

Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen

EGBERT BRIESKORN

Herrn Professor Heinrich Behnke zum 70. Geburtstag gewidmet

§ 0. Einleitung

0.0. In meiner Arbeit „Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen“ ist die Frage nach der Existenz von Auflösungen nur teilweise beantwortet worden. Die vorliegende Arbeit bringt die vollkommene Lösung dieses Problems.

0.1. Es sei $f : X \rightarrow S$ eine surjektive holomorphe Abbildung zusammenhängender komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 bzw. 1. Die Singularitätenmenge $S(f) = \{x \in X \mid df_x = 0\}$ sei endlich.

Definition. Eine *Auflösung* von f ist ein kommutatives Diagramm holomorpher Abbildungen komplexer Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- i) f' ist regulär, d. h. $S(f') = \emptyset$.
- ii) φ ist eine verzweigte Überlagerung.
 ψ ist eigentlich und surjektiv.
- iii) Für jede Faser X'_t von f' ist die durch ψ induzierte Abbildung $X'_t \rightarrow X_{\varphi(t)}$ eine Auflösung der Singularitäten im Sinne von H. Hironaka [7].

Das erste Hauptresultat ist der folgende Satz.

Satz 0.1. Unter den obigen Voraussetzungen hat $f : X \rightarrow S$ genau dann eine Auflösung, wenn die Singularitäten der Fasern von f rational sind.

Eine Abbildung f , deren Singularitäten rational sind, kann mehrere Auflösungen haben. Das zweite Hauptresultat ist die vollkommene Beschreibung sämtlicher möglichen Auflösungen. Für diese Beschreibung sind die in 0.2 bis 0.5 enthaltenen Vorbereitungen erforderlich.

0.2. Wenn eine Singularität einer Faser von f rational ist, dann ist sie, da X regulär ist, nach M. Artin [1] ein *rationaler Doppelpunkt* und daher nach [3], [4] isomorph zu einer Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$, wo G eine endliche Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$ ist, welche durch die Singularität bis auf Konjugation eindeutig bestimmt ist.

Es sei Γ_G der *bewertete Graph*, welcher zu der Schnittmatrix der minimalen Auflösung der Singularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ gehört, und Γ_G^- der bewertete Graph, der aus Γ_G durch Vorzeichenwechsel der Bewertung entsteht. Bekanntlich definiert die Zuordnung $G \rightarrow \Gamma_G^-$ eine bijektive Beziehung zwischen den Konjugationsklassen endlicher Untergruppen G von $SL(2, \mathbb{C})$ und den *Dynkinschemata* derjenigen reduzierten irreduziblen *Wurzelsysteme* R , deren Wurzeln gleiche Länge haben (vgl. [4] und, besonders zum folgenden, [16]).

Wir erinnern an folgende Begriffe aus der Theorie der Wurzelsysteme. V sei ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, und $R \subset V$ ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem. Für jedes $\alpha \in R$ gibt es nach Definition ein eindeutig bestimmtes $s_\alpha \in GL(V)$ mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und mit einer Hyperebene H_α als Fixpunktmenge. $\alpha^* \in V^*$ sei die auf H_α verschwindende Linearform mit $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2$. Die *Gewichte* sind die freie abelsche Gruppe

$$P = \{x \in V \mid \langle \alpha^*, x \rangle \in \mathbb{Z}, \alpha \in R\}.$$

Die *Weylkammern* sind die Zusammenhangskomponenten von $V - \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$. Sie entsprechen bijektiv den Systemen einfacher Wurzeln. Für ein solches System $S \subset R$ ist die zugehörige Weylkammer

$$C(S) = \{x \in V \mid \langle s^*, x \rangle > 0, s \in S\}.$$

Die *Weylkammern von P* sind die Durchschnitte von P mit den Weylkammern. Die *Weylgruppe W* ist die von den Spiegelungen s_α erzeugte endliche Gruppe. Sie operiert einfach transitiv auf der Menge der Weylkammern. Ein *Coxeter-element* ist ein Element $s_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot s_{\alpha_k}$, wo $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ein System einfacher Wurzeln ist. Alle Coxeter-elemente sind konjugiert in W , ihre gemeinsame Ordnung ist die *Coxeterzahl h* . Im folgenden wird die dem Dynkinschema Γ_G^- entsprechende Gruppe von Gewichten mit der eben beschriebenen Struktur mit P_G bezeichnet und die zugehörige Coxeterzahl mit h_G .

