DOLD, A.
Math. Annalen 140, 278—298 (1960)

Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe

Von

ALBRECHT DOLD in Heidelberg

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden einige (z. T. bekannte) Punkte aus der Homotopietheorie der Komplexe (= Kettenkomplexe) über einem beliebigen Ring Λ behandelt. Dabei wollen wir vor allem die weitgehende Analogie herausstellen, die zwischen dieser Theorie und der (stabilen) Homotopietheorie topologischer Räume besteht. In dieser Analogie entsprechen den beliebigen topologischen Räumen etwa die positiven Komplexe (wenn der Ring Λ endliche homologische Dimension hat, ist die Einschränkung „positiv" überflüssig; vgl. die Einleitung zu § 3), den CW-Komplexen entsprechen die projektiven (positiven) Komplexe und den Homotopiegruppen der Räume die Homologiemoduln der Komplexe. Die letzte, vielleicht etwas überraschende Analogie wird besonders in §§ 5—7 deutlich werden.

Die §§ 1—2 bringen technische Vorbereitungen: Die in der Topologie wohlbekannten Begriffe Einhängung, Abbildungskegel, Abbildungsfolge werden übertragen und ihre wesentlichen Eigenschaften abgeleitet. § 3 bringt u. a. das Analogon zum Satz von J. H. C. WHITEHEAD (s. 3.3) und Verallgemeinerungen davon (3.1, 3.2). Wie in der Topologie geben sie Anlaß zum Begriff der schwachen Homotopieäquivalenz (s. § 4). „Eilenberg-MacLane-Komplexe" treten in § 5 auf; sie stimmen im wesentlichen mit Auflösungen von Moduln überein. Den Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H^*(A, m; B)$ entsprechen daher die Gruppen $\mathrm{Ext}_\Lambda(A, B)$. Sie hängen nicht von m ab, d. h. wir haben es hier mit einer (bei Einhängung) stabilen Theorie zu tun. Wie in der Topologie lassen sich die Cohomologieklassen der Eilenberg-MacLane-Komplexe, d. h. die Elemente von $\mathrm{Ext}_\Lambda(A, B)$ auch als Cohomologieoperationen interpretieren (s. 6.2), oder als k-Invarianten von Komplexen mit nur zwei nicht-verschwindenden Homologiemoduln (s. 7.6). Die letzte Deutung hängt eng mit der von YONEDA-BUCHSBAUM zusammen (s. 7.9). Sie führt unmittelbar zum Begriff des „Postnikovsystems", auf den wir allerdings nur oberflächlich eingehen (s. 7.13). Auch einige andere Punkte werden nur angedeutet oder erwähnt (so z. B. Produkte in 6.7 und ein Klassifikationssatz in 7.8). Gar nicht eingegangen sind wir auf die Spektralfolge von ADAMS [1], die nach D. PUPPE in jeder „stabilen Homotopietheorie" existiert. Im letzten Paragraphen 8 geben wir eine Anwendung auf das Künnethproblem.

Alle Ergebnisse lassen sich auf beliebige abelsche Kategorien übertragen — jedenfalls wenn es darin hinreichend viele projektive Objekte gibt.

§ 1. Bezeichnungen; Hom(X, Y)

1.1. Es sei Λ ein fester (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Einselement. Unter einem *Modul* verstehen wir stets einen unitären (Links-) Modul über Λ (nur in § 8 kommen Rechts- und Linksmoduln gleichzeitig vor). Ein *Komplex* (= Kettenkomplex) X über Λ ist eine in beiden Richtungen unendliche Folge

$$\cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{d_n} X_n \xleftarrow{d_{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \cdots$$

von Moduln und Modulhomomorphismen d_i mit $d_n d_{n+1} = 0$. Zyklen $Z(X)$, Ränder $B(X)$ und Homologie $H(X)$ sind wie üblich definiert.

1.2. Zur Beschreibung von Kettenabbildungen und Homotopien eignet sich besonders P. Cartiers Definition von $\mathrm{Hom}(X, Y)$: (vgl. [2], 2 oder auch [8], 3): Es seien X, Y Komplexe. Wir setzen

$$\mathrm{Hom}(X, Y)_r = \prod_n \mathrm{Hom}(X_n, Y_{n+r}), \tag{1.3}$$

d. h. ein Element $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)_r$ ist eine Folge von Homomorphismen $f_n \colon X_n \to Y_{n+r}$. Ferner definieren wir

$$d \colon \mathrm{Hom}(X, Y)_r \to \mathrm{Hom}(X, Y)_{r-1},\ d(f) = d^Y f + (-1)^{r+1} f d^X \tag{1.4}$$

(die oberen Indizes X bzw. Y geben an, in welchem Komplex der Rand d zu nehmen ist). Dann ist die Folge

$$\cdots \xleftarrow{d} \mathrm{Hom}(X, Y)_r \xleftarrow{d} \mathrm{Hom}(X, Y)_{r+1} \xleftarrow{d} \cdots$$

ein Komplex (über dem Ring der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$), den wir mit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ bezeichnen.

$\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist natürlich ein Funktor, und zwar kontravariant in X und kovariant in Y.

1.5. Ein r-Zykel in $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist eine Folge von Homomorphismen $f_n \colon X_n \to Y_{n+r}$ mit $df = (-1)^r f d$, d. h. genau das, was man sonst als *Kettenabbildung* $f \colon X \to Y$ *vom Grade* r bezeichnet. Als r-Zykel von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist f genau dann nullhomolog, wenn es eine Folge von Homomorphismen $s \colon X_n \to Y_{n+r+1}$ gibt mit $f = d(s) = ds + (-1)^r sd$, d. h. genau dann, *wenn f als Kettenabbildung aufgefaßt nullhomotop ist,* in Zeichen $f \simeq 0$. $H_r\mathrm{Hom}(X, Y)$ *ist also die Gruppe der Homotopieklassen von Kettenabbildungen* $X \to Y$ *vom Grade* r. Insbesondere ist

$$H_0\mathrm{Hom}(X, Y) = [X, Y] \tag{1.6}$$

die Gruppe der Homotopieklassen von Kettenabbildungen vom Grade 0, die wir auch als *Kettenabbildungen schlechthin* bezeichnen.

1.7. Kettenabbildungen vom Grade $r \neq 0$ können mit Hilfe der Einhängung auf gewöhnliche Kettenabbildungen zurückgeführt werden. Unter der *Einhängung* eines Komplexes X verstehen wir den folgenden Komplex SX

$$(SX)_n = X_{n-1}, \quad d^{SX} = -d^X$$

Der Funktor S besitzt einen inversen Funktor S^{-1} (die „Aushängung"), definiert durch $SS^{-1}X = X$.

Eine Kettenabbildung $X \to Y$ vom Grade r ist dasselbe wie eine gewöhnliche Kettenabbildung $S^r X \to Y$ bzw. $X \to S^{-r} Y$. Dabei ist S^r die r-mal iterierte Einhängung.

Die identische Abbildung ist eine Kettenabbildung $X \to SX$ vom Grade $+1$, die einen Isomorphismus

$$H_{n-1}(X) = H_n(SX) \tag{1.8}$$

induziert.

§ 2. Abbildungskegel und Abbildungsfolge

2.1 Definition. *Der Abbildungskegel* Cf ($= \hat{f}$ in [6], S. 155) einer Kettenabbildung $f: X \to Y$ ist der folgende Komplex

$$(Cf)_n = X_{n-1} + Y_n \quad \text{(direkte Summe)}$$
$$d(x, y) = (-dx, dy + fx)\,, \quad x \in X_{n-1}, y \in Y_n\,.$$

Man überzeugt sich sofort, daß $dd = 0$ ist, also wirklich ein Komplex vorliegt. Die Summanden Y_n bilden offenbar einen Unterkomplex $Y \subset Cf$, der Faktorkomplex Cf/Y stimmt mit der Einhängung von X überein, d. h. wir haben eine exakte Folge

$$0 \to Y \xrightarrow{Pf} Cf \xrightarrow{Qf} SX \to 0\,. \tag{2.2}$$

Abbildungskegel und Einhängung sind bis auf ein Vorzeichen vertauschbare Operationen; genauer gilt

$$CSf = SC(-f)\,, \tag{2.3}$$

oder auch:

2.4. *Es gibt einen Isomorphismus* $t: CSf \cong SCf$, *für welchen das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} SY & \xrightarrow{PSf} & CSf & \xrightarrow{QSf} & S^2X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{id}} \\ SY & \xrightarrow[SPf]{} & SCf & \xrightarrow[SQf]{} & S^2X \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. $(CSf)_n = (SX)_{n-1} + (SY)_n = X_{n-2} + Y_{n-1} = (SCf)_n = (SC(-f))_n$. Der Rand von $(x, y) \in X_{n-2} + Y_{n-1}$ ist $(dx, -dy + fx)$ in CSf und $SC(-f)$ und ist $(dx, -dy - fx)$ in SCf. Die gewünschte Abbildung t ist gegeben durch $t(x, y) = (-x, y)$.

Auch mit vielen anderen Funktoren ist Cf vertauschbar; wir erwähnen nur noch

$$C\,\mathrm{Hom}(U, f) \cong \mathrm{Hom}(U, Cf)\,, \tag{2.5}$$

für jeden Komplex U.

