MENNICKE, J.
Math. Annalen 159, 115—129 (1965)

# Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe

Von

J. MENNICKE in Braunschweig

1. Die Siegelsche Modulgruppe $Sp(2n, Z)$ $(n > 1)$ ist in neuerer Zeit Gegenstand mehrerer Untersuchungen gewesen. E. GOTTSCHLING [2] hat für $n = 2$ einen Fundamentalbereich explizit aufgestellt. H. KLINGEN [4] hat sodann für $n \geqq 2$ definierende Relationen angegeben.

In der vorliegenden Arbeit möchten wir einen weiteren Beitrag liefern, der sich ebenfalls auf die Struktur der Siegelschen Modulgruppe als abstrakte Gruppe bezieht. Wir werden versuchen, die homomorphen Bilder von $Sp(2n, Z)$ zu bestimmen. Es wird sich zeigen, daß abgesehen von der Faktorgruppe nach dem Zentrum alle echten Faktorgruppen von $Sp(2n, Z)$ endliche Ordnung haben und Faktorgruppen von Kongruenzfaktorgruppen sind. Daraus folgt dann die Aussage: Jede Untergruppe von endlichem Index in $Sp(2n, Z)$ enthält eine volle Kongruenzuntergruppe.

Der Beweis dieser Aussagen ist verhältnismäßig einfach, wenngleich insbesondere im Hinblick auf andere Koeffizientenbereiche noch keineswegs befriedigend. Unser Beweis besteht im wesentlichen darin, die Methoden der beiden Arbeiten [1] und [6] über die volle lineare Gruppe $SL(n, Z)$ auf die Gruppe $Sp(2n, Z)$ zu übertragen. Die Verhältnisse sind komplizierter: die Gruppe $Sp(2n, Z)$ ist nicht so „homogen" wie die Gruppe $SL(n, Z)$.

Bezüglich des Koeffizientenbereichs ist folgendes zu bemerken. Der Beweis beruht in seinem Kern auf zwei Aussagen. Die eine geht auf J. BRENNER [1] zurück und hat zum Inhalt, daß jeder Normalteiler in einer hinreichend „homogenen" Matrizengruppe eine gewisse Normalmatrix enthält. Der Beweis benutzt die Existenz eines Euklidischen Algorithmus und überträgt sich unmittelbar nur auf Hauptidealringe mit Euklidischem Algorithmus. Die zweite Aussage kennzeichnet Normalteiler, die eine gewisse Normalmatrix enthalten. Der Beweis setzt einige Kenntnisse über die Arithmetik in dem Koeffizientenbereich voraus, etwa über die Primideale und die Faktorringe des Koeffizientenrings. Er läßt sich z. B. leicht führen, wenn man im Ring $Z$ der ganzrationalen Zahlen den Dirichletschen Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen verwendet. Es ist sehr wahrscheinlich, daß man die zweite Aussage auf Maximalordnungen in algebraischen Zahlkörpern übertragen kann.

Wenn man also zu allgemeineren Koeffizientenbereichen übergehen will, so wird man zuerst versuchen, Brenners Ergebnis zu verallgemeinern.

Indessen werden wir in der vorliegenden Arbeit keinen Schritt in Richtung auf eine Verallgemeinerung unternehmen. Die Siegelsche Modulgruppe spielt in vielen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle. Sie beschreibt u. a. die Periodentransformationen der Abelschen Integrale 1. Gattung auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht $n$. In der Theorie der topologischen Abbildungen von geschlossenen orientierbaren Flächen vom Geschlecht $n$ liefert sie die Wirkung der Abbildungen auf der 1. Homologiegruppe, was manchmal für die Theorie der Heegaard-Diagramme von Interesse ist. Das sind nur einige Beispiele von unimodularen Transformationen, bei denen eine gewisse schiefsymmetrische Bilinearform invariant bleibt. Schließlich hat die Gruppe $Sp(2n, Z)$ auch, trotz ihres speziellen Koeffizientenbereichs, einen Platz in der Theorie der algebraischen Gruppen.

Aus all diesen Gründen schien es ratsam, sich zunächst auf den einfachsten Koeffizientenbereich zu beschränken.

2. In den folgenden drei Abschnitten werden wir die Ergebnisse der Arbeit [1] auf die symplektische Gruppe übertragen.

Der Bequemlichkeit halber formulieren wir die Definition der Siegelschen Modulgruppe $Sp(2n, Z)$. Diese Gruppe besteht aus allen $2n$-reihigen quadratischen Matrizen $A$ mit Koeffizienten aus dem Ring $Z$ der ganzen rationalen Zahlen und $\operatorname{Det} A = +1$, welche die schiefsymmetrische Bilinearform invariant lassen:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1} y_{2i} - x_{2i} y_{2i-1}) \,. \tag{2.1}$$

Ist also $B$ die Matrix der Form (2.1), so gilt

$$A' B A = B \,. \tag{2.2}$$

Manchmal normiert man die Form etwas anders, doch ist dieser Unterschied ohne Bedeutung.

Wir bezeichnen im folgenden mit $I$ die Einheitsmatrix und mit $e_{i,j}$ die Matrix, welche an der Stelle $(i, j)$ einen Koeffizienten $+1$ und sonst Koeffizienten 0 besitzt.

**Hilfssatz 2.1:** Die Gruppe $Sp(2n, Z)$ wird erzeugt von den Matrizen

$$\begin{aligned} A_i &= I + e_{2i-1,2i} \,, \\ B_i &= I + e_{2i,2i-1} \,, \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n) \,; \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} C_{ik} &= I + e_{2i-1,2k} + e_{2k-1,2i} \,, \\ D_{ik} &= I + e_{2i,2k-1} + e_{2k,2i-1} \,, \\ E_{ik} &= I - e_{2i,2k} + e_{2k-1,2i-1} \,, \end{aligned} \qquad (i \neq k,\ i, k = 1, \ldots, n) \,. \tag{2.4}$$

Der Beweis beruht darauf, daß man mittels der Erzeugenden (2.3), (2.4) auf die Koeffizienten einer Zeile einen Euklidischen Algorithmus ausüben kann, ebenso für Spalten. Da es sich um eine bekannte Aussage handelt, so können wir die Einzelheiten übergehen.

