wenn $x_\varrho = y_\varrho$ ist. Diese Relation wird mit ϱ/σ bezeichnet und heißt die *Quotientenrelation* von ϱ nach σ. Schließlich gibt es eine bijektive Abbildung $E_{\sigma,\varrho/\sigma} \to E_\varrho$, die wir mit γ bezeichnen, sofern daraus kein Mißverständnis entstehen kann.

Nun sei (E, τ) ein Limesraum, $\varrho \in P(E)$. Wir definieren auf E_ϱ eine Limitierung τ_ϱ in der folgenden Weise: Sei $x_\varrho \in E_\varrho$. Wir bezeichnen mit $\tau_\varrho x_\varrho$ das kleinste $\wedge$-Ideal in $\mathbf{F}(E_\varrho)$, das alle Filter $\gamma_\varrho(\mathfrak{F})$ enthält, wobei $\mathfrak{F}$ alle τx für $x \in \gamma_\varrho^{-1}(x_\varrho)$ durchläuft. Dieses $\wedge$-Ideal enthält $\dot{x}_\varrho$, den x_ϱ-Ultrafilter auf E_ϱ, denn es ist $\dot{x}_\varrho = \gamma_\varrho(\dot{x})$ für $x \in \gamma_\varrho^{-1}(x_\varrho)$. Also ist $\tau_\varrho : x_\varrho \to \tau_\varrho x_\varrho$ eine Limitierung auf E_ϱ.

Definition 3. *Die eben konstruierte Limitierung τ_ϱ heißt der Quotient von τ nach ϱ, der Limesraum $(E_\varrho, \tau_\varrho)$ der Quotientenraum von (E, τ) nach ϱ.*

Satz 9. *Es seien (E, τ) ein Limesraum, $\varrho \in P(E)$. Dann ist τ_ϱ die feinste Limitierung auf E_ϱ, für welche γ_ϱ: $(E, \tau) \to E_\varrho$* stetig ist.

Beweis: Die Stetigkeit von γ_ϱ für τ_ϱ ist evident. Sei dann τ^* eine Limitierung auf E_ϱ, für die γ_ϱ stetig ist. Dann enthält $\tau^* x_\varrho$ offenbar alle Filter $\gamma_\varrho(F)$, $F \in \tau x$, wenn x die Klasse $\gamma_\varrho^{-1}(x_\varrho)$ durchläuft, denn für genau diese x ist $\gamma_\varrho(x) = x_\varrho$. Da $\tau^* x_\varrho$ ein $\wedge$-Ideal ist, enthält es mithin das kleinste $\wedge$-Ideal, das alle genannten Filter enthält; das ist aber $\tau_\varrho x_\varrho$. Also ist $\tau_\varrho x_\varrho \subset \tau^* x_\varrho$ für jedes $x_\varrho \in E_\varrho$, mithin $\tau^* \leqq \tau_\varrho$.

Der folgende Satz charakterisiert die stetigen Abbildungen auf einem Quotienten $(E_\varrho, \tau_\varrho)$:

Satz 10. *$(E_\varrho, \tau_\varrho)$ sei der Quotient von (E, τ) nach $\varrho \in P(E)$, γ_ϱ sei wieder die kanonische Abbildung $E \to E_\varrho$.* Ist *(E', τ') ein Limesraum, $\chi : E_\varrho \to E'$ eine Abbildung, so ist χ genau dann stetig, wenn $\varphi = \chi \circ \gamma_\varrho$ es ist.*

Beweis: Ist χ stetig, so ist es natürlich auch φ. Umgekehrt sei φ stetig. Das bedeutet: ist $\mathfrak{F} \in \tau x$, so ist $\varphi(\mathfrak{F}) \in \tau' \varphi(x)$. Nun ist $\varphi(x) = \chi(\gamma_\varrho(x))$. Wir müssen zeigen: ist $\mathfrak{F}_\varrho \in \tau_\varrho \gamma_\varrho(x)$, so ist $\chi(\mathfrak{F}_\varrho) \in \tau' \chi(\gamma_\varrho(x)) = \tau' \varphi(x)$. $\mathfrak{F}_\varrho \in \tau_\varrho \gamma_\varrho(x)$ bedeutet aber nach Definition von τ_ϱ nichts anderes, als daß $\mathfrak{F}_\varrho$ Oberfilter eines Filters der Form $\gamma_\varrho(\mathfrak{F}_1) \wedge \gamma_\varrho(\mathfrak{F}_2)$ ist, wobei $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ aus der Menge $\bigcup_{y \in \tilde{x}} \tau y$ stammen, wenn $\tilde{x}$ die Klasse $\gamma_\varrho^{-1}(\gamma_\varrho(x))$ von x nach ϱ bezeichnet. Also ist auch $\mathfrak{F}_\varrho \geqq \gamma_\varrho(\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2)$. Das ergibt $\chi(\mathfrak{F}_\varrho) \geqq \chi(\gamma_\varrho(\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2)) = \varphi(\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2) = \varphi(\mathfrak{F}_1) \wedge \wedge\, \varphi(\mathfrak{F}_2)$. Nun ist aber φ stetig und $\varphi(y) = \varphi(x)$ für jedes $y \in \tilde{x}$. Also gelten $\varphi(\mathfrak{F}_1) \in \tau' \varphi(x)$ und $\varphi(\mathfrak{F}_2) \in \tau' \varphi(x)$, mithin auch $\varphi(\mathfrak{F}_1) \wedge \varphi(\mathfrak{F}_2) \in \tau' \varphi(x)$, woraus sofort $\chi(\mathfrak{F}_\varrho) \in \tau' \varphi(x)$ folgt. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von χ auf ganz E_ϱ, da γ_ϱ epijektiv ist.

Eine Anwendung dieses Satzes ergibt sich folgendermaßen:

Es seien (E, τ) ein Limesraum, ϱ, σ Äquivalenzrelationen auf E, so daß $\varrho \leqq \sigma$ gilt. Dann ist — mit den zu Anfang dieses Abschnittes eingeführten Bezeichnungen — das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\gamma_\varrho"] \arrow[d, "\gamma_\sigma"'] & E_\sigma \arrow[dl, "\gamma_{\sigma\varrho}"'] \arrow[d, "\gamma_{\sigma\varrho/\sigma}"] \\ E_\varrho & E_{\sigma,\varrho/\sigma} \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Wir behaupten den

Satz 11. γ *ist ein Isomorphismus der Limesräume* $(E_\varrho, \tau_\varrho)$ *und* $(E_{\sigma,\varrho/\sigma}, \tau_{\sigma,\varrho/\sigma})$.

Beweis: $\tau_{\sigma,\varrho/\sigma}$ bedeutet nach unsern Bezeichnungen die Quotientenlimitierung von τ_σ nach $\varrho/\sigma \in P(E_\sigma)$. Wir wissen bereits, daß γ bijektiv ist; es bleibt zu zeigen, daß γ und γ^{-1} stetig sind. Nach Satz 10 ist nun γ genau dann stetig, wenn $\gamma \circ \gamma_{\sigma,\varrho/\sigma} = \gamma_{\sigma\varrho}$ es ist, $\gamma_{\sigma\varrho}$ seinerseits genau dann, wenn $\gamma_{\sigma\varrho} \circ \gamma_\sigma = \gamma_\varrho$ es ist, was trivialerweise gilt.

γ^{-1} ist genau dann stetig — wiederum nach Satz 10 —, wenn $\gamma^{-1} \circ \gamma_\varrho = \gamma_{\sigma,\varrho/\sigma} \circ \gamma_\sigma$ es ist. Diese beiden Abbildungen sind es aber nach Definition der Quotientenlimitierungen. Also ist γ^{-1} stetig.

Damit ist der Satz 11 bewiesen.

4.

Wir haben bisher mehrmals davon Gebrauch gemacht, daß sich Limitierungen auf einer Menge E vermöge einer Abbildung eines Limesraumes in E bzw. von E in einen Limesraum definieren lassen. Dazu geben wir die folgenden zwei, etwas allgemeineren Fälle an, die wir anschließend zur Definition von Produkt und Summe von Limesräumen noch verwenden werden:

Es seien $(E_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ eine (nichtleere) Familie von Limesräumen, E eine (nichtleere) Menge.

I) Es sei nun zu jedem $\iota \in I$ eine Abbildung $\varphi_\iota : E_\iota \to E$ gegeben. Es genügt für unsere Zwecke anzunehmen, daß $E = \bigcup_\iota \varphi_\iota(E_\iota)$ ist.

Dann existiert auf E eine *feinste Limitierung* τ, bezüglich der alle φ_ι stetig sind. τ ist offenbar eindeutig bestimmt.

Wir beweisen die Existenz, indem wir τx für jedes $x \in E$ angeben, in der folgenden Weise: Es sei $x \in E$. Dann gibt es gewisse $\iota \in I$, so daß $x \in \varphi_\iota(E_\iota)$ ist. Diese ι bilden eine Teilmenge $I_x \subset I$. Man betrachte nun für jedes $x_\iota \in E_\iota$, $\iota \in I_x$, so daß $\varphi_\iota(x_\iota) = x$ ist, *alle* $\varphi_\iota(\mathfrak{F}_\iota)$, wenn $\mathfrak{F}_\iota$ das $\wedge$-Ideal $\tau_\iota x_\iota$ durchläuft. Es sei dann τx das kleinste $\wedge$-Ideal, das alle solchen Filter enthält. $\dot{x}$ gehört zu τx, denn es ist offenbar $\varphi_\iota(\dot{x}_\iota) = \dot{x}$[3]).

So ergibt sich, daß $\tau : x \to \tau x$ eine Limitierung auf E ist. Trivialerweise ist jedes φ_ι eine stetige Abbildung $(E_\iota, \tau_\iota) \to (E, \tau)$. Sei sodann τ^* eine Limitierung auf E, für die jedes φ_ι stetig ist. Es sei $x \in E$. Für jedes Urbild von x unter einem φ_ι gilt dann, daß alle $\varphi_\iota(\mathfrak{F}_\iota) \in \tau^* x$ sind, wenn $\mathfrak{F}_\iota$ das $\wedge$-Ideal $\tau_\iota x_\iota$ durchläuft. Da $\tau^* x$ selbst schon ein $\wedge$-Ideal ist, enthält es das kleinste solche Ideal, welches alle genannten Filter enthält, d. h. τx. Also folgt $\tau^* \leqq \tau$, wie behauptet wurde.

τ ist daher die gesuchte Limitierung.

