Math. Ann. 231, 61—76 (1977)

Ideaux primitifs de certains produits croises

Jean-Luc Sauvageot
Université Pierre et Marie Curie, U.E.R. Analyse, Probabilités et applications, Laboratoire de Probabilités (L.A. no. 224), Tour 56-4 Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Introduction

Soit (X, G) un système dynamique topologique, $C^*(G,X)$ la C^*-algèbre «produit croisé». On supposera X et G localement compacts à base dénombrable. A un point x de X est associé son stabilisateur $S_x = \{s \in G/sx = x\}$ et, à partir d'une représentation irréductible du groupe S_x, on construit par induction une représentation irréductible de $C^*(G,X)$: le noyau d'une telle représentation sera appelé un *idéal primitif induit* de $C^*(G,X)$.

L'étude des idéaux primitifs induits a été entreprise d'abord par Guichardet [9], puis par Effros et Hahn [4], ces travaux supposant que G agit librement dans X (i.e. $S_x = \{e\}$, $\forall x \in X$); elle a été continuée par Gootman [6] qui suppose encore tous les stabilisateurs inclus dans le centre du groupe G. En simplifiant légèrement, les résultats obtenus sont les suivants:

a) si G est moyennable, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ contient un idéal primitif induit;

b) si G est discret, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ est contenu dans un idéal primitif induit;

c) si G est discret et moyennable, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ est un idéal primitif induit.

Le but de cette étude est de démontrer les Propositions a), b), et c) sans aucune hypothèse sur les stabilisateurs (Théorème 6.6).

Les deux outils fondamentaux seront: d'une part, la «C^*-algèbre des sous groupes de G» introduite par Fell [5], dont le spectre et le quasi-spectre s'identifient à la réunion respectivement des spectres et des quasi-spectres de tous les sous groupes fermés de G; d'autre part, une 1-cohomologie introduite par [11], associée à l'action de G sur l'espace de ses sous groupes fermés et qui permet de contrôler le processus d'induction en construisant de manière suffisamment régulière des mesures quasi-invariantes sur l'ensemble des espaces homogènes G/S (S parcourant l'espace des sous groupes fermés de G).

La démarche sera la suivante: on construit d'abord [§2] une C^*-algèbre $C^*(\Sigma,X)$ dont l'ensemble des représentations contient la réunion ensembliste des représentations des stabilisateurs $S_x (x \in X)$, ce qui permet de doter les espaces $\coprod_{x\in X} S_x^\wedge$ et $\coprod_{x\in X} \operatorname{Prim}(S_x)$ d'une structure topologique en les identifiant à un sous espace de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$ et $\operatorname{Prim} C^*(\Sigma,X)$ respectivement. De même, l'espace $\hat{X} = \coprod_{x\in X} S_x^\wedge$ est identifié à un sous ensemble borélien de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$.

Au paragraphe 4, on montre que le processus d'induction de $\coprod_{x\in X} S_x^\wedge$ à $C^*(G,X)^\wedge$ et de $\coprod_{x\in X} \operatorname{Prim}(S_x)$ à $\operatorname{Prim} C^*(G,X)$ est continu (Lemme 4.2 et Corollaire 4.3); que le processus d'induction de $\coprod_{x\in X} S_x^\wedge$ à $C^*(G,X)^\wedge$ est borélien, ce qui permet de l'étendre à des représentations plus générales de $C^*(\Sigma,X)$, en particulier celles dont la mesure centrale est portée par $\hat{X}$.

Au paragraphe 5, on définit un processus inverse de restriction à $C^*(\Sigma,X)$ des représentations de $C^*(G,X)$ et un argument d'ergodicité (Lemme 5.4) permet de montrer que, si R est une représentation factorielle de $C^*(G,X)$, si r est sa restriction à $C^*(\Sigma,X)$ et $\operatorname{Ind} r$ la représentation de $C^*(G,X)$ induite par r (qui est bien définie), alors le noyau de $\operatorname{Ind} r$ est un idéal primitif induit dont on prouvera, au paragraphe 6, qu'il est contenu dans le noyau de R lorsque le groupe G est moyennable, et qu'il contient le noyau de R si G est discret.

1. Préliminaires et notations

Si X est un espace localement compact, on note $\underline{K}(X)$ l'espace des fonctions complexes sur X continues à support compact, $\underline{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon complexes sur X, muni de la topologie vague $\sigma(\underline{M}(X), \underline{K}(X))$, $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini.

Un *système dynamique topologique* (X, G) est la donnée d'un espace localement compact X, d'un groupe localement compact G et d'une action continue de G sur X, c'est à dire une application continue

$$G \times X \ni (t, x) \mapsto tx \in X$$

telle que $(x \mapsto tx)$ soit un homéomorphisme de X pour tout t de G et que l'on ait

$$t(t'x) = (tt')x, \quad \forall t, t' \in G, \quad \forall x \in X.$$

Un système dynamique topologique (X, G) est dit *séparable* si les topologies de X et G sont à base dénombrable, c'est à dire si X et G sont métrisables, dénombrables à l'infini.

On fixe sur G une mesure de Haar à gauche (notée dt).

$L^1(G, C_0(X))$ est l'espace des classes d'applications sommables de G dans l'espace normé $C_0(X)$. Un élément de $L^1(G, C_0(X))$ peut être représenté par une fonction borélienne φ de $G \times X$ dans $\mathbb{C}$ telle que, $\forall s \in G$, $\varphi(s, .) \in C_0(X)$ et

$$\|\varphi\|_1 = \int_G \|\varphi(s, .)\| ds < \infty.$$

Les formules

$$\varphi * \psi(s,x) = \int_G \varphi(t,x)\psi(t^{-1}s, t^{-1}x)dt$$

$$\varphi^*(s,x) = \Delta(s)^{-1}\overline{\varphi(s^{-1}, s^{-1}x)} \quad (\Delta = \text{fonction modulaire de } G)$$

munissent $L^1(G, C_0(X))$ d'une structure d'algèbre de Banach involutive. L'image de $\underline{K}(G\times X)$ dans $L^1(G, C_0(X))$ est une sous algèbre involutive dense. Toute représentation continue de $\underline{K}(G\times X)$ dans un espace de Hilbert H se prolonge à $L^1(G, C_0(X))$, donc au produit croisé $C^*(G,X)$, qui est la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G, C_0(X))$ (cf. [4], Theorem 4.8).

On notera $R=(p,u)$ la correspondance canonique entre les représentations R de $C^*(G,X)$ et les représentations covariantes (p,u) du système dynamique (X,G). (Toutes les représentations seront supposées non dégénérées.)

$S_x = \{s\in G/sx=x\}$ désigne le stabilisateur d'un point x de X.

2. La C^*-algèbre des sous-groupes de G

La construction de cette C^*-algèbre est due à Fell [5].

Soit G un groupe localement compact, Σ l'espace de ses sous groupes fermés muni de la topologie de Fell (cf. [2], Chapitre VIII, § 5); Σ est compact, et métrisable si G est séparable.

On fixe une fois pour toutes un choix continu de mesures de Haar à gauche, c'est à dire une application continue $\Sigma \ni S \mapsto \alpha_S \in \underline{M}(G)$ telle que, pour tout S, α_S soit une mesure positive de support S et invariante à gauche par les éléments de S (l'existence d'un tel choix résulte de [2], Chapitre VIII, § 5 no. 3).

