NITSCHE, J. C. C.
Math. Annalen 158, 203—214 (1965)

Über ein verallgemeinertes Dirichletsches Problem für die Minimalflächengleichung und hebbare Unstetigkeiten ihrer Lösungen

Von

JOHANNES C. C. NITSCHE in Minneapolis*

Inhaltsübersicht

§ 1. Einleitung, Voraussetzungen

1.1. Das Verhalten harmonischer Funktionen ist in der Regel typisch für das der Lösungen allgemeiner linearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese Vormundschaft der harmonischen Funktionen hört aber auf, wenn man nicht-lineare Differentialgleichungen ins Auge faßt. Eine der überraschendsten Aussagen, welche den gewaltigen Unterschied beleuchtet, der zwischen den Eigenschaften harmonischer Funktionen und denen von Lösungen hinreichend nicht-linearer elliptischer Differentialgleichungen besteht, ist in dem berühmten Satze von L. BERS [2] enthalten, demzufolge eine im Inneren des Definitionsbereiches gelegene isolierte Singularität einer Lösung der Minimalflächengleichung eo ipso hebbar sein muß. Insbesondere bleibt also eine Lösung der Minimalflächengleichung in der Umgebung einer solchen Singularität beschränkt, eine Tatsache, welche als ein verallgemeinertes Maximumprinzip zu interpretieren ist. Obwohl man sich leicht Beispiele von Lösungen der Minimalflächengleichung ausdenken kann, für die eine isolierte Singularität auf dem Rande des Definitionsbereiches nicht hebbar ist, so gilt, wie in [18] gezeigt worden ist, doch immerhin auch in diesem Falle das verallgemeinerte Maximumprinzip.

Gestützt auf dieses Maximumprinzip in der Umgebung einer Randsingularität hatte ich in einer Vorlesung [16] die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems der Minimalflächengleichung für ein konvexes Gebiet bei stetigen, beschränkten aber in endlich vielen Punkten nicht definierten Randwerten

* Diese Arbeit ist unter Contract Nonr 710 (54) zwischen der Universität von Minnesota und dem Office of Naval Research vorbereitet worden.

bewiesen. Dieses Problem hat für harmonische Funktionen ohne die Auferlegung zusätzlicher Wachstumsbeschränkungen überhaupt keinen Sinn. Zum Beispiel ist neben der Funktion $z(x, y) \equiv 0$ auch die harmonische Funktion $z(x, y) = [1 - x^2 - y^2]/[(1 - x)^2 + y^2]$ eine Lösung der Potentialgleichung im Einheitskreis $x^2 + y^2 < 1$, welche bei Annäherung an alle Randpunkte mit Ausnahme des Punktes $(1, 0)$ nach Null geht. Es handelt sich also nicht um die Frage der Regularität oder Irregularität eines Randpunktes, sondern um die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Lösung durch lückenhaft vorgegebene Randwerte.

Hier wird nun das Dirichletsche Problem derart verallgemeinert, daß die stetigen beschränkten Randwerte auf einer abgeschlossenen Menge verschwindenden linearen (hinsichtlich der Bogenlänge des Randes gemessenen) Lebesgueschen Maßes nicht vorgegeben sind. Der Eindeutigkeitsbeweis beruht auf einem allgemeinen Maximumprinzip, welches alle bisher bewiesenen als Spezialfälle enthält.

Für harmonische Funktionen beschränkt man sich bei der Betrachtung hebbarer Unstetigkeiten nicht auf isolierte Ausnahmepunkte. Es existiert vielmehr eine Reihe tiefliegender Untersuchungen über die Hebbarkeit von Unstetigkeiten für gewisse Klassen — beschränkter, gleichmäßig stetiger, Lipschitz-stetiger, mit beschränkter Integralnorm oder mit beschränktem Dirichlet-Integral versehener — harmonischer Funktionen auf hinreichend dünnen, ganz im Inneren des Definitionsbereiches befindlichen abgeschlossenen Mengen. Man sehe dazu etwa die grundlegenden Darstellungen in L. CARLESON [5] und M. TSUJI [23], wo sich auch ausgiebige Literaturangaben vorfinden.

In einer interessanten Arbeit [22] hat J. SERRIN kürzlich die Frage von Unstetigkeiten in den Lösungen einer die Potentialgleichung als Sonderfall enthaltenden Klasse nicht-linearer Differentialgleichungen behandelt. Obwohl die Minimalflächengleichung sich den Serrinschen Voraussetzungen entzieht und eben gerade ein ganz andersartiges Verhalten zeigt, so läßt sich, wie ich seiner freundlichen Mitteilung verdanke, seine Methode in Verbindung mit einer auf R. FINN [8] zurückgehenden Schlußweise zu einem gewissen Grade auf die Minimalflächengleichung ausdehnen, vorausgesetzt allerdings, daß die Ausnahmemenge der betrachteten Lösung ganz im Inneren ihres Definitionsbereiches liegt; und wieder ist es, im Gegensatz zur Situation bei harmonischen Funktionen, so, daß die bloße Existenz der Lösung der Minimalflächengleichung die Möglichkeit von Unstetigkeiten auf hinreichend dünn gesäten Mengen (Mengen verschwindender verallgemeinerter (1, 1)-Kapazität) ausschließt. Der hier behandelte allgemeine Fall einer sich bis zum Rande des Definitionsgebietes erstreckenden Ausnahmemenge liegt jedoch beträchtlich verwickelter und bedarf weitergehender Ausführungen.

Wie man sich erinnert, beruht der Nachweis für die Hebbarkeit einer isolierten Singularität im Inneren des Definitionsbereiches letztlich auf der Möglichkeit der Überdeckbarkeit dieser Singularität durch eine offene Kreisscheibe beliebig kleinen Umfanges; und er läßt sich im Grunde auf den Fall einer ganzen Ausnahmemenge übertragen, solange diese von offenen Kreisscheiben beliebig kleinen Gesamtumfanges überdeckt werden kann. Als Kriterium für diese Möglichkeit bietet sich das von C. CARATHÉODORY [4] eingeführte und nach ihm und F. HAUSDORFF [12] genannte lineare Maß an. Es ist daher natürlich, mit diesem Begriffe zu arbeiten.

