Kühne, R.
Math. Annalen 154, 56—69 (1964)

Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren

Von

Rolf Kühne in Dresden

Einleitung

Es sei $\mathfrak{H}$ ein komplexer Hilbertraum, auf dem außer dem positiv definiten Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$ ein zweites, indefinites Skalarprodukt $[x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ (s. Abschnitt 1) gegeben ist[1]).

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir eine spezielle, durch (1.3) definierte Klasse Λ von Operatoren in $\mathfrak{H}$, die bezüglich des indefiniten Skalarproduktes selbstadjungiert sind.

Der Abschnitt 1 enthält neben einfachen Eigenschaften die Aussage, daß zu jedem $A \in \Lambda$ ein positiver Operator existiert, der A symmetrisiert (Satz 1.1, s. auch Satz 2.2).

Damit können wir in Abschnitt 2 auf A die Theorie der positiv symmetrisierbaren Operatoren (s. [6], [8]) anwenden. Hierbei ergeben sich, falls A eine vollstetige Potenz A^p besitzt, Existenzaussagen und Extremaleigenschaften für Eigenwerte von A (Satz 2.1) sowie ein Entwicklungssatz (Satz 2.3).

Der Abschnitt 3 beinhaltet Untersuchungen von A für den Fall, daß $\mathfrak{H}$ ein Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ ist (wir schließen uns hier der in [2] eingeführten Terminologie an). Man erhält dann auf $\mathfrak{H}$ ein zweites positiv definites Skalarprodukt, bezüglich dessen A wieder selbstadjungiert ist. Dieses Skalarprodukt läßt sich dadurch ermitteln, daß man $\varkappa$ linear unabhängige Eigenelemente von A aus geeigneten Extremalaufgaben bestimmt.

E. Pesonen untersuchte in [5] ebenfalls Operatoren aus Λ und gab unter zusätzlichen Bedingungen für diese Operatoren eine Spektraldarstellung an, die der bekannten Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum ähnlich ist. Wir werden nun in Abschnitt 4 unter gleichen Voraussetzungen — jedoch ohne wie in [5] die Separabilität von $\mathfrak{H}$ zu fordern — beweisen, daß jeder mit $A \in \Lambda$ vertauschbare und bezüglich des indefiniten Skalarproduktes selbstadjungierte Operator auf $\mathfrak{H}$ auch bezüglich eines zweiten positiv definiten Skalarproduktes selbstadjungiert ist. Daraus erhalten wir dann die in [5] gewonnenen Ergebnisse unmittelbar und in verschärfter Form.

---

[1]) Ausführliche Untersuchungen zur Geometrie von Räumen mit indefinitem Skalarprodukt sowie ein umfassendes Literaturverzeichnis findet man in [1].

1. Die Operatoren der Klasse Λ

Es sei $\mathfrak{H}$ ein komplexer Hilbertraum mit dem (positiv definiten) Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$ und sei J ein auf $\mathfrak{H}$ definierter (beschränkter) selbstadjungierter Operator, für den 0 kein Eigenwert ist. Außerdem nehme die quadratische Form (Jx, x) $(x \in \mathfrak{H})$ auf $\mathfrak{H}$ sowohl positive als auch negative Werte an. Mit Hilfe von J definieren wir auf $\mathfrak{H}$ ein zweites, sog. *indefinites Skalarprodukt* durch

$$[x, y] = (Jx, y) \quad (x, y \in \mathfrak{H}) . \tag{1.1}$$

Zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{H}$ heißen zueinander *J-orthogonal*, falls $[x, y] = 0$ gilt. Ebenso werden zwei Teilmengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ zueinander *J-orthogonal* genannt, wenn alle Elemente von $\mathfrak{M}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{N}$ J-orthogonal sind.

Man sagt, daß das indefinite Skalarprodukt auf $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ *entartet*, wenn ein $x \in \mathfrak{M}$, $x \neq o$[2]), existiert, so daß für alle $y \in \mathfrak{M}$ gilt $[x, y] = 0$. Offenbar entartet das indefinite Skalarprodukt nach Definition nicht auf $\mathfrak{H}$.

Wir definieren die Mengen

$$\mathfrak{Z}^+ = \{x \in \mathfrak{H} / [x, x] > 0\}$$
$$\mathfrak{Z}^0 = \{x \in \mathfrak{H} / [x, x] = 0\}$$
$$\mathfrak{Z}^- = \{x \in \mathfrak{H} / [x, x] < 0\} .$$

Die Elemente von $\mathfrak{Z}^+$ (bzw. $\mathfrak{Z}^0$ oder $\mathfrak{Z}^-$) heißen *positiv* (bzw. *nullartig* oder *negativ*). Entsprechend werden Teilmengen von $\mathfrak{H}$ als *positiv* (bzw. *nullartig* oder *negativ*) bezeichnet, wenn alle ihre von o verschiedenen Elemente positiv (bzw. nullartig oder negativ) sind.

Es sei nun A ein auf $\mathfrak{H}$ definierter linearer Operator, der $\mathfrak{H}$ in sich abbildet. A heißt *J-selbstadjungiert*, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{H}$

$$[Ax, y] = [x, Ay] \tag{1.2}$$

gilt. Wir definieren für A die Teilmengen

$$\mathfrak{A}^+ = \{x \in \mathfrak{H} / [Ax, x] > 0\}$$
$$\mathfrak{A}^0 = \{x \in \mathfrak{H} / [Ax, x] = 0\}$$
$$\mathfrak{A}^- = \{x \in \mathfrak{H} / [Ax, x] < 0\} .$$

In der vorliegenden Arbeit wird eine spezielle Klasse Λ solcher J-selbstadjungierter Operatoren betrachtet. Dabei soll A genau dann zu Λ gehören, wenn

$$\mathfrak{A}^0 \cap \mathfrak{Z}^0 = \{o\} \tag{1.3}$$

gilt. Weiter sei $\Lambda^+ = \{A \in \Lambda / \mathfrak{Z}^0 \setminus \{o\} \subset \mathfrak{A}^+\}$.

Lemma 1.1.[3]). *Aus $A \in \Lambda$ folgt entweder $A \in \Lambda^+$ oder $(-A) \in \Lambda^+$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $A \in \Lambda$, aber $A \notin \Lambda^+$ und $(-A) \notin \Lambda^+$, d. h., es gäbe zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{Z}^0$ mit $[Ax, x] < 0$ und $-[Ay, y] < 0$. Dann

[2]) o bezeichne das Nullelement von $\mathfrak{H}$.