Beweis.

$$(C\,\mathrm{Hom}(U, f))_r = \mathrm{Hom}(U, X)_{r-1} + \mathrm{Hom}(U, Y)_r = \prod_n \mathrm{Hom}(U_n, X_{n+r-1}) +$$
$$+ \prod_n \mathrm{Hom}(U_n, Y_{n+r}) \cong \prod_n \mathrm{Hom}(U_n, X_{n+r-1} + Y_{n+r}) = \mathrm{Hom}(U, Cf)_r\,.$$

Der Rand von $\{\varphi_n\} + \{\psi_n\} \in \prod_n \mathrm{Hom}(U_n, X_{n+r-1}) + \prod_n \mathrm{Hom}(U_n, Y_{n+r})$ ist in beiden Fällen $\{-d^X\varphi + (-1)^{r+1}\varphi d^U\} + \{d^Y\psi + (-1)^{r+1}\psi d^U + f\varphi\}$, wie eine leichte Rechnung zeigt.

In dem nun folgenden Teil dieses Paragraphen übertragen wir die topologischen Betrachtungen in [10], 1—2 auf Komplexe.

2.6 Definition. Ist

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

ein bis auf Homotopie kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen, also $f'\varphi \simeq \psi f$, dann heißt (φ, ψ) eine *Transformation* von f in g. Sind φ, ψ beides Homotopieäquivalenzen, dann heißt (φ, ψ) eine *Homotopieäquivalenz zwischen f und g.*

Ist allgemeiner das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & X'_1 \arrow[r, "f'_1"'] & X'_2 \arrow[r, "f'_2"'] & X'_3 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

kommutativ bis auf Homotopie, dann heißt die Folge $\{\varphi_i\}$ eine *Transformation* der ersten Zeile von 2.7 in die zweite, bzw. eine *Homotopieäquivalenz zwischen den beiden Zeilen,* wenn alle φ_i Homotopieäquivalenzen sind. Man sieht leicht, daß Homotopieäquivalenz zwischen Abbildungen oder Folgen von Abbildungen eine Äquivalenzrelation ist.

Wir werden diese Begriffe vor allem im Zusammenhang mit der *Abbildungsfolge* $\mathfrak{A}f$ einer Kettenabbildung $f: X \to Y$ benutzen. Darunter versteht man die in beiden Richtungen unendliche Folge

$$\begin{gathered} \cdots \to S^{-1}Y \xrightarrow{S^{-1}Pf} S^{-1}Cf \xrightarrow{S^{-1}Qf} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} \\ Cf \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \to \cdots . \end{gathered} \tag{2.8}$$

Ist $A_i f$ der i-te Komplex und $\alpha_i f$ die i-te Abbildung dieser Folge (etwa $A_0 f = X$, $\alpha_0 f = f$), dann gilt

$$A_{i+3}f = SA_i f\,, \quad \alpha_{i+3}f = S\alpha_i f\,. \tag{2.9}$$

Wir beweisen die folgenden Sätze (analog zu [10], Satz 8b und 5).

2.10 Satz. *Jede Transformation (Homotopieäquivalenz) φ_0, φ_1 von $f: X \to Y$ in $f': X' \to Y'$ läßt sich zu einer Transformation (Homotopieäquivalenz) $\{\varphi_i\}$ von $\mathfrak{A}f$ in $\mathfrak{A}f'$ mit der Eigenschaft $\varphi_{i+3} = S\varphi_i$ ergänzen.*

2.11 Satz. *Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ ist bis auf eine Homotopieäquivalenz und bis auf eine Indexverschiebung auch Abbildungsfolge für jede ihrer Abbildungen.*

Genauer gibt es eine Homotopieäquivalenz $\{\varphi_i\}$ zwischen $\mathfrak{A}(\alpha_k f)$ und der um k verschobenen Folge $\mathfrak{A}f$ mit

$$\varphi_0 = \mathrm{id}\,, \quad \varphi_1 = \mathrm{id}\,, \quad \varphi_{i+3} = (-1)^k S\varphi_i\,, \tag{2.12}$$

also

$$\begin{tikzcd}
\to A_{-1}(\alpha_k f) \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^k S^{-1}\varphi_2"'] & A_0(\alpha_k f) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A_1(\alpha_k f) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A_2(\alpha_k f) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3(\alpha_k f) \to \arrow[d, "(-1)^k \mathrm{id}"'] \\
\to A_{k-1}f \arrow[r] & A_k f \arrow[r] & A_{k+1}f \arrow[r] & A_{k+2}f \arrow[r] & A_{k+3}f \to
\end{tikzcd}$$

2.13 Korollar. *Jede Homotopieäquivalenz $(\varphi_k, \varphi_{k-1})$ zwischen $\alpha_k f$ und $\alpha_k f'$ läßt sich zu einer Homotopieäquivalenz $\{\varphi_i\}$ (mit $\varphi_{i+3} = S\varphi_i$) zwischen $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{A}f'$ ergänzen.*

Dies ist 2.10, falls $k = 0$ ist. Der allgemeine Fall wird mit 2.11 darauf zurückgeführt.

2.14 Satz. *Die durch $\mathfrak{A}f$ induzierte Folge von Homologiemoduln und Homomorphismen*

$$\to H_n(A_i f) \to H_n(A_{i+1} f) \to H_n(A_{i+2} f) \to$$

stimmt mit der zu 2.2 gehörigen Homologiefolge überein. Insbesondere ist sie exakt.

Beweis. Die Übereinstimmung mit der Homologiefolge von 2.2 ist nur für die $H_n(\alpha_{3i} f)$ fraglich, d. h. wir haben zu zeigen, daß $H_n(Sf): H_n(SX) \to H_n(SY)$ mit dem Randhomomorphismus $\partial_*: H_n(SX) \to H_{n-1}(Y)$ übereinstimmt. Dies rechnet man leicht nach (vgl. auch Hilfssatz 2.18a).

2.15 Korollar. *Cf ist genau dann azyklisch, d. h. $H(Cf) = 0$, wenn f Isomorphismen der Homologie induziert.*

Das kann man natürlich auch leicht direkt einsehen (vgl. [6], S. 155).

Dem Beweis von 2.10 und 2.11 schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

2.16 Hilfssatz. *Der Abbildungskegel Cf ist genau dann nullhomotop, $Cf \simeq 0$, wenn f eine Homotopieäquivalenz ist.*

Beweis. Es sei $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann induziert f für jeden Kettenkomplex U einen Isomorphismus $H\mathrm{Hom}(U, f): H\mathrm{Hom}(U, X) \cong H\mathrm{Hom}(U, Y)$. Nach 2.15 ist also $C\mathrm{Hom}(U, f) = \mathrm{Hom}(U, Cf)$ (s. 2.5) ein azyklischer Komplex. Insbesondere ist $H_0\mathrm{Hom}(Cf, Cf) = 0$, also nach 1.6 die identische Abbildung von Cf nullhomotop, d. h. $Cf \simeq 0$.

Die Umkehrung kann mit einem ähnlichen Schluß gezeigt werden. Ein direkter Beweis dafür findet sich in [6], S. 155.

Insbesondere ist nach 2.16 der Abbildungskegel der identischen Abbildung von X nullhomotop. Wir bezeichnen ihn mit CX. Man überzeugt sich leicht, daß die Abbildung

$$s: CX \to CX\,, \quad s(x, x') = (x', 0)\,, \quad x \in X_{n-1}\,, \quad x' \in X_n \tag{2.17}$$

eine Nullhomotopie $CX \simeq 0$ ist.

2.18 Hilfssatz. *Es sei*

$$0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \to 0 \tag{2.19}$$

eine exakte Folge von Kettenabbildungen, die als Folge von Modulhomomorphismen zerfällt (= splits). Es gibt also Modulhomomorphismen $W \xrightarrow{i'} V \xrightarrow{p'} U$ *(i. a. keine Kettenabbildungen) mit* $pi' = \mathrm{id}$, $p'i = \mathrm{id}$, $p'i' = 0$, $pi = 0$.

a) $\Theta = p'di' : W \to U$ *ist eine Kettenabbildung vom Grade* -1, *und* $H(\Theta) : H(W) \to H(U)$ *ist der Randhomomorphismus* ∂_* *der exakten Homologiefolge von 2.19.*

b) *Ist* $U \simeq 0$, *dann zerfällt die Folge 2.19. Genauer: Ist* $s : U \to U$ *eine Nullhomotopie,* $ds + sd = \mathrm{id}$, *dann ist* $j = i' - isp'di' : W \to V$ *eine Kettenabbildung mit* $pj = \mathrm{id}$. *Insbesondere ist dann* p *eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem* j.

Dual dazu gilt

c) *Ist* $W \simeq 0$, *dann zerfällt die Folge* 2.19. *Ist* $s : W \to W$ *eine Nullhomotopie von* W, *dann ist* $q = p' - p'di'sp : V \to U$ *eine Kettenabbildung mit* $qi = id$. *Insbesondere ist dann* i *eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem* q.

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise betrachten wir U und W als Untermoduln von V (vermöge i bzw. i'). Ferner setzen wir $d^1 = p'd$, $d^2 = pd$. Dann ist $d = d^1 + d^2$, $d^2d^1 = 0$ (wegen $d^2|U = 0$), $d^2d^2 = 0$ (wegen $pd = dp$), also $dd = d^1d^2 + d^1d^1 = 0$.