**Hilfssatz 2.2:** Für die zu $A = (a_{ik}) \in Sp(2n, Z)$ inverse Matrix $A^{-1} = (a'_{ik})$ gilt

$$
\begin{aligned}
a'_{2i,2k} &= a_{2i-1,2k-1}, \\
a'_{2i-1,2k-1} &= a_{2i,2k}, \\
a'_{2i,2k-1} &= -a_{2i-1,2k}, \\
a'_{2i-1,2k} &= -a_{2i,2k-1}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Der Beweis beruht auf der Gleichung (2.2): $A^{-1} = B^{-1}A'B$.

**Hilfssatz 2.3:** Wir betrachten Transformationen mit Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von 0 verschiedenen Koeffizienten $\pm 1$ haben. Bei solchen Transformationen werden die Koeffizienten einer Matrix permutiert und mit Faktoren $\pm 1$ multipliziert. Die nicht in der Diagonale stehenden Koeffizienten fallen in höchstens drei Transitivitätsgebiete:

$$\mathfrak{A} = \{a_{2i-1,2i}, -a_{2i,2i-1};\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{2.6}$$

$$\mathfrak{B} = \{a_{2i,2i-1}, -a_{2i-1,2i};\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{C} = \{a_{2i-1,2k-1}, a_{2i,2k}, a_{2i,2k-1}, a_{2i-1,2k}, -a_{2i-1,2k-1}, -a_{2i,2k}, -a_{2i,2k-1}, -a_{2i-1,2k};\ i, k = 1, \ldots, n,\ i \neq k\}. \tag{2.8}$$

Die Differenzen von Diagonalkoeffizienten fallen, bis auf Vorzeichen, in höchstens zwei Transitivitätsgebiete:

$$\mathfrak{D} = \{a_{2i,2i} - a_{2i-1,2i-1};\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{2.9}$$

$$\mathfrak{E} = \{a_{2i,2i} - a_{2k,2k}, a_{2i-1,2i-1} - a_{2k,2k}, a_{2i,2i} - a_{2k-1,2k-1}, a_{2i-1,2i-1} - a_{2k-1,2k-1};\ i, k = 1, \ldots, n,\ i \neq k\}. \tag{2.10}$$

Der Beweis des Hilfssatzes ist sehr einfach und beruht im wesentlichen auf folgender Aussage:

**Hilfssatz 2.4:** Es sei $A \in Sp(2n, Z)$. Wir bezeichnen mit $A_{ik}$ die vierreihige Teilmatrix von $A$, in der nur die Indices $2i-1$, $2i$, $2k-1$, $2k$ auftreten. Sei etwa $i < k$.

Es gibt ein Element $X \in Sp(2n, Z)$ derart, daß in der Matrix $A' = XAX^{-1}$ die Teilmatrizen $A_{ik}$ und $A_{12}$ vertauscht sind, und zwar so, daß die Indices 1 und $i$ sowie 2 und $k$ vertauscht sind.

*Beweis:* Der Beweis besteht in einer leichten Rechnung. Wir geben die transformierenden Matrizen $X$ an.

Sei $i \neq 1$. Dann leistet $X = E_{k2}E_{2k}^{-1}E_{k2} \cdot E_{i1}E_{1i}^{-1}E_{i1}$ die in dem Hilfssatz verlangte Permutation.

Für $i = 1$, $k > 2$ transformiere man mit $X = E_{k2}E_{2k}^{-1}E_{k2}$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Hilfssatz 2.4 gestattet, die Aussage des Hilfssatzes 2.3 auf die Koeffizienten der Teilmatrix $A_{12}$ zurückzuführen. Für die Koeffizienten dieser Teilmatrix besteht der Beweis des Hilfssatzes aber in einer trivialen Rechnung.

Aus Hilfssatz 2.3 fließt sofort folgende Aussage:

**Hilfssatz 2.5:** Die Erzeugenden (2.4) und ihre Inversen sind sämtlich konjugiert.

Die Erzeugenden $A_i$, $B_i^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind alle konjugiert.

**3.** In diesem Abschnitt werden wir das Hauptergebnis der Arbeit [1] auf die Gruppe $Sp(2n, Z)$ übertragen. Wir werden das Analogon zu Theorem 1 und Theorem 2 [1, p. 213] beweisen.

**Hilfssatz 3.1:** Es sei

$$N \lhd Sp(2n, Z)$$

ein Normalteiler, der von der Identität und vom Zentrum verschieden ist. $N$ enthält folgende Matrizen:

$$I + 4d\, e_{12}\,, \tag{3.1}$$

$$I + 2d(e_{13} - e_{42})\,. \tag{3.2}$$

$d$ ist der g. g. T. der nicht in der Diagonale stehenden Koeffizienten und der Differenzen von Diagonalkoeffizienten für alle Elemente von $N$.

*Beweis:* Der Beweis besteht in einer Rechnung, die sich eng an die Beweise im Abschnitt 2. der Arbeit [1] anlehnt.

a) Sei $A = (a_{ik}) \in N$. Wir zeigen, daß es eine zu $A$ konjugierte Matrix gibt, in der $a_{21}$ unverändert ist und in der die Koeffizienten der ersten Spalte alle Null sind bis auf höchstens die ersten drei, und in der außerdem gilt $(a_{11}, a_{21}) = 1$, falls diese beiden Koeffizienten von Null verschieden sind.

Transformation mit $A_i$, $B_i$ für $i > 1$ bewirkt auf den Koeffizienten der ersten Spalte nur einen Euklidischen Algorithmus für $a_{2i-1,1}$ und $a_{2i,1}$. Also darf man annehmen $a_{2i,1} = 0$ für $i > 1$.

Transformation mit $E_{ik}^{-1}$ und $E_{ki}^{-1}$ für $i, k > 1$ bewirkt in der ersten Spalte nur einen Euklidischen Algorithmus für die Koeffizienten $a_{2i-1,1}$ und $a_{2k-1,1}$. Also kann man alle Koeffizienten der ersten Spalte zum Verschwinden bringen bis auf höchstens die ersten drei.