Der Rest dieses Paragraphen bringt die Zusammenstellung verschiedener in den folgenden Ausführungen benutzten Tatsachen. In § 2 sind einige Eigenschaften ebener Punktmengen verschwindenden linearen Carathéodoryschen Maßes diskutiert. § 3 enthält den auf der Verallgemeinerung einer Schlußweise von J. SERRIN [22] beruhenden Beweis des allgemeinen Maximumprinzipes. § 4 befaßt sich mit der Formulierung und Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems. In § 5 schließlich wird der angekündigte Satz über hebbare Unstetigkeiten bewiesen.

Es sei bemerkt, daß sich die folgenden Untersuchungen ohne weiteres auf eine ganze Klasse von elliptischen Differentialgleichungen erstrecken, für welche die Minimalflächengleichung typisch ist, und welche man nach R. FINN [9], [10] Gleichungen vom Typ der Minimalflächengleichung nennt.

1.2. Im folgenden sind einige wohlbekannte Tatsachen über die Lösungen der Minimalflächengleichung zusammengestellt.

a: Der Ausdruck

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{p_2}{W_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (q_2 - q_1)\left(\frac{q_2}{W_2} - \frac{q_1}{W_1}\right),$$

in dem $W_j = \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$ $(j = 1, 2)$ gesetzt ist, ist nicht-negativ und kann durch

$$[(p_2 - p_1)^2 + (q_2 - q_1)^2]\,[\operatorname{Max}(W_1, W_2)]^{-3}$$

nach unten abgeschätzt werden.

Wenn man nämlich den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion

$$f(t) = (p_2 - p_1)\left(\frac{p}{W} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (q_2 - q_1)\left(\frac{q}{W} - \frac{q_1}{W_1}\right)$$

anwendet, wo $p = p_1 + t(p_2 - p_1)$, $q = q_1 + t(q_2 - q_1)$ und $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ gesetzt sind, so sieht man, daß der fragliche Ausdruck gleich $f(1) = f(1) - - f(0) = f'(\bar t)$, $0 < \bar t < 1$ ist. Durch Ausführung der Differentiation und Abschätzung des kleineren Eigenwertes der resultierenden positiv definiten quadratischen Form überzeugt man sich von der Richtigkeit der Behauptung.

b: In einem Gebiete P der (x, y)-Ebene sei eine Folge von Lösungen $z_n(x, y) \in C^2(P)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der Minimalflächengleichung vorgegeben. Die Funktionen $z_n(x, y)$ seien gleichmäßig beschränkt: $|z_n(x, y)| \leqq M$. Dann existiert eine Teilfolge $\{z_{n_i}(x, y)\}$, deren Funktionen mitsamt ihrer ersten und zweiten Ableitungen gegen eine Lösung $z(x, y) \in C^2(P)$ der Minimalflächengleichung in P konvergieren. Die Konvergenz ist dabei in jedem kompakten Teilbereich von P gleichmäßig.

Der Beweis ergibt sich als einfache Folgerung wohlbekannter Apriori-Abschätzungen. (Man sehe etwa R. FINN [10]; E. HEINZ [13]; E. HOPF [14]; J. C. C. NITSCHE [17]; T. RADÓ [20], Kap. IV; J. SERRIN [21].)

c: Das Dirichletsche Problem der Minimalflächengleichung für ein (nicht notwendigerweise streng) konvexes Gebiet P mit stetigen Randwerten besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $z(x, y) \in C^2(P) \cap C^0(\overline{P})$.

Das folgt am einfachsten aus der Lösung des parametrischen Plateauschen Problems (siehe z. B. R. COURANT [6], Kap. 3; J. DOUGLAS [7]; T. RADÓ [19], [20], Kap. V) unter Anwendung eines Hilfssatzes von T. RADÓ ([20], S. 35).

1.3. In § 3 benötigen wir die folgenden Tatsachen hinsichtlich der Ableitungen einer Funktion. Beweise und weiteres Material findet man z. B. in den Abhandlungen von J. W. CALKIN [3] und C. B. MORREY [15].

In einem beschränkten Gebiet P der (x, y)-Ebene seien drei stetig differenzierbare Funktionen $z(x, y)$, $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gegeben, und es gelte $u(x, y) < < v(x, y)$. Die Abschnittsfunktion

$$Z(x,y) = [z(x,y)]_{u(x,y)}^{v(x,y)} = \begin{cases} u(x, y) \text{ in allen Punkten } (x, y), \text{ wo } z(x, y) \leqq u(x, y) \\ z(x,y) \text{ in allen Punkten } (x,y), \text{ wo } u(x,y) < z(x,y) < v(x,y) \\ v(x, y) \text{ in allen Punkten } (x, y), \text{ wo } z(x, y) \geqq v(x, y) \end{cases}$$

ist dann in jedem kompakten Teilbereich von P eine Lipschitz-Funktion. Die partiellen Ableitungen Z_x und Z_y existieren fast überall in P und sind lokal, d. h. in jedem kompakten Teilbereich von P, summierbar. In fast allen Punkten der Menge $E_1 = \{x, y; z(x, y) \leqq u(x, y)\}$ gilt $Z_x = u_x$, $Z_y = u_y$, und in fast allen Punkten der Menge $E_3 = \{x, y; z(x, y) \geqq v(x, y)\}$ gilt $Z_x = v_x$, $Z_y = v_y$. Wenn die Ableitungen Z_x und Z_y fast überall in P verschwinden, so gilt $Z(x, y) = \text{const}$.