[3]) Der Inhalt dieses Lemmas ist in [5], Satz 1.1, enthalten.

ließen sich reelle Zahlen ξ, η und danach $a \neq 0$ so wählen, daß $\mathrm{Re}(e^{i(\xi-\eta)}[x, y]) = 0$ und $[Ax, x] + 2a\mathrm{Re}(e^{i(\xi-\eta)}[Ax, y]) + a^2[Ay, y] = 0$ gilt. Für $z = e^{i\xi}x + a e^{i\eta}y$ folgt daraus $[Az, z] = [z, z] = 0$ und wegen $[Ax, x] < 0$ und $[Ay, y] > 0$ aber auch $z \neq o$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda$.

Aus Lemma 1.1 ersieht man, daß es keine Einschränkung bedeutet, wenn wir anstelle von $A \in \Lambda$ im weiteren $A \in \Lambda^+$ voraussetzen.

Lemma 1.2. *Es sei $A \in \Lambda^+$. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{Z}^+$ und alle $y \in \mathfrak{Z}^-$*

$$\frac{[Ay, y]}{[y, y]} < \frac{[Ax, x]}{[x, x]}\,. \tag{1.4}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei Elemente $x_0 \in \mathfrak{Z}^+$ und $y_0 \in \mathfrak{Z}^-$ mit $[x_0, x_0] = -[y_0, y_0] = 1$ und $-[Ay_0, y_0] \geqq [Ax_0, x_0]$. Werden dann mit ξ und η zwei reelle Zahlen bezeichnet, für die $\mathrm{Re}(e^{i(\xi-\eta)}[x_0, y_0]) = 0$ und $\mathrm{Re}(e^{i(\xi-\eta)}[Ax_0, y_0]) \leqq 0$ gilt, so ergeben sich für $z_0 = e^{i\xi}x_0 + e^{i\eta}y_0$ die Beziehungen $[z_0, z_0] = 0$, $[Az_0, z_0] \leqq 0$ und $z_0 \neq o$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda^+$.

Satz 1.1. *Es sei $A \in \Lambda^+$ und $\mu = \inf\limits_{x \in \mathfrak{Z}^+}\left(\frac{[Ax, x]}{[x, x]}\right)$. Dann ist $\mu > -\infty$ und für*

$$H = J(A - \mu I)^{4)} \tag{1.5}$$

gilt:

(I) *H ist ein von O*[5]*) verschiedener (selbstadjungierter) positiver Operator.*

(II) *H symmetrisiert (von links) jeden J-selbstadjungierten Operator B mit $AB = BA$; d. h. HB ist selbstadjungiert.*

Beweis. Aus (1.4) folgt $\mu > -\infty$.

(I) Es gilt $H \neq O$; andernfalls erhielte man nämlich für jedes $x_0 \in \mathfrak{Z}^0\backslash\{o\}$

$$[Ax_0, x_0] = (JAx_0, x_0) = \mu(Jx_0, x_0) = \mu[x_0, x_0] = 0\,,$$

also $x_0 \in \mathfrak{A}^0$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda^+$.

Weiter gilt für alle $x \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$(Hx, x) = [Ax, x] - \mu[x, x] \geqq 0\,, \tag{1.6}$$

da sie nach Definition von μ für $x \in \mathfrak{Z}^+$, wegen $A \in \Lambda^+$ für $x \in \mathfrak{Z}^0$ und infolge (1.4) für $x \in \mathfrak{Z}^-$ erfüllt ist. H ist demnach ein positiver Operator.

(II) Bezeichnet B einen J-selbstadjungierten Operator mit $AB = BA$, so gilt für alle $x, y \in \mathfrak{H}$

$$(HBx, y) = [ABx, y] - \mu[Bx, y] = [x, ABy] - [x, \mu By] = (x, HBy)\,.$$

Daher ist HB und speziell für $B = I$ also auch H selbstadjungiert.

Der Satz 1.1 ist somit bewiesen.

Auf Grund von Satz 1.1 können wir auf A die Theorie der durch einen positiven Operator symmetrisierten Operatoren [6]) anwenden. Dies soll in Abschnitt 2 geschehen. Dabei sei vermerkt, daß zwar der Operator $A - \mu I$ durch H streng (und somit auch voll) symmetrisiert wird, der Operator A

---

[4]) I bezeichne den identischen Operator aus $\mathfrak{H}$.

[5]) O bezeichne den Nulloperator aus $\mathfrak{H}$.

[6]) Siehe z. B. [8] und [6].

jedoch selbst im allgemeinen diese Eigenschaften nicht besitzt. Es sollen nun noch einige einfache Aussagen über den Operator $A \in \Lambda^+$ bewiesen werden.

Lemma 1.3. *Ist $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ ein linearer Teilraum mit $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, so kann das indefinite Skalarprodukt auf $\mathfrak{M}$ nicht entarten.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{M}$ und $[y, x] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{M}$. Dann gilt speziell $[x,x]=0$ und wegen $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ auch $[Ax, x] = 0$. Infolge $A \in \Lambda^+$ ergibt dies $x = o$, w. z. z. w.

Folgerung 1. *Gilt $[x, x] \geqq 0$ (bzw. $[x, x] \leqq 0$) für alle $x \in \mathfrak{M}$, so ist $[x,x] \neq 0$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ mit $x \neq o$.*

Beweis. Aus $[x, x] = 0$ folgt auf Grund der Schwarzschen Ungleichung $[x, y] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{M}$ und daher nach Lemma 1.3 $x = o$.

Folgerung 2. *Die Eigenelemente von A sind nicht nullartig*[7]).

Folgerung 3. *Für den zu einem Eigenwert λ von A gehörenden Eigenraum $\mathfrak{M}_\lambda$ gilt entweder $\mathfrak{M}_\lambda \subset \mathfrak{J}^+ \cup \{o\}$ oder $\mathfrak{M}_\lambda \subset \mathfrak{J}^- \cup \{o\}$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $\mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{J}^+ \neq \emptyset$ und $\mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{J}^- \neq \emptyset$. Dann erhielte man $\mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{J}^0 \neq \{o\}$ im Widerspruch zu Folgerung 2.

Lemma 1.4. *Es sei $A \in \Lambda^+$ und sei B ein J-selbstadjungierter Operator mit $AB = BA$. Dann sind die Eigenwerte von B sämtlich reell und besitzen den Index 1*[8]).

Beweis. (I) Sei $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq o$, mit $Bx = \lambda x$. Damit gilt

$$\lambda [A^n x, x] = [A^n Bx, x] = [x, A^n Bx] = \bar{\lambda} [x, A^n x] \quad (n = 0, 1)\,.$$

Wäre nun $\lambda \neq \bar{\lambda}$, so erhielte man $[x, x] = [Ax, x] = 0$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda^+$.