Transformation mit $E_{21}^{-t}$ liefert für die ersten vier Koeffizienten der ersten Spalte: $a_{11} + t a_{31}$, $a_{21}$, $a_{31}$, $-t a_{21}$. Setzt man $t = 1$ und transformiert anschließend mit $A_2$, $B_2$, so erreicht man, daß der dritte und vierte Koeffizient durch $(a_{21}, a_{31})$ und 0 ersetzt werden. Also darf man $a_{31} | a_{21}$ annehmen. Dann folgt $(a_{11}, a_{31}) = 1$, und $t$ läßt sich so wählen, daß $(a_{11} + t a_{31}, a_{21}) = 1$ ist.

b) Wir dürfen also annehmen $a_{41} = \cdots = a_{2n,1} = 0$. Der Kommutator

$$C_1 = A_1 A A_1^{-1} A^{-1} \tag{3.3}$$

stimmt von der fünften Zeile an mit der Einheitsmatrix überein. Aus den Relationen (2.2) folgt dann, daß $C_1$ auch von der fünften Spalte an mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Wir notieren die Teilmatrix mit den Indices $1, \ldots, 4$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 + a_{11}a_{21} + a_{21}^2 & 1 - a_{11}^2 - a_{11}a_{21} & 0 & -a_{11}a_{31} - a_{21}a_{31} \\ a_{21}^2 & 1 - a_{11}a_{21} & 0 & -a_{21}a_{31} \\ a_{21}a_{31} & -a_{11}a_{31} & 1 & -a_{31}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden einen weiteren Kommutator:

$$C_2 = C_{12} C_1 C_{12}^{-1} C_1^{-1}\,, \tag{3.4}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11}a_{21} + a_{21}^2 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{21}^2 \\ a_{21}^2 & a_{11}a_{21} + a_{21}^2 & 1 & -a_{21}^2 - 2a_{21}a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf die Koeffizienten an den Stellen (3, 1), (3, 2) kann man durch Transformation mit $A_1$, $B_1$ einen Euklidischen Algorithmus ausüben, ohne daß sonst außer an den Stellen (1, 4), (2, 4) etwas geändert wird. Wegen $(a_{11}, a_{21}) = 1$ folgt also

$$C = I + a_{21}(e_{31} - e_{14}) - (a_{21}^2 + 2a_{21}a_{31}) e_{34} \in N\,. \tag{3.5}$$

Schließlich folgt durch nochmalige Kommutatorbildung

$$C_3 = C_{12}^{-1} C C_{12} C^{-1} = I + 2a_{21} e_{34} \in N\,. \tag{3.6}$$

Mit Hilfe von (3.6) folgt aus (3.5)

$$I + a_{21}(e_{31} - e_{14}) - a_{21}^2 e_{34} \in N\,. \tag{3.7}$$

c) Vermittels des Hilfssatzes 2.3 gelten (3.6), (3.7) auch für alle Koeffizienten (2.6).

Transformiert man $A$ mit $D_{12}$, so wird $a_{21}$ ersetzt durch $a_{21} - a_{34} + a_{31} - - a_{24}$. Also gelten (3.6), (3.7) auch für $a_{31} - a_{24}$. Die gleiche Schlußweise mit $E_{21}$ und $a_{12}$ liefert (3.6), (3.7) auch für $a_{32} + a_{14}$.

Wendet man diese Bemerkung statt auf $A$ auf die Matrix $C_1$ an, so folgen (3.6), (3.7) für die Größen $2a_{21}a_{31}$ und $2a_{11}a_{31} + a_{21}a_{31}$. Daraus schließen wir

$$I + 4a_{31} e_{34} \in N\,, \tag{3.8}$$

$$I + 2a_{31}(e_{31} - e_{14}) \in N\,. \tag{3.9}$$

Diese Formeln gelten sodann auch für alle Koeffizienten (2.8).

Schließlich kann man durch Transformation erreichen, daß auch Differenzen von Diagonalkoeffizienten (2.9) und (2.10) an Stellen außerhalb der Diagonale erscheinen. So sieht man ein, daß (3.8) und (3.9) auch für alle Differenzen $a_{i,i} - a_{k,k}$ gelten.

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Unser Resultat ist nicht so scharf wie das von Brenner für die Gruppe $SL(n, Z)$ bewiesene [1, theorem 1]. Man überlegt sich, daß für manche $d$ das genaue Analogon zu theorem 1 auch gar nicht gilt. Für unsere Zwecke reicht die Aussage des Hilfssatzes; um mühsame Fallunterscheidungen zu vermeiden, verzichten wir auf eine möglichst weitgehende Verschärfung.

**4.** Wir bezeichnen mit $Q_{2n,m}$ den kleinsten Normalteiler von $Sp(2n, Z)$, der die Matrizen $I + me_{12}$ und $I + m(e_{13} - e_{42})$ enthält. Wegen $D_{21}^m = E_{21}^{-1} B_1^m E_{21} \cdot B_1^{-m} \cdot B_2^{-m}$ kann man $Q_{2n,m}$ auch als den kleinsten Normalteiler von $Sp(2n, Z)$ erklären, der $I + me_{12}$ enthält.

$N_{2n,m}$ sei der Normalteiler aller Matrizen $A \in Sp(2n, Z)$, für die $A \equiv I \bmod m$ gilt. Trivialerweise gilt

$$Q_{2n,m} \subset N_{2n,m}\,. \tag{4.1}$$

Unser Ziel wird sein, zu zeigen, daß in (4.1) statt der Inklusion sogar Gleichheit gilt.

In diesem Abschnitt werden wir das Analogon zu Brenners Reduktionslemma [1, lemma 6] beweisen.