0.3. Nun sei $f: X \rightarrow S$ wieder eine Abbildung wie in 0.1. Es sei $\varphi: T \rightarrow S$ eine verzweigte Überlagerung 1-dimensionaler zusammenhängender komplexer Mannigfaltigkeiten. Eine Auflösung

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

wird im folgenden kurz *Auflösung von f über φ* genannt und mit ψ bezeichnet. (Letzteres wird dadurch gerechtfertigt, daß man für ein f mit zusammenhängenden Fasern f' und φ durch Steinfaktorisierung von $f \circ \psi$ erhält.) Im folgenden sollen alle Auflösungen von f über φ bestimmt werden. Dabei werden zwei Auflösungen über φ

$$\begin{array}{ccc} X'_i & \xrightarrow{\psi_i} & X \\ f'_i \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array} \quad i = 1, 2$$

als gleich angesehen, wenn es eine biholomorphe Abbildung $h: X'_1 \rightarrow X'_2$ mit $\psi_2 \circ h = \psi_1$ und $f'_2 \circ h = f'_1$ gibt.

Für $t \in T$ sei $O_t(\varphi)$ die Ordnung der Überlagerung φ in t .

Wir werden beweisen:

Satz 0.2. Die Singularitäten der Fasern von $f: X \rightarrow S$ seien rational. Zu $\varphi: T \rightarrow S$ existiert genau dann eine Auflösung von f über φ , wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.

Für alle $t \in T$ und $x \in S(f)$ mit $\varphi(t) = f(x)$ gilt: Wenn die Singularität $(X_{f(x)}, x)$ der Faser $X_{f(x)}$ isomorph zu der Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ ist, dann ist $O_t(\varphi)$ ein Vielfaches der Coxeterzahl h_G .

0.4. Es sei eine Auflösung ψ von f über φ gegeben. Dann ist offenbar die kanonische Abbildung auf das gefaserte Produkt

$$\tilde{\psi}: X' \rightarrow T \times_S X$$

eine Modifikation im Sinne von [15]. Die Abbildung $\tilde{\psi}$ genügt zur Beschreibung der Auflösung, denn wenn $p: T \times_S X \rightarrow T$ und $q: T \times_S X \rightarrow X$ die Projektionen sind, gilt $f' = p \circ \tilde{\psi}$ und $\psi = q \circ \tilde{\psi}$. Im folgenden werde wie üblich zur Abkürzung $X_T = T \times_S X$ gesetzt.

Wir werden die Modifikationen $\tilde{\psi}$ durch *monoidale Transformationen* beschreiben, welche durch die Wahl gewisser Elemente in den Divisorenklassengruppen der lokalen Ringe der singulären Punkte von X_T bestimmt sind. Dazu bemerken wir allgemein folgendes:

Es sei (Y, \mathcal{O}_Y) ein komplexer Raum, $y \in Y$ ein isolierter singulärer Punkt und j ein Element der *Divisorenklassengruppe* $C(\mathcal{O}_{Y,y})$ des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{Y,y}$. Dann kann man folgendermaßen eine nur von j abhängende Modifikation

$$\tilde{\psi}_j: Y_j \rightarrow Y$$

konstruieren. Es sei \mathfrak{J} ein j repräsentierendes divisorielles Ideal in $\mathcal{O}_{Y,y}$. Dies \mathfrak{J} kann in eindeutiger Weise zu einer kohärenten Idealgarbe \mathcal{J} über einer geeigneten Umgebung U von y fortgesetzt werden, so daß $\mathfrak{J} = \mathcal{J}_y$. Wenn U hinreichend klein gewählt wurde, ist $\mathcal{J}|U - y$ invertierbar. Beweis: Wegen [6], Exposé 20, prop. 6 genügt es, zu zeigen, daß für jedes vom maximalen Ideal verschiedene Primideal \mathfrak{p} von $\mathcal{O}_{Y,y}$ die Lokalisierung $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal in $(\mathcal{O}_{Y,y})_{\mathfrak{p}}$ ist. Aber weil (Y, y) eine isolierte Singularität ist, ist $(\mathcal{O}_{Y,y})_{\mathfrak{p}}$ regulär (vgl. [6], Exposé 20, Théorème 3), also nach Auslander faktoriell – und daher ist $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, welches zusammen mit \mathfrak{J} divisoriiell ist, ein Hauptideal. –