(II) Wir nehmen an, es gäbe ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $y = (B - \lambda I)x \neq o$ und $(B - \lambda I)y = (B - \lambda I)^2 x = o$. Hieraus folgt wegen $\lambda = \bar{\lambda}$

$$\lambda [A^n x, y] = [A^n x, By] = [A^n Bx, y] = \lambda [A^n x, y] + [A^n y, y] \ (n = 0, 1)\,,$$

also $[y, y] = [Ay, y] = 0$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda^+$.

Folgerung. *Eigenelemente zu voneinander verschiedenen Eigenwerten von B sind zueinander J-orthogonal.*

Beweis[9]). Aus $Bx_1 = \lambda_1 x_1$ und $Bx_2 = \lambda_2 x_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ergibt sich wegen $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$ $\lambda_1 [x_1, x_2] = [Bx_1, x_2] = [x_1, Bx_2] = \lambda_2 [x_1, x_2]$ und daraus $[x_1, x_2] = 0$.

2. Operatoren mit vollstetiger Potenz

2.1. Wir weisen zunächst darauf hin, daß im weiteren alle topologischen Begriffe im Sinne der durch die Norm $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ $(x \in \mathfrak{H})$ auf $\mathfrak{H}$ erzeugten Topologie zu verstehen sind.

Die nun folgenden Untersuchungen stützen sich auf einen in [6] (S. 45/46) und [8] für positiv symmetrisierbare Operatoren bewiesenen Satz, der in dem hier betrachteten Spezialfall unter Verwendung der in Satz 1.1 benutzten Bezeichnungen folgendermaßen formuliert werden kann.

---

[7]) Ein direkter Beweis wurde in [5] angegeben.

[8]) Das heißt, für jedes natürliche k folgt aus $(B - \lambda I)^k x = o$ die Gleichung $(B - \lambda I)x = o$.

[9]) Siehe z. B. [4].

Lemma 2.1. *Es sei $A \in \Lambda^+$, B ein J-symmetrischer Operator mit $BA = AB$, und es existiere eine natürliche Zahl p, so daß B^p vollstetig ist. Ferner sei $HB \neq O$. Dann besitzt B einen Eigenwert $\lambda \neq 0$ mit $|\lambda| = \sup\limits_{(Hx,x)=1} |(HBx, x)|$.*

Die Aussage dieses Lemmas läßt sich für $B = A$ wie folgt verschärfen.

Satz 2.1. *Zu dem Operator $A \in \Lambda^+$ existiere eine natürliche Zahl p, so daß A^p vollstetig ist*[9a]*). Dann besitzt A einen Eigenwert $\lambda \neq 0$. Wird H und μ definiert wie in Satz 1.1, so gibt es einen Eigenwert ν von A mit $|\nu| = \sup\limits_{(Hx,x)=1} |(HAx, x)|$, wobei die Form $|(HAx, x)|$ in genau denjenigen Elementen $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $(Hx_0, x_0) = 1$ den Wert $|\nu|$ annimmt, für die $(A - \mu I)x_0$ ein Eigenelement von A zu $+\nu$ oder $-\nu$ ist.*

Beweis. (I) Wir zeigen die Existenz eines Eigenwertes $\lambda \neq 0$ von A. Für $HA \neq O$ folgt dies aus Lemma 2.1.

Sei nun $HA = O$. Das bedeutet

$$(A - \mu I)A = O\,. \tag{2.1}$$

Wegen $O \notin \Lambda^+$ und somit $A \neq O$ folgt daraus, daß $\lambda = \mu$ ein Eigenwert von A ist. Überdies gilt $\mu \neq 0$, da andernfalls auf Grund von (2.1) $A^2 = O$ und deshalb nach Lemma 1.4 $A = O$ im Widerspruch zu $A \in \Lambda^+$ wäre.

(II) Die Existenz eines Eigenwertes ν mit $|\nu| = \sup\limits_{(Hx,x)=1} |(HAx, x)|$ folgt unmittelbar aus Satz 1.1, falls $HA \neq O$ gilt.

Für $HA = O$, d. h. $A(A - \mu I) = O$, ergibt sie sich daraus, daß wegen $\mu I \notin \Lambda^+$ gilt $A \neq \mu I$ und dann also 0 ein Eigenwert von A ist.

(III) Nach Definition gilt für alle $x \in \mathfrak{H}$ mit $(Hx, x) \neq 0$

$$|\nu| = \sup_{(Hx,x)=1} |(HAx, x)| \geqq \frac{|(HAx, x)|}{(Hx, x)}\,. \tag{2.2}$$

Da man aus $(Hx, x) = 0$ auf Grund der Positivität von H $(HAx, x) = 0$ erhält, sind die für $(Hx, x) \neq 0$ aus (2.2) folgenden Relationen

$$\begin{aligned} (H(|\nu|I - A)x, x) &\geqq 0 \\ (H(|\nu|I + A)x, x) &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

sogar für alle $x \in \mathfrak{H}$ gültig.

Sei nun $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $(Hx_0, x_0) = 1$ und $|(HAx_0, x_0)| = |\nu|$. Dann ist entweder $(H(|\nu|I - A)x_0, x_0) = 0$ oder $(H(|\nu|I + A)x_0, x_0) = 0$. Wegen (2.3) folgt hieraus entweder $H(|\nu|I - A)x_0 = o$ oder $H(|\nu|I + A)x_0 = o$. Da sich aus $(Hx_0, x_0) = [Ax_0 - \mu x_0, x_0] = 1$ die Beziehung $Ax_0 - \mu x_0 \neq o$ ergibt, ist also $(A - \mu I)x_0$ ein Eigenelement von A zu $+\nu$ oder $-\nu$.

Gilt umgekehrt für ein $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $(Hx_0, x_0) = 1$ eine der Gleichungen $(A - \nu I)(Ax_0 - \mu x_0) = o$ oder $(A + \nu I)(Ax_0 - \mu x_0) = o$, so ist offenbar $|\nu| = |(HAx_0, x_0)|$. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

[9a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Die Existenz eines i. a. nicht vollstetigen Operators $A \in \Lambda^+$ mit vollstetigen Potenzen A^p ($p \geqq 2$) wurde vor kurzem von I. S. IOCHWIDOW bewiesen. Eine entsprechende Veröffentlichung erscheint in den Dokl. Akad. Nauk SSSR.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß genau dann, wenn μ ein Eigenwert von A ist, Elemente $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $(Hx_0, x_0) = 1$ und $|(HAx_0, x_0)| = |\nu| = \sup\limits_{(Hx,x)=1} |(HAx, x)|$ existieren, die (im Gegensatz zu $(A - \mu I)x_0$) selbst keine Eigenelemente von A sind. Dieser Sachverhalt liegt nach Satz 3.2 z. B. vor, falls $\mathfrak{H}$ ein Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ (vgl. Abschnitt 3) ist.