§ 2. Mengen von verschwindendem linearen (Carathéodoryschen oder Hausdorffschen) Maß

2.1. Es sei A eine beliebige Punktmenge in der (x, y)-Ebene. Für eine Zahl $\varrho > 0$ betrachten wir eine Überdeckung von A durch endlich oder abzählbar unendlich viele offene Kreise K_i vom Durchmesser $d_i \leqq \varrho$. Die untere Grenze der Summen $\sum d_i$ für alle solchen Überdeckungen, die auch unendlich ausfallen kann, bezeichnen wir mit $\lambda_1^{(\varrho)}(A)$. Wenn ϱ abnimmt, so werden die Bedingungen, welchen die Kreise K_i genügen müssen, schärfer. Die Zahl $\lambda_1^{(\varrho)}(A)$ kann sich daher nicht verkleinern und konvergiert für $\varrho \to 0$ gegen einen endlichen oder unendlichen Grenzwert. Dieser Grenzwert $\lambda_1(A) = \lim_{\varrho \to 0} \lambda_1^{(\varrho)}(A)$ heißt das lineare Carathéodorysche (oder das lineare Hausdorffsche) Maß der Menge A.

Es ist klar, daß eine kompakte Punktmenge dann und nur dann verschwindendes lineares Maß besitzt, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Überdeckung dieser Menge durch endlich viele offene Kreise K_i vom Durchmesser d_i gibt, so daß $\sum d_i < \varepsilon$ gilt.

Eine Menge A endlichen linearen Maßes ist eine Nullmenge, d. h. ihr äußeres zweidimensionales Lebesguesches Maß $m_2^*(A)$ verschwindet. Für jedes ϱ läßt sich nämlich eine Überdeckung von A durch abzählbar viele Kreise K_i

vom Durchmesser $d_i \leqq \varrho$ so finden, daß $\sum d_i \leqq \lambda_1(A) + 1$ ist. Es gilt aber gewiß

$$m_2^*(A) \leqq \sum \frac{\pi}{4} d_i^2 \leqq \frac{\pi}{4} \varrho \sum d_i \leqq \frac{\pi}{4} \varrho (\lambda_1(A) + 1) .$$

Die Behauptung ergibt sich im Grenzübergang $\varrho \to 0$.

Carathéodory und Hausdorff haben bewiesen, daß das lineare Maß $\lambda_1(\mathfrak{C})$ einer Kurve $\mathfrak{C}$, d. h. des stetigen Bildes eines abgeschlossenen linearen Intervalles, mit ihrer Jordanschen Länge $L(\mathfrak{C})$ übereinstimmt und daß für lineare Punktmengen A das lineare Carathéodorysche Maß $\lambda_1(A)$ mit dem äußeren linearen Lebesgueschen Maße $m_1^*(A)$ identisch ist.

Es sei jetzt A eine auf einer rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{C}$ gelegene Punktmenge und $m_C^*(A)$ ihr bezüglich der Bogenlänge s von $\mathfrak{C}$ genommenes äußeres lineares Lebesguesches Maß. Dann gilt $\lambda_1(A) \leqq m_C^*(A)$. Auf Grund des Vitali-Lebesgueschen Überdeckungssatzes läßt sich A nämlich durch abzählbar viele offene Bögen $\mathfrak{C}_i$ beliebig kleiner Länge $L(\mathfrak{C}_i)$ so überdecken, daß die Summe $\sum L(\mathfrak{C}_i)$ den Wert $m_C^*(A)$ beliebig wenig übertrifft. Um den (bezüglich der Bogenlänge genommenen und auf $\mathfrak{C}$ gelegenen) Mittelpunkt jedes Bogens $\mathfrak{C}_i$ beschreiben wir den offenen Kreis K_i vom Durchmesser $d_i = L(\mathfrak{C}_i)$. Die Gesamtheit dieser Kreise K_i liefert offensichtlich eine Überdeckung der Menge A. Für jedes $\varrho > 0$ gilt also $\lambda_1^{(\varrho)}(A) \leqq m_C^*(A)$, und daher auch $\lambda_1(A) \leqq m_C^*(A)$.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich auch die umgekehrte Ungleichung beweisen. Die Menge A sei z. B. auf einer glatten Kurve $\mathfrak{C}$ gelegen. Für hinreichend kleine $\varrho > 0$ bezeichnen wir mit $\Delta(\varrho)$ das Maximum des Quotienten aus Länge $L(\mathfrak{C}_0) \leqq \varrho$ eines Teilbogens $\mathfrak{C}_0$ von $\mathfrak{C}$ und Abstand seiner Endpunkte. Es gilt $\Delta(\varrho) \geqq 1$ und $\lim\limits_{\varrho \to 0} \Delta(\varrho) = 1$. Der Durchschnitt eines hinreichend kleinen Kreises mit $\mathfrak{C}$ ist entweder leer oder ein zusammenhängender Teilbogen von $\mathfrak{C}$. Für hinreichend kleine ϱ betrachten wir nun eine Überdeckung von A mit abzählbar vielen Kreisen K_i vom Durchmesser $d_i \leqq \varrho$. Dann gilt $\sum d_i \geqq m_{\mathfrak{C}}^*(A)/\Delta(\varrho)$ und somit $\lambda_1^{(\varrho)}(A) \geqq m_{\mathfrak{C}}^*(A)/\Delta(\varrho)$. Für $\varrho \to 0$ ergibt sich daher in der Tat $\lambda_1(A) = m_{\mathfrak{C}}^*(A)$.

Die Menge A sei auf einer konvexen Kurve $\mathfrak{C}$ gelegen. Da der Durchschnitt einer konvexen Kurve und einer offenen Kreisscheibe vom Durchmesser d aus offenen Teilbögen dieser Kurve besteht, deren Gesamtlänge den Wert πd gewiß nicht übersteigt, so folgt in diesem Falle gewiß $\lambda_1(A) \geqq m_{\mathfrak{C}}^*(A)/\pi$.