**Hilfssatz 4.1:** Falls $Q_{2n,m} = N_{2n,m}$ und $Q_{4,m} = N_{4,m}$, so gilt

$$Q_{2n+2,m} = N_{2n+2,m}\,.$$

*Beweis:* Es sei $A \in N_{2n+2,m}$. Unter der Voraussetzung des Hilfssatzes werden wir zeigen $A \in Q_{2n+2,m}$.

a) Wenn $A$ einen Diagonalkoeffizienten 1 hat, so kann man $A$ so transformieren, daß dieser Koeffizient an die Stelle (1, 1) rückt; man darf also annehmen $a_{11} = 1$. Durch Multiplikation mit Konjugierten von $I + me_{12}$, $I + m(e_{13} - e_{42})$ kann man alle übrigen Koeffizienten der ersten Zeile und der ersten Spalte zu Null machen. Aus den symplektischen Relationen (2.2) folgt dann $a_{22} = 1$ und $a_{2,i} = 0$, $a_{i,2} = 0$ für $i > 2$. Nun können wir die Voraussetzung $Q_{2n,m} = N_{2n,m}$ anwenden und der Beweis ist beendet.

Wir haben also zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen es eine Matrix $A'$ gibt, die aus $A$ durch Transformation und durch Multiplikation mit Konjugierten von $I + me_{12}$, $I + m(e_{13} - e_{42})$ hervorgeht und die einen Diagonalkoeffizienten 1 hat.

b) Unter Bezugnahme auf den Schritt a) im Beweise des Hilfssatzes 3.1 dürfen wir annehmen, daß höchstens die ersten drei Koeffizienten in der ersten Spalte von $A$ von Null verschieden sind und daß $(a_{11}, a_{21}) = 1$, $(a_{11}, a_{31}) = 1$, falls $a_{21}$, $a_{31}$ von Null verschieden sind. Sind diese Voraussetzungen nämlich nicht erfüllt, so können wir $A$ durch eine zu $A$ konjugierte Matrix ersetzen, in der sie erfüllt sind. Wir bilden

$$A' = E_{21}^{-d'} A_2^{d'} \cdot E_{12}^{cm} A \cdot A_2^{-d} E_{21}^{d}\,. \tag{4.2}$$

In $A'$ steht an der Stelle (3, 3) der Koeffizient

$$a_{33} + cm\, a_{13} + d(a_{31} + cm\, a_{11}) + d' a_{43}\,. \tag{4.3}$$

Falls die Koeffizienten $a_{31}$, $a_{43}$ beide von Null verschieden sind, so kann man wegen $(a_{11}, a_{31}) = 1$ durch passende Wahl von $c$ erreichen $(a_{31} + cm\, a_{11}, a_{43}) = m$. Sodann lassen sich $d$, $d'$ so wählen, daß der Koeffizient an der Stelle (3, 3) gleich 1 wird.

Falls $a_{31} = 0$, so transformiere man vorher mit $C_{12}$. Dadurch wird in der ersten Spalte nur $a_{31}$ durch $a_{21} + a_{31}$ ersetzt und $a_{43}$ bleibt unverändert. Also darf man annehmen $a_{43} = 0$.

Indem man in (4.2) $A_2^{d'}$ durch $C_{2k}^{d'}$ bzw. $E_{k2}^{d'}$ ersetzt, wird in (4.3) nur $a_{43}$ durch $a_{2k,3}$ bzw. durch $a_{2k-1,3}$ ersetzt $(k > 2)$. Also können wir wie oben schließen, daß alle Koeffizienten der dritten Spalte Null sind bis auf höchstens die ersten drei.

Falls nun $a_{42} = 0$, so folgt aus den Relationen (2.2):

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \\ (4.4) \qquad &a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} = 0 \\ &a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0\,. \end{aligned}$$

Daraus schließen wir $a_{13} = a_{23} = 0$. Weil höchstens die ersten drei Koeffizienten in der dritten Spalte von Null verschieden sind, so folgt $a_{33} = \pm 1$. Falls $m > 2$, so folgt sogar $a_{33} = 1$. Falls $m = 2$, und $a_{33} = -1$, so multipliziere man $A$ mit $I - 2e_{33} - 2e_{44}$. Die letztere Matrix liegt offenbar in $Q_{2n+2,2}$, und in der Produktmatrix steht an der Stelle (3, 3) der Koeffizient $+1$. Also dürfen wir annehmen $a_{42} \neq 0$.

Den oben durchgeführten Schluß können wir für die Koeffizienten $a_{21}$, $a_{42}$ statt $a_{31}$, $a_{43}$ wiederholen. Falls $a_{21} \neq 0$, so können wir an der Stelle (2, 2) den Koeffizienten 1 erreichen. Also dürfen wir annehmen $a_{21} = 0$.

c) Nun können wir aber wie folgt schließen. Nach der Voraussetzung unseres Hilfssatzes gibt es eine Matrix $A'$, die in den ersten vier Indices übereinstimmt mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} d & 0 & -c & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{31} \\ -a_{31} & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \; da_{11} - ca_{31} = 1, d \equiv 1, c \equiv 0 \bmod m\,,$$

und die an allen anderen Stellen mit der Einheitsmatrix übereinstimmt, derart daß $A' \in Sp(2n+2, Z)$ ein Produkt von Konjugierten von $\mathrm{I} + me_{12}$, $\mathrm{I} + m(e_{13} - e_{42})$ in der Untergruppe von $Sp(2n+2, Z)$ ist, deren Elemente sämtlich in den letzten zwei Spalten und Zeilen mit der Einheitsmatrix übereinstimmen. Das Produkt $A'A$ hat aber an der Stelle (1, 1) den Koeffizienten 1. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Wir benötigen später folgende Aussage.

**Hilfssatz 4.2:** Es sei $A \in N_{4,m}$. Durch Transformation und durch Multiplikation mit Konjugierten von $\mathrm{I} + me_{12}$, $\mathrm{I} + m(e_{13} - e_{42})$ kann man aus $A$ eine der beiden Matrizen ableiten:

$$(4.5) \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(4.6) \qquad A'' = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & -c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

*Beweis:* Falls man durch die obigen Operationen erreichen kann, daß ein Diagonalkoeffizient 1 auftritt, so folgt aus dem Teil a) des Beweises von Hilfssatz 4.1, daß man aus $A$ die Matrix (4.5) ableiten kann.