Im weiteren benötigen wir noch das

Lemma 2.2. *Für $A \in \Lambda^+$ existiere eine natürliche Zahl p, so daß A^p vollstetig ist. Weiter sei $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M} \neq \{o\}$, ein linearer Teilraum mit $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. Dann existiert in $\mathfrak{M}$ mindestens ein Eigenelement von A.*

Beweis. H und μ seien definiert wie in Satz 1.1. Wir bezeichnen mit M die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{M}$ und mit J', H', A', O' die Einschränkungen der Operatoren MJ, MH, A, O auf $\mathfrak{M}$. Dann ist nach Satz 1.1 H' ein positiver Operator, der A' (von links) symmetrisiert. Außerdem ist A'^p vollstetig. Daher liefert die Theorie positiv symmetrisierbarer Operatoren (s. W. T. Reid [6], S. 45/46) die Behauptung unseres Lemmas, falls $H'A' \neq O'$ ist.

Gilt $H'A' = O'$, so erhält man für alle $x, y \in \mathfrak{M}$

$$(H'A'x, y) = [(A' - \mu I)A'x, y] = 0 .$$

Hieraus ergibt sich $(A - \mu I)Ax = o$ für alle $x \in \mathfrak{M}$, da das indefinite Skalarprodukt auf $\mathfrak{M}$ nicht entartet (s. Lemma 1.3). In $\mathfrak{M}$ liegen also entweder zu 0 oder zu μ gehörige Eigenelemente von A, w. z. z. w.

2.2. Für den restlichen Teil der vorliegenden Arbeit wollen wir voraussetzen, daß der das indefinite Skalarprodukt (1.1) definierende Operator J die Gestalt $J = P - Q$ besitzt, wobei P und Q orthogonale Projektionen mit $P + Q = I$ bezeichnen. Dann gilt $J = J^{-1} = P - Q$ und $\|J\| = 1$.

A sei wieder ein Operator aus Λ^+, für den eine natürliche Zahl p existiert, so daß A^p vollstetig ist. Weiter bezeichne $\mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{N}$) die lineare Hülle aller positiven (bzw. negativen) Eigenelemente von A und $\overline{\mathfrak{P}}$ (bzw. $\overline{\mathfrak{N}}$) die Abschließung von $\mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{N}$).

Lemma 2.3. *$\overline{\mathfrak{P}}$ ist ein positiver und $\overline{\mathfrak{N}}$ ein negativer Teilraum von $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Wegen der Folgerung 3 zu Lemma 1.3 sind Linearkombinationen positiver Eigenelemente zum gleichen Eigenwert wieder positiv. Daraus folgt die Positivität von $\mathfrak{P}$, da nach der Folgerung zu Lemma 1.4 Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten von A zueinander J-orthogonal sind. Dann ist $\overline{\mathfrak{P}}$ auf Grund der Stetigkeit des indefiniten Skalarproduktes nichtnegativ. Infolge der Stetigkeit[10]) von A erhält man aber aus $A\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$ auch $A\overline{\mathfrak{P}} \subset \overline{\mathfrak{P}}$, daher ist wegen der Folgerung 1 zu Lemma 1.3 $\overline{\mathfrak{P}}$ sogar positiv.

Entsprechend beweist man die Negativität von $\overline{\mathfrak{N}}$.

Lemma 2.4. *Die lineare Hülle aller Eigenelemente von A liegt in $\mathfrak{H}$ dicht, d. h., es gilt*

$$\overline{\mathfrak{P} + \mathfrak{N}} = \mathfrak{H} . \tag{2.4}$$

Beweis. Wir setzen abkürzend $\mathfrak{L} = \mathfrak{P} + \mathfrak{N}$. Wäre $\overline{\mathfrak{L}} \neq \mathfrak{H}$, so gäbe es ein $x_0 \in \mathfrak{H}$, $x_0 \neq o$, mit $(x_0, x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{L}$. Wegen $J^{-1} = J$ ergibt sich daraus

[10]) A ist als J-selbstadjungierter Operator abgeschlossen (s. [2], S. 385) und somit stetig, da A auf ganz $\mathfrak{H}$ definiert ist.

$[Jx_0, x] = (x_0, x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{L}$. Somit gilt für $\mathfrak{L}' = \{x \in \mathfrak{H}/[x, y] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{L}\}$ die Beziehung $\mathfrak{L}' \neq \{o\}$. Nun ist nach Definition $A\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$ und daher auch $A\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}'$. Demnach besitzt A infolge Lemma 2.2 ein Eigenelement $z \in \mathfrak{L}'$. Auf Grund von Lemma 1.3 gilt aber $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}$ und daher $z \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$, was im Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{L}$ steht.

Folgerung. *A besitzt sowohl positive als auch negative Eigenelemente.*

Beweis. Nach Lemma 2.3 ist infolge der Stetigkeit des indefiniten Skalarproduktes $\overline{\mathfrak{P}}$ positiv und $\overline{\mathfrak{N}}$ negativ, also gilt $\overline{\mathfrak{P}} \neq \mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{N}} \neq \mathfrak{H}$. Dies liefert wegen Lemma 2.4 die Behauptung.

Lemma 2.5.[11]. *$\mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{N}$) hat genau dann die endliche Dimension n, wenn auch $P\mathfrak{H}$ (bzw. $Q\mathfrak{H}$) diese Dimension n besitzt.*

Beweis. (a) Es sei $\dim \mathfrak{P} = n$ $(< \infty)$. Auf Grund von Folgerung 3 aus Lemma 1.3 sind die Eigenwerte zu positiven Eigenelementen verschieden von denen zu negativen Eigenelementen. Deshalb ist nach der Folgerung aus Lemma 1.4 $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{N}$ und somit auch zu $\overline{\mathfrak{N}}$ J-orthogonal. Hieraus folgt $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{N}} = \{o\}$, denn andernfalls wäre das indefinite Skalarprodukt auf $\mathfrak{P}$ entgegen Lemma 1.3 entartet. Wegen $n < \infty$ gilt nunmehr $\overline{\mathfrak{P} + \mathfrak{N}} = \mathfrak{P} \dotplus \overline{\mathfrak{N}}$ (s. [8], Ch. 6, § 4, Th. 4) und infolge (2.4) also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P} \dotplus \overline{\mathfrak{N}} \,. \tag{2.5}$$

Dann ergibt sich aber unter Beachtung von Lemma 2.3 $\dim P\mathfrak{H} = n$, wie in [1], § 6, 7⁰ bewiesen wird.

(b) Ist $\dim P\mathfrak{H} = m$, so gilt $n = \dim \mathfrak{P} \leqq m$ (s. [1], § 6, 6^0) und nach Teil (a) $m = n$.

Das Lemma ist damit bewiesen.