$Y=\{(S,s)\in\Sigma\times G/s\in S\}$ est un fermé de $\Sigma\times G$; pour les opérations

$$\xi * \eta(S,s) = \int_G \xi(S,t)\eta(S,t^{-1}s)d\alpha_S(t)$$

$$\xi^*(S,s) = \Delta_S(s)^{-1}\overline{\xi(S,s^{-1})} \quad (\Delta_S = \text{fonction modulaire de } S),$$

$\underline{K}(Y)$ est une algèbre involutive; si on complète $\underline{K}(Y)$ pour la norme $\|\xi\|_1 = \sup_{S\in\Sigma}\int_S |\xi(S,s)|d\alpha_S(s)$, on obtient une algèbre de Banach involutive dont la C^*-algèbre enveloppante [notée $C^*_s(G)$ par Fell et que nous préférons noter $C^*(\Sigma)$] a les propriétés suivantes:

— à un couple (S,w), $S\in\Sigma$, w représentation unitaire de S, est associée une représentation $\pi=(S,w)$ de $C^*(\Sigma)$ en posant, si $\xi\in\underline{K}(Y)$,

$$\pi(\xi) = \int_S \xi(S,s)w(s)d\alpha_S(s)\ ;$$

— toute représentation irréductible de $C^*(\Sigma)$ est de la forme (S,w) ([5], Lemme 2.8). Comme la démonstration du Lemme 2.8 ne fait intervenir que le noyau d'une représentation irréductible, on obtient le lemme suivant:

Lemme 2.1. a) *Soit i un idéal primitif de $C^*(\Sigma)$; il existe un unique sous-groupe $S(i)$ de G tel que toute représentation de $C^*(\Sigma)$ de noyau i soit de la forme $(S(i),w)$, où w est une représentation de $S(i)$.*

b) *L'application* $\operatorname{Prim}(C^*(\Sigma))\ni i\mapsto S(i)\in\Sigma$ *est continue.*

(b) découle im *m* édiatement du Lemme 2.5 de [5].)

En conclusion, les espaces $C^*(\Sigma)^\sim$, $C^*(\Sigma)^\wedge$ et $\mathrm{Prim}(C^*(\Sigma))$ s'identifient respectivement à $\coprod_{S\in\Sigma} S^\sim$, $\coprod_{S\in\Sigma} S^\wedge$ et $\coprod_{S\in\Sigma} \mathrm{Prim}(S)$.

Pour faire intervenir $C^*(\Sigma)$ dans l'étude des systèmes dynamiques, on remarque que G agit continument dans Σ par $t\cdot S = tSt^{-1}$, et qu'il existe un 1-cocycle continu ω sur $G\times\Sigma$ (dont la classe est indépendante du choix continu des α_S) tel que, $\forall g\in \underline{K}(G)$, $\forall S\in\Sigma$, $\forall t\in G$,

$$\int_G g(tst^{-1})d\alpha_S(s) = \omega(t,S)\int_G g(s)d\alpha_{t\cdot S}(s) \qquad \text{(cf. [11], § 1).}$$

G agit dans l'algèbre involutive $\underline{K}(Y)$ par $t\xi(S,s) = \omega(t,S)^{-1}\xi(tS,tst^{-1})$; cette action se prolonge en une action continue de G sur $C^*(\Sigma)$, d'où une action continue de G sur $\mathrm{Prim}(C^*(\Sigma))$, $C^*(\Sigma)^\sim$, et une action borélienne sur $C^*(\Sigma)^\wedge$. On vérifie facilement que si $\Pi = (S,w)$, alors $t\Pi = (t\cdot S, tw)$, $\forall t\in G$ [où on a posé $tw(s) = w(t^{-1}st)$, $\forall s\in t\cdot S$].

On forme la C^*-algèbre produit tensoriel $C_0(X)\otimes C^*(\Sigma)$ (produit tensoriel «ν» de Guichardet [8]). Une représentation factorielle de $C_0(X)\otimes C^*(\Sigma)$ est de la forme (p_x,π), où π est une représentation factorielle de $C^*(\Sigma)$ et où, si $f\in C_0(X)$, $p_x(f)$ est l'opérateur de multiplication par $f(x)$ dans l'espace de π. Le spectre (resp. le quasi spectre) du produit tensoriel s'identifie donc comme espace topologique (resp. borélien) à $X\times C^*(\Sigma)^\sim$ [resp. $X\times C^*(\Sigma)^\wedge$]. De même, l'espace des idéaux primitifs du produit tensoriel s'identifie à $X\times\mathrm{Prim}(C^*(\Sigma))$ (cf. [8], § 7, Theorem 6).

Définition 2.2. On appellera *C^*-algèbre des stabilisateurs* et on notera $C^*(\Sigma,X)$ le quotient de $C_0(X)\otimes C^*(\Sigma)$ dont l'espace des idéaux primitifs correspond au fermé $\{(x,i)\in X\times\mathrm{Prim}(C^*(\Sigma))/S(i)\subset S_x\}$ de l'espace $\mathrm{Prim}(C_0(X)\otimes C^*(\Sigma))$.

Une représentation factorielle de $C^*(\Sigma,X)$ est de la forme (p_x,π), où $x\in X$ et π est une représentation factorielle de $C^*(\Sigma)$ telle que $S(\ker(\pi))\subset S_x$. $C^*(\Sigma,X)^\wedge$ est l'ensemble des $(x,\zeta)\in X\times C^*(\Sigma)^\wedge$ tels que $S(\zeta)\subset S_x$ [avec $S(\zeta) = S(\ker(\pi))$, $\pi\in\zeta$].

Définition 2.3. On appelera *espace des quasi-spectres des stabilisateurs* et on notera $\hat{X}$ le sous ensemble borélien $\{(x,\zeta)/S(\zeta) = S_x\}$ de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$. (D'après [1], Chapter 2, Proposition 2, 3, l'application $x\mapsto S_x$ est borélienne.)

G agit (par passage au quotient) dans $C^*(\Sigma,X)$, et $\hat{X}$ est un sous ensemble G-invariant de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$.

Remarque. Dans le cas particulier de [7] où l'application «stabilisateur» est continue, $\{(x,i)/S(i) = S_x\}$ est également un fermé de $X\times\mathrm{Prim}(C^*(\Sigma))$ et $\hat{X}$ apparaît comme le quasi-spectre d'un quotient de $C_0(X)\otimes C^*(\Sigma)$, noté $\mathfrak{K}$.

3. Dualité des stabilisateurs et des orbites

On suppose désormais le système dynamique (X,G) séparable.

On note Gx l'orbite d'un point x de X. L'application $G\ni t\mapsto tx\in X$ définit par passage au quotient un isomorphisme d'espaces boréliens de l'espace homogène G/S_x sur le sous espace borélien Gx de X.

Soit $x\in X$, β une mesure sur X concentrée sur Gx et θ une fonction borélienne sur G telle que $\theta(ts) = \theta(t)$, $\forall t\in G$, $\forall s\in S_x$. On écrira par abus de notations

$$\int_{G/S_x} \theta(t)d\beta(tx)$$

pour désigner l'intégrale $\int_{Gx} \tilde{\theta}(y)d\beta(y)$, où on a posé $\tilde{\theta}(tx)=\theta(t)$, $t\in G$.

D'après [11], § 1, si on pose

$$\varrho(t,x)=\Delta(t)^{-1}\omega(t,S_x), \qquad t\in G, \qquad x\in X$$

(où ω est le 1-cocycle introduit au paragraphe précédent), la fonction borélienne ϱ sur $G\times X$ a les propriétés suivantes:

(i) $\forall g\in \underline{K}(G), \quad \forall t\in G, \quad \forall x\in X,$

$$\int_G g(tst^{-1})d\alpha_{S_x}(s)=\Delta(t)\varrho(t,x)\int_G g(s)d\alpha_{S_{tx}}(s)\ ;$$

(ii) $\forall x\in X$, l'application $G\ni t\mapsto\varrho(t,x)$ est continue ;

(iii) $\varrho(ts,x)=\varrho(s,x)\varrho(t,sx), \quad \forall x\in X, \quad \forall t,s\in G$;

(iv) $\varrho(ts,x)=\Delta_{S_x}(s)\Delta(s^{-1})\varrho(t,x), \quad \forall x\in X, \quad \forall t\in G, \quad \forall s\in S_x$.

Notation. On désigne par β_x la mesure sur X (concentrée sur Gx et dont l'existence découle du Théorème 2 de [2], Chapitre VII, par. 2, no. 5) caractérisée par:

$$\forall g\in\underline{K}(G), \qquad \int_{G/S_x}\left(\int_G g(ts)d\alpha_{S_x}(s)\right)d\beta_x(tx)=\int_G \varrho(t,x)g(t)dt\ ;$$

ou encore par

$$\forall g\in\underline{K}(G), \qquad \int_{G/S_x}\left(\int_G \varrho(ts,x)^{-1}g(ts)d\alpha_{S_x}(s)\right)d\beta_x(tx)=\int_G g(t)dt\,.$$

(Cf. également, dans un cas particulier, [7], (2.2) p. 903.)