Wenn man nicht zu (4.5) gelangt, so kann man der Argumentation unter b) zufolge $a_{21} = a_{41} = a_{43} = 0$, $a_{42} \neq 0$ erreichen. Aus den Relationen (2.2) folgt dann $a_{23} = 0$. Weiter folgt aus (2.2): $a_{22} = a_{33}$, $a_{44} = a_{11}$, $a_{24} = -a_{31}$, $a_{42} = -a_{13}$. Wir erhalten also

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{12} & b & a_{14} \\ 0 & d & 0 & -c \\ c & a_{32} & d & a_{34} \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $A''^{-1}A$ ist ein Produkt aus Konjugierten von $\mathrm{I} + me_{12}$, $\mathrm{I} + m(e_{13} - e_{42})$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir fügen noch eine einfache Bemerkung an, die im Verlaufe des Abschnitts 4. benutzt wurde. Für die Koeffizienten der Matrix (4.6) gilt

$$ad - bc = 1 .$$

Aus $\operatorname{Det} A'' = +1$ folgt nämlich zunächst $ad - bc = \pm 1$, und das negative Zeichen ist nicht möglich, wie man sofort durch Zurückgehen auf die Erzeugenden $E_{21}$ und $E_{12}$ einsieht.

5. In den folgenden Abschnitten werden wir die Schlüsse der Arbeit [6] auf die Gruppe $Sp(2n, Z)$ übertragen. Unser Ziel wird sein, zu zeigen, daß in (4.1) Gleichheit statt hat. Auf Grund des Hilfssatzes 4.1 brauchen wir diese Aussage nur noch für vierreihige Matrizen zu beweisen. Im folgenden werden wir also nur noch mit der Gruppe $Sp(4, Z)$ arbeiten.

**Hilfssatz 5.1:** Es sei $X \in N_{4,m}$. Das Bild von $X$ in der Faktorgruppe $Sp(4, Z)/Q_{4,m}$ liegt im Zentrum.

*Beweis:* Wir nehmen den wesentlichen Schluß vorweg. Statt den Hilfssatz für $X$ zu beweisen, genügt es, den Beweis für eine Matrix $X'$ zu führen, die aus $X$ durch Transformation und durch Multiplikation mit Konjugierten von $\mathrm{I} + me_{12}$, $\mathrm{I} + m(e_{13} - e_{42})$ hervorgeht. Für Multiplikation ist das evident, auf Grund der Definition von $Q_{4,m}$, und für Transformation folgt es daraus, daß die Bilder zweier konjugierter Matrizen $X$, $X'$ beide zugleich entweder im Zentrum liegen oder nicht.

Nach Hilfssatz 4.2 genügt es also, die Aussage für die Matrizen (4.5) und (4.6) zu beweisen.

Führen wir den Beweis zuerst für (4.5). $A_2$, $B_2$ sind sogar in $Sp(4, Z)$ mit $A'$ vertauschbar. Für $C_{12}$ erhalten wir $A' C_{12} A'^{-1} = A_2^{ac} E_{12}^{-c} C_{12}^{a}$. In der Faktorgruppe gilt also $A' C_{12} A'^{-1} = C_{12}$.

Der gleiche Schluß ergibt, daß auch die Bilder der anderen Erzeugenden (2.4) mit dem Bild von $A'$ in der Faktorgruppe kommutieren.

Wegen $E_{12} B_2 E_{12}^{-1} B_2^{-1} D_{12} = B_1$, $B_2 C_{12} B_2^{-1} C_{12}^{-1} E_{12} = A_1$ kommutiert das Bild von $A'$ auch mit den Bildern von $A_1$, $B_1$. Damit ist der Beweis für (4.5) beendet.

Für (4.6) verläuft der Beweis ähnlich. Man erschließt wie oben, daß das Bild von $A''$ vertauschbar ist mit den Bildern von $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $C_{12}$, $D_{12}$. Die Erzeugenden $E_{12}$, $E_{21}$ kann man aber durch diese Elemente ausdrücken:

$$E_{12} = C_{12} B_1 C_{12}^{-1} B_1^{-1} A_2, \quad E_{21} = C_{12} B_2 C_{12}^{-1} B_2^{-1} A_1 .$$

Damit ist das Bild von $A''$ mit den Bildern aller Erzeugender (2.3), (2.4) vertauschbar. Der Hilfssatz ist bewiesen.

6. In diesem Abschnitt werden wir Analoga zu den Hilfssätzen 3.2 und 3.3 der Arbeit [6] aufstellen. Gegenüber der Beweisführung in [6] treten größere Unterschiede auf.

**Hilfssatz 6.1:** Es sei $X' \in N_{4,m}$ und

$$X' = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & -c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\Phi : X' \to X$ sei der natürliche Homomorphismus von $Sp(4, Z)$ auf die Faktorgruppe $Sp(4, Z)/Q_{4,m}$.

Es gibt eine Matrix $X'_{2n+1} \in N_{4,m}$,

$$X'_{2n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & b^{2n+1} & 0 \\ 0 & d_{2n+1} & 0 & -c^{2n+1} \\ c^{2n+1} & 0 & d_{2n+1} & 0 \\ 0 & -b^{2n+1} & 0 & a \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

derart, daß $\Phi : X'_{2n+1} \to X^{2n+1}$.

*Beweis:* Zunächst liegt $X$ im Zentrum der Faktorgruppe. Deshalb hat

$$X'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & -c \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -c & d & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

dasselbe Bild $X$.