2.2. Gegeben sei eine kompakte Menge A verschwindenden linearen Maßes. Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ wählen wir, was nach § 2.1 möglich ist, endlich viele die Menge A überdeckende offene Kreise K_i $(i = 1, 2, \ldots, n = n(\varepsilon))$ vom Durchmesser d_i, so daß $d_1 + d_2 + \cdots + d_n < \varepsilon$ gilt. Es ist klar, daß wir nur solche Kreise verwenden, die tatsächlich mindestens einen Punkt von A enthalten. Mit δ_ε bezeichnen wir den kleinsten der Durchmesser d_i. K_i' und K_i'' seien die mit K_i konzentrischen Kreise vom Durchmesser $d_i + \sqrt{2}\,\delta_\varepsilon$ bzw. $d_i + 2\sqrt{2}\,\delta_\varepsilon$. Mit $A(\varepsilon)$, $A'(\varepsilon)$ und $A''(\varepsilon)$ bezeichnen wir die Vereinigungsmengen $\cup K_i$ bzw. $\cup K_i'$ bzw. $\cup K_i''$.

Bei den nächsten Betrachtungen stützen wir uns auf eine für alle Werte einer Veränderlichen t erklärte, stetig differenzierbare nicht-negative Funktion

$\varphi(t)$, welche außerhalb des Intervalles $|t| \leqq 1$ verschwindet und im übrigen so normiert ist, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1$ gilt. Wir können z. B. die (sogar unendlich oft differenzierbare) Funktion $\varphi(t) = a \exp\{(t^2 - 1)^{-1}\}$ für $|t| < 1$ und $\varphi(t) = 0$ für $|t| \geqq 1$ wählen, wobei die Konstante a geeignet bestimmt ist.

Nunmehr setzen wir

$$\psi^{(\varepsilon)}(x, y) = \frac{4}{\delta_\varepsilon^2} \iint\limits_{A'(\varepsilon)} \varphi\left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}(x - \xi)\right) \varphi\left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}(y - \eta)\right) d\xi\, d\eta\,.$$

Die Funktion $\psi^{(\varepsilon)}(x, y)$ ist in der ganzen (x, y)-Ebene definiert und stetig differenzierbar. Es gilt überall $0 \leqq \psi^{(\varepsilon)}(x, y) \leqq 1$; und es gilt $\psi^{(\varepsilon)}(x, y) = 0$ außerhalb $A''(\varepsilon)$, $\psi^{(\varepsilon)}(x, y) = 1$ in $A(\varepsilon)$ und $|\psi_x^{(\varepsilon)}(x, y)| \leqq 4m/\delta_\varepsilon$, $|\psi_y^{(\varepsilon)}(x, y)| \leqq$ $\leqq 4m/\delta_\varepsilon$ in allen anderen Punkten von $A''(\varepsilon)$. Dabei ist $m = \operatorname{Max}|\varphi'(t)|$ gesetzt. Da der Flächeninhalt von $A''(\varepsilon) - A(\varepsilon)$ wegen $\delta_\varepsilon \leqq d_i$ und $\sum d_i < \varepsilon$ gewiß nicht größer als

$$\sum \frac{\pi}{4} [(d_i + 2\sqrt{2}\, \delta_\varepsilon)^2 - d_i^2] = \frac{\pi}{4} \sum (4\sqrt{2}\, d_i \delta_\varepsilon + 8\delta_\varepsilon^2) \leqq$$
$$\leqq (2 + \sqrt{2})\pi \delta_\varepsilon \sum d_i \leqq (2 + \sqrt{2})\pi \varepsilon \delta_\varepsilon$$

ist, ergibt sich

$$\iint\limits_{E^2} (|\psi_x^{(\varepsilon)}(x, y)| + |\psi_y^{(\varepsilon)}(x, y)|)\, dx\, dy \leqq 8m(2 + \sqrt{2})\pi\varepsilon\,.$$

Das Integral ist dabei über die ganze Ebene erstreckt. Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{E^2} (|\psi_x^{(\varepsilon)}(x, y)| + |\psi_y^{(\varepsilon)}(x, y)|)\, dx\, dy = 0\,.$$

2.3. Es ist wohlbekannt, daß die Begriffe des Hausdorffschen Maßes und der Kapazität von Punktmengen eng verwandt sind. Mit J. SERRIN [22] (siehe z. B. auch N. ARONSZAJN, F. MULLA, P. SZEPTYCKI [1] und B. FUGLEDE [11]) wollen wir die untere Grenze der Werte des Integrales

$$\iint\limits_{E^2} [\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y)]^{\frac{p}{2}}\, dx\, dy \qquad (p \geqq 1)$$

für alle in der ganzen Ebene stetig differenzierbaren Funktionen $\psi(x, y)$, welche in einer (von Funktion zu Funktion verschiedenen) Umgebung der Ausnahmemenge A den Wert Eins, außerhalb eines (im Falle $p \geqq 2$ festen) Kreises den Wert Null annehmen und im übrigen den Ungleichungen $0 \leqq$ $\leqq \psi(x, y) \leqq 1$ genügen, als die verallgemeinerte $(1, p)$-Kapazität der kompakten Menge A bezeichnen. (Der erste Index deutet an, daß wir hier mit den ersten Ableitungen arbeiten.) Insbesondere sind die Begriffe verallgemeinerte $(1, 2)$-Kapazität und logarithmische Kapazität gleichbedeutend.

Die vorangehende Konstruktion kann dann auch als Beweis der Tatsache angesehen werden, daß eine kompakte Menge verschwindenden linearen Maßes auch verschwindende verallgemeinerte $(1, 1)$-Kapazität besitzt[1]).

---

[1]) *Zusatz bei der Korrektur:* Dasselbe Ergebnis (auch für höherdimensionales Hausdorffsches Maß und im m-dimensionalen Raum) ist mit im wesentlichen derselben Konstruktion auch von L. CARLESON bewiesen worden. Man sehe dazu S. 335ff. der seither erschienenen Arbeit von H. WALLIN: "A connection between α-capacity and L^p-classes of differentiable functions." Arkiv för Mat. 5, nr 24 (1964), pp. 331—341.

2.4. *Eine in der Abschließung $\overline{P}$ eines beschränkten Gebietes P gelegene kompakte Menge A verschwindenden linearen Maßes separiert das Gebiet nicht.* Mit anderen Worten: *Mit P ist auch die offene Menge $P - A$ zusammenhängend.*

Da Punktmengen verschwindenden linearen Maßes i. a. etwas größer als Punktmengen verschwindender logarithmischer Kapazität sind (siehe z. B. L. CARLESON [5], S. 32), schließt diese Aussage einen grundlegenden Satz der Funktionentheorie ein.