Nun gilt

a) $\Theta = d^1$, also

$$d\Theta = dd^1 = d^1d^1 = -d^1d^2 = -\Theta d^2.$$

b) $j = \mathrm{id} - sd^1$, also

$$\begin{aligned} dj &= d^1 + d^2 - d^1sd^1 = d^1 + d^2 - (\mathrm{id} - sd^1)d^1 \\ &= d^2 + sd^1d^1 = d^2 - sd^1d^2 = jd^2. \end{aligned}$$

c) $q = p' - d^1sp$, also

$$\begin{aligned} qd &= d^1 - d^1sd^2p = d^1 - d^1(\mathrm{id} - d^2s)p \\ &= d^1(\mathrm{id} - p) + d^1d^2sp = d^1p' - d^1d^1sp = d^1q\,. \end{aligned}$$

Also sind Θ, j und q Kettenabbildungen. Die Gleichung $H(\Theta) = \partial_*$ ergibt sich sofort, wenn man Θ auf einen Zykel $z \in W$ anwendet. Die Gleichungen $pj = \mathrm{id}$ und $qi = \mathrm{id}$ folgen wegen $pi = 0$.

Beweis für 2.10. Wegen der Periodizität 2.9 von $\mathfrak{A}f$ brauchen wir nur eine Abbildung $\varphi_2 : Cf \to Cf'$ zu konstruieren, so daß das Diagramm

(2.20)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "\varphi_1"] & Cf \arrow[r, "Qf"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2"] & SX \arrow[d, "S\varphi_0"] \\ Y' \arrow[r, "Pf'"'] & Cf' \arrow[r, "Qf'"'] & SX' \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie $s : X \to Y'$ mit $ds + sd = f'\varphi_0 - \varphi_1 f$. Wir definieren

(2.21) $$\varphi_2 : Cf \to Cf'\,, \quad \varphi_2(x, y) = (\varphi_0 x, \varphi_1 y - sx)$$

für $(x, y) \in X_{n-1} + Y_n = (Cf)_n$. Dann ist 2.20 sogar streng kommutativ (nicht nur bis auf Homotopie), und eine leichte Rechnung zeigt, daß φ_2 wirklich eine Kettenabbildung ist.

Nehmen wir nun an, daß φ_0, φ_1 Homotopieäquivalenzen sind. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes φ_2, das 2.20 zum *streng kommutativen* Diagramm macht, ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist. Dies besagt gerade der

2.22 Hilfssatz. *Ist*

$$(2.23)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \to & U' & \xrightarrow[i']{} & V' & \xrightarrow[p']{} & W' & \to & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, in welchem die Zeilen exakt sind und als Folgen von Modulhomomorphismen zerfallen, und sind f', f'' Homotopieäquivalenzen, dann auch f.

Beweis. Das Diagramm 2.23 induziert eine kurze exakte Folge

$$0 \to Cf' \xrightarrow{\iota} Cf \xrightarrow{\pi} Cf'' \to 0$$
$$\iota(u, u') = (iu, i'u')\,, \quad \pi(v, v') = (pv, p'v')\,,$$

die ebenfalls zerfällt (als Folge von Modulhomomorphismen). Weil f', f'' Homotopieäquivalenzen sind, gilt $Cf' \simeq 0$, $Cf'' \simeq 0$ (s. 2.16), also nach 2.18 b) oder c) auch $Cf \simeq 0$. Also ist f eine Homotopieäquivalenz nach 2.16.

Der Satz 2.11 wird sich im wesentlichen aus dem folgenden Hilfssatz ergeben.

2.24 Hilfssatz. *Es sei*

$$0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \to 0$$

eine Folge wie in 2.18. Dann gibt es Homotopieäquivalenzen

$$\mu : Ci \to W \quad \textit{und} \quad \nu : SU \to Cp\,,$$

so daß die Diagramme

$$(2.25\,\mathrm{a})\qquad \begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{Pi} & Ci & \xrightarrow{Qi} & SU \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{id}} \\ V & \xrightarrow[p]{} & W & \xrightarrow[\Theta]{} & SU \end{array}$$

und

$$(2.25\,\mathrm{b})\qquad \begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{Pp} & Cp & \xrightarrow{Qp} & SV \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \nu} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ W & \xrightarrow[\Theta]{} & SU & \xrightarrow[Si]{} & SV \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ sind. Dabei ist Θ wie in 2.18a *definiert, wird jetzt aber als Kettenabbildung $W \to SU$ aufgefaßt* (s. 1.7).

Beweis. Wir behalten die Vereinbarungen und Bezeichnungen aus dem Beweis zu 2.18 bei und definieren

$$\begin{array}{ll} \mu : Ci \to W\,, & \mu(u, v) = p(v)\,, \\ \nu : SU \to Cp\,, & \nu(u) = (u, 0)\,, \end{array} \qquad u \in U_{n-1} \subset V_{n-1}, v \in V_n\,.$$

Wegen $p(u) = 0$ folgt, daß μ und ν Kettenabbildungen sind. μ ist epimorph und ihr Kern besteht aus den Elementen $(u, u') \in U_{n-1} + U_n$, d. h. $\mathrm{Kern}(\mu) = CU$ (s. 2.17). Entsprechend ist ν monomorph und besitzt den Cokern CW. Wir haben also exakte Folgen

$$0 \to CU \xrightarrow{\iota} Ci \xrightarrow{\mu} W \to 0$$

$$0 \to SU \xrightarrow{\nu} Cp \xrightarrow{\pi} W \to 0 .$$

Nun ist $CU \simeq 0$, $CW \simeq 0$, also sind μ bzw. ν nach 2.18 Homotopieäquivalenzen und besitzen die Homotopieinversen

$$\gamma : W \to Ci , \quad \gamma(w) = (-d^1 w, w) , \quad w \in W ,$$

bzw.

$$\varrho : Cp \to SU , \quad \varrho(v, w) = v - p(v) + d^1(w) .$$

(Man braucht nur zu verifizieren, daß γ und ϱ Kettenabbildungen mit $\mu\gamma = \mathrm{id}$, $\varrho\nu = \mathrm{id}$ sind), also $\gamma\mu \simeq \mathrm{id}$, $\nu\varrho \simeq \mathrm{id}$. Wir rechnen nun nach, daß $\Theta\mu = -(Qi)\gamma\mu$, $\nu\Theta = \nu\varrho(Pp)$ ist. Daraus folgt, daß das rechte Quadrat von 2.25a und das linke Quadrat von 2.25b bis auf Homotopie kommutativ sind. Die beiden anderen Quadrate sind überhaupt kommutativ, wie man sich sofort überzeugt.

a) $(Qi)(u, v) = u$, $\Theta(w) = d^1(w) = -(Qi)\gamma(w)$, also $\Theta = -(Qi)\gamma$;

b) $(Pp)(w) = (0, w)$, $\Theta(w) = d^1(w) = \varrho(Pp)(w)$, also $\Theta = \varrho(Pp)$, q.e.d.

Beweis für 2.11. Wegen der Periodizität 2.9 der Abbildungsfolge genügt es, eine Homotopieäquivalenz $\varphi_2 : A_2(\alpha_k f) \to A_{k+2} f$ anzugeben, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
A_1(\alpha_k f) & \to & A_2(\alpha_k f) & \to & A_3(\alpha_k f) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^k \mathrm{id}} \\
A_{k+1} f & \to & A_{k+2} f & \to & A_{k+3} f
\end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ wird.

Für $k = 3$ wählen wir als φ_2 den Isomorphismus t aus 2.4; entsprechend für $k = -3$. In den Fällen $k = 1$ bzw. 2 wenden wir den Hilfssatz 2.24 mit $i = Pf$, $p = Qf$ an: wir nehmen als φ_2 die Homotopieäquivalenz μ bzw. ein Homotopieinverses zu ν (etwa ϱ). Der allgemeine Fall $k = 3l + m$ mit $0 \leqq m < 3$ wird erledigt, indem wir zunächst $|l|$-mal den Fall $k = \pm 3$ anwenden und dann den Fall $k = m$ ($\varphi_2 = \mathrm{id}$ für $k = 0$).

§ 3. Homotopie und Homologie

Für alle weiteren Betrachtungen dieser Arbeit machen wir stets eine der beiden folgenden Annahmen (s. Fall 1 oder 2 in [3], S. 369)

(A) Alle vorkommenden Komplexe sind nach unten beschränkt, d. h. $X_n = 0$ für hinreichend kleine n.

(B) Der Ring Λ hat endliche homologische (Links-) Dimension, $\mathrm{l.gl.\,dim}(\Lambda) < \infty$.

Wir werden diese Voraussetzungen benutzen, ohne jedesmal darauf hinzuweisen.

3.1 Satz. *Es sei $\varphi: X \to Y$ eine Kettenabbildung (vom Grade 0), die Isomorphismen der Homologie induziert, $H(\varphi): H(X) \cong H(Y)$. Dann induziert auch die Kettenabbildung* $\mathrm{Hom}(P, \varphi): \mathrm{Hom}(P, X) \to \mathrm{Hom}(P, Y)$ *Isomorphismen der Homologiegruppen, falls P ein projektiver Komplex ist (und eine der Voraussetzungen A oder B erfüllt ist).*

Dieser Satz ist fast ein Spezialfall von [3], XVII, 4.3, nur wird dort der Funktor $\mathrm{Hom}(X, Y)$ mit direkten Summen statt direkten Produkten definiert. Der Beweis läßt sich aber ohne weiteres übertragen. Ehe wir dazu kommen, ziehen wir einige Folgerungen.