Wir berechnen ein Urbild für $X^2$. Dazu bilden wir

$$X' X'' = \begin{pmatrix} ad & -bc & bd & -ac \\ bc & ad & -bd & -ac \\ cd & -cd & d^2 & -c^2 \\ -ab & -ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert ohne Mühe

$$B_1^{b^2c^2} D_{12}^{ab} E_{12}^{-cd} \cdot A_1^{-1} X' X'' A_1 \cdot E_{21}^{-2bd} A_1^{2bc}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 - 2bcd^2 & -c^2 \\ 0 & 0 & b^2 + 2ab^2d & a^2 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Matrix erhält man durch Transformation

$$X'_2 = \begin{pmatrix} a^2 & -b^2 - 2ab^2d & 0 & 0 \\ c^2 & d^2 - 2bcd^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

und es gilt

$$\Phi : X'_2 \to X^2 . \tag{6.4}$$

Wir beweisen nun den Hilfssatz durch Induktion nach $n$. Für $n = 0$ ist die Aussage des Hilfssatzes richtig. Nehmen wir an, daß der Hilfssatz bewiesen sei bis $n$.

Wir transformieren (6.1) wie in (6.2) und schreiben

$$X''_{2n+3} = X'_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X'_{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 d_{2n+1} & -ab^2 - 2a^2b^2d & b^{2n+3} + 2ab^{2n+3}d & -a^2c^{2n+1} \\ c^2 d_{2n+1} & ad^2 - 2abcd^2 & -b^{2n+1}d^2 + 2b^{2n+2}cd^2 & -c^{2n+3} \\ 0 & -c^{2n+1} & d_{2n+1} & 0 \\ -b^{2n+1} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$X'''_{2n+3} = A_2^{c^{4n+4}} C_{12}^{ac^{2n+1}} X''_{2n+3} A_1^{b^2+2ab^2d} E_{21}^{-2b^{2n+3}d}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & b^{2n+3} & 0 \\ c^2 d_{2n+1} & d - bcd + b^2c^2 d_{2n+1} & b^{2n+1}(-2b^2c^2 d d_{2n+1} - bd^2 + 2bcd^2) & -c^{2n+3} \\ c^{2n+3} & 0 & d - bcd + b^2c^2 d_{2n+1} & 0 \\ -b^{2n+1} & -b^{2n+3} & 2b^{4n+4}d & a \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $X'''_{2n+3} X'^{-1}_{2n+3}$ ist ein Produkt aus Konjugierten von $\mathrm{I} + m e_{12}$, $\mathrm{I} + m(e_{13} - e_{42})$. Andererseits gilt auf Grund der Induktionsannahme und wegen (6.4) $\Phi : X'''_{2n+3} \to X^{2n+3}$. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

**Hilfssatz 6.2:** Die Voraussetzungen seien wie in Hilfssatz 6.1. Es gibt eine Matrix

$$X'_{2n} = \begin{pmatrix} a^2 & b^{2n} & 0 & 0 \\ c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{4,m} \tag{6.5}$$

derart, daß $\Phi : X'_{2n} \to X^{2n}$.

*Beweis:* Wir beweisen den Hilfssatz zuerst für $n > 1$. Wir stützen uns auf Hilfssatz 6.1 und bilden

$$X''_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X'_{2n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X'$$

$$= \begin{pmatrix} ad_{2n-1} & bc^{2n-1} & bd_{2n-1} & -ac^{2n-1} \\ -b^{2n-1}c & ad & -b^{2n-1}d & -ac \\ cd_{2n-1} & -c^{2n-1}d & dd_{2n-1} & c^{2n} \\ -ab^{2n-1} & -ab & -b^{2n} & a^2 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert

$$B_1^{b^{2n-1}+ab^{2n-2}d}\, E_{12}^{-c\,d_{2n-1}+b^{2n-2}c^{2n-1}d} \cdot X''_{2n} \cdot B_1^{-b^{2n-2}}\, C_{12}^{a\,c^{2n-1}} \cdot A_1^{-b\,c^{2n-1}(1+a\,d_{2n-1})}\, E_{21}^{-b\,d_{2n-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d' & -c' \\ 0 & 0 & -b^{2n} & a^2 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Matrix gewinnen wir durch Transformation (6.5). Damit ist der Hilfssatz für $n > 1$ bewiesen.

Der Beweis für $n = 1$ besteht in einer leichten Modifikation des ersten Schrittes im Beweis von Hilfssatz 6.1.

**Hilfssatz 6.3:** Es sei $X \in N_{4,m}$ und

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & -c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Sei $b^{2n+1} \equiv \varepsilon \bmod a$, $\varepsilon = \pm 1$. Dann gilt $X^{2n+1} \in Q_{4,m}$.

*Beweis:* Zufolge des Hilfssatzes 6.1 brauchen wir nur zu zeigen $X'_{2n+1} \in Q_{4,m}$. Wir bilden

$$X'_{2n+1}\, E_{12}^{xm} = \begin{pmatrix} a & 0 & b^{2n+1} + axm & 0 \\ 0 & d_{2n+1} + xmc^{2n+1} & 0 & -c^{2n+1} \\ c^{2n+1} & 0 & d_{2n+1} + xmc^{2n+1} & 0 \\ 0 & -b^{2n+1} - axm & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Sei $a = 1 + km$. Die Gleichung

$$b^{2n+1} + axm = -\varepsilon km \tag{6.6}$$

ist lösbar für $b^{2n+1} \equiv \varepsilon \bmod a$, $\varepsilon = \pm 1$. Sei $X''_{2n+1}$ die obige Matrix mit der Lösung von (6.6). Wir schreiben

$$E_{12}^{-\varepsilon}\, X''_{2n+1}\, E_{12}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon km & 0 \\ 0 & d'' & 0 & -c'' \\ c'' & 0 & d'' & 0 \\ 0 & \varepsilon km & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix rechts liegt in $Q_{4,m}$. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

**Hilfssatz 6.4:** Die Voraussetzungen seien wie in Hilfssatz 6.3. An Stelle der dort angegebenen Kongruenz möge aber gelten $b^{2n} \equiv \varepsilon \bmod a^2$, $\varepsilon = \pm 1$. Dann gilt $X^{2n} \in Q_{4,m}$.