Wir untersuchen noch die τ-offenen Mengen, die ja die Topologie $\bar{\omega}\tau$ definieren. Da nach einem früheren Satz jedes φ_ι eine stetige Abbildung $(E_\iota \bar{\omega}, \tau_\iota) \to (E_\iota, \bar{\omega}\tau)$ ist, folgt leicht $\bar{\omega}\tau \leqq \tau_0$, wo τ_0 die feinste *Topologie* auf E bezeichnet, für welche alle $\varphi_\iota \colon (E_\iota, \bar{\omega}\tau_\iota) \to E$ stetig sind. Die τ_0-offenen Mengen sind aber genau diejenigen $M \subset E$, für die jedes $\varphi_\iota^{-1}(M)$, $\iota \in I$, τ_ι-offen ist, d. h. der Bedingung genügt: aus $x_\iota \in \varphi_\iota^{-1}(M)$ folgt $\varphi_\iota^{-1}(M) \in \mathfrak{F}_\iota$ für jeden Filter $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_\iota x_\iota$. Dann ist aber $\varphi_\iota(\varphi_\iota^{-1}(M)) \in \varphi_\iota(\mathfrak{F}_\iota)$ für jedes $\iota \in I$ und jedes $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_\iota x_\iota$, d. h. $M \in \varphi_\iota(\mathfrak{F}_\iota)$ unter denselben Voraussetzungen. Daraus ergibt sich: ist $x \in M$, so ist $M \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$. Also ist M τ-offen. Zusammengefaßt heißt das schließlich:

Die Topologie $\bar{\omega}\tau$ ist die feinste Topologie auf E, so daß alle $\varphi_\iota \colon (E_\iota, \bar{\omega}\tau_\iota) \to$ $\to E$ stetig sind.

II) Nun sei zu jedem $\iota \in I$ eine Abbildung $\chi_\iota \colon E \to E_\iota$ gegeben. Dann existiert auf E eine *schwächste Limitierung* τ, so daß alle $\chi_\iota \colon E \to (E_\iota, \tau_\iota)$ stetig sind.

Dieses τ ist wiederum eindeutig bestimmt. Die Existenz folgt etwa so: Sei $x \in E$. Ein Filter $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ heiße konvergent gegen x, wenn für jedes $\iota \in I$ der Filter $\chi_\iota(\mathfrak{F})$ gegen $x_\iota = \chi_\iota(x)$ konvergiert. Da $\chi_\iota(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) = \chi_\iota(\mathfrak{F}) \wedge \chi_\iota(\mathfrak{G})$ ist, enthält das System τx der in diesem Sinne gegen x konvergierenden Filter mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$, so ist $\chi_\iota(\mathfrak{G}) \geqq \chi_\iota(\mathfrak{F})$, so daß aus $\mathfrak{F} \in \tau x$ und $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{G} \in \tau x$ folgt: τx ist ein $\wedge$-Ideal. Es enthält wegen $\chi_\iota(\dot{x}) = \dot{x}_\iota(x_\iota = \chi_\iota(x))$ schließlich den x-Ultrafilter $\dot{x}$. Daher ist $\tau : x \to \tau x$ eine Limitierung auf E.

Trivialerweise sind alle $\chi_\iota \colon (E, \tau) \to (E_\iota, \tau_\iota)$ stetig. Sei τ^* eine Limitierung auf E, für die alle χ_ι stetig sind. Das bedeutet: ist $\mathfrak{F} \in \tau^* x$, so ist $\chi_\iota(\mathfrak{F}) \in \tau_\iota \chi_\iota(x)$ für jedes $\iota \in I$. Daraus folgt sofort $\mathfrak{F} \in \tau x$. Die Inklusion $\tau^* x \subset \tau x$ gilt für jedes $x \in E$, so daß $\tau \leqq \tau^*$ folgt, wie behauptet wurde; τ ist die gesuchte Limitierung.

[3]) Man beachte, daß $\varphi_\iota(\dot{x}_\iota)$ ein Filter *auf E ist* (vgl. Abschnitt 1 dieses Paragraphen).

Ist τ_0 die schwächste *Topologie* auf E, für welche jedes $\chi_\iota: E \to (E_\iota, \bar{\omega}\tau_\iota)$ stetig ist, so folgt leicht $\tau_0 \leqq \bar{\omega}\tau$, denn jedes χ_ι ist stetig $(E, \bar{\omega}\tau) \to (E_\iota, \bar{\omega}\tau_\iota)$.

Wir haben bisher je ein Beispiel zu I) und II) kennengelernt:

Zu I) die Quotientenlimitierung,

zu II) das reziproke Bild einer Limitierung.

Bemerkung: Man schließt aus I) — mit den Bezeichnungen von Abschnitt 3 — insbesondere, daß die Quotiententopologie $(\bar{\omega}\tau)_\varrho$ gleich der zu τ_ϱ assoziierten Topologie $\bar{\omega}\tau_\varrho$ ist.

Zwei weitere Beispiele sollen jetzt besprochen werden:

Es sei $(E_\iota)_{\iota \in I}$ eine (nichtleere) Mengenfamilie, E eine *Summenmenge* zu dieser Familie, d. h. eine solche Menge E, daß eine Partition von E, $(E'_\iota)_{\iota \in I}$, mit derselben Indexmenge I so existiert, daß zu jedem $\iota \in I$ eine bijektive Abbildung $E_\iota \to E'_\iota$ existiert. Man erhält eine solche Summe etwa in der Vereinigungsmenge $\bigcup\limits_{\in I} (E_\iota \times \{\iota\})$, die wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise im Folgenden als *die* Summe der Mengenfamilie $(E_\iota)_{\iota \in I}$ bezeichnen.

Definition 4. *$(E_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ sei eine (nichtleere) Familie von Limesräumen, E „die" Summe der Mengen E_ι. Die Summenlimitierung $\tau = \Sigma\, \tau_\iota$ wird definiert als die feinste Limitierung auf E, für welche alle kanonischen Einbettungen $E_\iota \to E$ stetig sind.*

Existenz und Eindeutigkeit dieser Limitierung wurden in I) gezeigt. Wir identifizieren nun E_ι mit der ihr entsprechenden Teilmenge von E. Dann gilt der

Satz 12. *Die Summenlimitierung induziert auf jedem E_ι die gegebene Limitierung τ_ι.*

Beweis: Wegen der Stetigkeit von $E_\iota \to E$ ist $\tau_{E_\iota} \leqq \tau_\iota$, d. h. $\tau_\iota x_\iota \subset \tau_{E_\iota} x_\iota$ für jedes $x_\iota \in E_\iota$ und jedes $\iota \in I$. Umgekehrt sei $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_{E_\iota} x_\iota$. Das ist genau dann der Fall, wenn $F(\mathfrak{F}_\iota) \in \tau x_\iota$ in E gilt. Da $E_\iota \cap E_\varkappa = \theta$ für $\iota \neq \varkappa$ gilt und die $E_\iota \to E$ injektiv sind, bedeutet $F(\mathfrak{F}_\iota) \in \tau x_\iota$ einfach, daß $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_\iota x_\iota$ ist, denn aus der Definition von τ ergibt sich leicht, daß τx_ι gerade durch die $F(\mathfrak{F}_\iota)$, $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_\iota x_\iota$, und ihre Oberfilter gebildet wird. Man sieht sogar, daß τx_ι genau die Filter $F(\mathfrak{F}_\iota)$, $\mathfrak{F}_\iota \in \tau_\iota x_\iota$, enthält: jeder solche Filter enthält nämlich schon alle Obermengen zu E_ι in E. Ein Oberfilter zu einem $F(\mathfrak{F}_\iota)$ kann aber keine Teilmenge von $\bigcup\limits_{\iota \neq \varkappa} E_\varkappa$ enthalten, da diese zu E_ι fremd wäre und offensichtlich $E_\iota \in F(\mathfrak{F}_\iota)$ gilt. Ein Oberfilter zu einem $F(\mathfrak{F}_\iota)$ kann also nur von der Form $F(\mathfrak{G}_\iota)$ sein, wo $\mathfrak{G}_\iota \geqq \mathfrak{F}_\iota$ auf E_ι gilt.

Der Satz 12 ist damit bewiesen.

Korollar 1. *Die Topologie $\bar{\omega}\tau$ induziert auf jedem E_ι die Topologie $\bar{\omega}\tau_\iota$.*

Beweis: Nach I) ist $\bar{\omega}\tau$ gleich der Summentopologie der $\bar{\omega}\tau_\iota$, so daß das Korollar 1 evident ist.

Korollar 2. *Ist wieder τ die Summenlimitierung auf E, so ist eine Menge $M \subset E$ genau dann τ-offen, wenn jeder Durchschnitt $M \cap E_\iota$ τ_ι-offen ist.*

Beweis: unmittelbar nach der Bemerkung im Beweis von Korollar 1.

Es sei (E_ι, τ_ι) eine Familie von Limesräumen, (E, τ) „die" Summe. In jedem E_ι seien Teilmengen $F_{\iota\varkappa}$ (für $\varkappa \neq \iota$) ausgezeichnet, so daß eine bijektive

Abbildung $\varphi_{\iota\varkappa}: F_{\varkappa\iota} \to F_{\iota\varkappa}$ existiert. Es gelte ferner $\varphi_{\iota\lambda} = \varphi_{\iota\varkappa} \circ \varphi_{\varkappa\lambda}$, sofern alle drei Abbildungen definiert sind. Wir ergänzen die Familie $(\varphi_{\iota\varkappa})$, indem wir $\varphi_{\iota\iota}$ gleich der identischen Selbstabbildung von E_ι setzen. Dann ist $\varphi_{\iota\varkappa}$ für alle $\iota, \varkappa$ definiert und man hat $\varphi_{\varkappa\iota} = \varphi_{\iota\varkappa}^{-1}$. Sei dann ϱ die folgendermaßen eingeführte Äquivalenzrelation: zwei Elemente x, y von E heißen äquivalent, $\varrho(x, y)$, wenn es ι und $\varkappa$ in I so gibt, daß $\varphi_{\iota\varkappa}(x) = y$ ist. Jede Klasse nach ϱ besitzt in jedem E_ι höchstens einen Repräsentanten, denn ist $x \sim y$, so ist insbesondere $x \in E_\iota$, $y \in E_\varkappa$. Wenn dann $\iota = \varkappa$ gilt, so ist $\varphi_{\iota\varkappa} = \varphi_{\iota\iota}$ die Identität und also folgt $x = y$.

Sei F der Quotient von E nach ϱ, der mit der Quotientenlimitierung τ_ϱ versehen sei. Man sagt, (F, τ_ϱ) entstehe aus der Familie $(E_\iota, \tau_\iota)_I$ durch „Zusammenheften längs den Mengen $F_{\iota\varkappa}$“. Der topologische Raum $(F, \bar{\omega}\tau_\varrho)$ entsteht dabei durch „Zusammenheften längs den $F_{\iota\varkappa}$“ aus den topologischen Räumen $(E_\iota, \bar{\omega}\tau_\iota)$ im Sinne von [1], ch. I, § 9, no. 1, exemple. Ein klassisches Beispiel dazu ist die Konstruktion einer Mannigfaltigkeit aus den „Parameterumgebungen“ im R^n durch Zusammenheften vermöge der Parametertransformationen.

Es sei wieder (E_ι, τ_ι) eine Familie von Limesräumen, $E = \prod\limits_\iota E_\iota$ die Produktmenge der E. Wir bezeichnen die kanonischen Projektionen $E \to E_\iota$ mit pr_ι.