Nun sei

$$\tilde{\psi}_{\mathcal{J}}: U_{\mathcal{J}} \rightarrow U$$

die durch \mathcal{J} definierte *monoidale Transformation* im Sinne von [7], Definition 1. Die holomorphe Abbildung $\tilde{\psi}_{\mathcal{J}}$ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten \mathfrak{J} für j ab, denn jeder andere \mathfrak{J}' ist das Produkt von \mathfrak{J} mit einem Hauptideal, so daß also mit $\tilde{\psi}_{\mathcal{J}}^{-1}(\mathcal{J})$ auch $\tilde{\psi}_{\mathcal{J}'}^{-1}(\mathcal{J}')$ invertierbar wird und umgekehrt. Da $\mathcal{J}|U - y$ invertierbar ist, ist $\tilde{\psi}_{\mathcal{J}}: \tilde{\psi}_{\mathcal{J}}^{-1}(U - y) \rightarrow U - y$ biholomorph, und durch

Identifikation von $\tilde{\varphi}_j^{-1}(U - y)$ mit $U - y \subset Y$ erhält man einen komplexen Raum Y_j und eine Modifikationsabbildung

$$\tilde{\varphi}_j: Y_j \rightarrow Y,$$

die nur von $j \in C(\mathcal{O}_{Y,y})$ abhängt und für die

$$\tilde{\psi}_j: \tilde{\varphi}_j^{-1}(Y - y) \rightarrow Y - y$$

biholomorph ist. Die durch Komposition von $\tilde{\psi}_j$ mit $q: X_T \rightarrow X$ entstehende Abbildung wird im folgenden mit ψ_j bezeichnet.

0.5. Für eine beliebige holomorphe Abbildung komplexer Räume $\pi: W' \rightarrow W$ und einen Punkt $w \in W$ definieren wir die relative Picardgruppe von W' über W in w durch

$$\text{Pic}_w(\pi) = (R^1 \pi_* \mathcal{O}_{W'}^*)_w.$$

Nun seien $f: X \rightarrow S$ und $\varphi: T \rightarrow S$ gegeben, und der Einfachheit halber sei $S(f) = \{x\}$ und $\varphi^{-1}(f(x)) = \{t\}$. Wenn man für diesen Spezialfall alle Auflösungen von f über φ kennt, kennt man sie offenbar auch im allgemeinen Fall (vgl. [3]). Es sei $\psi: X' \rightarrow X$ eine Auflösung von f über φ , und $\tilde{\psi}: X' \rightarrow X_T$ wie oben. Es sei X_t die Faser von X_T über t , und X'_t die Faser von X' über t . Es bezeichne x_t sowohl den Punkt $(t, x) \in X_T$ als auch $(t, x) \in X_t$. Natürlich ist X_t isomorph zu $X_{\varphi(t)}$, und die durch $\tilde{\psi}$ induzierte Abbildung

$$\tilde{\psi}_t: X'_t \rightarrow X_t$$

ist eine Auflösung der Singularitäten von X_t . Die Beschränkung holomorpher Geradenbündel über offenen Mengen von X' auf den Durchschnitt mit X'_t induziert einen Homomorphismus

$$\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) \rightarrow \text{Pic}_{x_t}(X_t).$$

Lemma. $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) \rightarrow \text{Pic}_{x_t}(X_t)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Aus den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_{X'}^* \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_t} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_t}^* \rightarrow 0$$

erhält man durch Übergang zu den höheren direkten Bildern und durch Beschränkungshomomorphismen ein kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} (R^1 \tilde{\psi}_* \mathcal{O}_{X'})_{x_t} & \rightarrow & (R^1 \tilde{\psi}_* \mathcal{O}_{X'}^*)_{x_t} & \rightarrow & (R^2 \tilde{\psi}_* \mathbb{Z})_{x_t} & \rightarrow & (R^2 \tilde{\psi}_* \mathcal{O}_{X'})_{x_t} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (R^1 \tilde{\psi}_{t*} \mathcal{O}_{X_t})_{x_t} & \rightarrow & (R^1 \tilde{\psi}_{t*} \mathcal{O}_{X_t}^*)_{x_t} & \rightarrow & (R^2 \tilde{\psi}_{t*} \mathbb{Z})_{x_t} & \rightarrow & (R^2 \tilde{\psi}_{t*} \mathcal{O}_{X_t})_{x_t} \end{array}$$

In [3], p. 86, 87 wird bewiesen, daß die vier Gruppen an den Ecken des Diagramms verschwinden. Ferner folgt aus der Regularität von f' , daß $(R^2 \tilde{\psi}_* \mathbb{Z})_{x_t} \rightarrow (R^2 \tilde{\psi}_{t*} \mathbb{Z})_{x_t}$ ein Isomorphismus ist, und daraus folgt die Behauptung.