3.2 Korollar. (Analog zu Thm. 16.3 in [12].) *Die Zusammensetzung mit φ stiftet eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Homotopieklassen von Kettenabbildungen $f: P \to X$ und $g: P \to Y$, in Zeichen*

$$[P, X] \cong [P, Y], \quad [f] \to [g], \quad wo\ g = \varphi f.$$

Dies folgt aus 1.6.

3.3 Korollar. *Sind die Komplexe X, Y aus 3.1 projektiv, dann ist φ eine Homotopieäquivalenz.*

Dieser Satz (Analogon zu Theorem 1 in [14]) wird üblicherweise unter schärferen Voraussetzungen formuliert (s. [6], V, 13.3).

Beweis. Setzen wir $P = Y$, dann gibt es nach 3.2 eine Kettenabbildung $\psi: Y \to X$ mit $\varphi\psi \simeq \mathrm{id}$. Daraus folgt $H(\varphi)H(\psi) = \mathrm{id}$. Also ist $H(\psi)$ ein Isomorphismus, und es gibt nach dem gleichen Schluß eine Kettenabbildung $\varphi': X \to Y$ mit $\psi\varphi' \simeq \mathrm{id}$. Es folgt $\varphi' \simeq (\varphi\psi)\varphi' = \varphi(\psi\varphi') \simeq \varphi$, also $\psi\varphi \simeq \mathrm{id}$, d. h. φ ist eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem ψ.

3.4. Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Voraussetzung A oder B nicht überflüssig ist. Es sei $\Lambda = \mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ und X der folgende Komplex

$$\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z}_4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}_4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}_4 \xleftarrow{2} \cdots.$$

Offenbar ist X projektiv und $H(X) = 0$. Wäre X nullhomotop, dann auch $X \otimes \mathbf{Z}_2$, im Widerspruch zu $H(X \otimes \mathbf{Z}_2) \neq 0$; also ist $X \not\simeq 0$. Unter der Voraussetzung A oder B ist ein solches Vorkommnis nach 3.3 (mit $Y = 0$) nicht möglich.

3.5. Zum Beweis von 3.1 haben wir nach 2.15 zu zeigen, daß $H(C\mathrm{Hom}(P, \varphi)) = 0$, d. h. (s. 2.5) daß $H(\mathrm{Hom}(P, C\varphi)) = 0$ ist. Wegen $H(C\varphi) = 0$ und 1.5 ist dies in dem folgenden Hilfssatz enthalten.

3.6 Hilfssatz. *Ist P ein projektiver und X ein azyklischer Komplex, $H(X) = 0$, dann ist jede Kettenabbildung $f: P \to X$ (von beliebigem Grad) nullhomotop.*

Unter der Voraussetzung A ist das klar: Man konstruiert die Nullhomotopie $s: P_n \to X_{n+r+1}$ durch Induktion nach n (vgl. [3], V, 1.1; m. a. W. man kann X als „Auflösung des Moduls 0" betrachten). Allgemein ergibt sich 3.6 aus den beiden folgenden Hilfssätzen 3.7 und 3.9, die unter der Voraussetzung A oder B bewiesen werden.

3.7 Hilfssatz. *Ist $f : P \to X$ eine Kettenabbildung und P projektiv, dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & X \\ & P' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

mit den folgenden Eigenschaften

(i) *P' ist projektiv.*

(ii) *i bildet P isomorph auf einen direkten Summanden (als Modul, nicht als Komplex) von P' ab.*

(iii) *f' ist epimorph und induziert Isomorphismen der Homologie, $H(f') : H(P') \cong H(X)$.*

3.8 Korollar. *Zu jedem Komplex X gibt es einen projektiven Komplex P' und eine Kettenabbildung $f' : P' \to X$ mit $H(f') : H(P') \cong H(X)$.*

(Man nehme $P = 0$ in 3.7.)

3.9 Hilfssatz. *Ist P projektiv und $H(P) = 0$, dann ist P nullhomotop, $P \simeq 0$.*

Beweis für 3.6. Es genügt den Fall $r = 0$ zu betrachten (s. 1.7). Wir wenden 3.7 an. Der Komplex P' ist projektiv und $H(P') \cong H(X) = 0$. Nach 3.9 ist dann $P' \simeq 0$, also auch $i \simeq 0$ und damit $f = f' i \simeq 0$, q. e. d.

Beweis für 3.9. Unter der Voraussetzung A kann P als projektive Auflösung des Moduls 0 betrachtet werden (evtl. nach einer Dimensionsverschiebung). Da je zwei projektive Auflösungen homotopieäquivalent sind ([3], V. 1), folgt $P \simeq 0$.

Legen wir nun die Voraussetzung B zugrunde, etwa l.gl. $\dim(\Lambda) \leqq k$. Nach [7], Theorem I, 2.4.1 genügt es zu zeigen, daß die Zyklen von P einen direkten Summanden bilden. Wegen der exakten Folge

$$0 \to Z(P) \to P \xrightarrow{d} B(P) \to 0$$

genügt es zu zeigen, daß $B(P)$ projektiv ist ([3], I, 2.4). Dazu betrachten wir die wegen $H(P) = 0$ exakte Folge

$$0 \leftarrow B_n(P) \xleftarrow{d} P_{n+1} \xleftarrow{d} P_{n+2} \ldots P_{n+k} \leftarrow Z_{n+k}(P) \leftarrow 0 .$$

Da P projektiv und $\dim(B_n) \leqq k$ ist, folgt ([3], VI, 2.1): $Z_{n+k}(P)$ ist projektiv. Wegen $H(P) = 0$ ist aber $Z(P) = B(P)$, q. e. d.

Beweis zu 3.7. Zunächst gibt es zu jedem X eine exakte Folge $Q \xrightarrow{\alpha} X \to 0$ von Kettenabbildungen, so daß Q projektiv ist und $Q_n = 0$ falls $X_n = 0$ (vgl. [3], XVII, 1.2): Wir nehmen z. B. eine exakte Folge $F_n \xrightarrow{\alpha'} X_n \to 0$ mit projektivem F_n; F_n sei 0, falls $X_n = 0$ ist. Ist $X_{n-1} = 0$, dann sei Q^n der Komplex, der Null ist außer in der Dimension n und der dort mit F_n übereinstimmt. α' definiert dann eine Kettenabbildung $\alpha^n : Q^n \to X$, die epimorph ist in der Dimension n und Null sonst. Ist $X_{n-1} \neq 0$, dann sei Q^n Null außer in den Dimensionen n und $n - 1$; die Moduln dieser Dimension seien jeweils F_n und der Rand von n nach $n - 1$ sei die identische Abbildung. Wieder haben wir eine Kettenabbildung $\alpha^n: Q^n \to X$, die in der Dimension n mit α' übereinstimmt (also epimorph ist) und die Null ist außer in den Dimensionen n und $n-1$. Die direkte Summe

$$Q = \sum_n Q^n \xrightarrow{\alpha = \Sigma\alpha^n} X \to 0$$

liefert dann die gewünschte Darstellung.

Durch Iteration dieses Verfahrens erhält man eine exakte Folge von Kettenabbildungen

$$(3.10) \qquad 0 \leftarrow X \xleftarrow{\alpha + f = \alpha_0} Q + P = P^0 \xleftarrow{\alpha_1} P^1 \xleftarrow{\alpha_2} P^2 \xleftarrow{\alpha_3} \cdots .$$

Alle P^i sind projektiv und sind null in den Dimensionen, in denen X und P null sind. Unter der Voraussetzung A, also etwa $X_\nu = 0$, $P_\nu = 0$ für $\nu < 0$, ist dann auch $P^i_\nu = 0$ für $\nu < 0$ und alle i. Unter der Voraussetzung B, gl. dim$(\Lambda) \leqq k$, können wir $P^i = 0$ für $i > k$ annehmen (man kann $P^k = \text{Kern}(\alpha_{k-1})$ nehmen; s. [3], VI, 2.1).

Die Moduln P^i_j, $i \geqq 0$, mit den Homomorphismen $(-1)^i d^{P^i}$ und α_i, $i > 0$, bilden jetzt einen Doppelkomplex; P' sei der zugehörige einfache Komplex. Dann haben wir offenbar das gewünschte Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & X \\ & P' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} f' \mid P^0 = \alpha_0,\ f' \mid P^j = 0 \quad \text{für} \quad j > 0\,, \\ i \text{ die Inklusion von } P \text{ in } P^0 \subset P'\,, \end{array}$$

und es bleibt nur zu zeigen, daß f' Isomorphismen der Homologie induziert.

Dies folgt nach bekanntem Muster: Wir bezeichnen die Folge 3.10 nun mit

$$(3.11) \qquad 0 \leftarrow K^{-1} \xleftarrow{\alpha_0} K^0 \xleftarrow{\alpha_1} K^1 \xleftarrow{\alpha_2} \cdots$$

und benutzen jetzt die *volle* Folge zur Bildung eines Doppelkomplexes (analog wie oben); ist K der zugehörige einfache Komplex, dann haben wir eine exakte Folge

$$0 \to S^{-1}X \to K \to P' \to 0$$

($S^{-1}X$ die Aushängung von X). Der verbindende Homomorphismus $\partial_*: H_n(P') \to H_{n-1}(S^{-1}X) = H_n(X)$ stimmt mit $H(f')$ überein; $H(f')$ ist also genau dann ein Isomorphismus, wenn $H(K) = 0$ ist.