*Beweis:* Wir benutzen Hilfssatz 6.2 und notieren

$$X'_{2n}\, A_1^{xm} = \begin{pmatrix} a^2 & b^{2n} + a^2xm & 0 & 0 \\ c'' & d'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man setze $a^2 = 1 + km$. Die Gleichung

$$b^{2n} + a^2 xm = -\varepsilon km \tag{6.7}$$

ist lösbar für $b^{2n} \equiv \varepsilon \bmod a^2$, $\varepsilon = \pm 1$.

Für den weiteren Verlauf des Beweises können wir auf den Beweis von Hilfssatz **6.3** verweisen.

**7.** Wir werden nun folgendes zeigen:

**Hilfssatz 7.1:** Sei $X \in N_{4,m}$ und

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & -c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $X \in Q_{4,m}$.

*Beweis:* Die Matrix

$$E_{12}^{-t} X E_{12}^{t} = \begin{pmatrix} a+tb & 0 & b & 0 \\ 0 & d' & 0 & -c' \\ c' & 0 & d' & 0 \\ 0 & -b & 0 & a+tb \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

hat dasselbe Bild in der Faktorgruppe $Sp(4, Z)/Q_{4,m}$ wie $X$.

Wir wählen eine Primzahl $a + tb = p$. Dann gilt $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 (p)$. Falls $p \equiv -1 \bmod 4$, so ist der Exponent $\frac{p-1}{2}$ ungerade. Dann ist Hilfssatz **6.3** anwendbar und liefert

$$X^{\frac{p-1}{2}} \in Q_{4,m}. \tag{7.2}$$

Falls $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \bmod 4$, so wähle man eine Primzahl $a + t'b = -p_1$. Dann ist $p_1 \equiv -1 \bmod 4$, und (7.2) folgt mit $p_1$ an Stelle von $p$. Es liegt also in jedem Falle eine ungerade Potenz von $X$ in $Q_{4,m}$.

Da $b^{p(p-1)} \equiv 1 \bmod p^2$, so liefert Hilfssatz **6.4**:

$$X^{p(p-1)} \in Q_{4,m}. \tag{7.3}$$

Sei nun $p - 1 = 2^e q_1^{e_1} \ldots q_i^{e_i}$ die Zerlegung nach Primpotenzen.

Wir wählen zwei Primzahlen $r$, $r'$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{matrix} r \equiv -p \\ r' \equiv -1 \end{matrix} \bmod b \quad \text{und} \quad \bmod q_1, \ldots, \bmod q_i, \tag{7.4}$$

$$\begin{matrix} r \equiv 2 \\ r' \equiv 2 \end{matrix} \bmod p. \tag{7.5}$$

Da $p$ nicht in $b$ und $q_1, \ldots, q_i$ aufgeht, so gibt es solche Primzahlen.

Wir setzen $a' = rr'$. Wegen (7.4) gilt $a' \equiv a \bmod b$, also liegt $a'$ in der arithmetischen Progression $a + tb$.

Für den Exponenten $\bmod a'^2$ gilt

$$\psi(a'^2) = [r(r-1), r'(r'-1)]. \tag{7.6}$$

In der eckigen Klammer steht das k. g. V. Wegen (7.4), (7.5) hat $\psi(a'^2)$ mit $p(p-1)$ keinen ungeraden Primfaktor gemeinsam. Andererseits liefert Hilfssatz 6.4 wegen $b^{\psi(a'^2)} \equiv 1\,(a'^2)$:

$$X^{\psi(a'^2)} \in Q_{4,m}\,. \tag{7.7}$$

Aus (7.2), (7.3), (7.7) und der an (7.2) anschließenden Bemerkung folgt $X \in Q_{4,m}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

8. In diesem Abschnitt werden wir ein zu Hilfssatz 7.1 analoges Resultat für die Matrizen (4.5) beweisen.

**Hilfssatz 8.1:** Es sei $X' \in N_{4,m}$ und

$$X' = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt eine Matrix $X'_{2n+1} \in N_{4,m}$:

$$X'_{2n+1} = \begin{pmatrix} a & b^{2n+1} & 0 & 0 \\ c^{2n+1} & d_{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

derart, daß $\Phi : X'_{2n+1} \to X$.

Diese Aussage gilt für jede natürliche Zahl $n$.

*Beweis:* Wir führen einen Induktionsbeweis nach $n$. Für $n = 0$ ist der Hilfssatz richtig. Nehmen wir an, daß er bis $n$ bewiesen sei.

Wir betrachten

$$X''_{2n+3} = \begin{pmatrix} d & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b^{2n+1} & 0 & 0 \\ c^{2n+1} & d_{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

$$= \begin{pmatrix} ad & b^{2n+1}d & c & 0 \\ ac^{2n+1} & ad_{2n+1} & 0 & -b \\ ab & b^{2n+2} & a & 0 \\ -c^{2n+2} & -cd_{2n+1} & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Der linke Faktor in (8.2) liegt nach Hilfssatz 7.1 in $Q_{4,m}$. Also gilt

$$\Phi : X''_{2n+3} \to X\,. \tag{8.3}$$

Aus (8.2) erhalten wir

$$B_1^{-ac^{2n+1}} D_{12}^{c^{2n+2}} \cdot X''_{2n+3} \cdot E_{12}^{-b} E_{21}^{-c} C_{12}^{-b^{2n+2}d} A_1^{-ab^{2n+1}d^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b^{2n+3} \\ 0 & 0 & c^{2n+3} & d_{2n+3} \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Matrix folgt durch Transformation $X'_{2n+3}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**Hilfssatz 8.2:** Sei $X \in N_{4,m}$ und

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $X \in Q_{4,m}$.

*Beweis:* Die Matrix

$$B_1^{-t} X B_1^t = \begin{pmatrix} a+tb & b & 0 & 0 \\ c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat dasselbe Bild bezüglich $\Phi$ wie $X$.