Toujours d'après [11], § 1 et Proposition 2, on aura:

(j) $\forall x\in X, \quad \forall t\in G, \quad \beta_x=\beta_{tx}$;

(jj) $\forall x\in X$, β_x est quasi-invariante par l'action de G et, $\forall t\in G$, $\dfrac{dt\beta_x}{d\beta_x}$ est la fonction $X\ni y\mapsto\varrho(t^{-1},y)$;

(jjj) Si μ est une mesure σ-finie sur X quasi-invariante par l'action de G, la mesure ν sur $X\times X$ définie par

$$\nu(\gamma)=\int_{X\times X}\gamma(x,y)d\beta_x(y)d\mu(x) \qquad (\gamma \text{ borélienne positive})$$

est σ-finie et quasi-invariante par la symétrie $(x,y)\mapsto(y,x)$;

(jjjj) Si on pose $D(x,y)=\dfrac{d\nu(x,y)}{d\nu(y,x)}$, alors

$$D(x,tx)=\varrho(t,x)^{-1}\frac{dt^{-1}\mu}{d\mu}(x), \qquad \forall(t,x)\in G\times X\ dg\otimes d\mu \text{ p.s.}$$

4. Idéaux primitifs induits. Continuité de l'induction

Soit Π une représentation factorielle de $C^*(\Sigma,X)$. D'après le paragraphe 2, Π s'écrit (p_x,S,w) où $x\in X$, S est un sous groupe fermé de S_x, w une représentation factorielle de S et, si $f\in C_0(X)$, $p_x(f)$ est l'opérateur de multiplication par $f(x)$ dans l'espace de w (qui est l'espace de Π).

(p_x, w) est une représentation covariante du système dynamique topologique (X, S) et on peut former la représentation de $C^*(G,X)$

$$\operatorname{Ind} \Pi = \operatorname*{Ind}_{S\uparrow G} (p_x, w).$$

Si $S = S_x$, c'est à dire si la classe de quasi-équivalence de Π est dans $\hat{X}$, $\operatorname{Ind}\Pi$ est factorielle et son noyau est un idéal primitif de $C^*(G,X)$; si en outre Π est irréductible, $\operatorname{Ind}\Pi$ est irréductible.

Définition 4.1. On dira qu'un idéal primitif I de $C^*(G,X)$ est un *idéal primitif induit* si il existe une représentation irréductible Π de $C^*(\Sigma,X)$ de la forme $\Pi = (p_x, S_x, w)$ ($x \in X$, w représentation irréductible de S_x), telle que

$$I = \ker(\operatorname{Ind}\Pi).$$

Lemme 4.2. *Soit $(\Pi_j = (p_{x_j}, S_j, w_j))_{j\in J}$ un ensemble de représentations de $C^*(\Sigma,X)$. Soit $\Pi_0 = (p_{x_0}, S_0, w_0)$ une représentation de $C^*(\Sigma,X)$ faiblement contenue dans l'ensemble des $(\Pi_j)_{j\in J}$. Alors la représentation $\operatorname{Ind}\Pi_0$ de $C^*(G,X)$ est faiblement contenue dans l'ensemble des $(\operatorname{Ind}\Pi_j)_{j\in J}$.*

Démonstration. Soit j un indice appartenant à J ou égal à 0. On note H_j l'espace de w_j, β_j la mesure quasi-invariante sur l'espace homogène G/S_j caractérisée par

$$\forall g \in \underline{K}(G), \qquad \int_{G/S_j} d\beta_j(\tilde{t}) \int_G g(ts) d\alpha_{S_j}(s) = \int_G \Delta(t)^{-1} \omega(t, S_j) g(t) dt.$$

Elle vérifie

$$\frac{d\tau\beta_j}{d\beta_j}(\tilde{t}) = \Delta(\tau)\omega(\tau^{-1}, tS_j), \qquad \forall \tau, \qquad t \in G \qquad (\text{cf. [11], § 1}).$$

On notera $\tilde{H}_j$ l'ensemble des classes d'applications boréliennes $\tilde{h}_j$ de G dans H_j vérifiant

$$\forall t \in G, \quad \forall s \in S_j, \quad \tilde{h}_j(ts) = w_j(s)^{-1}\tilde{h}_j(t), \quad \text{et} \quad \int_{G/S_j} \|\tilde{h}_j(t)\|^2 d\beta_j(\tilde{t}) < \infty.$$

On réalise $\operatorname{Ind}\Pi_j$ dans l'espace de Hilbert $\tilde{H}_j$. Si $g \in \underline{K}(G)$ et $h_j \in H_j$, on pose

$$g * h_j(t) = \int_G g(ts) w(s) h_j d\alpha_{S_j}(s):$$

$g * h_j$ définit un élément de $\tilde{H}_j$ et l'ensemble des $g * h_j (g \in \underline{K}(G), h_j \in H_j)$ est total dans $\tilde{H}_j$.

$$\begin{aligned}
&\langle \operatorname{Ind}\Pi_j(\varphi)\, g*h_j, g*h_j \rangle \\
&= \int_{G\times G\times G\times G/S_j} \varphi(\tau, tx_j)\, \Delta(\tau)^{1/2} \omega(\tau^{-1}, tS_j)^{1/2} g(\tau^{-1} ts) \bar{g}(ts') \\
&\quad \cdot \langle w_j(s) h_j, w_j(s') h_j \rangle\, d\tau\, d\alpha_{S_j}(s)\, d\alpha_{S_j}(s')\, d\beta_j(\tilde{t}) \\
&= \int_{G\times G\times G} \varphi(\tau, tx_j)\, \Delta(\tau)^{1/2} \omega(\tau^{-1}, tS_j)^{1/2} \Delta(t)^{-1} \omega(t, S_j)\, g(\tau^{-1} ts) \bar{g}(t) \\
&\quad \cdot \langle w_j(s) h_j, h_j \rangle\, d\tau\, dt\, d\alpha_{S_j}(s) \\
&= \int_G \Phi(x_j, S_j, s) \langle w_j(s) h_j, h_j \rangle\, d\alpha_{S_j}(s)
\end{aligned}$$

en posant

$$\Phi(x,S,s)=\int_{G\times G}\varphi(\tau,tx)\,\Delta(\tau)^{1/2}\omega(\tau^{-1},tS)^{1/2}\Delta(t)^{-1}\omega(t,S)\,g(\tau^{-1}ts)\,\bar{g}(t)\,d\tau\,dt\,.$$

La fonction Φ est continue en l'ensemble de ses trois variables et à support compact; elle définit donc un élément de $C_0(X)\otimes C^*(\Sigma)$, d'où un élément du quotient $C^*(\Sigma,X)$ noté encore Φ. Le calcul précédent s'interprête ainsi: la valeur en $\varphi\in \underline{K}(G\times X)$ de la forme linéaire positive associée à $\operatorname{Ind}\Pi_j$ et $g*h_j$ est égale à la valeur en Φ de la forme linéaire positive associée à Π_j et h_j. On en déduit que, si la forme linéaire associée à Π_0 et h_0 est limite faible de formes linéaires positives associées à Π_{j_n} et h_{j_n} ($n\in\mathbb{N}$, $j_n\in J$) quand n tend vers l'infini, alors la forme linéaire positive associée à $\operatorname{Ind}\Pi_0$ et $g*h_0$ [$g\in\underline{K}(G)$ arbitraire] est limite faible des formes associées à $\operatorname{Ind}\Pi_{j_n}$ et $g*h_{j_n}$ sur $\underline{K}(G\times X)$, donc sur $C^*(G,X)$ si on suppose que $\|h_{j_n}\|$ reste borné avec n car alors, par compacité de Σ et continuité des α_S, $\|g*h_{j_n}\|$ reste borné avec n pour g fixé. Le lemme est démontré.