Satz 2.2. *Für den Operator $A \in \Lambda^+$ existiere eine natürliche Zahl p, so daß A^p vollstetig ist. Außerdem seien die Dimensionen von $P\mathfrak{H}$ und $Q\mathfrak{H}$ beide unendlich. Dann gilt*

$$[Ax, x] \geqq 0 \; (x \in \mathfrak{H}) \,. \tag{2.6}$$

Beweis. μ sei definiert wie in Satz 1.1. Wir setzen zunächst $\mu \geqq 0$ voraus. Damit folgt aus (1.6) für alle $x \in \mathfrak{J}^+$

$$[Ax, x] \geqq \mu [x, x] \geqq 0 \,. \tag{2.7}$$

Wegen der unendlichen Dimension von $P\mathfrak{H}$ ist nach Lemma 2.5 auch $\mathfrak{P}$ unendlichdimensional, d. h., in $\mathfrak{J}^+$ existieren unendlich viele linear unabhängige Eigenelemente von A. Daher gehören infolge der Riesz-Schauder-Theorie (s. [8], Ch. 11, § 3, Th. 4/5) zu den Eigenelementen in $\mathfrak{J}^+$ entweder selbst der Eigenwert 0 oder eine gegen 0 konvergente Folge von Eigenwerten. Dies liefert, auf (2.7) angewandt, $\mu = 0$.

Im Falle $\mu \leqq 0$ folgern wir aus (1.6)

$$[Ax, x] \geqq |\mu| \, |[x, x]| \geqq 0 \; (x \in \mathfrak{J}^-) \,.$$

Wegen der unendlichen Dimension von $Q\mathfrak{H}$ ergibt sich daraus entsprechend zu oben $\mu = 0$.

---

[11]) Einen analogen Sachverhalt für eine belastete Integralgleichung mit nichtmonotoner Verteilungsfunktion und absolut positivem Kern bewies M. G. KREIN in [3].

Nach (1.6) gilt also (2.6).

Aus dem Beweis dieses Satzes erhält man die

Folgerung. *Ist $P\mathfrak{H}$ (bzw. $Q\mathfrak{H}$) von unendlicher Dimension, so gilt $\mu \leqq 0$ (bzw. $\mu \geqq 0$).*

Satz 2.3. *Für den Operator $A \in \Lambda^+$ existiere eine natürliche Zahl p, so daß A^p vollstetig ist. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ von Elementen $x_n \in \mathfrak{H}$ mit $Ax_n = \lambda_n x_n$ und $[x_n, x_m] = \pm\delta_{nm}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$, so daß für alle $x \in \mathfrak{H}$*

$$Ax = \sum_n \varepsilon_n \lambda_n [x, x_n] x_n$$

gilt, wobei $\varepsilon_n = [x_n, x_n]$ $(= \pm 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sei.

Beweis[12]). Wir beschränken uns auf den Fall, daß A unendlich viele voneinander verschiedene Eigenwerte besitzt (man sieht leicht, wie sich andernfalls der nachstehende Beweis vereinfacht).

Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A und sei $\mathfrak{M}_\lambda$ der zugehörige Eigenraum. Nach der Riesz-Schauder-Theorie (s. [8], Ch. 11, § 3, Th. 4) ist die Vielfachheit $r_\lambda = \dim \mathfrak{M}_\lambda$ von λ endlich. Auf Grund der Folgerung 3 zu Lemma 1.3 läßt sich auf übliche Weise in $\mathfrak{M}_\lambda$ eine J-orthogonale Basis von r_λ Eigenelementen finden, die nach der Folgerung aus Lemma 1.4 zu allen übrigen Eigenelementen von A J-orthogonal sind. Bezeichnet nun (λ_n) mit $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$ die Folge aller von Null verschiedenen Eigenwerte von A, in der jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft auftritt, so existiert daher eine Folge (x_n) mit $Ax_n = \lambda_n x_n$ und $[x_n, x_m] = \pm\delta_{nm}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$.

Es sei $\varepsilon_n = [x_n, x_n] = \pm 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Weiter sei H und μ definiert wie in Satz 1.1. Dann gilt wegen $(Hx, x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{H})$ und auf Grund von $(Hx_n, x_n) = \varepsilon_n(\lambda_n - \mu) \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für beliebiges $x \in \mathfrak{H}$

$$0 \leqq (Hy_m, y_m) = [(A - \mu I)x, x] - \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n - \mu| \, |[x, x_n]|^2$$

mit $y_m = x - \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n [x, x_n] x_n$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \mu| \, |[x, x_n]|^2$. Außerdem existiert infolge $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ (s. [8], Ch. 11, § 3, Th. 5) ein N, so daß für alle $n \geqq N$ gilt $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \mu}\right| \leqq 1$. Daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{|\lambda_n - \mu|} |[x, x_n]|^2$.

Wir setzen $y_{rs} = \sum_{n=r}^{s} \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{\lambda_n - \mu} [x, x_n] x_n$ $(x \in \mathfrak{H};\ r, s \geqq N)$. Bezeichnet $H^{\frac{1}{2}}$ die positive Quadratwurzel aus H (s. [7], S. 250), so gilt

$$\|Hy_{rs}\|^2 \leqq \|H^{\frac{1}{2}}\|^2 \, \|H^{\frac{1}{2}} y_{rs}\|^2 = \|H^{\frac{1}{2}}\|^2 (Hy_{rs}, y_{rs}) = \|H\| \sum_{n=r}^{s} \frac{\varepsilon_n \lambda_n^2}{\lambda_n - \mu} |[x, x_n]|^2$$
$$(x \in \mathfrak{H};\ r, s \geqq N)\,.$$

Deshalb konvergiert die Reihe $J\left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{\lambda_n - \mu} [x, x_n] Hx_n\right) = \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n [x, x_n] x_n$.

[12]) Zum Aufbau des Beweises s. W. T. Reid [6].

Somit ist durch

$$\tilde{A}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n [x, x_n] x_n$$

auf $\mathfrak{H}$ ein Operator $\tilde{A}$ definiert, der offenbar J-selbstadjungiert, daher abgeschlossen (s. [2], S. 385) und infolgedessen als abgeschlossener auf $\mathfrak{H}$ definierter Operator stetig ist.

Sei jetzt $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ erklärt wie in Lemma 2.4 und sei $x \in \mathfrak{P} + \mathfrak{N}$. Nach Definition gibt es in der Folge (x_n) Elemente $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_j}$, so daß mit einem $z \in \mathfrak{H}$ der Eigenschaft $Az = o$ gilt $x = \alpha_{n_1} x_{n_1} + \alpha_{n_2} x_{n_2} + \cdots + \alpha_{n_j} x_{n_j} + z$. Dann ergibt sich unter Beachtung der Folgerung zu Lemma 1.4

$$\tilde{A}x = \alpha_{n_1} \lambda_{n_1} x_{n_1} + \alpha_{n_2} \lambda_{n_2} x_{n_2} + \cdots + \alpha_{n_j} \lambda_{n_j} x_{n_j} = Ax \quad (x \in \mathfrak{P} + \mathfrak{N}) .$$

Daraus folgt

$$\tilde{A} = A ,$$

da nach Lemma 2.4 $\overline{\mathfrak{P} + \mathfrak{N}} = \mathfrak{H}$ gilt.