Die nachfolgenden Zeilen enthalten einen Beweis[1a]) der Behauptung in der folgenden speziellen quantitativen Fassung:

Vorgelegt sei eine in der Abschließung $\overline{P}$ des Kreisringes $P = \{x, y; 0 < r_1^2 < < x^2 + y^2 < r_2^2 < \infty\}$ gelegene kompakte Punktmenge A verschwindenden linearen Maßes. Es gibt eine den Nullpunkt in ihrem Inneren enthaltende Jordankurve in P, welche die Punkte der Menge A vermeidet und deren Länge den Wert $2\pi r_1$ beliebig wenig übersteigt.

Beweis: Es sei B die aus A durch „Projektion" längs konzentrischer Kreise auf die positive x-Achse gewonnene lineare Menge, d. h. $B = \{\xi; r_1 \leqq \xi \leqq r_2, x^2 + y^2 = \xi^2, (x, y) = A\}$. Es ist klar, daß das lineare Maß von B Null sein muß. In jedem Intervall $\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2$ $(r_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq r_2)$ gibt es also Punkte, welche nicht zu B gehören. Man wähle einen solchen Punkt ξ_0 im Intervalle $r_1 \leqq \xi \leqq \leqq r_1 + \varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist. Der Kreis $x^2 + y^2 = \xi_0^2$ enthält dann keine Punkte von A und befriedigt alle Behauptungen des Satzes.

§ 3. Das allgemeine Maximumprinzip

3.1. *Es seien P ein beschränktes Gebiet in der (x, y)-Ebene und A eine in der Abschließung $\overline{P}$ von P enthaltene kompakte Punktmenge verschwindenden linearen Maßes. In $P - A$ seien zwei zweimal stetig differenzierbare Lösungen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ der Minimalflächengleichung vorgegeben. Bei Annäherung an jeden nicht in A liegenden Randpunkt von P gelte* $\limsup\,[z_2(x, y) - z_1(x, y)] \leqq M$ $(\liminf\,[z_2(x, y) - z_1(x, y)] \geqq m)$. *Dann trifft in allen Punkten von $P - A$ die Ungleichung $z_2(x, y) - z_1(x, y) \leqq M$ $(z_2(x, y) - z_1(x, y) \geqq m)$ zu.*

Wir bemerken, daß sich A bis zum Rande von P erstrecken und insbesondere auch ganz aus Randpunkten von P bestehen kann.

Beweis: Im Falle $M = \infty$ ist nichts zu beweisen. Es sei also $M < \infty$. Wir wählen zwei Zahlen M_1 und $M_2 (M < M_1 < M_2 < \infty)$. Q sei eine beliebige, keinen Punkt der Menge A enthaltende kompakte Teilmenge von P. Die positive Zahl ε sei so klein gewählt, daß das Gebiet $A''(\varepsilon)$ aus § 2.2 keinen Punkt von Q enthält. Wir können auch eine von achsenparallelen Segmenten berandete kompakte Teilmenge $\overline{R}(\varepsilon)$ von P so finden, daß Q in $R(\varepsilon)$ enthalten ist und daß auf allen nicht in $A(\varepsilon)$ gelegenen Randpunkten von $\overline{R}(\varepsilon)$ die Ungleichungen $z_2(x,y) - z_1(x,y) < \frac{1}{2}(M + M_1)$ bzw. $z_2(x,y) - z_1(x,y) < M_1 - 1$ gelten, je nachdem ob $M > -\infty$ oder $M = -\infty$ ist.

1a) Diesen Beweis, der kürzer ist als mein eigener, verdanke ich Herrn W. LITTMAN.

Wir betrachten nun die Abschnittsfunktion

$$Z_2(x, y) = [z_2(x, y)]_{z_1(x,y)+M_1}^{z_1(x,y)+M_2}$$

in allen Punkten von $\overline{R}(\varepsilon) - A(\varepsilon)$ (siehe § 1.3). Mit Hilfe der Funktion $\eta(x, y) = 1 - \psi^{(\varepsilon)}(x, y)$, wo $\psi^{(\varepsilon)}(x, y)$ die in § 2.2 konstruierte Funktion ist, bilden wir das Integral

$$\text{(1)} \qquad \iint\limits_{\overline{R}(\varepsilon)-A(\varepsilon)} \left[(\eta(Z_2 - z_1 - M_1))_x \left(\frac{p_2}{W_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + \right. \\ \left. + (\eta(Z_2 - z_1 - M_1))_y \left(\frac{q_2}{W_2} - \frac{q_1}{W_1}\right)\right] dx\, dy.$$

Partielle Integration und Berücksichtigung der Tatsache, daß auf dem stückweise glatten Rand des Integrationsbereiches entweder die Funktion $\eta(x, y)$ oder die Funktion $Z_2(x, y) - z_1(x, y) - M_1$ verschwindet, lehrt, daß dieses Integral den Wert Null hat. Da in fast allen Punkten von $\overline{R}(\varepsilon) - A(\varepsilon)$ entweder $\partial Z_2/\partial x = \partial z_1/\partial x$, $\partial Z_2/\partial y = \partial z_1/\partial y$ oder $\partial Z_2/\partial x = \partial z_2/\partial x$, $\partial Z_2/\partial y = \partial z_2/\partial y$ gilt, da, wie wir aus § 1.2.a wissen, der Ausdruck