Corollaire 4.3. a) *Soit x un point de X et w une représentation factorielle de S_x. Alors le noyau de* $\operatorname{Ind}(p_x,S_x,w)$ *est un idéal primitif induit de* $C^*(G,X)$.

b) *Soit x un point de X et i un idéal primitif de $C^*(S_x)$. Il existe un idéal primitif induit $I_{x,i}$ de $C^*(G,X)$ tel que, si w est une représentation quelconque de S_x de noyau i, on ait*

$$I_{x,i}=\ker(\operatorname{Ind}(p_x,S_x,w))\,.$$

c) *L'application*

$$\operatorname{Prim}C^*(\Sigma,X)\supset\coprod_{x\in X}\operatorname{Prim}(S_x)\ni(x,i)\mapsto I_{x,i}\in\operatorname{Prim}C^*(G,X)$$

est continue et G-invariante.

Démonstration. a) et b): si w et w' sont deux représentations faiblement équivalentes de S_x, les représentations $\operatorname{Ind}(p_x,S_x,w)$ et $\operatorname{Ind}(p_x,S_x,w')$ sont faiblement équivalentes, et ont donc même noyau.

c) La continuité découle immédiatement du lemme précédent. L'invariance sous l'action de G est un cas particulier d'un théorème de M. Takesaki ([12], Theorem 7.1); on pourrait aussi reprendre mot pour mot la démonstration de la partie A du Théorème 2.1 de [7] où l'hypothèse de continuité des stabilisateurs n'intervient pas.

Remarque. Glimm ([7], Theorem 2.1) démontre que, dans le cas particulier où l'application «stabilisateur» ($X\ni x\mapsto S_x\in\Sigma$) est continue, l'induction est une application non seulement continue, mais ouverte de $\coprod_{x\in X}\operatorname{Prim}(S_x)$ sur son image.

Soit maintenant Π une représentation quelconque de $C^*(\Sigma,X)$ dans un espace hilbertien séparable H. Soit $\Pi=\int_{C^*(\Sigma,X)^\wedge}^{\oplus}\Pi_\sigma\,dm(\sigma)$ sa désintégration centrale (cf. [3], paragraphe 8.4): pour ne pas surcharger les notations, on supposera que la mesure m est concentrée sur le sous ensemble borélien $\hat{X}$ de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$ (cf. Définition 2.3), comme ce sera la cas au paragraphe suivant. Le point générique de $\hat{X}$ sera noté (x, π), $x \in X$, $\pi \in \hat{S}_x$. La désintégration de H correspondant à celle de Π sera notée

$$H = \int_{\hat{X}}^{\oplus} H_{(x,\pi)} dm(x, \pi);$$

pour tout $(x, \pi) \in \hat{X}$, on a $\Pi_{(x,\pi)} = (p_x, S_x, w_{x,\pi})$, où $w_{x,\pi} \in \pi$.

On notera $\tilde{H}_{x,\pi}$ l'espace de Hilbert des classes d'applications boréliennes $\tilde{h}_{x,\pi}(G \ni t \mapsto \tilde{h}_{x,\pi}(t) \in H_{x,\pi})$ de G dans $H_{x,\pi}$ qui vérifient

$$\tilde{h}_{x,\pi}(ts) = w_{x,\pi}(s)^{-1} \tilde{h}_{x,\pi}(t), \forall t \in G, \forall s \in S_x$$

et

$$\int_{G/S_x} \|\tilde{h}_{x,\pi}(t)\|^2 \, d\beta_x(tx) < \infty .$$

On réalise $\operatorname{Ind} \Pi_{x,\pi}$ dans $\tilde{H}_{x,\pi}$ en posant $\operatorname{Ind} \Pi_{x,\pi} = (\tilde{p}_x, \tilde{w}_{x,\pi})$, avec, si $\tilde{h}_{x,\pi} \in \tilde{H}_{x,\pi}$, $f \in C_0(X)$, $\tau \in G$,

$$\tilde{p}_x(f)\tilde{h}_{x,\pi}(t) = f(tx)\tilde{h}_{x,\pi}(t)$$
$$\tilde{w}_{x,\pi}(\tau)\tilde{h}_{x,\pi}(t) = \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2}\tilde{h}_{x,\pi}(\tau^{-1}t).$$

On munit le champ des $(\tilde{H}_{x,\pi};\, (x, \pi) \in \hat{X})$ d'une structure de champ mesurable séparable en prenant pour champ fondamental les champs $g_n * h_m (m, n \in \mathbb{N})$, où $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense de $\underline{K}(G)$, où les $h_m = (h_{m_{(x,\pi)}}, (x, \pi) \in \hat{X})$, $m \in \mathbb{N}$, forment un champ mesurable de bases orthonormales du champ des $(H_{x,\pi};\, (x, \pi) \in \hat{X})$ et où on a posé

$$(g_n * h_m)_{(x,\pi)}(t) = \int_G g_n(ts)\, w_{x,\pi}(s)\, h_{m_{(x,\pi)}} \, d\alpha_{S_x}(s).$$

Lemme 4.4. *Avec les notations ci-dessus, le champ de représentations* $(\operatorname{Ind} \Pi_{(x,\pi)};\, (x, \pi) \in \hat{X})$ *est mesurable.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \underline{K}(G \times X)$, $g \in \underline{K}(G)$; si $h = (h_{x,\pi};\, (x, \pi) \in \hat{X})$ est un champ mesurable de vecteurs dans $(H_{x,\pi};\, (x, \pi) \in \hat{X})$, on définit $g * h$ comme ci-dessus. Soit $h' = (h'_{x,\pi};\, (x, \pi) \in \hat{X})$ un autre champ mesurable et soit $g' \in \underline{K}(G)$. On calcule

$$\begin{aligned}
&\langle \operatorname{Ind} \Pi_{x,\pi}(\varphi)(g * h)_{x,\pi}, (g' * h')_{x,\pi} \rangle_{\tilde{H}_{x,\pi}} \\
&= \int \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2} \varphi(\tau, tx)\, g(\tau^{-1}ts)\, \overline{g'}(ts') \\
&\quad \cdot \langle w_{x,\pi}(s)\, h_{x,\pi}, w_{x,\pi}(s')\, h'_{x,\pi} \rangle \, d\alpha_{S_x}(s)\, d\alpha_{S_x}(s')\, d\beta_x(tx)\, d\tau \\
&= \int_{G \times G \times G} \varphi(\tau, tx) \varrho(t, x) \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2} g(\tau^{-1}ts) g'(t) \\
&\quad \cdot \langle w_{x,\pi}(s) h_{x,\pi}, h'_{x,\pi} \rangle d\alpha_{S_x}(s) dt d\tau .
\end{aligned}$$

Comme l'application $x \mapsto S_x$ est borélienne (cf. [1], Chapter II, Proposition 2.3), l'application $x \mapsto \alpha_{S_x} \in \underline{M}(G)$ est borélienne, bornée; l'application de $\hat{X}$ dans $\underline{M}(G)$ qui, à (x, π), associe la mesure de densité $\langle w_{x,\pi}(s)\, h_{x,\pi}, h'_{x,\pi} \rangle$ par rapport à α_{S_x} est mesurable, d'où le résultat.

Définition 4.5. La représentation $\int_X^{\oplus} \operatorname{Ind} \Pi_{x,\pi}\, dm(x, \pi)$ sera appelée *représentation de* $C^*(G,X)$ *induite par* Π et notée $\operatorname{Ind} \Pi$.