Nun ist $K_n = \sum_i K^i_{n-i}$. Wir zeigen durch absteigende Induktion nach r, daß jeder Zykel in $\sum_{i \geqq r} K^i_{n-i}$ nullhomolog ist. Diese Gruppe ist null für $r > n+1$ unter der Voraussetzung A und für $r > k = \text{gl. dim}(\Lambda)$ unter der Voraussetzung B; wir haben also einen Induktionsanfang.

Sei nun $z = \sum_{i \geqq r} z_i$, $z_i \in K^i_{n-i}$, ein Zykel aus $\sum_{i \geqq r} K^i_{n-i}$. Da z Zykel ist, folgt $\alpha_{r-1}(z_r) = 0$, also wegen der Exaktheit von 3.11, $z_r = \alpha_r(c_r)$ mit $c_r \in K^{r+1}_{n-r}$. Dann ist aber z homolog zu $z - d^K(c_r) \in \sum_{i > r} K^i_{n-i}$, also nullhomolog nach Induktionsvoraussetzung. Für $r = -1$ ergibt dieser Schluß $H_n(K) = 0$, q.e.d.

§ 4. Schwache Homotopieäquivalenz

4.1 Definition. Ein Paar von Kettenabbildungen $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$ heißt *schwache Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y, wenn beide Abbildungen Isomorphismen der Homologie induzieren, $H(f): H(U) \cong H(X)$, $H(g): H(U) \cong H(Y)$. X und Y heißen *schwach homotopieäquivalent*, in Zeichen $X \sim Y$, wenn es solche (f, g) gibt.

Ist $g: X \to Y$ eine Kettenabbildung mit $H(g): H(X) \cong H(Y)$, dann ist $X \xleftarrow{\mathrm{id}} X \xrightarrow{g} Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz. Man nennt daher (mißbräuchlich) auch schon g selbst eine schwache Homotopieäquivalenz.

4.2. *Eine schwache Homotopieäquivalenz* $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$ *induziert einen Isomorphismus der Homologiemoduln*

$$H(g)\, H(f)^{-1}: H(X) \cong H(Y)\,.$$

4.3. *Man kann sich bei der Definition der schwachen Homotopieäquivalenz auf projektive* U *beschränken.*

Nach 3.8 gibt es nämlich zu jedem U einen projektiven Komplex P und eine Abbildung $h: P \to U$, die Isomorphismen der Homologie induziert. Ist nun $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen X und Y, dann auch $X \xleftarrow{fh} P \xrightarrow{gh} Y$.

4.4. $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation*[1]).

Reflexivität und Symmetrie sind evident. Es seien $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$, $Y \xleftarrow{g'} V \xrightarrow{h} Z$ schwache Homotopieäquivalenzen. Für die Transitivität haben wir $X \sim Z$ zu zeigen. Nach 4.3 können wir U als projektiv voraussetzen. Nach 3.2 mit $P = U$ und $\varphi = g'$ gibt es eine Kettenabbildung $\tilde{g}: U \to V$ mit $g'\tilde{g} \simeq g$; insbesondere induziert $\tilde{g}$ Isomorphismen der Homologie. Dann ist aber $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{h\tilde{g}} Z$ die gewünschte schwache Homotopieäquivalenz.

4.5. *Jeder Komplex* X *ist einem geeigneten projektiven Komplex* P *schwach homotopieäquivalent.*

Dies folgt unmittelbar aus 3.8.

4.6. *Projektive, schwach homotopieäquivalente Komplexe sind homotopieäquivalent.*

Ist $X \sim Y$, dann gibt es nach 4.3 eine schwache Homotopieäquivalenz $X \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$ mit projektivem U. Sind X und Y projektiv, dann sind f und g Homotopieäquivalenzen nach 3.3, also $X \simeq Y$, q. e. d.

Über einem hereditären Ring ist die Homotopietheorie der (projektiven) Komplexe trivial; dies drückt sich aus in dem folgenden

4.7 Satz. *Ist* Λ *ein hereditärer Ring, so sind* X *und* Y *genau dann schwach homotopieäquivalent, wenn ihre Homologiemoduln isomorph sind.*

Beweis. Es sei $\varphi: H(X) \cong H(Y)$. Wir haben zu zeigen $X \sim Y$. Dabei können wir uns wegen 4.5 und 4.4 auf projektive X, Y beschränken. Dann

[1]) In einer abelschen Kategorie ohne hinreichend viele projektive Objekte braucht das nicht zu gelten; man hat es dann mit nur einer Prä-Äquivalenzrelation zu tun.

stimmt die Behauptung aber gerade mit Theorem 3.4 in [4] überein (jedenfalls wenn Λ ein Hauptidealring ist; der Beweis für hereditäre Ringe ist derselbe). Der Beweis in [4] zeigt genauer, daß φ durch eine schwache Homotopieäquivalenz $X \sim Y$ realisiert werden kann (im Sinne von 4.2).

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Bemerkung über hyperhomologische Invarianten.

4.8 Satz. *Es sei T ein additiver kovarianter Funktor von Λ-Moduln zu Λ'-Moduln. Ist A ein Λ-Komplex und P ein zu A schwach homotopieäquivalenter projektiver Λ-Komplex, dann stimmen die Hyperhomologie-Moduln $\mathfrak{L}_n T(A)$* (s. [3], XVII) *mit $H_n T(P)$ überein.*

Beweis. Ist X eine projektive Auflösung von A, dann ist die Ergänzung (= Augmentation) $\varepsilon: X \to A$ eine schwache Homotopieäquivalenz ([3], XVII), also $X \sim A$. Aus $P \sim A \sim X$ folgt $P \sim X$, also $P \simeq X$ (s. 4.6), also $T(P) \simeq T(X)$ und schließlich $H(TP) \cong H(TX) = \mathfrak{L}T(A)$.

Zur Bestimmung der Hyperhomologie-Moduln $\mathfrak{L}T(A)$ kommt man also mit etwas weniger als einer projektiven Auflösung von A aus. Die übrigen hyperhomologischen Invarianten von T und A (spektrale Folge usw.) lassen sich allerdings nicht aus P gewinnen.

§ 5. Komplexe vom Typ (A, n) („Eilenberg-MacLane-Komplexe")

5.1 Definition. Ein Komplex X heißt vom Typ (A, n), wenn $H_i(X) = 0$ ist für $i \neq n$ und $H_n(X) = A$ [2]).

Wir werden sehen, daß diese Komplexe in der Homotopietheorie der Kettenkomplexe dieselbe Rolle spielen wie die Eilenberg-MacLane-Komplexe $K(\pi, n)$ bei topologischen Räumen. Dies zeigt, daß wirklich die Homologiemoduln der Kettenkomplexe den Homotopiegruppen der Räume entsprechen, wie in der Einleitung behauptet.

Wir zeigen zunächst, daß der schwache Homotopietyp eines solchen Komplexes durch A und n bestimmt ist. Bezeichnen wir mit (A, n) den Komplex, der Null ist außer in der Dimension n und der dort mit A übereinstimmt, so gilt

5.2 Satz. *Ist der Komplex X vom Typ (A, n), dann gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz $X \sim (A, n)$, bei der die n-ten Homologiemoduln identisch abgebildet werden.*

5.3 Korollar. *Sind X, Y (projektive) Komplexe vom Typ (A, n), dann gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz $X \sim Y$ (eine Homotopieäquivalenz $X \simeq Y$), bei welcher die n-ten Homologiemoduln $H_n(X) = H_n(Y)$ identisch abgebildet werden.*

Das Korollar folgt aus 5.2 wegen 4.4—4.6.

---

[2]) Genauer: Es ist ein Isomorphismus $H_n(X) \cong A$ ausgezeichnet; wir werden daher i. a. zwischen diesen beiden Moduln nicht unterscheiden.

Beweis für 5.2. Es sei X' der folgende Unterkomplex von X:

$$X'_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j < n \\ Z_n(X) = n\text{-Zyklen von } X & \text{für } j = n \\ X_j & \text{für } j > n . \end{cases}$$

Die Inklusionsabbildung $i : X' \to X$ ist offenbar eine schwache Homotopieäquivalenz.

Ferner sei $p : X' \to (A, n)$ die Kettenabbildung, die in der Dimension n mit der natürlichen Projektion $Z_n(X) \to H_n(X) = A$ übereinstimmt. Dann ist $X \xleftarrow{i} X' \xrightarrow{p} (A, n)$ die gesuchte schwache Homotopieäquivalenz.

5.4 Korollar. *Ist P ein projektiver Komplex und X vom Typ (A, n), dann ist*

$$H_{n-r}(\mathrm{Hom}(P, X)) \cong H^r(P, A)$$

($=$ r-te Cohomologiegruppe von P mit Koeffizienten in A). *Insbesondere gilt*

$$[P, X] \cong H^n(P, A) . \tag{5.5}$$

Beweis. Nach 3.1 ist $H_{n-r}(\mathrm{Hom}(P, X)) \cong H_{n-r}(\mathrm{Hom}(P, (A, n)))$. Diese Gruppe stimmt aber nach Definition der Cohomologiegruppen mit $H^r(P, A)$ überein.