Man wähle eine Primzahl $a + tb = p$ oder $a + tb = -p$ und $p \equiv -1 \bmod 4$. Dann gilt $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \bmod p$ und der Exponent ist ungerade. Der im Beweis von Hilfssatz 6.3 bzw. 6.4 verwendete Schluß liefert $X'_{2n+1} \in Q_{4,m}$ für die Matrix (8.1) mit $2n + 1 = \frac{p-1}{2}$. Aus Hilfssatz 8.1 folgt $X \in Q_{4,m}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**9.** Aus den Hilfssätzen 4.2, 5.1, 7.1 und 8.2 fließt nun das Ergebnis

**Hilfssatz 9.1:** Es sei $X \in N_{4,m}$. Dann gilt $X \in Q_{4,m}$.

Wegen (4.1) folgt daraus

**Hilfssatz 9.2:** Es gilt $Q_{4,m} = N_{4,m}$.

**10.** Wir fassen das Ergebnis der vorliegenden Arbeit zusammen.

**Satz:** *Betrachtet wird die Siegelsche Modulgruppe $Sp(2n, Z)$ $(n > 1)$.*

*Es sei $Q_{2n,m}$ der kleinste Normalteiler von $Sp(2n, Z)$, der die Matrix $\mathrm{I} + me_{12}$ enthält. $N_{2n,m}$ sei die volle Kongruenzuntergruppe aller Elemente $A \in Sp(2n, Z)$, für die $A \equiv \mathrm{I} \bmod m$ gilt.*

*Beide Normalteiler stimmen überein:*

$$Q_{2n,m} = N_{2n,m}\,.$$

Für $n = 2$ stimmt der Satz mit dem Hilfssatz 9.2 überein. Für $n > 2$ ist er sodann eine unmittelbare Folge aus den Hilfssätzen 4.1 und 9.2.

**Corollar 1:** *Es sei $N \lhd Sp(2n, Z)$ ein Normalteiler, der vom Zentrum $(\mathrm{I}, -\mathrm{I})$ und von der Identität verschieden ist. $N$ enthält eine volle Kongruenzuntergruppe $N_{2n,m}$ für eine gewisse natürliche Zahl $m$.*

Das Corollar folgt aus dem Satz und aus Hilfssatz 3.1.

**Corollar 2:** *Alle echten Faktorgruppen von $Sp(2n, Z)$, mit Ausnahme der Faktorgruppe nach dem Zentrum, sind Faktorgruppen von Kongruenzfaktorgruppen $Sp(2n, m) = Sp(2n, Z)/N_{2n,m}$. Insbesondere sind sie also endlich.*

**Corollar 3:** *Es sei $U \subset Sp(2n, Z)$ eine Untergruppe von endlichem Index in $Sp(2n, Z)$. $U$ enthält eine volle Kongruenzuntergruppe $N_{2n,m}$ für eine gewisse natürliche Zahl $m$.*

Da $U$ nämlich endlichen Index hat, so ist der Durchschnitt von $U$ mit seinen Konjugierten ein Normalteiler von endlichem Index.

## Literatur

[1] Brenner, J. L.: The linear homogeneous group, III. Ann. Math. **71**, 210—223 (1960).
[2] Gottschling, E.: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereichs der Modulgruppe zweiten Grades. Math. Ann. **138**, 103—124 (1959).
[3] Hua, L. K., and I. Reiner: On the generators of the symplectic modular group. Trans. Am. Math. Soc. **65**, 415—426 (1949).
[4] Klingen, H.: Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen. Math. Ann. **144**, 64—72 (1961).
[5] Magnus, W.: Über $n$-dimensionale Gittertransformationen. Acta Math. **64**, 353—367 (1934).
[6] Mennicke, J.: Finite factor groups of the unimodular group. Ann. Math. **81**, 31—37 (1965).
[7] Zassenhaus, H.: Theory of groups. New York: Chelsea Publ. Comp. 1958.

*(Eingegangen am 24. April 1964)*

*Zusatz bei der Korrektur* (3. 2. 1965). Nach der Einreichung des Manuskripts sind einige Arbeiten erschienen, die mit dem Gegenstand der vorliegenden Arbeit in engem Zusammenhang stehen.

[I] H. Bass, M. Lazard, J. P. Serre: Sous-groupes d'indice fini dans $SL(n, Z)$. Bull. Am. Math. Soc. **70**, No. 3, 385—392; (May 1964).

[II] H. Bass: $K$-theory and stable algebra. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **22**, 489—544 (1964).

In der Arbeit [I] findet sich das Ergebnis der vorliegenden Arbeit als théorème 3 (p. 392), allerdings ohne Beweis. Der Beweis beruht, ebenso wie der des entsprechenden Satzes für $SL(n, Z)$, auf bisher unveröffentlichten Untersuchungen von M. Lazard und auf Ergebnissen von H. Bass, die in [II] dargestellt sind. Man vergleiche dazu auch das Referat über [I] von J. Dieudonné in Math. Rev. (Dec. 1964).

Bezüglich des Koeffizientenbereichs ist folgendes zu bemerken. Es hat sich inzwischen herausgestellt, daß die Methoden der Arbeiten [II] und [6] ausreichen, um folgendes zu zeigen: Sei $k$ ein endlich-algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{o}$ die Maximalordnung aller ganzen Zahlen aus $k$, $SL(n, \mathfrak{o})$ die spezielle lineare Gruppe über $\mathfrak{o}$. Sei $n \geqq 3$. Jeder Normalteiler in $SL(n, \mathfrak{o})$ ist entweder endlich und liegt im Zentrum, oder er hat endlichen Index und enthält eine volle Kongruenzuntergruppe. Auf Grund dieser Bemerkung dürfte es nicht schwer sein, die Schlüsse der vorliegenden Arbeit so abzuändern, daß sich das Analogon des obigen Satzes für die Gruppe $Sp(2n, \mathfrak{o})$ ergibt.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Übertragung des Satzes der vorliegenden Arbeit auf andere Typen von linearen Gruppen mit ganzrationalen Koeffizienten. A. Borel verdanke ich den freundlichen Hinweis, daß man die bisherigen Methoden wohl ausbauen kann zum Beweis eines allgemeineren Satzes über die Restriktion $G_Z$ einer über dem rationalen Zahlkörper definierten halbeinfachen, einfach-zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe $G$ vom „Chevalley-Typus". Diese Verallgemeinerung werden wir in einer weiteren Arbeit behandeln.