Der Satz ist damit bewiesen.

3. Operatoren in $\Pi_\varkappa$

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß $\mathfrak{H}$ im Sinne von [2] ein Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ ist, d. h., J besitze wieder die Gestalt $J = P - Q$, wobei $\dim(P\mathfrak{H}) = \varkappa < \infty$ gilt[13]).

Satz 3.1. *Es sei $\mathfrak{H} = \Pi_\varkappa$ und $A \in \Lambda^+$. Dann existiert auf $\mathfrak{H}$ ein positiv definites, durch (3.3) definiertes Skalarprodukt, bezüglich dessen A symmetrisch ist und das auf $\mathfrak{H}$ die gegebene (Hilbertsche) Topologie erzeugt.*

Beweis. In [2] (S. 419) wurde bewiesen, daß ein $\varkappa$-dimensionaler nichtnegativer, bezüglich A invarianter Teilraum Π_+ existiert, der dann auf Grund von Folgerung 1 zu Lemma 1.3 sogar positiv ist. Wieder nach [2] (S. 372) ist daher $\Pi_- = \{x \in \Pi_\varkappa / [x, y] = 0 \text{ für alle } y \in \Pi_+\}$ negativ und es gilt

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+ \dotplus \Pi_- . \tag{3.1}$$

Hieraus erhalten wir, wenn für jedes $z \in \Pi_\varkappa$ die zu (3.1) gehörende Zerlegung

$$z = z_+ + z_- \tag{3.2}$$

mit $z_+ \in \Pi_+$, $z_- \in \Pi_-$ betrachtet wird, das offenbar positiv definite Skalarprodukt

$$(x, y)' = [x_+, y_+] - [x_-, y_-] \quad (x, y \in \Pi_\varkappa) . \tag{3.3}$$

Nun ist wegen $A\Pi_+ \subset \Pi_+$ auch $A\Pi_- \subset \Pi_-$. Somit gelten für alle $z = z_+ + z_- \in \Pi_\varkappa$ die Beziehungen $(Az)_+ = Az_+$, $(Az)_- = Az_-$. Daraus ergibt sich

$$(Ax, y)' = [Ax_+, y_+] - [Ax_-, y_-] = [x_+, Ay_+] - [x_-, Ay_-] = (x, Ay') \quad (x, y \in \Pi_\varkappa) . \tag{3.4}$$

---

[13]) Der Fall $\dim(Q\mathfrak{H}) = \varkappa = \infty$ läßt sich sofort auf diesen Fall zurückführen, wenn in $\mathfrak{H}$ anstelle von $[x, y] = (Jx, y)$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ das Skalarprodukt $[x, y]' = (-Jx, y)$ eingeführt wird.

Überdies sind nach [2] (S. 377) die durch die Normen $\|x\|' = \sqrt{(x,x)'}$ ($x \in \Pi_\varkappa$) und $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ ($x \in \Pi_\varkappa$) auf $\Pi_\varkappa$ erzeugten Topologien identisch.

Satz 3.2. *Es sei* $\mathfrak{H} = \Pi_\varkappa$ *und* $A \in \Lambda^+$. *Dann nimmt das auf* $\mathfrak{J}^+$ *definierte Funktional* $\frac{[Ax,x]}{[x,x]}$ ($x \in \mathfrak{J}^+$) *in mindestens einem Element* $x_1 \in \mathfrak{J}^+$ *sein Infimum* μ *an. Dabei gilt* $Ax_1 = \mu x_1$ *und* $x_1 \in \Pi_+$.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{J}^+$, sei $x = x_+ + x_-$ die zu (3.1) gehörende Zerlegung von x und $x_- \neq o$ (d. h. $x \notin \Pi_+$). Offenbar ist wegen $x \in \mathfrak{J}^+$ auch $x_+ \neq o$. Dann gilt nach Lemma 1.2 auf Grund von $x_+ \in \mathfrak{J}^+$ und $x_- \in \mathfrak{J}^-$

$$\frac{[Ax_-,x_-]}{[x_-,x_-]} < \frac{[Ax_+,x_+]}{[x_+,x_+]}\,. \tag{3.5}$$

Daraus folgt

$$[Ax_-,x_-] > \frac{[Ax_+,x_+]}{[x_+,x_+]}\,[x_-,x_-]$$

und

$$[Ax_+,x_+] + [Ax_-,x_-] > \frac{[Ax_+,x_+]}{[x_+,x_+]}\,([x_+,x_+] + [x_-,x_-])\,. \tag{3.6}$$

Nun gilt wegen der J-Orthogonalität der Teilräume Π_+ und Π_- $[x,x] = [x_+,x_+] + [x_-,x_-]$ und infolge von $A\Pi_+ \subset \Pi_+$, $A\Pi_- \subset \Pi_-$ auch $[Ax,x] = [Ax_+,x_+] + [Ax_-,x_-]$. Daher erhalten wir aus (3.6)

$$\frac{[Ax,x]}{[x,x]} > \frac{[Ax_+,x_+]}{[x_+,x_+]}\,. \tag{3.7}$$

Wir betrachten jetzt die Einschränkung A_+ von A auf den endlichdimensionalen positiven invarianten Teilraum Π_+. Bekanntlich nimmt dann das Funktional $\frac{[A_+x_+,x_+]}{[x_+,x_+]}$ ($x_+ \in \Pi_+$, $x_+ \neq o$) in mindestens einem Element $x_1 \in \Pi_+$ sein Infimum μ an und es gilt $Ax_1 = \mu x_1$. Daraus ergibt sich unter Benutzung von Formel (3.7) die Behauptung des Satzes.

Der Satz 3.2 bietet eine Möglichkeit, in $\varkappa$ Schritten den Teilraum Π_+ und damit das positiv definite Skalarprodukt (3.3) zu bestimmen.

Bildet man nämlich zu dem in Satz 3.2 gewonnenen Eigenelement x_1 das J-orthogonale Komplement $\mathfrak{R}_1$, so ist $\mathfrak{R}_1$ ein Raum vom Typ $\Pi_{\varkappa-1}$ (s. [2]) mit $A\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_1$. In $\mathfrak{R}_1$ läßt sich nach Satz 3.2 ein weiteres positives Eigenelement x_2 von A finden. Nach $\varkappa$ solchen Schritten erhalten wir mit $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ eine J-orthogonale Basis in Π_+. Aus Π_+ und seinem J-orthogonalen Komplement Π_- ergibt sich schließlich das positiv definite Skalarprodukt (3.3).