Definition 5. *Die Produktlimitierung auf $E = \prod E_\iota$ ist die schwächste Limitierung τ derart, daß alle pr_ι stetig sind.*

Existenz und Eindeutigkeit von $\tau = \prod \tau_\iota$ ergeben sich aus II). Der Limesraum $(E, \prod \tau_\iota) = (E, \tau)$ heißt dann das Produkt der Limesräume (E_ι, τ_ι), wofür wir auch etwa

$$(E, \tau) = \prod_\iota (E_\iota, \tau_\iota)$$

schreiben.

Aus II) entnimmt man, daß ein Filter $\mathfrak{F}$ auf E genau dann konvergiert, wenn jeder Filter $pr_\iota(\mathfrak{F})$ in E_ι konvergiert. Wir sahen auch schon, daß $\prod \bar{\omega}\tau_\iota \leqq \bar{\omega}(\prod \tau_\iota)$ gilt.

Es gilt nun der

Satz 13. *Sei (E', τ') ein Limesraum, $(E, \tau) = \prod (E_\iota, \tau_\iota)$ ein Produkt von Limesräumen. Eine Abbildung $\varphi: E' \to E$ ist genau dann an der Stelle $x' \in E'$ stetig, wenn jedes $\varphi_\iota = pr_\iota \circ \varphi: E' \to E_\iota$ an der Stelle x' stetig ist.*

Beweis: Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sie ist aber auch hinreichend: Es seien nämlich alle φ_ι an der Stelle x' stetig. Bezeichnen wir mit x_ι die ι-Komponente $pr_\iota(\varphi(x'))$ von $\varphi(x')$, so gilt also $\varphi_\iota(F') \in \tau_\iota x_\iota$ für jedes $F' \in \tau' x'$. Das bedeutet also, daß $pr_\iota(\varphi(F')) \in \tau_\iota pr_\iota(\varphi(x'))$ für jedes $F' \in \tau' x'$ gilt. Nach Definition von $\tau = \prod \tau_\iota$ folgt daraus $\varphi(F') \in \tau\varphi(x)$, womit die Stetigkeit von φ folgt.

Korollar. *Es seien $(E_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$, $(E'_\iota, \tau'_\iota)_{\iota \in I}$ zwei Familien von Limesräumen mit derselben Indexmenge. Für jedes ι sei eine Abbildung $\varphi_\iota: E_\iota \to E'_\iota$ gegeben. Genau dann ist $\varphi = \prod\limits_\iota \varphi_\iota$ in einem Punkt $x^0 = (x_\iota^0)$ stetig, wenn jedes φ_ι an der Stelle $x_\iota^0 \in E_\iota$ stetig ist.*

Beweis: $\Pi\, \varphi_\iota: (x_\iota) \to (\varphi_\iota(x_\iota))$ läßt sich als $x \to (\varphi_\iota(pr_\iota(x)))$ schreiben, so daß das Korollar unmittelbar aus Satz 13 folgt.

Es sei wieder $(E_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Limesräumen und es sei $I' \subset I$. Die natürliche Abbildung $pr_{I'}$ von $\prod_{\iota \in I} (E_\iota, \tau_\iota)$ auf $\prod_{\iota \in I'} (E_\iota, \tau_\iota)$ ist stetig: es ist ja $pr_{I'} = \prod_{\iota \in I'} pr_\iota$ und jedes pr_ι stetig. Nun sei $(I_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ eine *Partition* von I. Dann gilt der

Satz 14. *(Assoziativität des Produktes) Es seien* $(E, \tau) = \Pi(E_\iota, \tau_\iota)$ *und* $(E_{(\varkappa)}, \tau_{(\varkappa)}) = \prod_{\iota \in I_\varkappa} (E_\iota, \tau_\iota)$. *Dann ist die kanonische Abbildung von* E *auf* $\prod_{\varkappa \in K} E_{(\varkappa)}$ *ein Isomorphismus der Limesräume* (E, τ) *und* $\prod_{\varkappa \in K} (E_{(\varkappa)}, \tau_{(\varkappa)})$.

Beweis: Die kanonische Abbildung ist durch $x \to (pr_{I_\varkappa}(x))_{\varkappa \in K}$ definiert, sie ist bijektiv und nach Satz 13 stetig. Die Umkehrabbildung ordnet jedem $(x_{(\varkappa)})_{\varkappa \in K}, x_{(\varkappa)} = (x_\iota)_{\iota \in I_\varkappa}$, das Element $(x_\iota)_{\iota \in \cup I_\varkappa}$ zu. Sie läßt sich folglich als $x = (x_{(\varkappa)})_{\varkappa \in K} \to (\varphi_\iota(x))$ mit $\varphi_\iota(x) = pr_\iota(x_{(\varkappa)}))$ für $\iota \in I_\varkappa$ schreiben und ist mithin ebenfalls stetig.

Es seien noch zwei Sätze über das Verhalten spezieller Eigenschaften von Limesräumen bei Produktbildung angegeben:

Satz 15. *Ein Produkt* $\Pi(E_\iota, \tau_\iota)$ *ist genau dann separiert, wenn jeder Faktor* (E_ι, τ_ι) *es ist.*

Beweis: Seien zunächst alle (E_ι, τ_ι) separiert. Es sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf (E, τ), der gegen (x_ι) und (y_ι) konvergiere. $(x_\nu) \neq (y_\iota)$ bedeutet die Existenz eines $\lambda \in I$ derart, daß $x_\lambda \neq y_\lambda$ ist. Dann wäre $pr_\lambda(\mathfrak{F}) \in \tau_\lambda x_\lambda \wedge \tau_\lambda y_\lambda$ entgegen der Separiertheit von $(E_\lambda, \tau_\lambda)$.

Umgekehrt sei (E, τ) separiert. Gesetzt, etwa $(E_\varkappa, \tau_\varkappa)$ wäre es nicht, so seien $x_\varkappa \neq y_\varkappa$ zwei Limites des Filters $\mathfrak{F}_\varkappa$. Für jedes $\iota \neq \varkappa$ sei $\mathfrak{F}_\iota$ irgend ein gegen ein x_ι konvergierender Filter. Aus der Definition der Produktlimitierung folgt leicht, daß dann der Produktfilter $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$ gegen $(z_\iota)_{\iota \in I}$ konvergiert, wobei $z_\iota = x_\iota$ ist, aber auch gegen $(\bar{z}_\iota)_{\iota \in I}$, wobei für $\iota \neq \varkappa \leftrightarrow \bar{z}_\iota = x_\iota$ und $\bar{z}_\varkappa = y_\varkappa$ ist, d. h. also gegen zwei verschiedene Punkte von $\Pi(E_\iota, \tau_\iota)$, entgegen der Voraussetzung.

Satz 16. (TYCHONOW). *Ein Produkt* $\Pi(E_\iota, \tau_\iota)$ *ist genau dann kompakt, wenn jeder Faktor* (E_ι, τ_ι) *es ist.*

Beweis: Es ist $E_\iota = pr_\iota(E)$ und pr_ι stetig für jedes $\iota \in I$. Also folgt aus der Kompaktheit von (E, τ) diejenige von (E_ι, τ_ι) für jedes $\iota \in I$. Umgekehrt seien alle (E_ι, τ_ι) kompakt und es sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf E. $pr_\iota(\mathfrak{U})$ ist ein Ultrafilter für jedes $\iota \in I$ und konvergiert daher nach Voraussetzung. Also konvergiert $\mathfrak{U}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

§ III. Limitierte Gruppen und Vektorräume

1.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. Die Gruppenoperationen sind Abbildungen $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ und lassen sich auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ fortsetzen, indem man definiert: $AB = \{xy | x \in A,\ y \in B\}$ und $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\}$ für A, B aus $\mathfrak{P}(\mathrm{G})$. Damit ergibt sich auch die Fortsetzung dieser Operationen auf die Menge $\mathbf{F}(\mathrm{G})$ der Filter auf G:

Sind $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ Filter auf G, so ist das System aller Mengen FG mit $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{G}$, ein Raster auf G, denn es ist $(F \cap F')(G \cap G') \subset FG \cap F'G'$. Der von diesem Raster erzeugte Filter werde mit $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ bezeichnet. In entsprechender Weise definieren die Mengen F^{-1}, $F \in \mathfrak{F}$, den Filter $\mathfrak{F}^{-1}$ auf G. Wir bemerken noch, daß der Filter $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}$ nicht nur vom Raster aller $F_1^{-1}F_2$, F_1, F_2 aus $\mathfrak{F}$, sondern schon vom Raster der $F^{-1}F$, $F \in \mathfrak{F}$, erzeugt wird.

Sind Φ, Ψ Mengen von Filtern, so bezeichnet $\Phi\Psi$ die Menge aller $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F} \in \Phi$, $\mathfrak{G} \in \Psi$, Φ^{-1} die Menge aller $\mathfrak{F}^{-1}$, $\mathfrak{F} \in \Phi$. Offenbar gilt außerdem: ist $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{H}\mathfrak{G}$ für jeden Filter $\mathfrak{H}$ auf G. Ebenso findet man dann auch $\mathfrak{F}^{-1} \leqq \mathfrak{G}^{-1}$. Nun hat man in $\mathfrak{P}(\mathrm{G})$ die Beziehungen

$$(A \cap A')(B \cap B') \subset AB \cap A'B \cap AB' \cap A'B'$$
$$(A \cup A')(B \cup B') = AB \cup A'B \cup AB' \cup A'B'$$

für beliebige Teilmengen A, A', B und B' von G, sowie

$$(A \cap A')^{-1} = A^{-1} \cap A'^{-1}$$
$$(B \cup B')^{-1} = B^{-1} \cup B'^{-1}.$$

Daraus ergibt sich für die Filter:

$$(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})^{-1} = \mathfrak{F}^{-1} \wedge \mathfrak{G}^{-1}$$
$$(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F}')(\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{G}') = \mathfrak{F}\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{F}'\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{F}\mathfrak{G}' \wedge \mathfrak{F}'\mathfrak{G}'$$

und, sofern die oberen Grenzen existieren,

$$(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}')(\mathfrak{G} \vee \mathfrak{G}') \geqq \mathfrak{F}\mathfrak{G} \vee \mathfrak{F}'\mathfrak{G} \vee \mathfrak{F}\mathfrak{G}' \vee \mathfrak{F}'\mathfrak{G}'$$
$$(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})^{-1} = \mathfrak{F}^{-1} \vee \mathfrak{G}^{-1}.$$

2.