5. Restriction des représentations de $C^*(G, X)$

Lemme 5.1. *Soit μ une mesure sur X quasi-invariante par l'action de G; soit $(H_x, x\in X)$ un champ μ-mesurable séparable d'espaces de Hilbert; soit, pour tout $t\in G$, un champ $(u_x(t), x\in X)$ d'isomorphismes de $H_{t^{-1}x}$ sur H_x de sorte que, si $(h_x, x\in X)$ et $(h'_x, x\in X)$ sont deux champs de vecteurs mesurables quelconques, l'application*

$$G\times X\ni(t,x)\mapsto\langle u_x(t)\, h_{t^{-1}x}, h'_x\rangle_{H_x}$$

soit mesurable, et que l'on ait

$$\forall t, t'\in G, \forall x\in X \mu-p.s., u_x(tt')=u_x(t)\, u_{t^{-1}x}(t').$$

Alors, il existe un sous-ensemble borélien X_0 de X de complémentaire négligeable et, pour tout $t\in G$, un champ $(v_x(t), x\in X)$ d'isomorphismes de $H_{t^{-1}x}$ sur H_x vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $\forall t\in G, \forall x\in X\mu-p.s., u_x(t)=v_x(t)$;

(ii) $\forall t, t'\in G, \forall x\in X_0\cap tX_0\cap tt'X_0, v_x(tt')=v_x(t)v_{t^{-1}x}(t')$;

(iii) *si $(h_x, x\in X)$ et $(h'_x, x\in X)$ sont deux champs de vecteurs mesurables, pour μ-presque tout x de X, l'application $G\ni t\mapsto\langle v_x(t)\, h_{t^{-1}x}, h'_x\rangle_{H_x}$ est borélienne.*

Démonstration. On se ramène sans difficultés au cas où le champ des H_x est un champ constant égal à K et, par une modification sur un sous ensemble négligeable de $G\times X$, on peut supposer que l'application $(t,x)\mapsto u_x(t)\in \underline{U}(K)$ est borélienne et vérifie

$$u_x(tt')=u_x(t)\, u_{t^{-1}x}(t'), \forall(t,t',x)\in G\times G\times X, dt\otimes dt'\otimes d\mu\text{-p.s.}$$

On applique alors le Théorème 5.1 de [10] à l'espace mesuré $(G\times X, dt\otimes d\mu)$, muni de la loi de groupoïde caractérisée par $(t,x)^{-1}=(t^{-1}, t^{-1}x)$, $r(t,x)=x$, $d(t,x)=t^{-1}x$ et $(t,x)(t', t^{-1}x)=(tt', x)$: il existe un sous ensemble borélien X_0 de X et une application borélienne $G\times X\ni(t,x)\mapsto v_x(t)\in\underline{U}(K)$ vérifiant la conclusion (ii) et telle que $u_x(t)=v_x(t)$, $\forall(t,x)\in G\times X$, $dt\otimes d\mu$-p.s. (iii) est alors vérifié et, pour démontrer (i), on remarque que si, pour $t\in G$, on note $u(t)$ [resp. $v(t)$] l'unitaire de $H=\int_X^{\oplus} H_x d\mu(x)$ qui, à $h=\int_X^{\oplus} h_x d(x)$, associe l'intégrale du champ de vecteurs

$$\left(\frac{dt\mu}{d\mu}(x)^{1/2}u_x(t)\, h_{t^{-1}x}, x\in X\right)\left(\text{resp.}\left(\frac{dt\mu}{d\mu}(x)^{1/2}v_x(t)\, h_{t^{-1}x}, x\in X\right)\right),$$

u et v sont deux représentations unitaires mesurables, donc continues de G égales presque surement, donc partout.

Définition. Un champ $(v_x(t), x\in X)_{t\in G}$ vérifiant les conclusions du lemme précédent sera appelé une *version régulière* du champ $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$.

Remarques. 1. Avec les notations du Lemme 5.1, si $(v'_x(t), x\in X)_{t\in G}$ est une autre version «régulière» des $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$, il existe un sous-ensemble borélien X_1 de X de complémentaire négligeable tel que

$$\forall t\in G, \forall x\in X_1\cap tX_1, v_x(t)=v'_x(t) \quad \text{(cf. [10], Lemme 5.2).}$$

2. Si $(v_x(t), x\in X)_{t\in G}$ est une version régulière des $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$, pour presque tout x de X, l'application

$$S_x \ni s \mapsto v_x(s) \in \underline{U}(H_x)$$

est une représentation borélienne, donc continue, de S_x dans H_x.

En outre, le champ de représentations $(S_x \ni s \mapsto v_x(s) \in \underline{U}(H_x))_{x\in X}$ est essentiellement déterminé par la donnée du champ initial des $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$, en ce sens que, si $(v'_x(t), x\in X)_{t\in G}$ est une autre version régulière, on aura

$$\forall x \in X\, \mu\text{-p.s.}, v_x(s) = v'_x(s), \forall s \in S_x.$$

Soit $R=(p,u)$ une représentation de $C^*(G,X)$ dans un espace de Hilbert séparable H, soit $p = \int_X^{\oplus} p_x d\mu(x)$ la désintégration centrale de p, $H = \int_X^{\oplus} H_x d\mu(x)$ la désintégration de H correspondante: μ est quasi-invariante par l'action de G et il existe un champ d'isomorphismes $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$ de $H_{t^{-1}x}$ sur H_x vérifiant les hypothèses du Lemme 5.1 et tel que, pour tout h de H, on ait

$$\forall t \in G, u(t)h = \int_X^{\oplus} \frac{dt\mu}{d\mu}(x)^{1/2} u_x(t) h_{t^{-1}x} d\mu(x) \text{ si } h = \int_X^{\oplus} h_x d\mu(x).$$

On fixe une version "régulière" des $(u_x(t), x\in X)_{t\in G}$ (c'est à dire une version vérifiant les conclusion du Lemme 5.1). Pour presque tout x de X, l'application $S_x \ni s \mapsto u_x(s)$ est une représentation unitaire borélienne, donc continue de S_x dans H_x, notée w_x, d'où une représentation $r_x = (p_x, S_x, w_x)$ de $C^*(\Sigma, X)$ dans H_x. Le champ de représentations $(r_x, x\in X)$ est manifestement mesurable.

Définition 5.2. On appellera *restriction* à $C^*(\Sigma,X)$ de la représentation R de $C^*(G,X)$ la représentation $r = \int_X^{\oplus} r_x d\mu(x)$ de $C^*(\Sigma,X)$.

Remarque 5.3. Soit $r = \int_{C^*(\Sigma,X)^\wedge}^{\oplus} \tilde{r}_\sigma dm(\sigma)$ la désintégration centrale de r (cf. [3], 8.4.3); soit $m = \int_X \tilde{m}_x d\mu'(x)$ une désintégration de m relative à la projection naturelle de $C^*(\Sigma,X)^\wedge$ sur X: pour presque tout x, la représentation $r'_x = \int_{C^*(\Sigma,X)^\wedge}^{\oplus} \tilde{r}_\sigma d\tilde{m}_x(\sigma)$ est bien définie, le champ des $(r'_x, x\in X)$ est μ'-mesurable et on a $r = \int_X r'_x d\mu'(x)$. D'après la Proposition 8.2.4 de [3], pour presque tout x, les représentations r_x et r'_x sont équivalentes, et on a donc $r_x = \int_{C^*(\Sigma,X)^\wedge} \tilde{r}_\sigma d\tilde{m}_x(\sigma)$ comme désintégration centrale de r_x.

Par unicité de la désintégration centrale, comme la désintégration centrale de w_x sur $S_x^\wedge$ fournit une désintégration centrale de $r_x = (p_x, S_x, w_x)$ dont la classe de mesure est portée par $\{(x,\pi) \in C^*(\Sigma, X)^\wedge / S(\ker(\pi)) = S_x\}$, pour presque tout x, la mesure m_x est concentrée sur $\hat{X}$, et il en est alors de même pour m.

On est donc bien dans le cas particulier envisagé à la fin du paragraphe précédent, et on peut construire la représentation Ind$r$ (Définition 4.5). La correspondance entre r et Ind$r$ ne dépend pas des intermédiaires de calcul [choix d'une désintégration centrale de p, et d'une version régulière de la désintégration des $(u(t), t \in G)$ correspondante], qui sont essentiellement uniques. Le lemme suivant est en quelque sorte l'aboutissement des cinq premiers paragraphes: à toute représentation factorielle R de $C^*(G,X)$ est associé naturellement un idéal primitif induit, dont on montrera au paragraphe 6 que, sous des hypothèses assez générales, il est contenu dans le noyau de R ou il le contient.