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{p_2}{W_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (q_2 - q_1)\left(\frac{q_2}{W_2} - \frac{q_1}{W_1}\right)$$

nicht-negativ ist und da die Ungleichungen $|p_j/W_j| < 1$, $|q_j/W_j| < 1$ $(j = 1, 2)$ und $0 \leqq Z_2 - z_1 - M_1 \leqq M_2 - M_1$ gelten, läßt sich der Integrand in (1) in fast allen Punkten von $\overline{R}(\varepsilon) - A(\varepsilon)$ durch

$$\left[(P_2 - p_1)\left(\frac{P_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (Q_2 - q_1)\left(\frac{Q_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{q_1}{W_1}\right)\right]\eta - 2(M_2 - M_1)(|\eta_x| + |\eta_y|)$$

nach unten abschätzen. Dabei ist $P_2 = \partial Z_2/\partial x$, $Q_2 = \partial Z_2/\partial y$, $\mathfrak{W}_2 = \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}$ gesetzt. Indem wir nun beachten, daß überall $0 \leqq \eta(x, y) \leqq 1$ gilt und $\eta(x, y) = 1$ in Q ist, finden wir daher

$$0 \leqq \iint\limits_{Q} \left[(P_2 - p_1)\left(\frac{P_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (Q_2 - q_1)\left(\frac{Q_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{q_1}{W_1}\right)\right] dx\, dy \leqq$$

$$\leqq \iint\limits_{\overline{R}(\varepsilon)-A(\varepsilon)} \left[(P_2 - p_1)\left(\frac{P_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{p_1}{W_1}\right) + (Q_2 - q_1)\left(\frac{Q_2}{\mathfrak{W}_2} - \frac{q_1}{W_1}\right)\right] \eta(x, y)\, dx\, dy \leqq$$

$$\leqq 2(M_2 - M_1) \iint\limits_{\overline{R}(\varepsilon)-A(\varepsilon)} (|\eta_x| + |\eta_y|)\, dx\, dy \leqq 2(M_2 - M_1) \iint\limits_{E^2} (|\eta_x| + |\eta_y|)\, dx\, dy.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt daraus nach § 2.2 und § 1.2.a, daß fast überall in Q die Gleichungen $(Z_2 - z_1)_x = (Z_2 - z_1)_y = 0$ gelten, so daß dort $Z_2(x, y) - z_1(x, y) = c = \text{const}$ ist. Zufolge § 2.4 können wir uns den Bereich Q als Teil eines größeren Bereiches $Q' \subset P - A$ denken, wobei Q' einen Randpunkt (x_0, y_0) in solcher Nähe eines nicht zu A gehörigen Randpunktes von P besitzt, daß in diesem Punkte $z_2(x_0, y_0) - z_1(x_0, y_0) < M_1$ gilt. Demnach finden wir, daß die Differenz $Z_2(x, y) - z_1(x, y)$ in ganz Q' den konstanten Wert c haben muß. Da nun die Differenz $Z_2(x, y) - z_1(x, y)$ in Q' stets gleich einer der drei Zahlen M_1, $z_2(x, y) - z_1(x, y)$ oder M_2 ist und da gewiß $Z_2(x_0, y_0) = z_1(x_0, y_0) + M_1$ ist, schließt man, daß $c = M_1$ sein muß. Aus der Willkür in der Wahl des

Bereiches Q folgt die Gültigkeit der Ungleichung $z_2(x, y) - z_1(x, y) \leqq M_1$ und, da M_1 beliebig war, auch der Ungleichung $z_2(x, y) - z_1(x, y) \leqq M$, in allen Punkten von $P - A$.

Die Behauptung hinsichtlich des Infimums wird genauso bewiesen.

3.2. Die Frage, ob das Verschwinden des linearen Maßes der Ausnahmemenge A für die Gültigkeit des allgemeinen Maximumprinzipes notwendig ist, oder vielleicht allgemeiner die Frage, ob sich vollständige metrische Bedingungen für die Menge A angeben lassen, unter denen das allgemeine Maximumprinzip gilt bzw. nicht gilt, besitzt zurZeit noch keine zufriedenstellende Antwort.

Für den Fall, daß die Ausnahmemenge ein im Inneren oder auf dem Rande von P gelegenes geradliniges Segment ist, also positives lineares Carathéodoryssches Maß besitzt, gibt es Beispiele, welche zeigen, daß das allgemeine Maximumprinzip nicht zutrifft. Solche Beispiele lassen sich leicht mit Hilfe bekannter Existenzsätze (siehe z. B. R. Finn [10]) konstruieren. In der Tat das einfachste, obschon grobe, Beispiel wird von der altbekannten Scherkschen Minimalfläche $z(x, y) = \log \cos y - \log \cos x$ geliefert, welche wir uns über dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $P = \left\{x, y;\ 0 < x < |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$ definiert denken, und bei der die Hypotenuse $\left\{x, y;\ x = \frac{\pi}{2},\ |y| \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$ die Rolle der Ausnahmemenge spielt. Bei Annäherung an alle inneren Punkte der Katheten mit Einschluß des Punktes $(0, 0)$ geht $z(x, y)$ (genauso wie die andere Lösung $z'(x, y) \equiv 0$ der Minimalflächengleichung) nach Null; aber bei Annäherung an jeden inneren Punkt der Hypotenuse konvergiert $z(x, y)$ (anders als $z'(x, y)$) gegen Unendlich.

§ 4. Das verallgemeinerte Dirichletsche Problem

4.1. Vorgelegt sei ein (nicht notwendigerweise streng) konvexes Gebiet P in der (x, y)-Ebene. Auf seinem Rande ∂P mit der Bogenlänge s sei eine abgeschlossene Menge A verschwindenden (hinsichtlich s genommenen) Lebesgueschen Maßes oder, was nach § 2.1 auf dasselbe hinausläuft, verschwindenden linearen Maßes, gegeben. Das Komplement der Menge A bezüglich ∂P heiße B. Auf B sei eine stetige beschränkte Funktion φ vorgegeben: $|\varphi| \leqq M < \infty$.

Das Problem besteht im Auffinden einer Lösung $z(x, y) \in C^2(P) \cap C^0(P \cap B)$ der Minimalflächengleichung in P, deren Werte auf B mit denen von φ übereinstimmen.