Entsprechend den topologischen Gruppen werden limitierte Gruppen folgendermaßen eingeführt:

Definition 1. *Eine Menge* G *heißt eine limitierte Gruppe, wenn sie*

a) eine Gruppe,

b) ein Limesraum derart ist, daß die Gruppenoperationen $(x, y) \to xy$ *und* $x \to x^{-1}$ *stetige Abbildungen von* $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ bzw. G *in* G *sind.*

Eine Limitierung auf der Gruppe G, die b) erfüllt, heiße für G zulässig. Die Forderung b) ist offensichtlich äquivalent mit der Forderung der Stetigkeit von $(x, y) \to xy^{-1}$. Man schließt unmittelbar, daß die Translationen $x \to ax$, $x \to xa$ isomorphe Selbstabbildungen des *Limesraumes* (G, τ) sind. Insbesondere sind daher die inneren Automorphismen von G Automorphismen der limitierten Gruppe (G, τ). Schließlich gibt es zu $a \neq b$ in G immer einen Automorphismus des *Limesraumes* (G, τ), der a in b überführt: etwa $\varphi(x) = a^{-1}xb$.

Man folgert aus der erwähnten Eigenschaft der Translationen: Ist e das neutrale Element von $\mathbf{G}$, so gilt für jedes $x \in \mathbf{G}$

(1) $$\tau x = x \cdot \tau e = \tau e \cdot x,$$

wobei unter $x \cdot \tau e$ das System aller Filter $x \cdot \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \in \tau e$, zu verstehen ist. Es ist klar, daß die $x \cdot \tau e$ $\wedge$-Ideale sind. Die Stetigkeitsforderung b) bedeutet explizit:

(2) $$\tau x \cdot \tau y \subset \tau(xy)$$

(3) $$(\tau x)^{-1} \subset \tau(x^{-1})$$

für alle x, y aus $\mathbf{G}$. Zusammen mit (1) erhält man daraus die folgenden Bedingungen für τe:

(I) $$\tau e \cdot \tau e \subset \tau e\,.$$

(II) $$(\tau e)^{-1} \subset \tau e$$

(III) $$x \cdot \tau e \cdot x^{-1} \subset \tau e \quad \text{für jedes feste } x \in \mathbf{G}\,.$$

Diese notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend dafür, daß eine gegebene Limitierung τ für $\mathbf{G}$ zulässig ist. Das ergibt sich aus dem folgenden, sogar etwas schärferen Satz:

Satz 1. *Es sei zu $e \in \mathbf{G}$ ein $\wedge$-Ideal τe von Filtern gegeben, das den e-Ultrafilter $\dot{e}$ enthält. Hat dann τe die Eigenschaften (I) bis (III), so gibt es genau eine für $\mathbf{G}$ zulässige Limitierung τ derart, daß τe gerade das $\wedge$-Ideal der bezüglich τ gegen e konvergierenden Filter auf $\mathbf{G}$ ist.*

Beweis: Die Eindeutigkeit von τ ist nach (1) klar. Es bleibt die Existenz zu zeigen. Dazu setzen wir

$$\tau x = x \cdot \tau e$$

für jedes $x \in \mathbf{G}$. Aus (III) folgt dann $\tau x = \tau e \cdot x$. τx ist ein $\wedge$-Ideal und enthält den x-Ultrafilter $\dot{x}$ wegen $\dot{x} = x \cdot \dot{e} = \dot{e} \cdot x$. Also ist $\tau : x \to \tau x$ eine Limitierung auf $\mathbf{G}$. Die Zulässigkeit dieser Limitierung ergibt sich sofort aus (I) bis (III); ebenso ist klar, daß das gegebene τe gerade das $\wedge$-Ideal der e-Filter in der so konstruierten Limitierung ist.

Genau dann ist eine für $\mathbf{G}$ zulässige Limitierung τ separiert, wenn für $x \neq e$ gilt:

$$\tau x \cap \tau e = \theta\,.$$

Satz 2. *Es seien $\mathbf{G}$ eine Gruppe, $\mathbf{H}$ eine Untergruppe. Ist τ für $\mathbf{G}$ zulässig, so ist die induzierte Limitierung $\tau_{\mathbf{H}}$ für $\mathbf{H}$ zulässig.*

Beweis: Da $\mathbf{H}$ eine Untergruppe ist, gelten $(F \cap \mathbf{H})^{-1} = F^{-1} \cap \mathbf{H}$ für beliebiges $F \subset \mathbf{G}$ und $(F \cap \mathbf{H})\,(G \cap \mathbf{H}) \subset FG \cap \mathbf{H}^2 \subset FG \cap \mathbf{H}$ für beliebige $F \subset \mathbf{G}$, $G \subset \mathbf{G}$. Daraus folgt für die induzierten Filter auf $\mathbf{H}$: $\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}^{-1} = (\mathfrak{F}^{-1})_{\mathbf{H}}$ und $\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}\mathfrak{G}_{\mathbf{H}} \geqq$ $\geqq (\mathfrak{F}\mathfrak{G})_{\mathbf{H}}$. Schließlich ist noch $x(F \cap \mathbf{H})\,x^{-1} = xFx^{-1} \cap \mathbf{H}$ für jedes $x \in \mathbf{H}$. Das ergibt nun, daß $\tau e \cap \mathbf{F}_{\mathbf{H}}(\mathbf{G})$ mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{F}^{-1}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, sowie für jedes $x \in \mathbf{H}$ den Filter $x\mathfrak{F}x^{-1}$ enthält. Daraus folgen (I) bis (III) für $\tau_{\mathbf{H}}e$, da dieses ja von $\sigma_{\mathbf{H}}(\tau e \cap \mathbf{F}_{\mathbf{H}}(\mathbf{G}))$ in $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ erzeugt wird.

Satz 3. *Es sei $\mathbf{N}$ ein Normalteiler in der limitierten Gruppe $(\mathbf{G}, \tau)$. Dann ist die Quotientenlimitierung $\hat{\tau}$ für $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ zulässig.*

Beweis: π sei die kanonische Abbildung $\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{N} = \hat{\mathbf{G}}$. $\hat{\tau}\hat{e}$ besteht aus allen Filtern $\pi\mathfrak{F} \wedge \pi\mathbf{G}$ und ihren Oberfiltern, wobei $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ die Menge $\Phi = \bigcup_{x \in \mathbf{N}} \tau x$ durchlaufen. Da $\mathbf{N}$ ein Normalteiler ist, enthält Φ mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}^{-1}$ sowie für jedes $x \in \mathbf{G}$ den Filter $x\mathfrak{F}x^{-1}$. Da nun $(\pi\mathfrak{F} \wedge \pi\mathfrak{G})^{-1} = (\pi\mathfrak{F})^{-1} \wedge \wedge (\pi\mathfrak{G})^{-1} = \pi(\mathfrak{F}^{-1}) \wedge \pi(\mathfrak{G}^{-1})$ ist, ist jedenfalls $(\hat{\tau}\hat{e})^{-1} \subset \hat{\tau}\hat{e}$. Ferner ist $(\pi\mathfrak{F} \wedge \wedge \pi\mathfrak{G})(\pi\mathfrak{F}' \wedge \pi\mathfrak{G}') = \pi(\mathfrak{F}\mathfrak{F}') \wedge \pi(\mathfrak{G}\mathfrak{F}') \wedge \pi(\mathfrak{F}\mathfrak{G}') \wedge \pi(\mathfrak{F}'\mathfrak{G}')$ in $\hat{\tau}\hat{e}$, sobald $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in τe sind. Daraus schließt man $\hat{\tau}\hat{e} \cdot \hat{\tau}\hat{e} \subset \hat{\tau}\hat{e}$. Ebenso zeigt man schließlich $\hat{x} \cdot \hat{\tau}\hat{e} \cdot \hat{x}^{-1} \subset \hat{\tau}\hat{e}$ für jedes $\hat{x} \in \hat{\mathbf{G}}$, womit alles bewiesen ist.

Satz 4. *Ist* $\mathbf{H}$ *eine Untergruppe (Normalteiler) der limitierten Gruppe* $(\mathbf{G}, \tau)$, *so ist* $\overline{\mathbf{H}}$ *Untergruppe (Normalteiler) in* $\mathbf{G}$.

Beweis: Es seien x, y in $\overline{\mathbf{H}}$. Es gibt $\mathfrak{F}_{\mathbf{H}} \in \mathbf{F}(\mathbf{H})$, $\mathfrak{G}_{\mathbf{H}} \in \mathbf{F}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H})$ derart, daß $F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}) \in \tau x, F(\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}) \in \tau y$ ist. Dann ist $F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}) \cdot F(\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}) \in \tau(xy)$. Wegen $\sigma_{\mathbf{H}} F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}) = \mathfrak{F}_{\mathbf{H}}, \sigma_{\mathbf{H}} F(\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}) = \mathfrak{G}_{\mathbf{H}}$, folgt nach dem Beweis von Satz 2: $\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}\mathfrak{G}_{\mathbf{H}} \geqq \sigma_{\mathbf{H}}(F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}) \cdot \cdot F(\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}))$. Da außerdem $F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}) \geqq F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}) \cdot F(\mathfrak{G}_{\mathbf{H}})$ folgt, ist $F(\mathfrak{F}_{\mathbf{H}}\mathfrak{G}_{\mathbf{H}}) \in \tau(xy)$, also $xy \in \overline{\mathbf{H}}$. Entsprechend zeigt man, daß aus $x \in \overline{\mathbf{H}}$ folgt $x^{-1} \in \overline{\mathbf{H}}$; ebenso ergibt sich dieselbe Überlegung $x\overline{\mathbf{H}}x^{-1} \subset \overline{\mathbf{H}}$ für $x \in \mathbf{G}$, sofern $\mathbf{H}$ ein Normalteiler ist. Damit ist auch dieser Satz bewiesen.

3.

Es seien wie in § 1 $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_0$ die Halbordnungen der Limitierungen, Hauptideal-Limitierungen bzw. Topologien auf $\mathbf{G}$. Mit $\mathscr{T}^{\mathbf{G}}$, $\mathscr{T}_1^{\mathbf{G}}$, $\mathscr{T}_0^{\mathbf{G}}$ bezeichnen wir die resp. Teilmengen der *zulässigen* Limitierungen, wenn $\mathbf{G}$ eine Gruppe ist. Wir übernehmen aus § 1 die Abbildungen $\psi: \mathscr{T} \to \mathscr{T}_1$, $\omega: \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_0$, $\bar{\omega} = \omega \circ \psi$; ihre Restriktionen auf $\mathscr{T}^{\mathbf{G}}$ bzw. $\mathscr{T}_1^{\mathbf{G}}$ seien wieder mit ψ, ω bezeichnet. Wir bemerken noch, daß mit τ, σ auch $\tau \vee \sigma$ in $\mathscr{T}^{\mathbf{G}}$ ist, denn es ist $(\tau \vee \sigma)e = \tau e \cap \sigma e$ nach Definition. Es folgen außerdem:

Satz 5. $\mathscr{T}_1^{\mathbf{G}} = \mathscr{T}_0^{\mathbf{G}}$.