Ist X projektiv vom Typ (A, n), dann gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz $\varphi : X \to (A, n)$. $\varphi_n : X_n \to A$ ist ein Cozykel, dessen Klasse $\iota_X \in H^n(X, A)$ die *fundamentale Cohomologieklasse* von X heißt. Der Beweis zu 5.4 zeigt

5.6 Korollar. *Ist X ein projektiver Komplex vom Typ (A, n) und $\iota_X \in H^n(X, A)$ seine fundamentale Klasse, dann ist der Isomorphismus $[P, X] \cong$ $\cong H^n(P, A)$ aus 5.5 gegeben durch $[f] \to f^*(\iota_X)$, wo $f : P \to X$ eine Kettenabbildung bezeichnet.*

Projektive Komplexe vom Typ $(A, 0)$ sind eben im wesentlichen (bis auf Homotopieäquivalenz) projektive Auflösungen von A, und 5.6 ist dann nichts anderes als [3], V, 1.2. Aus dieser Bemerkung ergibt sich

5.7 Satz. *Ist X projektiv vom Typ (A, m) und ist Y beliebig vom Typ (B, n), dann ist*

$$[X, Y] \cong H^n(X, B) \cong \mathrm{Ext}_A^{n-m}(A, B) ,$$

denn die Cohomologie einer projektiven Auflösung stimmt ja nach Definition ([3]) mit Ext überein.

Projektive Komplexe vom Typ (A, m) bezeichnen wir im folgenden mit $K(A, m)$.

§ 6. Cohomologieoperationen

Die Eilenberg-MacLanesche Theorie der Cohomologieoperationen überträgt sich nun ganz automatisch auf Komplexe.

6.1 Definition. Eine *Cohomologieoperation* T vom Typ (A, m, B, n) ist eine natürliche Transformation $T_X : H^m(X, A) \to H^n(X, B)$, die definiert ist für alle *projektiven* Komplexe X.

T ist also mit Kettenabbildungen vertauschbar. Es wird nicht *verlangt*, daß T_X ein Homomorphismus ist, aber es wird sich gleich herausstellen, daß das doch der Fall ist.

Die Cohomologieoperationen bezüglich (A, m, B, n) bilden eine abelsche Gruppe $\mathfrak{O}(A, m, B, n)$ bezüglich der üblichen Addition (= Addition der Funktionswerte).

6.2 Satz. *Ist K ein projektiver Komplex vom Typ (A, m) und $\iota_K \in H^m(K, A)$ seine fundamentale Klasse (s. § 5), dann stiftet die Zuordnung $T \to T_K(\iota_K)$ einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{O}(A, m, B, n) \cong \operatorname{Ext}_\Lambda^{n-m}(A, B) .$$

Der Beweis verläuft wegen 5.6 und 5.7 ganz genau wie in der Topologie ([11], 28; [5], 1; [13], S. 44). Die Beschränkung auf projektive X bei der Definition der Cohomologieoperationen ist wesentlich. Die einzigen für *alle* Komplexe definierten Cohomologieoperationen t sind die durch Koeffizientenhomomorphismen induzierten (für diese Operationen t spielt nicht mehr $K(A, m)$, sondern (A, m) die Rolle des universellen Komplexes).

6.3 Beispiele. (i) Für $n = m$ ist $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n-m}(A, B) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$, d. h. die einzigen Cohomologieoperationen, die die Dimension erhalten, sind die durch Koeffizientenhomomorphismen induzierten.

(ii) Für $n = m + 1$ ist $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n-m}(A, B) = \operatorname{Ext}_\Lambda^1(A, B)$ die Baersche Gruppe der kurzen exakten Folgen der Form (s. [3], XIV, 1)

$$0 \to B \to E \to A \to 0 . \tag{6.4}$$

Die zugehörige Cohomologieoperation ist der mit 6.4 verknüpfte Bocksteinhomomorphismus $\beta: H^m(X, A) \to H^{m+1}(X, B)$. Die einzigen Cohomologieoperationen, die die Dimension um eins erhöhen, sind also die Bocksteinhomomorphismen.

Ist Λ ein hereditärer Ring, also $\operatorname{Ext}_\Lambda^i = 0$ für $i > 1$, dann sind damit alle nicht-trivialen Fälle erschöpft. Bei beliebigem Λ läßt sich zeigen, daß man alle Cohomologieoperationen mit $n > m$ aus Bocksteinhomorphismen zusammensetzen kann.

Die Tatsache, daß $\mathfrak{O}(A, m, B, n)$ bei festem A, B nur von $n - m$ abhängt, drückt aus, daß es in dieser Theorie nur „stabile Cohomologieoperationen" gibt. Daran liegt es auch, daß der folgende Satz gilt

6.5 Satz. *Es sei $U_X: H^m(X, A) \times H^{m'}(X, A') \to H^n(X, B)$ eine Cohomologieoperation in zwei Variablen* (analoge Definition wie bei einer Variablen). *Dann ist*

$$U_X(x, x') = U_X(x, 0) + U_X(0, x') , \quad x \in H^m(X, A),\ x' \in H^{m'}(X, A') ,$$

d. h. jede Cohomologieoperation in zwei Variablen ist Summe von Cohomologieoperationen in einer Variablen.

6.6 Korollar. *Jede Cohomologieoperation T ist additiv, d. h.*

$$T_X(x + x') = T_X(x) + T_X(x') , \quad x, x' \in H^m(X, A) .$$

Zunächst ist nämlich $T_X(0) = 0$, weil die Cohomologie des Nullkomplexes null ist. Setzen wir nun $U_X(x, x') = T_X(x + x') - T_X(x) - T_X(x')$, so folgt $U_X(x, 0) = 0$, $U_X(0, x') = 0$, also $U_X = 0$ nach 6.5, q. e. d.

Beweis für 6.5. Der Satz folgt daraus, daß man als universellen Komplex für Cohomologieoperationen in zwei Variablen die direkte Summe von Komplexen vom Typ (A, n) verwenden kann. Etwas genauer seien $K = K(A, m)$, $K' = K(A', m')$ und $f: X \to K$, $f': X \to K'$ Kettenabbildungen mit $f^*(\iota_K) = x$, $f^*(\iota_{K'}) = x'$ (s. 5.6). Wir fassen K und K' als Unterkomplexe der direkten Summe $K + K'$ auf und können f, f' dann als Abbildungen in $K + K'$ betrachten. Dann ist $f^*(\iota_K) = x$, $f^*(\iota_{K'}) = 0$, $f'^*(\iota_K) = 0$, $f'^*(\iota_{K'}) = x'$, also

$$U_X(x, 0) = U_X(f^*(\iota_K), f^*(\iota_{K'})) = f^* U_{K+K'}(\iota_K, \iota_{K'})$$
$$U_X(0, x') = U_X(f'^*(\iota_K), f'^*(\iota_{K'})) = f'^* U_{K+K'}(\iota_K, \iota_{K'}) .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} U_X(x, x') &= U_X((f + f')^*(\iota_K), (f + f')^*(\iota_{K'}) \\ &= (f + f')^* U_{K+K'}(\iota_K, \iota_{K'}) = f^* U_{K+K'}(\iota_K, \iota_{K'}) + \\ &+ f'^* U_{K+K'}(\iota_K, \iota_{K'}) = U_X(x, 0) + U_X(0, x'), \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

6.7 Bemerkung. Die Charakterisierung 6.2 der Gruppen Ext kann dazu dienen, in besonders einfacher Weise Produkte

$$\mathrm{Ext}^r_A(A, B) \times \mathrm{Ext}^s_A(B, C) \to \mathrm{Ext}^{r+s}_A(A, C)$$

zu definieren (Yoneda-Produkte s. [15]), nämlich durch Hintereinanderausführen der Cohomologieoperationen.

§ 7. Komplexe mit zwei Homologiemoduln, k-Invariante und Postnikov-System

7.1 Definition. Ein Komplex heißt *vom Typ* (A, m, B, n), wenn $H_i(X) = 0$ ist für $i \neq m, n$, $H_m(X) = A$, $H_n(X) = B$[3]), $m < n$.

Wie in der Topologie ist der schwache Homotopietyp eines solchen Komplexes i. a. nicht durch (A, m, B, n) bestimmt; als weitere Invariante tritt ein Element $k(X) \in \mathrm{Ext}^{n-m+1}_A(A, B)$ hinzu, zu dessen Definition wir nun kommen.

Es sei zunächst X ein beliebiger Komplex und X^r der folgende Faktorkomplex

$$X^r_i = \begin{cases} X_i & i \leqq r \\ X_{r+1}/Z_{r+1}(X) & i = r + 1 \\ 0 & i > r + 1 ; \end{cases} \tag{7.2}$$

$p^r : X \to X^r$ bezeichne die natürliche Projektion. Offenbar gilt $H(p^r) : H_i(X) \cong$ $\cong H_i(X^r)$ für $i \leqq r$, $H_i(X^r) = 0$ für $i > r$.