0.6. Es ist wohlbekannt, daß man für eine Auflösung der Singularitäten $\pi: Y' \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes Y mit einem normalen isolierten singulären

Punkt $y \in Y$ einen kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$\text{Pic}_y(\pi) \rightarrow C(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow 0$$

hat, dessen Kern von den Elementen erzeugt wird, welche durch die 1-co-dimensionalen irreduziblen Komponenten der reduzierten exceptionellen Faser $\text{red}(Y_y)$ erzeugt werden (vgl. [13]. Der dort angegebene Beweis für 2-dimensionale komplexe Räume ist auf den allgemeinen Fall übertragbar.) Da aus der Definition der Auflösung ψ insbesondere folgt, daß die Fasern von $\tilde{\psi}$ höchstens 1-dimensional sind, ergibt sich:

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) \cong C(\mathcal{O}_{X_T, x_t}).$$

Durch Komposition mit dem Isomorphismus des Lemmas erhält man also einen Isomorphismus

$$\bar{\psi} : \text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) \rightarrow C(\mathcal{O}_{X_T, x_t}).$$

In $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi})$ hat man ausgezeichnete Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, nämlich die, welche von den über x_t liegenden irreduziblen exceptionellen Kurven der Auflösung $\tilde{\psi}_t : X'_t \rightarrow X_t$ repräsentiert werden. Es sei

$$S(\psi) = \{\bar{\psi}(\alpha_1), \dots, \bar{\psi}(\alpha_k)\}$$

$$S(\psi) \subset C(\mathcal{O}_{X_T, x_t}).$$

0.7. Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, für gegebenes f und φ sämtliche Auflösungen ψ über φ vollständig zu beschreiben. Der Vollständigkeit halber stellen wir noch einmal die Voraussetzungen zusammen, zu denen Satz 1 und Satz 2 geführt haben:

Voraussetzungen. $f : X \rightarrow S$ sei eine holomorphe Abbildung, X und S zusammenhängend und nichtsingulär, $\dim X = 3$ und $\dim S = 1$. Die Singularitätenmenge sei $S(f) = \{x\}$, und die Singularität $(X_{f(x)}, x)$ der Faser $X_{f(x)}$ sei isomorph zu $(\mathbb{C}^2/G, 0)$, $G \subset SL(2, \mathbb{C})$. $\varphi : T \rightarrow S$ sei eine verzweigte Überlagerung, T nichtsingulär und $\varphi^{-1}(f(x)) = \{t\}$. Es sei $O_t(\varphi)$ ein Vielfaches der Coxeterzahl h_G .

Satz 0.3. Unter den obigen Voraussetzungen existiert ein Isomorphismus der Divisorenklassengruppe $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$ auf die Gruppe der Gewichte P_G , so daß gilt:

- i) Für jede Auflösung ψ von f über φ ist $S(\psi)$ ein System einfacher Wurzeln.
- ii) Für jedes j in einer Weylkammer $C(S)$ von $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$ ist ψ_j eine nur von $C(S)$ abhängige Auflösung $\psi(S)$ von f über φ .
- iii) $S(\psi(S)) = S$ und $\psi(S(\psi)) = \psi$.

Korollar. Die Anzahl der Auflösungen von f über φ ist gleich der Ordnung der Weylschen Gruppe W_G .

Wir beweisen Satz 1 in § 1, Satz 2 in § 2 und Satz 3 in § 3.

Für viele Anregungen danke ich M. F. Atiyah, H. Hironaka, F. Hirzebruch und D. Mumford. Das in dieser Arbeit gelöste Problem hat sich aus einer Note von Atiyah "On analytic surfaces with double points" entwickelt.

§ 1. Die Auflösungen der Ikosaedersingularität

1.1. In diesem Paragraphen beweisen wir Satz 0.1. Daß die Rationalität der Singularitäten der Fasern einer Abbildung f eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Auflösung von f ist, wurde bereits in [3], Satz 3 bewiesen. Ebenso wurde in [3], Satz 4, bereits gezeigt, daß f eine Auflösung hat, falls die Singularitäten der Fasern von f isomorph zu $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ sind, wo $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ die zyklische Gruppe C_k der Ordnung k , die binäre Tetraedergruppe T oder die binäre Oktaedergruppe O oder die binäre Diedergruppe D_k der Ordnung $4k$ ist. Die einzige noch aufzulösende Singularität ist also die *Ikosaedersingularität* $(\mathbb{C}^2/1, 0)$, wo 1 die binäre Ikosaedergruppe ist.