Beweis: Es sei $\tau \in \mathscr{T}_1^{\mathbf{G}}$, $\tau e = [\mathfrak{V}]$. Aus (I) ergibt sich $\mathfrak{V}^2 \geqq \mathfrak{V}$ und aus (II) $\mathfrak{V}^{-1} \geqq \mathfrak{V}$, aus (III) schließlich $x \cdot \mathfrak{V} \cdot x^{-1} \geqq \mathfrak{V}$ für jedes feste $x \in \mathbf{G}$. Nach bekannten Sätzen über topologische Gruppen definieren dann die Filter $x \cdot \mathfrak{V}$ (bzw. $\mathfrak{V} \cdot x$) eine für $\mathbf{G}$ zulässige Topologie, so daß $\mathfrak{V}$ gerade der Umgebungsfilter von e ist. Nun ist aber offensichtlich $[x \cdot \mathfrak{V}] = x \cdot [\mathfrak{V}]$, d. h. $[x \cdot \mathfrak{V}] = \tau x$ für jedes $x \in \mathbf{G}$, so daß τ mit der durch $\mathfrak{V}$ definierten Topologie zusammenfällt. Das beweist den Satz.

Satz 6. $\psi(\mathscr{T}^{\mathbf{G}}) \subset \mathscr{T}_0^{\mathbf{G}}$.

Beweis: Wegen Satz 5 müssen wir nur zeigen, daß $\psi\tau$ für $\mathbf{G}$ zulässig ist, sofern τ es ist. Es sei dazu $(\psi\tau)e = [\mathfrak{V}]$, d. h. $\mathfrak{V} = \bigcap_{\tau e} \mathfrak{F}$. Dann ist

$$\Big(\bigcap_{\tau e} \mathfrak{F}\Big)\Big(\bigcap_{\tau e} \mathfrak{G}\Big) = \bigcap_{\tau e} \mathfrak{F}\mathfrak{G},$$

da für eine beliebige Mengenfamilie (F_ι) gilt: $(\cup F_\iota)(\cup F_\iota) = \cup F_\iota F_\varkappa$. Wegen $\tau e \cdot \tau e \subset \tau e$ folgt daher $\bigcap_{\tau e} \mathfrak{F}\mathfrak{G} \geqq \bigcap_{\tau e} \mathfrak{H} = \mathfrak{V}$, d. h. $\mathfrak{V}^2 \geqq \mathfrak{V}$. In derselben Weise ergeben sich $\mathfrak{V}^{-1} \geqq \mathfrak{V}$ und für jedes feste $x: x\mathfrak{V}x^{-1} \geqq \mathfrak{V}$; damit ist die Behauptung bewiesen.

Zu der limitierten Gruppe (G, τ) ist dadurch eine wohlbestimmte *topologische Gruppe* $(\mathrm{G}, \psi\tau)$ definiert, die wir die zu (G, τ) *assoziierte* topologische Gruppe nennen. Gilt für τ das erste Trennungsaxiom, so gilt es noch für $\psi\tau$, so daß $\psi\tau$ sogar separiert ist, mithin auch τ. Mit § 1, Satz 15 ergibt sich so:

Genau dann ist die zulässige Limitierung τ separiert, wenn jedes $\{x\}$ τ-abgeschlossen ist. Dafür ist offenbar hinreichend, daß $\{e\}$ τ-abgeschlossen ist.

4.

Es sei (G, τ) eine limitierte Gruppe.

Definition 2. *Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf G heißt ein linksseitiger Cauchy-Filter, wenn $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$ ist.*

$\tilde{\mathrm{G}}_s(\tau)$ sei die Menge aller linksseitigen Cauchy-Filter auf G. Entsprechend bezeichnet $\tilde{\mathrm{G}}_d(\tau)$ die Menge der rechtsseitigen Cauchy-Filter auf G, d. h. der Filter $\mathfrak{F}$, so daß $\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1} \in \tau e$ ist. Jeder konvergente Filter ist sowohl rechts- als linksseitiger Cauchy-Filter, wie sofort aus (I), (II) folgt. Es braucht aber nicht jeder Cauchy-Filter zu konvergieren. Eine limitierte Gruppe, in der jeder Cauchy-Filter konvergiert, heißt *komplett.*

Jeder Oberfilter eines Cauchy-Filters ist selbst Cauchysch.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise heiße im folgenden „Cauchy-Filter" immer „linksseitiger Cauchy-Filter".

Definition 3. *Zwei Cauchy-Filter $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ heißen äquivalent,*

$$\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G}$$

wenn $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ ein Cauchy-Filter ist.

Man hat das folgende Kriterium:

Satz 7. *$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sind genau dann äquivalent, wenn $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G} \in \tau e$ ist.*

Beweis: Wegen $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \leqq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \leqq \mathfrak{G}$ ist $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})^{-1}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G} \in \tau e$ ist, sobald $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ Cauchysch ist.

Umgekehrt sei $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G} \in \tau e$. Dann ist $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})^{-1}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G} \wedge$ $\wedge\, \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{G}$. Die vier Filter auf der rechten Seite sind in τe, da $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ Cauchysch und äquivalent sind und $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G})^{-1}$ in τe liegt. Also ist $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ Cauchysch.

Es ist nachzuweisen, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität und Symmetrie von $\sim$ sind klar. Die Transitivität folgt mit Satz 7: ist $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G} \in \tau e$, $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{H} \in \tau e$, so ist nach (I) auch $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{H} \in \tau e$. Nun ist $e \in GG^{-1}$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$, also $F^{-1}H \subset F^{-1}GG^{-1}H$ für alle $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{G}$ und $H \in \mathfrak{H}$. Daher hat man $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{H}$ und folglich $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{H} \in \tau e$, d. h. $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{H}$.

Satz 8. *Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ in τx, so ist $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{F} \in \tau x$ und $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{F}$, so folgt $\mathfrak{G} \in \tau x$.*

Beweis: Wegen $(\tau x)^{-1} \cdot \tau x \subset \tau e$ ist der erste Teil der Behauptung klar. Sei dann $\mathfrak{F} \in \tau x$ und $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{F}$, d. h. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ Cauchysch (insbesondere also auch $\mathfrak{G}$!). Da $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$, ist x adhärent an $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$. Da außerdem $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{G} \in \tau x$ aus dem

Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter. Ist x adhärent an $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{F} \in \tau x$.*

Beweis: x ist genau dann an $\mathfrak{F}$ adhärent, wenn ein $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$ in τx existiert. Wegen $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$ ist dann auch $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$. Nun ist aber $\mathfrak{G} = x\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \in \tau e$, so daß $\mathfrak{H}^{-1}x^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$, aber auch $\mathfrak{H}\mathfrak{H}^{-1}x^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$ folgen. Da $e \in HH^{-1}$ für jedes $H \in \mathfrak{H}$ gilt, ist $x^{-1}\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{H}\,\mathfrak{H}^{-1}x^{-1}\mathfrak{F}$, also $x^{-1}\mathfrak{F} \in \tau e$, woraus $\mathfrak{F} \in \tau x$ folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen;

schließlich also auch der Satz 8.

Der eben bewiesene Hilfssatz ergibt insbesondere, daß jede kompakt limitierte Gruppe komplett ist. Wir befassen uns hier nicht mit dem Problem der Komplettierung limitierter Gruppen, auf das an anderer Stelle eingegangen werden soll.

5.

Wir betrachten im Folgenden Vektorräume über den reellen Zahlen (R-Vektorräume) oder über den komplexen Zahlen (C-Vektorräume), die wir i. a. mit $E, F, \ldots$ bezeichnen werden. Wo nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, wollen wir uns auf reelle Vektorräume beschränken. Die Ausführungen lassen sich ohne Mühe auf den komplexen Fall übertragen.

Den allgemeinen Definitionen entsprechend ist ein *limitierter Vektorraum* ein Vektorraum E mit einer Limitierung τ derart, daß die Abbildungen $(x,y) \to x+y$ und $(\lambda, x) \to \lambda x$ stetige Abbildungen von $E \times E$ bzw. $R \times E$ in E sind. τ heißt dann für den Vektorraum E zulässig. Die Menge der zulässigen Limitierungen sei wieder $\mathcal{T}^E$.

Es sei $\mathbf{V}$ der Umgebungsfilter von $0 \in R$, der von den symmetrischen offenen (bzw. abgeschlossenen) Intervallen $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (bzw. $[-\varepsilon, \varepsilon]$) erzeugt wird.

Satz 9. *Eine Limitierung τ ist genau dann für den Vektorraum E zulässig, wenn sie die folgenden vier Eigenschaften hat:*

A) $\tau 0 + \tau 0 \subset \tau 0$
B) $\lambda \cdot \tau 0 \subset \tau 0$ *für jedes* $\lambda \in R$
C) $\mathbf{V} \cdot \tau 0 \subset \tau 0$
D) Für jedes $x \in E$ *ist* $\mathbf{V} \cdot x \in \tau 0$.

Jedes $\wedge$-Ideal von Filtern, das den 0-Ultrafilter 0 enthält und die Eigenschaften A) bis D) hat, definiert eine für E zulässige Limitierung nach dem Verfahren von Satz 1.

Bemerkung: Unter $\mathbf{V} \cdot x$ ist derjenige Filter auf E zu verstehen, der von den Mengen $\Phi \cdot x = \{\lambda x / \lambda \in \Phi\}$ für $\Phi \in \mathbf{V}$ erzeugt wird. Unter $\mathbf{V} \cdot \mathfrak{F}$ für $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ ist entsprechend der von den Mengen $\Phi \cdot F = \{\lambda x / \lambda \in \Phi, x \in F\}$ für $\Phi \in \mathbf{V}, F \in \mathfrak{F}$, erzeugte Filter zu verstehen, d. h. das Bild unter $(\lambda, x) \to \lambda x$ von $\mathbf{V} \times \mathfrak{F}$. λF schließlich wird von den Mengen $\lambda F, F \in \mathfrak{F}$, erzeugt.

Der Satz 9 ergibt sich — wie im Falle topologischer Vektorräume — unmittelbar daraus, daß man die Identität

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

hat (λ, λ_0 aus R, x, x_0 aus E). Man kann auch verwenden, daß für jeden Filter $\mathfrak{F}$, insbesondere jeden 0-Filter, die Beziehung

$$(\lambda_0 + \mathbf{V})(x_0 + \mathfrak{F}) \geqq \lambda_0 x_0 + \lambda_0 \mathfrak{F} + \mathbf{V} \cdot x_0 + \mathbf{V} \cdot \mathfrak{F}$$

besteht ($\lambda_0 \in R$, $x_0 \in E$ beliebig, aber fest).

Die Theorie der Teilräume und Quotienten wird hier ebenfalls wie für topologische Vektorräume durchgeführt, so daß wir auf eine erneute Darstellung verzichten. Die Theorie der direkten Summen limitierter Vektorräume läßt sich als ein Spezialfall der „induktiven Limites" erhalten; siehe Abschnitt 6, Bemerkung 3.