Lemme 5.4. *Soit R une représentation factorielle de $C^*(G,X)$, r sa restriction à $C^*(\Sigma,X)$ et* $\mathrm{Ind}\,r$ *la représentation de $C^*(G,X)$ induite par r (cf. Définition* 4.5 *et Remarque* 5.3). *Alors le noyau de* $\mathrm{Ind}\,r$ *est un idéal primitif induit de $C^*(G,X)$ (Définition* 4.1).

Démonstration. On conserve toutes les notations ci-dessus. La classe de la mesure m intervenant dans la désintégration centrale de r est invariante par l'action de G car, si $t \in G$, les représentations r et tr sont équivalentes [elles sont échangées par l'unitaire $u(t)$ de H]. m est ergodique si R est factorielle: en effet, on a par construction $r(C^*(\Sigma,X))'' \subset R(C^*(G,X))''$, et à un sous ensemble borélien G invariant de $\hat{X}$ correspond un projecteur du centre de $r(C^*(\Sigma,X))''$ commutant à $u(G)$, donc un projecteur du centre de $R(C^*(G,X))''$.

L'application $\hat{X} \ni (x,\pi) \mapsto \ker(\mathrm{Ind}\,r_{(x,\pi)}) \in \mathrm{Prim}(C^*(G,X))$ est mesurable (Lemme 4.4), G-invariante (Lemme 4.3, c), donc m-essentiellement constante car la mesure m est standard et, d'après [3], 3.3.1, l'espace borelien $\mathrm{Prim}\,C^*(G,X)$ est dénombrablement séparé (cf. aussi [3], 3.9.3): il existe $(x_0,\pi_0) \in \hat{X}$ tel que $\ker(\mathrm{Ind}\,r_{(x,\pi)}) = \ker(\mathrm{Ind}\,r_{(x_0,\pi_0)})$, $\forall (x,\pi) \in \hat{X}$ m-p.s. On aura alors $\ker(\mathrm{Ind}\,r) = \ker(\mathrm{Ind}\,r_{(x_0,\pi_0)})$ et, d'après le Corollaire 4.3, le noyau de $\mathrm{Ind}\,r_{(x_0,\pi_0)}$ est un idéal primitif induit: le lemme est démontré.

6. Abondance des idéaux primitifs induits

a) Cas où G est moyennable

Les notations sont celles des paragraphes 4 et 5: on se fixe une représentation $R=(p,u)$ de $C^*(G,X)$ dans un espace hilbertien H séparable, une désintégration factorielle $p = \int_X^{\oplus} p_x\, d\mu(x)$ de p, correspondant à la désintégration $H = \int_X^{\oplus} H_x\, d\mu(x)$. On fixe une version «régulière» des $(u_x(t), x \in X)_{t \in G}$ qui désintègrent chaque $u(t)$ en un champ d'isomorphismes de $H_{t^{-1}x}$ sur H_x, et une version, «régulière» également, de la dérivée de mesure $\left(\frac{dt\mu}{d\mu}(x)\right)_{t \in G}$. On note w_x la restriction des $u_x(.)$ à S_x, et on réalise $\mathrm{Ind}\,r_x = (\tilde{p}_x, \tilde{w}_x)$ dans l'espace de Hilbert $\tilde{H}_x$ des classes d'applications boréliennes de G dans H_x telles que

$$\tilde{h}_x(ts) = w_x(s)^{-1}\,\tilde{h}_x(t), \forall t \in G, \forall s \in S_x$$

$$\int_{G/S_x} \|\tilde{h}_x(t)\|^2\, d\beta_x(tx) < \infty .$$

Le champ d'espaces de Hilbert $(\tilde{H}_x, x \in X)$ est muni de la structure de champ mesurable séparable engendrée par les champs $g*h$ [$g \in \underline{K}(G)$, $h = (h_x, x \in X)$ champ mesurable] définis comme dans la construction qui précède l'énoncé du Lemme 4.4. Si $\tilde{h}_x \in \tilde{H}_x$, $f \in C_0(X)$ et $\tau \in G$, on a posé

$$\tilde{p}_x(f)\tilde{h}_x(t) = f(tx)\tilde{h}_x(t)$$
$$w_x(\tau)\tilde{h}_x(t) = \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2}\tilde{h}_x(\tau^{-1}t).$$

Le champ $(\mathrm{Ind}r_x, x \in X)$ est mesurable et on a $\mathrm{Ind}r = \int_X^{\oplus} \mathrm{Ind}r_x\, d\mu(x) = (\tilde{p}, \tilde{w})$.

Lemme 6.1. *Soit h^0 un vecteur unitaire de H et γ une fonction borélienne sur $X \times X$ telle que $\int_X |\gamma(x,y)|^2 d\beta_x(y) = 1$, $\forall x \in X$. La forme linéaire ω_{γ,h^0} sur $\underline{K}(G \times X)$ qui, à $\varphi \in \underline{K}(G \times X)$ associe le nombre*

$$\int_{X \times X \times G} \varphi(\tau, x)\gamma(x,y)\bar{\gamma}(\tau^{-1}x, y)\frac{d\tau\mu}{d\mu}(x)^{1/2}\langle u_x(\tau)h^0_{\tau^{-1}x}, h^0_x\rangle\, d\beta_x(y)\, d\mu(x)\, d\tau$$

se prolonge en un état de $C^*(G,X)$ associé à la représentation Ind$r$.

Démonstration. On munit le champ d'espaces de Hilbert $(L^2(Gx, H_x, \beta_x); x \in X)$ de la structure de champ mesurable séparable engendrée par les champs de vecteurs

$$\left\{\left(tx \mapsto \int_G g(ts)\, h_x\, d\alpha_{S_x}(s)\right); x \in X\right\}$$

où $g \in K(G)$ et $(h_x, x \in X)$ est un champ mesurable dans le champ des $(H_x, x \in X)$. On note $\hat{h} = (\hat{h}_x : y \mapsto \hat{h}_x(y); x \in X)$ le vecteur générique de l'espace hilbertien $H\hat{} = \int_X^{\oplus} L^2(Gx, H_x, \beta_x)\, d\mu(x)$.

Si $f \in C_0(X)$, $\tau \in G$, on pose

$$(\hat{p}(f)\hat{h})_x(y) = f(x)\hat{h}_x(y)$$
$$(\hat{u}(\tau)\hat{h})_x(y) = \frac{d\tau\mu}{d\mu}(x)^{1/2}u_x(\tau)\hat{h}_{\tau^{-1}x}(y).$$

$R\hat{} = (\hat{p}, \hat{u})$ est une représentation de $C^*(G,X)$ dans $H\hat{}$. Si on pose $\hat{h}^0_x(y) = \gamma(x,y)h^0_x$, $\hat{h}^0$ est un vecteur unitaire de $H\hat{}$ et un calcul simple permet de vérifier que, si $\varphi \in \underline{K}(G \times X)$, alors $\omega_{\gamma,h^0}(\varphi) = \langle R\hat{}(\varphi)\hat{h}^0, \hat{h}^0\rangle$; d'où la première partie du lemme: ω_{γ,h^0} définit bien un état de $C^*(G,X)$.

Le lemme sera démontré si on prouve que $R\hat{}$ est équivalente à une sous représentation de Ind$r$. Posons $(U\hat{h})_x(t) = D(x, tx)^{1/2}u_x(t^{-1})\hat{h}_{tx}(x)$; on aura alors

$$\forall x \in X\ \mu\text{-p.s.}, \forall t \in G, \forall s \in S_x, (U\hat{h})_x(ts) = w_x(s)^{-1}(U\hat{h})_x(t)$$

et

$$\int \|(U\hat{h})_x(t)\|^2 d\beta_x(tx)\, d\mu(x) = \int_{X \times X} D(x,y)\|\hat{h}_y(x)\|^2 d\beta_x(y)\, d\mu(x)$$
$$= \int_{X \times X} \|h_x(y)\|^2 d\beta_x(y)\, d\mu(x) = \|\hat{h}\|^2$$

[D est la fonction sur $X \times X$ introduite au paragraphe 3, (jjjj)].