Indem wir die Variable $\sigma = 2\pi s/L$ (L = Länge von ∂P) einführen, können wir uns den Rand ∂P mit Hilfe zweier periodischer Funktionen $p(\sigma)$, $q(\sigma)$ durch Gleichungen $\{x = p(\sigma),\ y = q(\sigma);\ 0 \leqq \sigma \leqq 2\pi\}$ als topologisches Bild des Einheitskreises $K_0 = \{u = \cos\sigma,\ v = \sin\sigma;\ 0 \leqq \sigma \leqq 2\pi\}$ einer (u, v)-Ebene denken. A erscheint dann als Bild einer abgeschlossenen Menge A_0 dieser Kreislinie verschwindenden Lebesgueschen Maßes, und B ist das Bild einer offenen Teilmenge B_0 von K_0. Die vorgeschriebenen Randwerte können durch eine in allen Punkten von B_0 erklärte stetige und beschränkte Funktion $\varphi(\sigma)$ erklärt werden.

4.2. Nach dem allgemeinen Maximumprinzip kann es höchstens eine Lösung unseres Problems geben. Die Eindeutigkeit ist also sichergestellt. Wir wenden uns dem Existenzbeweis zu.

Für eine kleine positive Zahl ε denken wir uns die Menge A_0 durch endlich viele offene Intervalle der Gesamtlänge kleiner als ε überdeckt. Wir können es dabei so einrichten, daß auch noch die Abschließungen dieser Intervalle gegenseitig punktfremd sind. Die Vereinigungsmenge der Intervalle heiße $A_0(\varepsilon)$, und ihr Bild auf dem Rande von P heiße $A(\varepsilon)$. Die Komplementärmenge von $A_0(\varepsilon)$ bezüglich K_0 sei $\overline{B}_0(\varepsilon)$ und ihr Bild $\overline{B}(\varepsilon)$.

Wir wählen nun eine Funktion $\varphi(\sigma;\varepsilon)$, welche auf ganz K_0 stetig und beschränkt ist: $|\varphi(\sigma;\varepsilon)| \leqq M$, und welche in allen Punkten von $\overline{B}_0(\varepsilon)$ mit $\varphi(\sigma)$ übereinstimmt. Wenn $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ eines der Intervalle von $A_0(\varepsilon)$ ist, brauchen wir dazu in diesem Intervalle nur die lineare Interpolation

$$\varphi(\sigma;\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}\Big([\sigma_2\varphi(\sigma_1) - \sigma_1\varphi(\sigma_2)] + [\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)]\sigma\Big)$$

zu nehmen.

Für $n = 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir mit $z_n(x,y) \in C^2(P) \cap C^0(\overline{P})$ die Lösungen der Minimalflächengleichung in P mit den Randwerten $\varphi\left(\sigma;\frac{1}{n}\right)$. Auf Grund des gewöhnlichen Maximumprinzipes sind die Funktionen $z_n(x,y)$ in P gleichmäßig beschränkt: $|z_n(x,y)| \leqq M$. Nach § 1.2.b folgt aus dieser Tatsache die Existenz einer Teilfolge $\{z_{n_i}(x,y)\}$, deren Funktionen mitsamt ihrer ersten und zweiten Ableitungen gegen eine Lösung $z(x,y) \in C^2(P)$ der Minimalflächengleichung in P konvergieren. Die Konvergenz ist dabei in jedem kompakten Teilbereich von P gleichmäßig.

4.3. Wir müssen jetzt zeigen, daß die gefundene Lösung $z(x,y)$ das geforderte Randverhalten besitzt. Zu diesem Zwecke werden wir sie mit zwei geeigneten Hilfsfunktionen vergleichen. Es sei $(\hat{x},\hat{y}) = (p(\hat{\sigma}), q(\hat{\sigma}))$ ein beliebiger Punkt von B. Wir wählen eine positive Zahl ε so klein, daß das Intervall I_ε der Länge 2ε um den Punkt $\hat{\sigma}$ auf K_0 noch zu B_0 gehört. Es ist dann ein leichtes, zwei auf ganz K_0 stetige Funktionen $\varphi^-(\sigma)$ und $\varphi^+(\sigma)$ zu konstruieren, welche in $I_{\varepsilon/2}$ mit $\varphi(\sigma)$ übereinstimmen, in I_ε den Ungleichungen $\varphi^-(\sigma) \leqq \varphi(\sigma) \leqq \varphi^+(\sigma)$ genügen und in $K_0 - I_\varepsilon$ die Werte $\varphi^-(\sigma) = -M$ bzw. $\varphi^+(\sigma) = M$ annehmen. Gleichmäßig für $n > 2/\varepsilon$ und alle σ gilt dann $\varphi^-(\sigma) \leqq \varphi\left(\sigma;\frac{1}{n}\right) \leqq \varphi^+(\sigma)$. Mit $z^-(x,y)$ und $z^+(x,y)$ bezeichnen wir die Lösungen des Dirichletschen Problems mit den stetigen Randwerten $\varphi^-(\sigma)$ bzw. $\varphi^+(\sigma)$. Zufolge des Maximumprinzipes gelten dann für alle $n > 2/\varepsilon$ in P die Ungleichungen $z^-(x,y) \leqq z_n(x,y) \leqq z^+(x,y)$ und somit auch $z^-(x,y) \leqq z(x,y) \leqq z^+(x,y)$. Da nun beide Funktionen $z^-(x,y)$ und $z^+(x,y)$ bei Annäherung an den Punkt $(\hat{x},\hat{y})$ gegen den Wert $\varphi(\hat{\sigma})$ konvergieren, muß dasselbe für $z(x,y)$ gelten. Das war zu zeigen.

Über das Verhalten der Lösung $z(x,y)$ bei Annäherung an die Randpunkte in $\overline{A}$ ist damit keine Aussage gemacht. Nach § 3.1 steht aber fest, daß $z(x,y)$ dabei beschränkt bleibt.