Es sei nun $\tau \in \mathcal{T}^E$. Γ bezeichne die Familie aller bezüglich τ stetigen *Seminormen* auf E. Γ definiert auf E eine lokal-konvexe Topologie $\psi^0\tau$. Wir zeigen $\psi^0\tau \leqq \tau$: Es sei nämlich $\mathfrak{F} \in \tau 0$. Dann gilt $p(\mathfrak{F}) \to 0$ für jede τ-stetige Seminorm p, also $\mathfrak{F} \geqq p^{-1}(\mathfrak{V})$. Somit ist immer noch

$$\mathfrak{F} \geqq \sup_{p \in \Gamma} p^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}^0 .$$

$\mathfrak{V}^0$ ist aber der Umgebungsfilter von 0 bezüglich $\psi^0\tau$. Also ergibt sich $\tau 0 \subset (\psi^0\tau)\, 0$. Da $\psi^0\tau \in \mathcal{T}^E_0$ ist, gilt diese Inklusion für jedes $x \in E$, woraus $\psi^0\tau \leqq \tau$ folgt.

Da $\psi\tau$ schon eine Topologie ist, ist dann auch $\psi^0\tau \leqq \psi\tau$. $\psi\tau \in \mathcal{T}_0$ ergibt sich daraus, daß τ insbesondere für die abelsche Gruppenstruktur von E zulässig ist.

Es sei nun σ irgendeine lokal-konvexe Topologie auf E, so daß $\sigma \leqq \tau$ ist. Die σ-stetigen Seminormen, die ja σ erzeugen, sind alle auch τ-stetig, so daß für den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}$ von $0 \in E$ bezüglich σ die Relation $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{V}^0$ folgt, aus der sich $\sigma \leqq \psi^0\tau$ ergibt. Zusammengefaßt haben wir damit den

Satz 10. *Zu jeder Limitierung $\tau \in \mathcal{T}^E$ gibt es eine wohlbestimmte lokalkonvexe Topologie $\psi^0\tau \in \mathcal{T}^E_0$, die dadurch charakterisiert ist, daß sie die feinste lokal-konvexe Topologie $\leqq \tau$ ist.*

Der topologische Vektorraum $(E, \psi^0\tau)$ heißt der zu (E,τ) assoziierte lokal-konvexe Raum; ebenso heiße $\psi^0\tau$ die zu τ assoziierte lokal-konvexe Topologie.

Nun sei für $\tau \in \mathcal{T}^E$ E' der *Dualraum* zu (E,τ), d. h. der Vektorraum aller τ-stetigen Linearformen auf E. Dann gilt der

Satz 11. $E' = E_{\psi^0\tau}$.

Beweis: Wegen $\psi^0\tau \leqq \tau$ ist $E'_{\psi^0\tau} \subset E'_\tau$. Sei dann x' eine τ-stetige Linearform auf E. Die Funktion $x \to |\langle x, x'\rangle|$ ist immer noch τ-stetig und ist, wie man leicht sieht, eine Seminorm, die wir mit $p_{x'}$ bezeichnen. Man hat daher $(p_{x'})_{x' \in E'_\tau} \subset \Gamma$, so daß die durch die Familie der $p_{x'}$, $x' \in E'_x$, erzeugte Topologie $\sigma \leqq \psi^0\tau$ ist. σ ist die schwächste Topologie, die lokal-konvex ist und für die alle $x' \in E'_\tau$ stetig sind[4]). Also sind alle x' noch $\psi^0\tau$-stetig.

Ist $x' \in E'_\tau$, so bezeichnen wir, wie dies üblich geworden ist, den Wert von x' auf x mit $\langle x, x'\rangle$. Die im Beweis von Satz 11 verwendete Topologie σ sei in der Folge mit $\psi^*\tau$ bezeichnet. $\psi^*\tau$ ist genau dann separiert, wenn $\psi^0\tau$ es ist: aus der Separiertheit von $\psi^*\tau$ folgt wegen $\psi^*\tau \leqq \psi^0\tau$ diejenige von $\psi^0\tau$. Umgekehrt sei $\psi^0\tau$ separiert. Dann existiert nach dem Satz von

---

[4]) Der Umgebungsfilter von 0 bezüglich σ wird durch die endlichen Durchschnitte der Mengen $U(x'; \varepsilon) = x'^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ erzeugt. In jeder Topologie, in der alle x' stetig sind, ist jedes $U(x'; \varepsilon)$ Umgebung von 0.

HAHN-BANACH zu jedem $x \neq 0$ ein $x' \in E'_\tau$, so daß $\langle x, x' \rangle \neq 0$ ist, also auch $p_{x'}(x) \neq 0$, so daß $\psi^* \tau$ separiert ist.

Nennen wir eine Limitierung mit der „Dualität“[5]) zwischen (E, τ) und E'_τ *verträglich*, wenn sie dieselben stetigen Linearformen hat wie τ, so sieht man, daß $\psi^* \tau$ die schwächste *Limitierung* (nicht nur die schwächste Topologie) ist, die mit dieser „Dualität“ verträglich ist: ist nämlich $E'_\sigma = E'_\tau$, so ist nach Satz 11 auch $E'_{\psi^0 \sigma} = E'_\tau$, also $\psi^0 \sigma \geqq \psi^* \tau$. Wegen $\psi^0 \sigma \leqq \sigma$ folgt damit $\psi^* \tau \leqq \sigma$. Zusammenfassend formulieren wir jetzt den

Satz 12. *Sei $\tau \in \mathcal{T}^E$. Die Topologie $\psi^* \tau$ ist die schwächste mit der „Dualität“ von (E, τ) und E'_τ verträgliche Limitierung auf E. Ist $\psi^0 \tau$ separiert, so ist mithin*

$$\psi^* \tau = \sigma(E, E')$$

die «topologie affaiblie» (BOURBAKI) *zu $\psi^0 \tau$.*

Sei wieder $E' = E'_\tau$. Man definiert auf E' eine *schwache Limitierung* τ' durch die Festsetzung: $\mathfrak{F}' \in \tau' 0'$ gelte genau dann, wenn für jedes feste $x \in E$ der Filter $\langle x, \mathfrak{F}' \rangle$ $(= \mathfrak{F}'(x))$ in R gegen 0 konvergiert. Man folgert leicht den

Satz 13. *$\psi^0 \tau$ sei separiert. Dann ist τ' die schwache Topologie $\sigma(E', E)$* (BOURBAKI) *auf E', induziert von der Dualität zwischen (E, τ) und E'.*

Die Topologie τ' wird durch die Seminormen $x' \to |\langle x, x' \rangle|$ definiert und ist also für E' zulässig und lokal-konvex.

Wir definieren die *τ-beschränkten Mengen* in E als die $\psi^0 \tau$-beschränkten Mengen. Sei $\psi^0 \tau$ separiert. Dann sind $\psi^0 \tau$ und $\psi^* \tau$ mit der Dualität zwischen (E, τ) und E'_τ verträglich und haben somit dieselben beschränkten Mengen (s. etwa [2], ch. IV, §2, th. 3 und prop. 4). Daraus ergibt sich der

Satz 14. *Eine Teilmenge $B \subset E$ ist genau dann τ-beschränkt, wenn auf ihr jede τ-stetige Seminorm beschränkt bleibt.*

Und mit der Definition von $\psi^* \tau$ der

Satz 15. *Ist $\psi^0 \tau$ separiert, so ist $B \subset E$ genau dann τ-beschränkt, wenn auf B jede τ-stetige Linearform beschränkt bleibt.*

In den Anwendungen wird der häufigste Fall wohl der sein, daß $\psi^0 \tau$ separiert ist. Dann kann man die Aussage von Satz 15 als Definition für die τ-beschränkten Mengen nehmen.

Satz 16. *Bei separiertem $\psi^0 \tau$ sind die beschränkten Mengen für alle mit der Dualität zwischen (E, τ) und E'_τ verträglichen Limitierungen dieselben.*

Unter der Voraussetzung von Satz 16 läßt sich auf E'_τ die übliche „starke Topologie“, d. h. die Topologie der uniformen Konvergenz in den τ-beschränkten Mengen, einführen, die in diesem Falle nur von der Dualität zwischen (E, τ) und E'_τ abhängt. Man erhält so etwa die übliche Topologie auf dem Raum $\mathcal{D}'$ der Distributionen (mit skalaren Werten) auf dem R^n.

6.

Wir besprechen in diesem letzten Abschnitt ein Verfahren, das die Konstruktion von Limesräumen aus gegebenen Familien von Limesräumen, insbesondere von topologischen Räumen, gestattet: es handelt sich um den

---

[5]) Diese Dualität ist nur dann echt, wenn $\psi^0 \tau$ separiert ist.

induktiven Limes von Limitierungen bzw. Topologien. Wir beginnen mit einem Spezialfall:

Es sei $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Limesräumen, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Indexmenge I ist durch eine Ordnungsrelation $\leqq$ gerichtet.
2. Für $\alpha \leqq \beta$ ist $E_\alpha \subset E_\beta$.
3. Ist $\alpha \leqq \beta$ und bezeichnet $\tau_{\beta\alpha}$ die von τ_β auf E_α induzierte Limitierung, so ist $\tau_{\beta\alpha} \leqq \tau_\alpha$.

Die dritte Bedingung bedeutet offenbar die Stetigkeit der Inklusionsabbildung $E_\alpha \to E_\beta$ für $\alpha \leqq \beta$.

Es sei dann $E = \bigcup\limits_\alpha E_\alpha$. Wir nehmen dabei an, es sei $E \notin (E_\alpha)_{\alpha \in I}$. Damit geben wir die

Definition 4. *Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf E heiße τ-konvergent gegen x, wenn es ein $\alpha \in I$ und ein $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x$ derart gibt, daß $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha)$ ist.*

Wir zeigen, daß dadurch eine Limitierung τ auf E definiert ist. Es ist klar, daß für jedes $x \in E$ $\dot{x} \in \tau x$ ist, denn es gibt ein $\alpha \in I$ derart, daß $x \in E_\alpha$ gilt. Ist dann $\dot{x}_\alpha$ der x-Ultrafilter auf E_α, so erzeugt $\dot{x}_\alpha$ den Filter $\dot{x}$; also ist $\dot{x} \in \tau x$. Ferner ist evident, daß mit $\mathfrak{F}$ jeder Oberfilter zu $\mathfrak{F}$ zu τx gehört.

Es seien nun $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ in τx, etwa $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha)$, $\mathfrak{G} \geqq F(\mathfrak{G}_\beta)$, wo $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x$ und $\mathfrak{G}_\beta \in \tau_\beta x$ gelten. Sei dann $\gamma \geqq \alpha, \beta$. Es ist $E_\alpha \cap E_\beta \subset E_\gamma$. $F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha)$, $F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta)$ seien die von $\mathfrak{F}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{G}_\beta$ auf E_γ erzeugten Filter. Wegen $\tau_{\gamma\alpha} \leqq \tau_\alpha$, $\tau_{\gamma\beta} \leqq \tau_\beta$ ist $\tau_\alpha x \subset \tau_{\gamma\alpha} x$, usw., so daß aus der Definition der induzierten Limitierung $F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha) \in \tau_\gamma x$ und $F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta) \in \tau_\gamma x$ folgen. Das ergibt wegen $F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta) \in \tau_\gamma x$ sofort $F(F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta)) \in \tau x$. Nun ist aber $F(F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta)) = F(F_\gamma(\mathfrak{F}_\alpha)) \wedge$ $\wedge F(F_\gamma(\mathfrak{G}_\beta)) = F(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge F(\mathfrak{G}_\beta)$, so daß $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \in \tau x$ folgt. Daher ist $\tau : x \to \tau x$ eine Limitierung auf E.