4. Spektraldarstellung

Im vorliegenden Abschnitt setzen wir wieder wie in 2.2 voraus, daß der das indefinite Skalarprodukt definierende Operator J die Gestalt $J = P - Q$ besitzt.

Es sei $A \in \Lambda^+$[14]. Mit den Bezeichnungen von Satz 1.1 gilt nach (1.6)

$$[Ax,x] \geqq \mu[x,x]\ (x \in \mathfrak{H})\,. \tag{4.1}$$

[14]) Wir erinnern daran, daß A als abgeschlossener, auf dem (vollständigen) Hilbertraum $\mathfrak{H}$ definierter Operator stetig ist.

Dabei können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mu \geqq 0$ annehmen; andernfalls ist nämlich nur anstelle von A der Operator $A' = -A$ bezüglich des Skalarproduktes $[x, y]' = -[x, y]$ zu betrachten.

Die Bedingung (4.1) sei dahingehend verschärft, daß eine Konstante $\tau > 0$ existiert, mit der für alle $x \in \mathfrak{Z}^+ \cup \mathfrak{Z}^0$

$$[Ax, x] \geqq \tau(x, x) \quad (x \in \mathfrak{Z}^+ \cup \mathfrak{Z}^0) \tag{4.2}$$

gilt[15]. Offenbar ist dann wegen $|[x, x]| \leqq \|J\| (x, x) = (x, x)$ $(x \in \mathfrak{H})$ nach Definition von μ

$$\mu \geqq \tau > 0 \,. \tag{4.3}$$

Wir beweisen unter den oben angegebenen Voraussetzungen das

Lemma 4.1. *Es existiert eine Konstante $\varrho > 0$, so daß für alle $x \in \mathfrak{Z}^-$*

$$[Ax, x] - (\mu - \varrho)[x, x] > \varrho(x, x) \quad (x \in \mathfrak{Z}^-) \tag{4.4}$$

gilt.

Beweis. Infolge der Definition von μ gibt es eine Folge (x_n), $x_n \in \mathfrak{Z}^+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei $[x_n, x_n] = 1$ und $[Ax_n, x_n] \leqq \mu + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gilt. Es wird nun angenommen, daß (im Gegensatz zu (4.4)) eine Folge (y_n) mit $y_n \in \mathfrak{Z}^-$, $(y_n, y_n) = 1$ und $[Ay_n, y_n] - \left(\mu - \frac{1}{n}\right)[y_n, y_n] \leqq \frac{1}{n}$ existiere.

Wir definieren

$$\begin{aligned} r_n &= \operatorname{Re}([y_n, x_n]) \\ \sigma_n &= \begin{cases} \frac{r_n}{|r_n|} & (r_n \neq 0) \\ 1 & (r_n = 0) \end{cases} \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \\ \alpha_n &= -r_n + \sigma_n \sqrt{r_n^2 - [y_n, y_n]} \\ z_n &= y_n + \alpha_n x_n \end{aligned}$$

Da offenbar

$$[z_n, z_n] = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

gilt, erhält man

$$\begin{aligned} [Az_n, z_n] = [Az_n - \mu z_n, z_n] = [Ay_n, y_n] - \mu[y_n, y_n] + \\ + \alpha_n^2([Ax_n, x_n] - \mu[x_n, x_n]) + 2\alpha_n \operatorname{Re}([Ay_n - \mu y_n, x_n])\,. \end{aligned}$$

Weiter gilt $0 < -[y_n, y_n] = |(Jy_n, y_n)| \leqq \|J\| (y_n, y_n) = 1$. Außerdem ist deshalb $|\alpha_n| \leqq 1$, wie man unschwer aus der Definition herleitet. Damit ergibt sich, wenn überdies die Definitionen der Folgen (x_n), (y_n) und (4.1) beachtet werden,

$$\begin{aligned} [Az_n, z_n] &\leqq \frac{1}{n} - \frac{1}{n}[y_n, y_n] + \frac{1}{n}\alpha_n^2 + 2|\alpha_n \operatorname{Re}([Ay_n - \mu y_n, x_n])| \leqq \\ &\leqq \frac{3}{n} + 2|[Ay_n - \mu y_n, x_n]|\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, da wegen (4.1) für $Q(x, y) = [Ax - \mu x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ die Schwarz-

[15]) Vgl. E. PESONEN [5]; wir verweisen auf die Ausführungen am Ende der Einleitung.

sche Ungleichung $|Q(x, y)|^2 \leqq Q(x, x)\, Q(y, y)$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ gilt,

$$[A z_n, z_n] \leqq \frac{3}{n} + 2\sqrt{[A y_n - \mu y_n, y_n]\,[A x_n - \mu x_n, x_n]} \leqq$$
$$\leqq \frac{3}{n} + 2\sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}} < \frac{7}{n}\,.$$

Dies liefert, da nach (4.5) $z_n \in \mathfrak{Z}^0$ gilt, zusammen mit (4.2) $\tau(z_n, z_n) \leqq \frac{7}{n}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = o$.

Weiterhin gilt nach Definition von (x_n) und infolge (4.2)

$$\|x_n\|^2 = (x_n, x_n) \leqq \frac{1}{\tau}\,[A x_n, x_n] \leqq \frac{\mu + 1}{\tau} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Damit erhält man

$$(4.6) \qquad |2\alpha_n \mathrm{Re}([z_n, x_n])| \leqq 2\,|(J z_n, x_n)| \leqq 2\|z_n\|\,\|x_n\| \leqq 2\sqrt{\frac{\mu+1}{\tau}}\,\|z_n\|\,.$$

Aus $[y_n, y_n] = [z_n, z_n] - 2\alpha_n \mathrm{Re}([z_n, x_n]) + \alpha_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt somit wegen $[z_n, z_n] = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\| = 0$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n^2 - [y_n, y_n]) = 0$ und daraus auf Grund von $[y_n, y_n] < 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Relation $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} [y_n, y_n] = 0$.

Nun besteht aber die Ungleichung

$$\|y_n\| \leqq \|z_n\| + |\alpha_n|\,\|x_n\| \leqq \|z_n\| + |\alpha_n| \sqrt{\frac{\mu+1}{\tau}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

also konvergiert die Folge (y_n) gegen o. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, daß nach Definition $(y_n, y_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gilt.