On a montré que, pour presque tout x de X, $(t \mapsto (U\hat{h})_x(t))$ définissait un élément de $\tilde{H}_x$, que le champ $((U\hat{h})_x; x \in X)$ était de carré intégrable et définissait donc un élément $U\hat{h}$ de l'espace de Hilbert $\tilde{H} = \int_X^{\oplus} \tilde{H}_x \, d\mu(x)$, et que U était une isométrie de $H^{\hat{}}$ dans $\tilde{H}$. Bien que ce ne soit pas utile à la démonstration, il est facile de vérifier que U est en fait un isomorphisme. On va montrer que U entrelace $R^{\hat{}}$ et $\mathrm{Ind}\, r$, ce qui terminera la démonstration.

Si $f \in C_0(X)$, on calcule

$$\begin{aligned}(U\hat{p}(f)\hat{h})_x(t) &= D(x, tx)^{1/2} u_x(t^{-1}) (\hat{p}(f)\hat{h})_{tx}(x) \\ &= f(tx)(U\hat{h})_x(t) = (\tilde{p}(f) U\hat{h})_x(t),\end{aligned}$$

soit $U\hat{p}(f) = \tilde{p}(f) U, \forall f \in C_0(X)$.

De même, si $\tau \in G$, on aura [modulo la mesure ν introduite au par 3, (jjj)]:

$$\begin{aligned}(U\hat{u}(\tau)\hat{h})_x(t) &= \varrho(t,x)^{-1/2} \frac{dt^{-1}\mu}{d\mu}(x)^{1/2} \frac{d\tau^{-1}\mu}{d\mu}(tx)^{1/2} u_x(t^{-1}) u_{tx}(\tau) \hat{h}_{\tau^{-1}tx}(x) \\ &= \varrho(t,x)^{-1/2} \frac{dt^{-1}\tau\mu}{d\mu}(x)^{1/2} u_x(t^{-1}\tau) \hat{h}_{\tau^{-1}tx}(x) \\ &= \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2} D(x, \tau^{-1}tx)^{1/2} u_x(t^{-1}\tau) \hat{h}_{\tau^{-1}tx}(x) \\ &= \varrho(\tau^{-1}, tx)^{1/2} (U\hat{h})_x(\tau^{-1}t) \\ &= (\tilde{w}(\tau) U\hat{h})_x(t),\end{aligned}$$

soit $U\hat{u}(\tau) = \tilde{w}(\tau) U, \forall \tau \in G$, et $UR^{\hat{}} = \mathrm{Ind}\, r \cdot U$ car $\mathrm{Ind}\, r = (\tilde{p}, \tilde{w})$.

Lemme 6.2. *Soit $g \in \underline{K}(G)$ telle que $\int_G |g(t)|^2 dt = 1$. On pose*

$$\gamma_g(x, tx) = \left[\int_G \varrho(ts, x)^{-1} |g(ts)|^2 d\alpha_{S_x}(s) \right]^{1/2}$$

et $\gamma_g(x,y) = 0$ si $y \notin Gx$. Alors γ_g est un fonction borélienne sur $X \times X$ qui vérifie

(i) $\forall x \in X, \int_X \gamma_g(x,y)^2 d\beta_x(y) = 1$;

(ii) $\begin{cases} \forall x \in X, \\ \forall \tau \in G \end{cases} \left| \int_X \gamma_g(x,y) \gamma_g(\tau^{-1}x, y) \, d\beta_x(y) - 1 \right|^2 \leqq 2 - 2\,\mathrm{Re} \int_G \Delta(\tau)^{1/2} g(t\tau) \bar{g}(t) dt.$

Démonstration. Si K est un compact de G, $\{(x, tx)/x \in X, t \in K\}$ est un fermé de $X \times X$. Comme G est dénombrable à l'infini, $\{(x,y) \in X \times X / y \in Gx\}$ est un sous ensemble borélien de $X \times X$, sur lequel la fonction γ_g est borélienne, ainsi que sur son complémentaire: γ_g est bien borélienne.

(i) découle de la définition de la mesure β_x.

La démonstration de (ii) s'inspire de Lemme 18.3.8 de [3]. On calcule d'abord

$$\begin{aligned}\gamma_g(\tau^{-1}x, tx)^2 &= \int_G \varrho(t\tau s, \tau^{-1}x)^{-1} |g(t\tau s)|^2 d\alpha_{S_{\tau^{-1}x}}(s) \\ &= \int_G \Delta(\tau) \varrho(ts, x)^{-1} g(ts\tau)^2 d\alpha_{S_x}(s)\end{aligned}$$

d'où, par inégalité triangulaire dans $L^2(G, S_x)$,

$$|\gamma_g(\tau^{-1}x, y) - \gamma_g(x, y)|^2 \leqq \int_G \varrho(ts, x)^{-1} |g(ts) - \Delta(\tau)^{1/2} g(ts\tau)|^2 d\alpha_{S_x}(s)$$

si $y = tx$ et, en intégrant les deux membres de l'inégalité par rapport à β_x,

$$\int_X |\gamma_g(\tau^{-1}x, y) - \gamma_g(x, y)|^2 d\beta_x(y) \leqq \int_G |g(t \;\; - \Delta(\tau)^{1/2} g(t\tau)|^2 dt.$$

Cette dernière quantité étant égale à $2 - 2 \operatorname{Re} \int_G \Delta(\tau)^{1/2} g(t\tau) \bar{g}(t) dt$ [car g est de norme 1 dans $L^2(G)$], il suffit d'appliquer (i) et l'inégalité de Schwartz pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \int_X \gamma_g(x, y) \bar{\gamma}_g(\tau^{-1}x, y) d\beta_x(y) - 1 \right|^2 &= \left| \int_X \gamma_g(x, y) (\gamma_g(\tau^{-1}x, y) - \gamma_g(x, y)) d\beta_x(y) \right|^2 \\ &\leqq \int_X |\gamma_g(\tau^{-1}x, y) - \gamma_g(x, y)|^2 d\beta_x(y) \\ &\leqq 2 - 2 \operatorname{Re} \int_G \Delta(\tau)^{1/2} g(t\tau) \bar{g}(t) dt. \end{aligned}$$

Proposition 6.3. *Soit (X, G) un système dynamique topologique séparable, R une représentation de $C^*(G, X)$ et r sa restriction à $C^*(\Sigma, X)$. Si G est moyennable, le noyau de la représentation de $C^*(G, X)$ induite par r est contenu dans le noyau de R, soit* $\ker(\operatorname{Ind} r) \subset \ker(R)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que tout état associé à R est limite faible sur $\underline{K}(G \times X)$ d'états associés à $\operatorname{Ind} r$. On se fixe donc un vecteur h^0 de l'espace H de R.

Si G est moyennable, sa représentation régulière droite contient faiblement la représentation triviale. D'après le Théorème 13.5.2 de [3], étant donné un compact K de G et un nombre η strictement positif, il existe $g \in \underline{K}(G)$ telle que

$$\int_G |g(t)|^2 dt = 1 \quad \text{et,} \quad \forall \tau \in K, \quad 1 - \operatorname{Re} \int_G \Delta(\tau)^{1/2} g(t\tau) \bar{g}(t) dt < \eta.$$

Soit γ_g la fonction borélienne sur $X \times X$ associée à g par le Lemme 6.2, et ω_{γ_g, h^0} l'état de $C^*(G, X)$ associé à γ_g et h^0 par le Lemme 6.1 : c'est un état associé à $\operatorname{Ind} r$ et, par définition de ω_{γ_g, h^0}, on aura, en appliquant le Lemme 6.2, si $\varphi \in \underline{K}(G \times X)$ est de support contenu dans $K \times X$:

$$\begin{aligned} &|\omega_{\gamma_g, h^0}(\varphi) - \langle R(\varphi) h^0, h^0 \rangle| \\ &\leqq 2\sqrt{\eta} \int_{X \times G} |\varphi(\tau, x)| \frac{d\tau\mu}{d\mu}(x)^{1/2} \|h^0_{\tau^{-1}x}\| \, \|h^0_x\| d\mu(x) d\tau \\ &\leqq 2\sqrt{\eta} \|\varphi\|_1 . \end{aligned}$$

D'où la proposition.

b) Cas où G est discret

Lemme 6.4. *Soit (X, G) un système dynamique topologique séparable, μ une mesure sur X quasi-invariante par l'action de G et ergodique, F un sous ensemble fini de G. Si G est discret, il existe un point x_0 de X tel que, $\forall x \in X$ μ-p.s., il existe $t \in G$ vérifiant* $S_x \cap F = t \cdot S_{x_0} \cap F$.