§ 5. Hebbare Unstetigkeiten

5.1. *Es seien P ein beschränktes Gebiet in der (x, y)-Ebene und A eine in der Abschließung $\bar{P}$ von P enthaltene kompakte Punktmenge. In $P - A$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $z(x, y)$ der Minimalflächengleichung vorgegeben. Wenn die Ausnahmemenge A verschwindendes lineares Maß hat, so ist sie für die Lösung $z(x, y)$ hebbar, d. h. der Funktion $z(x, y)$ lassen sich, und zwar in eindeutiger Weise, in den in P gelegenen Punkten von A solche Werte zuschreiben, daß die erweiterte Funktion eine in ganz P zweimal stetig differenzierbare Lösung der Minimalflächengleichung ist.*

Wir bemerken, daß sich A bis zum Rande von P erstrecken kann.

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) im Durchschnitt $A \cap P$. Es seien K_1 und K_2 (mit $\bar{K}_1 \subset K_2$, $\bar{K}_2 \subset P$) zwei den Punkt (x_0, y_0) enthaltende offene konzentrische Kreisscheiben. Nach § 2.4 können wir im Kreisring $K_2 - \bar{K}_1$ eine den Punkt (x_0, y_0) in ihrem Inneren enthaltende Jordankurve finden, welche keinen Punkt der Menge A enthält[2]). Die Lösung $z(x, y)$ ist in einer Umgebung dieser Kurve definiert und daher auf der Kurve beschränkt. Zufolge des allgemeinen Maximumprinzipes ist $z(x, y)$ dann in ganz $\bar{K}_1 - A$ beschränkt. Die Funktion $Z(x, y) \in C^2(K_1)$ sei nun die nach § 4 existierende und eindeutig bestimmte Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems der Minimalflächengleichung für den Kreis K_1, deren Werte in allen Punkten von $\partial K_1 - A$ mit denen der Funktion $z(x, y)$ übereinstimmen. Nach dem allgemeinen Maximumprinzip sind die beiden Lösungen $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ in allen Punkten von $\bar{K}_1 - A$ identisch. Im Punkte (x_0, y_0) und in der Tat in allen zu A gehörigen Punkten von K_1 legen wir der Funktion $z(x, y)$ nunmehr die Werte der Funktion $Z(x, y)$ bei. Die so erweiterte Funktion ist eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Minimalflächengleichung in K_1.

Die angegebene Konstruktion führt zu einer eindeutigen Erweiterung der Lösung $z(x, y)$ auf ganz P. Das folgt wiederum aus dem allgemeinen Maximumprinzip.

5.2. Es stellt sich wiederum die Frage, ob das Verschwinden des linearen Maßes der Ausnahmemenge A für die Hebbarkeit der Unstetigkeit der in $P - A$ definierten Lösung $z(x, y)$ notwendig ist, oder vielleicht allgemeiner, ob man vollständige metrische Bedingungen für die Menge A formulieren kann, unter denen sie für die Lösung $z(x, y)$ hebbar bzw. nicht hebbar ist.

Es lassen sich leicht Beispiele konstruieren, bei denen die Ausnahmemenge A ein ins Innere des Gebietes P reichendes geradliniges Segment ist, also positives lineares Maß besitzt, und wo die Lösung $z(x, y)$ bei Annäherung an jeden inneren Punkt von A gegen Unendlich konvergiert. Man sehe dazu das in § 3.2 Gesagte.

Literatur

[1] Aronszajn, N., F. Mulla, and P. Szeptycki: On spaces of potentials connected with L^p-classes. Techn. Rep. No. 28, 110 pp., Dept. of Math., Univ. of Kansas, 1963.

[2]) Um die Verallgemeinerungsfähigkeit der Methode nicht von vornherein zu beschränken, machen wir hier von der Tatsache, daß diese Jordankurve konvex gewählt werden kann, keinen Gebrauch.

[2] Bers, L.: Isolated singularities of minimal surfaces. Ann. Math. 53, 364—386 (1951).

[3] Calkin, J. W.: Functions of several variables and absolute continuity, I. Duke Math. J. 6, 170—186 (1940).

[4] Carathéodory, C.: Über das lineare Maß von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Nachr. Königl. Ges. Wissensch. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 404—426 (1914).

[5] Carleson, L.: Selected problems on exceptional sets. 103 pp., Uppsala 1961.

[6] Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York: Intersci. Publ. 1950.

[7] Douglas, J.: Solution of the problem of Plateau. Trans. Am. Math. Soc. 33, 263—321 (1931).

[8] Finn, R.: Isolated singularities of solutions of non-linear partial differential equations. Transact. Americ. Math. Soc. 75, 385—404 (1953).

[9] — On equations of minimal surface type. Ann. Math. 60, 397—416 (1954).

[10] — New estimates for equations of minimal surface type. Arch. Rat. Mech. Anal. 14, 337—375 (1963).

[11] Fuglede, B.: Extremal length and functional completion. Acta Math. 98, 171—219 (1957).

[12] Hausdorff, F.: Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. 79, 157—179 (1919).

[13] Heinz, E.: Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 51—56 (1952).

[14] Hopf, E.: On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$. J. Rat. Mech. Anal. 2, 519—522 (1953).

[15] Morrey, C.B.: Functions of several variables and absolute continuity II. Duke Math. J. 6, 187—215 (1940).

[16] Nitsche, J. C. C.: Minimal surfaces. Vervielfältigte Vorlesungsnotizen, Univ. of Minnesota, 19 pp., 1957/58.

[17] — Über eine mit der Minimalflächengleichung zusammenhängende analytische Funktion und den Bernsteinschen Satz. Arch. Math. 7, 417—419 (1956).

[18] Nitsche, Joh., u. Joachim Nitsche: Über reguläre Variationsprobleme. Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 8, 346—353 (1959).

[19] Radó, T.: The problem of the least area and the problem of Plateau. Math. Z. 32, 763—796 (1930).

[20] — On the problem of Plateau. Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 2. Berlin: Springer 1933.

[21] Serrin, J.: A priori estimates for solution of the minimal surface equation. Arch. Rat. Mech. Anal. 14, 376—383 (1963).

[22] — Local behavior of solutions of quasi-linear equations. Acta Math. 111, 247—302 (1964).

[23] Tsuji, M.: Potential Theory in Modern Function Theory. Tokyo: Maruzen Co. 1959.

(Received March 2, 1964)