Man bemerkt, daß wir hier die folgenden Identitäten verwendet haben, deren Nachweis unmittelbar ist:

$$\text{für } \alpha \leqq \beta: \qquad \begin{gathered} F(\mathfrak{F}_\alpha \wedge \mathfrak{G}_\alpha) = F(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge F(\mathfrak{G}_\alpha)\,; \\ F(F_\beta(\mathfrak{F}_\alpha)) = F(\mathfrak{F}_\alpha)\,. \end{gathered}$$

Ferner gilt, falls die oberen Grenzen existieren:

$$F(\mathfrak{F}_\alpha \vee \mathfrak{G}_\alpha) = F(\mathfrak{F}_\alpha) \vee F(\mathfrak{G}_\alpha)\,.$$

Sei nun für jedes $\alpha \in I$ τ_{E_α} die von τ auf E_α induzierte Limitierung. $\tau_{E_\alpha} x$ besteht aus den von den $\mathfrak{F} \in \tau x$ induzierten Filtern $\sigma_\alpha \mathfrak{F}$. Es sei dann $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x$. Es folgt $F(\mathfrak{F}_\alpha) \in \tau x$, also $\sigma_\alpha F(\mathfrak{F}_\alpha) \in \tau_{E_\alpha} x$. Da aber $\sigma_\alpha F(\mathfrak{F}_\alpha) = \mathfrak{F}_\alpha$ ist, ergibt sich daraus $\tau_\alpha x \subset \tau_{E_\alpha} x$ — und zwar für jedes $\alpha \in I$. Das bedeutet:

Für jedes $\alpha \in I$ ist $\tau_{E_\alpha} \leqq \tau_\alpha$.

Nun sei σ eine beliebige Limitierung auf E, so daß für jedes $\alpha \in I$ $\sigma_{E_\alpha} \leqq \tau_\alpha$ ist. Ist dann $\mathfrak{F} \in \tau x$, d. h. $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha)$ für ein gewisses α und $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x$, so folgt aus der Definition der induzierten Limitierung $F(\mathfrak{F}_\alpha) \in \sigma x$, also $\mathfrak{F} \in \sigma x$. Das bedeutet $\tau x \subset \sigma x$. Da dies für ein beliebiges $x \in E$ gilt, ergibt sich damit der

Satz 17. *Die durch Def. 4 gegebene Limitierung τ auf E ist die feinste Limitierung, die auf jedem E_α eine Limitierung induziert, die schwächer ist als τ_α.*

Satz 18. *Genau dann ist τ separiert, wenn jedes τ_α es ist.*

Beweis: Ist τ separiert, so ist wegen $\tau_{E_\alpha} \leqq \tau_\alpha$ jedes τ_α es auch. Umgekehrt seien alle τ_α separiert. Gesetzt dann, es gäbe ein $\mathfrak{F} \in \tau x \cap \tau y$ für $x \neq y$. Es gibt auf jeden Fall ein $\alpha \in I$, so daß x und y in E_α, also in jedem E_β für $\alpha \leqq \beta$ liegen. Ferner gibt es γ, δ in I und $\mathfrak{F}_\gamma \in \tau_\gamma x$, $\mathfrak{F}_\delta \in \tau_\delta y$, so daß $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\gamma)$ und $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\delta)$ sind. Insbesondere müßte dann die obere Grenze $F(\mathfrak{F}_\gamma) \vee F(\mathfrak{F}_\delta)$ existieren. Für jedes $\varepsilon \geqq \gamma, \delta$ ergäbe sich daraus die Existenz der oberen Grenze $F_\varepsilon(\mathfrak{F}_\gamma) \vee F_\varepsilon(\mathfrak{F}_\delta)$. Aus $\mathfrak{F}_\gamma \in \tau_\gamma x$, $\mathfrak{F}_\delta \in \tau_\delta y$ folgte damit $F_\varepsilon(\mathfrak{F}_\gamma) \vee F_\varepsilon(\mathfrak{F}_\delta) \in \in \tau_\varepsilon x \cap \tau_\varepsilon y$ entgegen der Voraussetzung, wonach τ_ε separiert ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir nennen — aus einem w. u. ersichtlichen Grund — τ den *induktiven Limes* der Limitierungen τ_α. Sind alle τ_α Topologien, so ist ihr induktiver Limes nach dieser Definition *nicht unbedingt auch eine Topologie*. Wir werden darauf w. u. noch einmal hinzuweisen haben.

Ist $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine zweite Familie von Limitierungen, so daß die Familie $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in I}$ die Eigenschaft 3) hat, so gilt für ihren induktiven Limes: $\sigma \leqq \tau$, sofern $\sigma_\alpha \leqq \tau_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ ist.

Satz 19. *Es sei $J \subset I$ ein kofinale Teilmenge. Dann ist $E = \bigcup\limits_{\alpha \in J} E_\alpha$ und der induktive Limes τ' der τ_α, $\alpha \in J$, ist gleich τ.*

Beweis: Offenbar ist $\tau \leqq \tau'$, d. h. $\tau' x \subset \tau x$ für jedes $x \in E$. Umgekehrt sei $\mathfrak{F} \in \tau x$, d. h. $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha)$ für ein gewisses $\alpha \in I$ und ein $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x$. Dann existiert ein $\beta \geqq \alpha$ in J. Wegen $\tau_{\beta\alpha} \leqq \tau_\alpha$ konvergiert dann $F_\beta(\mathfrak{F}_\alpha)$ in E_β gegen x. Da schließlich $F(\mathfrak{F}_\alpha) = F(F_\beta(\mathfrak{F}_\alpha))$ ist, folgt $\mathfrak{F} \geqq F(F_\beta(\mathfrak{F}_\alpha))$ und damit $\mathfrak{F} \in \tau' x$. Das beweist $\tau' \leqq \tau$ und also die Behauptung.

Bemerkung 1: Die Konstruktion von τ nach Def. 4 läßt sich als ein Spezialfall der folgenden auffassen, was auch die Wahl der Bezeichnung „induktiver Limes" erklärt:

Es sei wieder I durch eine Relation $\leqq$ gerichtet. $\leqq$ braucht nicht eine Ordnungsrelation zu sein, es genügt, wenn $\leqq$ reflexiv und transitiv ist („Quasiordnung"). Dann sei $(E_\alpha, \varphi^\alpha_\beta)$ eine induktive Familie von Mengen und Abbildungen über I («famille inductive» bei Bourbaki, "direct system" bei Lefschetz und Eilenberg/Steenrod). E sei der induktive Limes der E_α nach den Abbildungen $\varphi^\alpha_\beta : E_\alpha \to E_\beta\,(\alpha \leqq \beta)$. Ferner sei jedes E_α mit einer Limitierung τ_α derart versehen, daß für $\alpha \leqq \beta$ die Abbildung φ^α_β stetig ist. Wir sagen dann, es liege eine induktive Familie von Limesräumen vor, für die wir $(E_\alpha, \tau_\alpha;\, \varphi^\alpha_\beta)$ schreiben. Die Menge E läßt sich in der folgenden Weise zu einem Limesraum machen: Für jedes $\alpha \in I$ hat man in natürlicher Weise eine Abbildung $\varphi_\alpha : E_\alpha \to E$ und es ist $E = \bigcup\limits_\alpha \varphi_\alpha(E_\alpha)$. Dann sei τ die feinste Limitierung auf E, so daß alle $\varphi_\alpha : E_\alpha \to E$ stetig sind (s. § 2, Abschnitt 4, I). Dieses τ heißt der *induktive Limes* der Limitierungen τ_α, wofür wir auch $\tau = \varinjlim \tau_\alpha$ schreiben. Der Limesraum (E, τ) heißt dann ebenfalls der induktive Limes der Limesräume (E_α, τ_α) nach den Abbildungen φ^α_β. Wir schreiben auch dafür $(E, \tau) = \varinjlim (E_\alpha, \tau_\alpha)$.

Offenbar erhält man den schon besprochenen Fall zurück, wenn $\leqq$ eine Ordnungsrelation ist und alle φ_α Inklusionen sind.

Aus §2, Abschnitt 4, I) entnehmen wir noch: Es ist

$$\bar{\omega}(\varinjlim \tau_\alpha) = \varinjlim{}^* \bar{\omega}\tau_\alpha ,$$

wobei unter $\varinjlim{}^* \bar{\omega}\tau_\alpha$ die feinste *Topologie* zu verstehen ist, für die die Abbildungen $\varphi_\alpha : (E_\alpha, \bar{\omega}\tau_\alpha) \to E$ stetig sind (d. h. der topologische induktive Limes der $\bar{\omega}\tau_\alpha$). Es gilt übrigens $\varinjlim{}^* \bar{\omega}\tau_\alpha \leqq \varinjlim \bar{\omega}\tau_\alpha$ und, wie wir schon erwähnten, $\varinjlim \bar{\omega}\tau_\alpha$ ist nicht unbedingt eine Topologie.

Es sei noch eine wichtige Eigenschaft des induktiven Limes angegeben: Ist $(E, \tau) = \varinjlim (E_\alpha, \tau_\alpha)$, (E', τ') ein beliebiger Limesraum, so ist eine Abbildung $\varphi : E \to E'$ genau dann stetig, wenn alle $\varphi \circ \varphi_\alpha : E_\alpha \to E'$ stetig sind.