Démonstration. L'application $X\ni x\mapsto(x,S_x)\in X\times\Sigma$ est un isomorphisme d'espaces boréliens de X sur son image Z. L'image de μ dans l'espace topologique à base dénombrable Z est une mesure ergodique, et un résultat de A. Guichardet ([9], p. 59) assure qu'il existe un point de X, soit x_0, tel que, $\forall x\in X\mu-$p.s., $G(x,S_x)$ et $G(x_0,S_{x_0})$ aient même fermeture dans Z.

Soit $x\in X$ tel que (x,S_x) soit adhérent dans Z à $G(x_0,S_{x_0})$. L'ensemble $\{(y,S_y)\in Z/S_x\cap F=S_y\cap F\}$ est un voisinage de (x,S_x) et contient donc $(tx_0,t\cdot S_{x_0})$ pour un $t\in G$. D'où le lemme.

Proposition 6.5. *Soit (X,G) un système dynamique séparable, R une représentation factorielle de $C^*(G,X)$, r sa restriction à $C^*(\Sigma,X)$. Si G est discret, on a*

$$\ker(R)\subset\ker(\mathrm{Ind}\,r).$$

Démonstration. On garde les notations du paragraphe a): $R=(p,u)$ et la mesure μ intervenant dans la désintégration centrale de p est ergodique.

Lorsque G est discret, à un vecteur h de H est associé naturellement un vecteur $\tilde{h}$ de $\tilde{H}$ en posant

$$\tilde{h}_x(t)=\begin{cases}w_x(t)^{-1}h_x \text{ si } t\in S_x\\ 0 \text{ si } t\notin S_x.\end{cases}$$

L'ensemble des $\tilde{h}\,(h\in H)$ est cyclique pour $\mathrm{Ind}\,r$ et il suffit de montrer que, pour h fixé arbitraire, l'état de $C^*(G,X)$ associé à $\mathrm{Ind}\,r$ et $\tilde{h}$ est limite faible sur $\underline{K}(G\times X)$ de combinaisons linéaires convexes d'états associés à R.

On fixe $h\in H,\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\underline{K}(G\times X)$ et $\eta>0$: on va construire une famille finie $\omega_{i,j}$ de formes linéaires positives associées à R telles que la forme $\omega=\sum_{i,j}\omega_{i,j}$ soit de norme inférieure à 1 et, $\forall k=1,\dots,n$,

$$|\omega(\varphi_k)-\langle \mathrm{Ind}\,r(\varphi_k)h,h\rangle|<\eta\|\varphi_k\|_1.$$

Soit F une partie finie de G telle que le support de φ_k soit contenu dans $F\times X$, $\forall k=1,\dots,n$. Soit x_0 un point de X vérifiant les conclusions du Lemme 6.4. On pose, si $t\in G$,

$$Z_t=(x\in X/S_x\cap F=tS_{x_0}\cap F).$$

On a $\bigcup_{t\in G}Z_t=X \bmod \mu$ et il existe des compacts $K_1,\dots,K_m$ de X deux à deux disjoints, et des éléments $t_1,\dots,t_m$ de G tels que $K_i\subset Z_{t_i}$, $\forall i=1,\dots,m$, et $\mu_h\left(X-\bigcup_{i=1}^m K_i\right)<\eta$ (où μ_h est la mesure de probabilité sur X de densité $\|h_x\|^2$ par rapport à μ). Soit e_i le projecteur de H correspondant à la fonction indicatrice de K_i.

Pour i fixé $(i=1,\dots,m)$ et $x\in K_i$, il existe un voisinage W de x tel que $sW\cap W=\emptyset$, $\forall s\in F-S_x=F-t_iS_{x_0}$. Soit $(f_{i,j})$ une partition de l'unité relative au recouvrement de K_i par les W: on a $\sum_j f_{i,j}\leqq 1$ et $\sum_j f_{i,j}1_{K_i}=1_{K_i}$. On posera

$$\omega_{i,j}(\varphi)=\langle R(\varphi)e_ip(f_{i,j}^{1/2})h,p(f_{i,j}^{1/2})e_ih\rangle, \text{ et } \omega=\sum_{i,j}\omega_{i,j}\cdot(\varphi\in\underline{K}(G\times X)).$$

$$\begin{aligned}\text{On a } 1_{K_i}(x)f_{i,j}^{1/2}(x)f_{i,j}^{1/2}(t^{-1}x)&=0 \text{ si } t\in F-t_iS_{x_0}=F-S_x\\ &=1_{K_i}(x)f_{i,j}(x) \text{ si } t\in S_x,\end{aligned}$$

d'où le calcul

$$\omega_{i,j}(\varphi_k) = \int_X \sum_{t\in F} \varphi_k(t,x) 1_{K_i}(x) 1_{K_i}(t^{-1}x) f_{i,j}^{1/2}(x) f_{i,j}^{1/2}(t^{-1}x) \frac{dt\mu}{d\mu}(x)^{1/2}$$

$$\cdot \langle u_x(t) h_{t^{-1}x}, h_x \rangle d\mu(x)$$

$$= \int_{K_i} \sum_{t\in S_x} \varphi_k(t,x) f_{i,j}(x) \langle u_x(t) h_x, h_x \rangle d\mu(x)$$

et

$$\omega(\varphi_k) = \int_{\bigcup_i K_i} \sum_{t\in S_x} \varphi_k(t,x) \langle u_x(t) h_x, h_x \rangle d\mu(x).$$

Comme $\langle \operatorname{Ind} r(\varphi_k)\tilde{h}, \tilde{h}\rangle = \int_X \sum_{t\in S_x} \varphi_k(t,x) \langle u_x(t) h_x, h_x\rangle d\mu(x)$, on obtient l'inégalité

$$|\omega(\varphi_k) - \langle \operatorname{Ind} r(\varphi_k)\tilde{h}, \tilde{h}\rangle| \leqq \eta \cdot \|\varphi_k\|_1 .$$

c) Conclusion

Du Lemme 5.4 et des Propositions 6.3 et 6.5, on déduit le théorème:

Théorème 6.6. *Soit (X, G) un système dynamique séparable.*

a) *Si G est moyennable, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ contient un idéal primitif induit.*

b) *Si G est discret, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ est contenu dans un idéal primitif induit.*

c) *Si G est moyennable et discret, tout idéal primitif de $C^*(G,X)$ est un idéal primitif induit.*

Bibliographie

1. Auslander, L., Moore, C. C.: Unitary representation of solvable Lie groups. Mem. Amer. Math. Soc. **62** (1966)
2. Bourbaki, N.: Intégration, Chapitres VII et VIII. Paris: Hermann 1963
3. Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars 1964
4. Effros, E. G., Hahn, F.: Locally compact transformation groups and C^*-algebras. Mem. Amer. Math. Soc. **75** (1967)
5. Fell, J. M. G.: Weak containment and induced representations of groups II. Trans. Amer. Math. Soc. **110**, 424—447 (1964)
6. Gootman, E. C.: Primitive ideals of C^*-algebras associated with transformation groups. Trans. Amer. Math. Soc. **170**, 97—108 (1972)
7. Glimm, J.: Families of induced representations. Pacific J. Math. **12**, 885—911 (1962)
8. Guichardet, A.: Tensor products of C^*-algebras I. Aarhus University 1969
9. Guichardet, A.: Caractères des algèbres de Banach involutives. Ann. Inst. Fourier **13**, 1—81 (1962)
10. Ramsay, A.: Virtual groups and group actions. Advances in Math. **6**, 253—322 (1971)
11. Samuelides, M., Sauvageot, J.-L.: Algèbre de Krieger d'un système dynamique. C.R. Acad. Sc. Paris, A **280**, 709—712 (1975)
12. Takesaki, M.: Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups. Acta Math. **119**, 273—303 (1967)

Reçu 4. 4. 1977