Satz 4.1. *Sei $A \in \Lambda^+$ und es gelte (4.2). Werden dann μ und ϱ definiert wie in Satz 1.1 bzw. Lemma 4.1, so ist die hermitesche Bilinearform*

$$\{x, y\} = [A x - (\mu - \varrho) x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{H})$$

ein auf $\mathfrak{H}$ positiv definites Skalarprodukt, das auf $\mathfrak{H}$ die Ausgangstopologie erzeugt. Dabei ist A bezüglich dieses Skalarproduktes selbstadjungiert, d. h. es gilt

$$(4.7) \qquad \{A x, y\} = \{x, A y\} \quad (x, y \in \mathfrak{H})\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir, wie man an Formel (4.4) erkennt, $\varrho < \mu$ voraussetzen. Auf Grund der Beziehungen (4.1) und (4.2) ergibt sich damit für alle $x \in \mathfrak{Z}^+ \cup \mathfrak{Z}^0$

$$(4.8) \qquad \{x, x\} = [A x, x] - (\mu - \varrho)\,[x, x] \geqq [A x, x]\left(1 - \frac{\mu - \varrho}{\mu}\right) \geqq \frac{\tau\varrho}{\mu}\,(x, x)\,.$$

Mit $K_1 = \frac{\tau\varrho}{\mu}$ erhalten wir dann aus (4.8) und wegen (4.3) aus (4.4)

$$K_1 (x, x) \leqq \{x, x\} \quad (x \in \mathfrak{H})\,.$$

Weiter gilt

$$\{x, x\} \leqq |[A x, x]| + (\mu - \varrho)\,|[x, x]| \leqq (\|A\| + \mu - \varrho)\,(x, x) \quad (x \in \mathfrak{H})\,.$$

Mit $K_2 = \|A\| + \mu - \varrho$ folgt also

$$(4.9) \qquad K_1 (x, x) \leqq \{x, x\} \leqq K_2 (x, x) \quad (x \in \mathfrak{H})\,,$$

d. h., die auf $\mathfrak{H}$ durch die Normen $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ $(x \in \mathfrak{H})$ und $|x| = \sqrt{\{x, x\}}$ $(x \in \mathfrak{H})$ erzeugten Topologien sind identisch.

Schließlich ergibt sich die Relation (4.7) wegen der J-Selbstadjungiertheit von A unmittelbar aus der Definition des Skalarproduktes $\{x, y\}$ $(x, y \in \mathfrak{H})$.

Satz 4.2. *Der Operator $A \in \Lambda^+$ genüge der Bedingung (4.2), und B sei ein mit A vertauschbarer J-selbstadjungierter Operator (d. h. $BA = AB$). Dann existiert genau eine Schar $\{E_\lambda\}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ von J-selbstadjungierten Operatoren in $\mathfrak{H}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $E_\lambda E_\mu = E_\lambda$ *für* $\lambda \leqq \mu$,
2) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$,
3) $E_\lambda = O$ *für* $\lambda < -\|B\|$, $E_\lambda = I$ *für* $\lambda \geqq \|B\|$,
4) $B^r = \int\limits_{-\|B\|-0}^{\|B\|} \lambda^r \, dE_\lambda$[16] $(r = 0, 1, 2, \ldots)$.

Dabei gilt für jeden beschränkten Operator C von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ mit $BC = CB$

$$E_\lambda C = C E_\lambda \, (-\infty < \lambda < +\infty).$$

Beweis. Wir setzen mit den gleichen Bezeichnungen wie in Satz 4.1 $\tilde{J} = A - (\mu - \varrho)I$. Offenbar ist B bezüglich des positiv definiten Skalarproduktes $\{x, y\} = [\tilde{J}x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ (s. Satz 4.1) selbstadjungiert. $\{E_\lambda\}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ sei die zugehörige Spektralschar (s. z. B. [7]). Wegen $\{\tilde{J}x, y\} = \{x, \tilde{J}y\}$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ und $B\tilde{J} = \tilde{J}B$ gilt auf Grund der Eigenschaften von $\{E_\lambda\}$ die Relation $E_\lambda \tilde{J} = \tilde{J} E_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Weiter existiert nach (4.9) der Operator $\tilde{J}^{-1}$. Damit folgt die J-Selbstadjungiertheit der E_λ aus

$$[E_\lambda x, y] = [E_\lambda \tilde{J}(\tilde{J}^{-1}x), y] = \{E_\lambda \tilde{J}^{-1}x, y\} = [x, E_\lambda y] \; (x, y \in \mathfrak{H}).$$

Zum Beweis von 3) genügt der Hinweis, daß nach [6], S. 44,

$$\left|\frac{\{Bx, x\}}{\{x, x\}}\right| \leqq \|B\| \; (x \in \mathfrak{H}, x \neq o)$$

gilt.

Schließlich ergeben sich die übrigen Behauptungen des Satzes aus den bekannten Eigenschaften der Spektralschar $\{E_\lambda\}$.

Es soll noch erwähnt werden, daß die in Satz 4.2 betrachteten Operatoren B genau diejenigen J-selbstadjungierten Operatoren sind, die bezüglich eines positiv definiten Skalarproduktes, das auf $\mathfrak{H}$ die Ausgangstopologie erzeugt, selbstadjungiert sind. Existiert nämlich zu B ein positiv definites Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$ $(=(\tilde{K}x, y))$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ mit $\langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle$ und $c_1(x, x) \leqq \langle x, x\rangle \leqq c_2(x, x)$, so ist $K = J\tilde{K}$ J-selbstadjungiert. K erfüllt wegen $\langle x, x\rangle = [Kx, x] \geqq c_1(x, x)$ $(x \in \mathfrak{H})$ die Beziehung (4.2), und es gilt $BK = KB$.

Literatur

[1] Ginsburg, J. P., u. I. S. Iochwidow: Untersuchungen über die Geometrie unendlichdimensionaler Räume mit bilinearer Metrik. Uspechi Matem. Nauk XVII, 4 (106), 3—55 (1962) [russisch].

[2] Iochwidow, I. S., u. M. G. Krein: Spektraltheorie von Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik. I. Trudy Mosk. Matem. obschtsch. 8, 413—496 (1959) [russisch].

[16]) Das Integral ist als Limes entsprechender Stieltjessummen bezüglich der gleichmäßigen Operatortopologie zu verstehen.

[3] KREIN, M. G.: Über belastete Integralgleichungen, deren Verteilungsfunktionen nicht monoton sind. Sammelband zum Gedenken an das Akademiemitglied D. A. GRAWE. Moskau, 88—103 (1940) [russisch].

[4] LANGER, H.: Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren. Math. Ann. **146**, 60—85 (1962).

[5] PESONEN, E.: Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, 227 (1956).

[6] REID, W. T.: Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space. Duke Math. J. 18, 41—56 (1951).

[7] RIESZ, F., u. B. SZ.-NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin 1956.

[8] ZAANEN, A. C.: Linear analysis. Amsterdam 1953.

(Eingegangen am 25. März 1963)