Die Bedingung ist natürlich notwendig. Umgekehrt seien alle $\varphi \circ \varphi_\alpha$ stetig. Zum Beweis der Behauptung, daß dann φ stetig sei, erinnern wir an die Definition von τ: nach §2, 4, I) ist für jedes $x \in E$ τx das kleinste $\wedge$-Ideal von Filtern, das alle Filter $\varphi_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha)$ enthält, wobei $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha x_\alpha$ und $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x$ gelten. τx besteht aus allen Oberfiltern zu Filtern der Form $\varphi_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge \varphi_\beta(\mathfrak{F}_\beta)$, wobei $\mathfrak{F}_\alpha$, $\mathfrak{F}_\alpha$ in F_α bzw. E_β gegen x_α, x_β konvergieren und $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta) = x$ ist. Nun ist aber $\varphi(\varphi_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha) \wedge \varphi_\beta(\mathfrak{F}_\beta)) = \varphi(\varphi_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha)) \wedge \varphi(\varphi_\beta(\mathfrak{F}_\beta))$. Nach Voraussetzung ist $\varphi(\varphi_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha)) \in \tau' \varphi(x)$, $\varphi(\varphi_\beta(\mathfrak{F}_\beta)) \in \tau' \varphi(x)$ wegen $\varphi(x) = \varphi(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = \varphi(\varphi_\beta(x_\beta))$. Also gehört auch die untere Grenze der beiden Filter zu $\tau' \varphi(x)$. Daraus folgt leicht die Stetigkeit von φ, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nun sei — unter den Voraussetzungen von Def. 4 — jedes E_α ein R-Vektorraum. Offenbar ist es dann auch E. Für jedes $\alpha \in I$ sei τ_α eine für E_α zulässige Limitierung. Wir zeigen, daß dann $\tau = \varinjlim \tau_\alpha$ für E zulässig ist. Dazu seien zunächst $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ in $\tau 0$. Es ist also $\mathfrak{F} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha)$, $\mathfrak{G} \geqq F(\mathfrak{G}_\beta)$, wobei $\mathfrak{F}_\alpha \in \tau_\alpha 0$, $\mathfrak{G}_\beta \in \tau_\beta 0$ sind. Da I gerichtet ist, können wir $\alpha = \beta$ annehmen. Wir zeigen nun $F(\mathfrak{F}_\alpha) + F(\mathfrak{G}_\alpha) \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha + \mathfrak{G}_\alpha)$, woraus dann $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \geqq F(\mathfrak{F}_\alpha + \mathfrak{G}_\alpha)$, also $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \in \tau 0$ folgt. Sei also $H \in F(\mathfrak{F}_\alpha + \mathfrak{G}_\alpha)$. Das bedeutet: es gibt $F_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ und $G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$, so daß $F_\alpha + G_\alpha \subset H$ ist. Da nun aber $F_\alpha + G_\alpha \in F(\mathfrak{F}_\alpha) + F(\mathfrak{G}_\alpha)$ gilt, folgt $H \in F(\mathfrak{F}_\alpha) + F(\mathfrak{G}_\alpha)$. Also schließt man $\tau 0 + \tau 0 \subset \tau 0$. Da ferner $\lambda \cdot F(\mathfrak{F}_\alpha) = F(\lambda \mathfrak{F}_\alpha)$, $\mathfrak{V} \cdot F(\mathfrak{F}_\alpha) = F(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{F}_\alpha)$ gelten, folgen auch die übrigen Eigenschaften. τ ist daher zulässig:

Satz 20. *Die Mengen E_α seien R-Vektorräume, $\tau_\alpha \in \mathcal{T}^{E_\alpha}$. Dann ist (E, τ) ein limitierter Vektorraum. Eine Linearform x' ist auf E genau dann stetig, wenn x'/E_α für jedes $\alpha \in I$ stetig ist.*

Von besonderem Interesse ist der Fall einer Familie lokal-konvexer topologischer Vektorräume, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen:

Beispiel 1: Es sei $\mathcal{C}$ der C-Vektorraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem R^n mit kompaktem Träger. $\mathfrak{K}$ sei die Menge aller kompakten Teilmengen des R^n. $\mathfrak{K}$ ist eine Halbordnung bezüglich $\subset$ und außerdem gerichtet. $\mathscr{C}_K$ bezeichne den (komplexen) Vektorraum aller stetigen Funktionen $R^n \to C$ mit Träger in K. Offenbar ist $\mathscr{C} = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} \mathscr{C}_K$. Betrachtet man auf jedem $\mathscr{C}_K$ die Topologie der uniformen Konvergenz, so wird diese durch die Norm $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ erzeugt, ist also lokal-konvex, separiert; außerdem ist sie komplett. Sie sei τ_K. τ sei der induktive Limes der τ_K auf $\mathscr{C}$. Der Dualraum $\mathscr{C}'$ von $(\mathscr{C}, \tau)$ ist der Raum der Masse auf dem R^n; vgl. [6], ch. I.

Beispiel 2: Wir ersetzen $\mathscr{C}$ durch den Unterraum $\mathscr{D}$ der C^∞-Funktionen $R^n \to C$ mit kompaktem Träger; entsprechend sei $\mathscr{D}_K$ der Raum der C^∞-Funktionen mit Träger in K. Wieder ist $\mathscr{D} = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} \mathscr{D}_K$. Die Topologie τ_K wird durch eine stärkere σ_K ersetzt, indem man gleichzeitig die uniforme Konvergenz (in der natürlichen Norm) aller Ableitungen verlangt; für Einzelheiten sei wieder auf [6] verwiesen. Der induktive Limes σ der σ_K auf $\mathscr{D}$ ist eine separierte Limitierung (vgl. Satz 22 w. u.), ebenso ist $\psi^0 \sigma$ separiert (vgl. w. u. Satz 21, Satz 22). Der Dualraum $\mathscr{D}'$ von $(\mathscr{D}, \sigma)$ ist der Raum der Distributionen auf dem R^n (mit skalaren Werten). Es ist $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ und $\tau_{\mathscr{D}} \leqq \sigma$; ferner liegt $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$ dicht.

Wir kehren noch einmal zu den allgemeineren Betrachtungen dieses Abschnittes zurück. Es gilt der

Satz 21. *Es seien wieder (E_α, τ_α) mit den Eigenschaften 1) bis 3) gegeben. Die E_α seien R-Vektorräume und die τ_α zulässig. Dann ist die Topologie $\psi^0 \tau$ der lokal-konvexe induktive Limes der lokal-konvexen Topologien $\psi^0 \tau_\alpha$:*

$$\psi^0 (\lim_{\to} \tau_\alpha) = \lim_{\to}{}^0 \, \psi^0 \tau_\alpha .$$

Beweis: Wir wissen schon, daß $\psi \tau$ die feinste Topologie auf E derart ist, daß $(\psi \tau)_{E_\alpha} \leqq \psi \tau_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ gilt. Nun ist der induktive Limes (im Sinne BOURBAKIs) der $\psi^0 \tau_\alpha$ lokal-konvex und $\leqq \psi \tau$, denn er ist die feinste *lokal-konvexe* Topologie, die auf jedem E_α eine Topologie $\leqq \psi^0 \tau_\alpha$ induziert. Also ist $\lim_{\to}{}^0 \psi^0 \tau_\alpha \leqq \psi^0 \tau$, da $\psi^0 \tau$ die feinste lokal-konvexe Topologie $\leqq \tau$ ist. Andererseits ist aber $\psi^0 \tau \leqq \lim_{\to}{}^0 \psi^0 \tau_\alpha$, denn $\psi^0 \tau$ induziert auf jedem E_α eine lokal-konvexe Topologie $\leqq \psi \tau_\alpha$, also auch $\leqq \psi^0 \tau_\alpha$. Daher ist schließlich $\psi^0 \tau = \lim_{\to}{}^0 \psi^0 \tau_\alpha$, wie behauptet wurde.

$\psi^0 \tau$ ist mithin genau dann separiert, wenn der induktive Limes der Topologien $\psi^0 \tau_\alpha$ es ist. Ein hinreichendes Kriterium dafür ist in dem folgenden Satz enthalten:

Satz 22. *I enthalte eine abzählbare konfinale Teilmenge $(\alpha_i)_{i \in N}$, so daß $\alpha_i \leqq \alpha_{i-1}$ für jedes i gilt. Wir setzen $E_{\alpha_i} = E_i$, $\tau_{\alpha_i} = \tau_i$. Sodann sei $\psi^0 \tau_{i+1} | E_i = \psi^0 \tau_i$ für jedes i. Sind dann die $\psi^0 \tau_i$ separiert, so ist es auch $\psi^0 \tau$.*

Beweis: $\psi^0 \tau$ ist der lokal-konvexe induktive Limes der Topologien $\psi^0 \tau_i$, wie wir eben sahen. Ferner ist nun E induktiver Limes einer aufsteigenden Folge von Teilräumen E_i, sogar *strikter* induktiver Limes wegen $\psi^0 \tau_{i+1} | E_i = \psi^0 \tau_i$. Also ist $\psi^0 \tau$ separiert.

Bemerkung 2: Die weiter oben angegebenen Beispiele erfüllen die Voraussetzungen von Satz 22, so daß insbesondere die Topologien $\psi^0\tau$ und $\psi^0\sigma$ separiert sind. Man kann daher die Sätze von Abschnitt 5 dieses Paragraphen anwenden, was in [6], ch. III, etwa bei der Definition der beschränkten Mengen getan wird.

Bemerkung 3: Der Satz 20 gestattet in der folgenden Weise die Definition der *direkten Summe* limitierter Vektorräume:

a) Endliche direkte Summe: Es sei (E_i, τ_i) eine endliche Familie von limitierten Vektorräumen. Die direkte Summe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ ist in natürlicher Weise zu $\prod_i E_i$ isomorph. Wir betrachten auf E also die Produktlimitierung. Diese ist, wie man leicht nachrechnet, für E zulässig.

b) Nun sei $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$, jedes E_ι ein Vektorraum. Wir nehmen an, jedes E_ι sei mit einer zulässigen Limitierung τ_ι versehen. Dann bezeichne I^* die Menge aller *endlichen* Teilmengen von I. Für jedes $L \in I^*$ sei

$$E_L = \bigoplus_{\iota \in L} E_\iota$$

$$\tau_L = \prod_{\iota \in L} \tau_\iota .$$

Dann ist E der induktive Limes der Unterräume E_L, $L \in I^*$, bezüglich den natürlichen Inklusionen. Es sei sodann $\tau = \varinjlim \tau_L$. Wir wissen, daß $\tau \in \mathscr{T}^E$ ist. Also ist (E, τ) ein limitierter Vektorraum. Dieser heißt die *direkte Summe* der Familie (E_ι, τ_ι):

$$\bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota, \tau_\iota) = (\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota, \varinjlim \tau_L) .$$

Wir bezeichnen dann τ auch mit $\bigoplus_{\iota \in I} \tau_\iota$.

Sind alle τ_ι lokal-konvexe Topologien und nimmt man $\varinjlim{}^0 \tau_L$ anstatt $\varinjlim \tau_L$, so wird $\bigoplus_{\iota \in I} \tau_\iota$ zur üblichen topologischen direkten Summe, s. etwa Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, fasc. de rés., § 3, no. 17.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Topologie générale, chs. I, II, Act. sci. et ind., 1142. Paris: Hermann & Cie. 1951. — [2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, chs. I, II, act. sci. et ind. 1189, chs. III/V, act. sci. et ind. 1229. Paris: Hermann & Cie. 1953/54. [3] Nöbeling, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. — [4] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie I. Math. Nachr. **7**, 259/378 (1952). — [5] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie, II. Math. Nachr. **10**, 197/232 (1953). — [6] Schwartz, L.: Théorie des distributions, I, II. Act. sci. et ind., 1091/1122. Paris 1951.

(Eingegangen am 19. September 1958)