Ist X projektiv, dann sind auch die Moduln X^r_i für $i \neq r + 1$ projektiv. Gilt außerdem $H_i(X) = H_i(X^r) = 0$ für $i \leqq r$, dann folgt wie beim Beweis zu 3.9, daß auch X^r_{r+1} projektiv ist, also $X^r \simeq 0$ (s. 3.9), also $X \simeq \mathrm{Kern}(p^r)$, insbesondere $H^{r+1}(X, C) = H^{r+1}(\mathrm{Kern}(p^r), C)$. Die letztere Gruppe stimmt aber mit $\mathrm{Hom}(H_{r+1}(X), C)$ überein, wie sich aus $(\mathrm{Kern}(p^r))_i = 0$ für $i \leqq r$ ergibt, also

$$H^{r+1}(X, C) = \mathrm{Hom}(H_{r+1}(X), C) . \tag{7.3}$$

---

[3]) Wie in 5.1 soll das heißen, daß Isomorphismen $H_m(X) \cong A$, $H_n(X) \cong B$ ausgezeichnet sind.

Es sei nun X ein projektiver Komplex vom Typ (A, m, B, n). Nach 7.3 und 5.6 *gibt es eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Kettenabbildung* $\pi^m : X \to K(A, m)$, *die den* m*-ten Homologiemodul identisch abbildet.* Betrachten wir die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}\pi^m$ (s. 2.8)

$$\begin{aligned}(7.4)\qquad &\to S^{-1}C\pi \to X \xrightarrow{\pi} K(A, m) \xrightarrow{P\pi} C\pi \xrightarrow{Q\pi} SX \xrightarrow{S\pi} SK(A, m) \\ &\qquad = K(A, m+1) \to \cdots\end{aligned}$$

Aus der zugehörigen exakten Homologiefolge (s. 2.14) folgt $H_i(C\pi) = 0$ für $i \neq n+1$ und $H_{n+1}(Q\pi) : H_{n+1}(C\pi) \cong H_{n+1}(SX) = B$. Der projektive Komplex $C\pi$ ist also vom Typ $(B, n+1)$; sei $\iota_{C\pi} \in H^{n+1}(C\pi, B)$ seine fundamentale Klasse (s. 5.6).

7.5 Definition. Unter der *k-Invarianten* von X verstehen wir das Element

$$k(X) = (P\pi)^*(\iota_{C\pi}) \in H^{n+1}(K(A, m)) = \mathrm{Ext}_A^{n-m+1}(A, B)\,.$$

Ist X nicht projektiv, dann definiert man $k(X)$ als k-Invariante eines zu X schwach homotopieäquivalenten projektiven Komplexes.

7.6 Satz. *Sind* X, X' *Komplexe vom Typ* (A, m, B, n), *dann gibt es genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz* $X \sim X'$, *die die Homologiegruppen identisch abbildet, wenn* $k(X) = k(X')$ *ist.*

Jedes Element aus $\mathrm{Ext}_A^{n-m+1}(A, B)$ *ist k-Invariante eines geeigneten Komplexes vom Typ* (A, m, B, n).

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf projektive Komplexe beschränken.

Ist $g : X \to X'$ eine Homotopieäquivalenz (s. 4.6), die die Homologiemoduln identisch abbildet, dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi^m} & K(A, m) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ X' & \xrightarrow[\pi'^m]{} & K(A, m) \end{array}$$

kommutativ bis auf Homotopie, d. h. (g, id) ist eine Homotopieäquivalenz zwischen π und π' (s. 2.6). Nach 2.10 läßt sie sich zu einer Homotopieäquivalenz zwischen $\mathfrak{A}\pi$ und $\mathfrak{A}\pi'$ ergänzen, die dann offenbar alle Homologiemoduln identisch abbildet; insbesondere ist $k(X) = k(X')$.

Ist umgekehrt $k(X) = k(X')$, dann sind die beiden Abbildungen

$$P\pi : K(A, m) \to C\pi = K(B, n+1) \text{ und } P\pi' : K(A, m) \to K(B, n+1)$$

homotop (s. 5.6), d. h. $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen beiden Abbildungen (s. 2.6), die sich nach 2.13 zu einer Homotopieäquivalenz zwischen $\mathfrak{A}\pi$ und $\mathfrak{A}\pi'$ ergänzen läßt. Insbesondere ergibt sich dabei eine Homotopieäquivalenz $X \to X'$, die die Homologiemoduln identisch abbildet.

Es sei schließlich $a \in \mathrm{Ext}_A^{n-m+1}(A, B)$ beliebig und $f : K(A, m) \to K(B, n+1)$ die bis auf Homotopie bestimmte Kettenabbildung mit $f^*(\iota_{K(B,n+1)}) = a$.

Die exakte Homologiefolge der Abbildungsfolge (s. 2.14)

$$(7.7)\qquad \to S^{-1}Cf \xrightarrow{S^{-1}Qf} K(A, m) \xrightarrow{f} K(B, n+1) \xrightarrow{Pf} Cf \xrightarrow{Qf}$$

zeigt, daß $X = S^{-1}Cf$ vom Typ (A, m, B, n) ist. Da 7.7 bis auf ein Vorzeichen auch Abbildungsfolge von $\pi = S^{-1}Qf$ ist (s. 2.11), folgt $k(X) = -a$, q. e. d.

7.8 Bemerkung. Analog zu [5], 14 ergibt sich nun auch die Homotopieklassifikation von Abbildungen eines projektiven Komplexes P in einen beliebigen Komplex vom Typ (A, m, B, n). Wir gehen jedoch nicht darauf ein.

7.9 Bemerkung. Die Charakterisierung 7.6 von Ext hängt eng mit der von Yoneda-Buchsbaum ([15]) zusammen (wie diese benutzt sie in der Formulierung keine injektiven oder projektiven Objekte). Um dies deutlicher herauszustellen, betrachten wir das Diagramm

$$(7.10)\qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & X & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle {}^np} & & & & \\ 0 & \to & X' & \xrightarrow{j} & {}^nX & \xrightarrow{{}^np^m} & X^{m-1} & \to & 0\,, \end{array} \qquad n > m\,.$$

Dabei ist X vom Typ (A, m, B, n), X^{m-1} ist wie in 7.2 definiert, ${}^nX$, entsteht aus X durch Nullsetzen von X_i, $i > n$, und $B_n(X)$; p^n, ${}^np^m$ sind die natürlichen Projektionen und X' ist der Kern von ${}^np^m$. Dann ist $H({}^np) : H(X) \cong H({}^nX)$, weil $H_i(X) = 0$ für $i > n$, und es ist $H(X^{m-1}) = 0$, weil $H_i(X) = 0$ für $i < m$. Daher folgt $H(j) : H(X') \cong H({}^nX)$, d. h. $(j, {}^np)$ ist eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen X und X'. Beachten wir nun daß $X'_i = 0$ ist für $i < m$ oder $i > n$, dann können wir die Folge

$$(7.11)\qquad 0 \leftarrow A = H_m(X') \leftarrow X'_m \xleftarrow{d} X'_{m+1} \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} X_n \leftarrow H_n(X') = B \leftarrow 0$$

bilden, und diese Folge ist exakt, weil X' vom Typ (A, m, B, n) ist. Die Definition von Yoneda-Buchsbaum fußt aber gerade auf solchen Folgen, mit anderen Worten: In 7.6 (und der Definition der schwachen Homotopieäquivalenz) werden beliebige Komplexe vom Typ (A, m, B, n) zugelassen, bei Yoneda-Buchsbaum nur solche, die null sind unterhalb der Dimension m und oberhalb der Dimension n. Man kann leicht direkt einsehen (über die Konstruktion 7.10—7.11), daß die beiden Methoden zum gleichen Ergebnis führen.

7.12 Bemerkung. Wie in der Topologie ist 7.6 nur ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes über die Klassifikation von „Faserbündeln"; wir beschränken uns auf einige Andeutungen zu diesem Punkt.

C und F seien fest gewählte Komplexe. Ein Komplex X heißt vom Typ (C, F), wenn es eine exakte Folge $0 \to F' \to X' \to C' \to 0$ gibt, so daß $F' \sim F$, $C' \sim C$, $X' \sim X$ (für $C = (A, m)$, $F = (B, n)$ ergibt das die Definition 7.1). Die Klassen schwach homotopieäquivalenter[4]) Komplexe vom Typ (C, F) entsprechen dann umkehrbar eindeutig den Elementen der Gruppe $[C, SF]$, falls C projektiv ist.

Dies gestattet es, *Postnikov-Systeme* von Komplexen mit analogen Eigenschaften wie in der Topologie zu definieren. Wir erwähnen in diesem Zu-

[4]) mit einer Nebenbedingung analog zu der in 7.6, daß die Homologie identisch abgebildet wird.

sammenhang nur das natürliche Postnikov-System (s. 7.13) eines Komplexes, sowie den Fall des trivialen Postnikov-Systems (s. 7.15).

7.13 Definition. (vgl. [9], 2.8). Es sei X ein Komplex, X^m der in 7.2 definierte Faktorkomplex und $p^m: X^m \to X^{m-1}$ die natürliche Projektion. Der Kern K^m von p^m ist vom Typ $(H_m(X), m)$. Das System von kurzen exakten Folgen

$$0 \to K^m \to X^m \to X^{m-1} \to 0 \tag{7.14}$$

heißt das *natürliche Postnikovsystem von* X.

Der schwache Homotopietyp von X^m ist bestimmt durch den von X^{m-1} und durch eine Cohomologieklasse $k^{m+1} \in H^{m+1}(X'^{m-1}, H_m(X))$, die $(m-1)$-*te k-Invariante* des Systems; dabei ist X'^{m-1} ein zu X^{m-1} schwach homotopieäquivalenter projektiver Komplex.

7.15 Definition. Wir sagen, *der schwache Homotopietyp des Komplexes X zerfalle*, wenn X schwach homotopieäquivalent ist zur direkten Summe $\sum_m K(H_m(X), m)$ (das ist genau dann der Fall, wenn alle k-Invarianten des Postnikovsystems von X null sind).

Aus 3.2 und 5.5 folgt

7.16 Satz. *Ist P ein projektiver Komplex und X ein Komplex mit zerfallendem schwachem Homotopietyp, dann gibt es einen Isomorphismus*

$$[P, X] \cong \prod_m H^m(P, H_m(X)) .$$

Es ist jedoch zu beachten, daß dieser Isomorphismus im Gegensatz zu 5.5 nicht kanonisch ist; er hängt von der Auswahl der schwachen Homotopieäquivalenz $X \sim \sum K(H_m(X), m)$ ab.

Aus 4.7 folgt

7.17 Satz. *Über einem hereditären Ring Λ zerfällt der schwache Homotopietyp jedes Komplexes X.*

Als weitere Anwendung der Definition 7.15 wird sich im folgenden Paragraphen ein Zusammenhang mit den Künnethformeln ergeben.

§ 8. Künneth-Relationen

In diesem Paragraphen treten Rechts- und Linksmoduln gleichzeitig auf. Entsprechend ist die Voraussetzung B aus § 3 wie folgt zu modifizieren

(B′) Der Ring Λ hat endliche Rechts- und Linksdimension,

$$\mathrm{l.gl.\,dim}(\Lambda) < \infty\,, \quad \mathrm{r.gl.\,dim}(\Lambda) < \infty\,.$$

Unter dieser Voraussetzung oder unter der Voraussetzung A aus § 3 existieren für die Homologie des Tensorprodukts $X \otimes_\Lambda Y$ zweier Komplexe (von Links- bzw. Rechtsmoduln) zwei (funktorielle) Künneth-Spektralfolgen

$$H_p(\mathrm{Tor}_q^\Lambda(X, Y)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}_n(X \otimes_\Lambda Y) \tag{8.1}$$

$$\sum_{i+j=p} \mathrm{Tor}_q^\Lambda(H_i(X), H_j(Y)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}_n(X \otimes_\Lambda Y) \tag{8.2}$$

(s. 3a und 4a in [3], XVII, 3). Wir zeigen nun, daß die Folge 8.2 trivial wird und die zugehörige Filterung von $\mathfrak{L}_n(X \otimes_\Lambda Y)$ zerfällt (= splits), wenn X, Y

Komplexe mit zerfallendem schwachen Homotopietyp sind. Daraus ergeben sich dann die folgenden Künnethformeln.

8.3 Satz. *Es seien X, Y Komplexe mit zerfallendem schwachem Homotopietyp, und es gelte $H(\mathrm{Tor}_i^A(X, Y) = 0$ für $i > 0$. Dann gibt es eine Filterung F von $H_n(X \otimes_A Y)$, so daß*

$$\bigcap_k F_k H_n = 0\,, \quad \bigcup_k F_k H_n = H_n$$

und

$$F_k H_n(X \otimes_A Y)/F_{k-1} H_n(X \otimes_A Y) = \sum_{i+j+k=n} \mathrm{Tor}_k^A(H_i(X), H_j(Y))\,. \tag{8.4}$$

Überdies zerfällt die Filterung F, also

$$\begin{aligned} H_n(X \otimes_A Y) &\cong \sum_k F_k H_n(X \otimes_A Y)/F_{k-1} H_n(X \otimes_A Y) \\ &= \sum_{i+j+k=n} \mathrm{Tor}_k^A\,(H_i(X), H_j(Y))\,. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Dabei ist allerdings zu beachten, daß der Isomorphismus 8.5 im Gegensatz zu 8.4 und der Filterung F *nicht natürlich* (= mit Kettenabbildungen vertauschbar) ist.

Die Beschränkung auf den Funktor $\otimes_A$ ist unwesentlich und geschieht nur aus Bequemlichkeitsgründen; es dürfte ziemlich klar sein und aus dem Beweis hervorgehen, wie die Verallgemeinerung auf beliebige Funktoren aussieht.

Beweis. Die Voraussetzung $H\mathrm{Tor}_i^A(X, Y) = 0$ für $i > 0$ bewirkt, daß die erste Künneth-Spektralfolge 8.1 entartet und zum Isomorphismus $\mathfrak{L}_n(X \otimes_A Y) = H_n(X \otimes_A Y)$ wird. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir wie angekündigt zeigen, daß 8.2 trivial wird und die zugehörige Filterung F von $\mathfrak{L}_n(X \otimes_A Y)$ zerfällt, falls X und Y zerfallenden schwachen Homotopietyp haben.

Dazu betrachten wir Kettenabbildungen $f: P \to X$, $g: Q \to Y$ mit projektiven Komplexen P, Q und $H(f): H(P) \cong H(X)$, $H(g): H(Q) \cong H(Y)$ (s. 3.8). Sie induzieren eine Abbildung der Spektralfolge 8.2 für (P, Q) in die für (X, Y), und weil die Terme E_2 dabei isomorph abgebildet werden, gilt dasselbe für die ganze spektrale Folge, einschließlich der gefilterten Gruppe $\mathfrak{L}_n(X \otimes_A Y)$. Wir brauchen die Behauptung also nur für P, Q zu beweisen, mit anderen Worten, wir können X, Y als projektiv voraussetzen. Dann ist aber X bis auf Homotopieäquivalenz eine direkte Summe von Komplexen $K(A, m)$ (s. 4.6), ebenso Y. Weil 8.2 mit direkten Summen vertauschbar ist[5]), brauchen wir also nur den Fall $X = K(A, l)$, $Y = K(B, m)$ zu betrachten. Dann kommt aber in 8.2 nur der Komplementärgrad $p = l + m$ vor; diese Folge entartet also, und der Satz ist bewiesen.

Wir schließen mit einer leichten Verschärfung von [3], XVII, 5.2a.

8.6 Satz. *Ist A ein hereditärer Ring und sind X, Y Komplexe mit $H_k(\mathrm{Tor}_1^A(X, Y)) = 0$ für $k = n - 1, n$, dann haben wir eine (funktorielle)*

---

[5]) Wegen der Voraussetzung A oder B' kann man sogar annehmen, daß jedes X_m und Y_n eine endliche direkte Summe ist. Dieser Schluß ist also nicht auf den Funktor $\otimes_A$ beschränkt.

exakte Folge

$$(8.7)\qquad \begin{aligned} 0 \to \sum_{p+q=n} & H_p(X) \otimes_\Lambda H_q(Y) \to H_n(X \otimes_\Lambda Y) \\ \to \sum_{p+q=n-1} & \mathrm{Tor}_1^\Lambda(H_p(X), H_q(Y)) \to 0\,, \end{aligned}$$

und diese Folge zerfällt.

Beweis. Setzen wir $H_k(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(X, Y)) = 0$ für alle k voraus, dann wird 8.6 ein Korollar zu 8.3, weil über einem hereditären Ring alle Komplexe zerfallenden schwachen Homotopietyp haben und weil dann $\mathrm{Tor}_i^\Lambda = 0$ ist für $i > 1$. Auf alle Fälle folgt aber wie oben, daß die Spektralfolge 8.2 trivial wird und die zugehörige Filterung in $\mathfrak{L}_n(X \otimes_\Lambda Y)$ zerfällt. Letzteres zeigt, daß die erste Zeile im Diagramm (2) aus [3], XVII, 5 eine *zerfallende* exakte Folge ist (man hat $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{L}$ zu ersetzen und die Pfeile umzukehren). Sie stimmt aber mit 8.7 überein (so verläuft gerade der Beweis in [3]).

Literatur

[1] ADAMS, J. F.: On the structure and applications of the Steenrod algebra. Comment. Math. Helv. **32**, 180—214 (1958). — [2] BOURBAKI, N.: Séminaire Mai 1957, Exposé de A. GROTHENDIECK sur Théorèmes de dualités pour les faisceaux algébriques cohérents. — [3] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton Math. Ser. 19. — [4] DOLD, A.: Homology of symmetric products and other functors of complexes. Ann. Math. **68**, 54—80 (1958). — [5] EILENBERG, S., and S. MACLANE: On the groups $H(\pi, n)$. III. Ann. Math. **60**, 513—557 (1954). — [6] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundations of Algebraic Topology. Princeton Math. Ser. 15. — [7] GODEMENT, R.: Théorie des faisceaux. Hermann: Paris 1958. — [8] GROTHENDIECK, A.: Séminaire 1957 (hektographiert). — [9] MOORE, J. C.: Semi-simplicial complexes and Postnikov systems. Sympos. Internac. de Topologia Algebr., Mexiko 1958. — [10] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I. Math. Z. **69**, 299—344 (1958). — [11] SERRE, J.-P.: Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comment. Math. Helv. **27**, 198—231 (1953). — [12] SPANIER, E.: Infinite symmetric products, function spaces, and duality. Ann. Math. **69**, 142—198 (1959). — [13] STEENROD, N.: Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions. Colloquium lectures. Princeton 1957 (hektographiert). — [14] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial Homotopy. I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949). — [15] YONEDA, N.: On the homology theory of modules. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. Vol. **7**, 193—227 (1954).

(Eingegangen am 1. Dezember 1959)