Wir erinnern daran, daß zu den G die folgenden, wie üblich bezeichneten Dynkinschemata Γ_G^- gehören, und die folgenden, von F. Klein [10] abgeleiteten Gleichungen für die Quotientensingularitäten.

$$\begin{aligned} \Gamma_{C_k}^- &= A_{k-1} & x_0^2 + x_1^2 + x_2^k &= 0 \\ \Gamma_{D_k}^- &= D_{k+2} & x_0^2 + x_1^2 x_2 + x_2^{k+1} &= 0 \\ \Gamma_T^- &= E_6 & x_0^2 + x_1^3 + x_2^4 &= 0 \\ \Gamma_O^- &= E_7 & x_0^2 + x_1^3 + x_1 x_2^3 &= 0 \\ \Gamma_1^- &= E_8 & x_0^2 + x_1^3 + x_2^5 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist also wie üblich der Fall E_8 , der Schwierigkeiten macht.

1.2. Aus dem Unizitätssatz für rationale Doppelpunkte (vgl. [3], [4]) und den obigen Gleichungen für sie ergibt sich nach [3], 2.5 unmittelbar:

X^i bzw. S seien komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 bzw. 1. Es seien $f_i: (X^i, x) \rightarrow (S, s)$, $i=1, 2$ holomorphe Abbildungen und $(X_s^1, x) \cong (X_s^2, x)$ rational. Dann sind f_1 und f_2 biholomorph äquivalent.

Daher folgt: Man kann Singularitäten vom Typ $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ für alle holomorphen Abbildungen auflösen, wenn man es für eine kann. Für eine solche spezielle Abbildung $f: X \rightarrow S$ wiederum ist die Konstruktion einer Auflösung φ über $\varphi: T \rightarrow S$ nach 0.4 äquivalent zur Konstruktion der Modifikation $\tilde{\varphi}: X' \rightarrow X_T$, oder auch zur Konstruktion einer Modifikation π , die lokal über dem fraglichen singulären Punkt von X_T zu $\tilde{\varphi}$ äquivalent ist. Solche π konstruieren wir in den folgenden Abschnitten für die Ikosaedersingularität mit den klassischen Methoden der algebraischen Geometrie. Daß diese Konstruktion mit der in der Einleitung beschriebenen übereinstimmt, wird in § 3 gezeigt und zum Beweis von Satz 0.3 benutzt.

1.3. Wir betrachten die einfachste mögliche Abbildung mit einer Ikosaedersingularität der Faser, nämlich die Abbildung $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^1$ mit

$$s = x_0^2 + x_1^3 + x_2^5.$$

Ferner sei die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^1$ gegeben durch

$$s = t^{30}.$$

Das gefaserte Produkt $\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^1} \mathbb{C}^3$ ist die affin algebraische Varietät mit der Gleichung

$$x_0^2 + x_1^3 + x_2^5 - t^{30} = 0.$$

Diese Familie affin algebraischer Flächen betten wir folgendermaßen in eine Familie X projektiv algebraischer Flächen X_t ein. Wir betten $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ in $\mathbb{C} \times P_2$ als Komplement von $\mathbb{C} \times P_1^\infty$ ein, wo P_1^∞ die unendlich ferne Gerade ist. Man hat eine 2-fache verzweigte Überlagerung

$$\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$$

mit

$$(t, x_0, x_1, x_2) \rightarrow (t, x_1, x_2).$$

Diese läßt sich in eindeutiger Weise zu einer verzweigten Überlagerung

$$u: X \rightarrow \mathbb{C} \times P_2$$

fortsetzen, wobei X ein eindeutig bestimmter normaler komplexer Raum ist. Durch Komposition mit der Projektion $\mathbb{C} \times P_2 \rightarrow \mathbb{C}$ hat man eine Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{C},$$

deren Fasern wir mit X_t bezeichnen. Die Überlagerung u induziert eine zweifache Überlagerung

$$u_t: X_t \rightarrow {}_tP = \{t\} \times P_2.$$

Bei geeigneter Wahl der homogenen Koordinaten (z_1, z_2, z_3) in ${}_tP$ hat die Verzweigungskurve B_t von u_t in ${}_tP$ die Gleichung

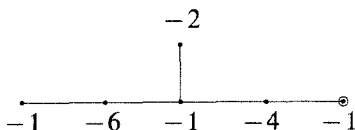
$$z_3(z_3^2 z_1^3 + z_2^5 - t^3 z_3^5) = 0.$$

Die Theorie der „Doppelebenen“ X_t mit einer derartigen Verzweigungskurve ist wohlbekannt und Gegenstand einer klassischen Arbeit von M. Noether [14]. Die in den zwei folgenden Abschnitten referierten Resultate werden alle in [14] bewiesen, und wir beschränken uns bezüglich der Beweise auf einige Andeutungen.

1.4. Um X_t zu untersuchen, löst man seine Singularitäten folgendermaßen auf. ${}_t\bar{P}$ sei die kleinste aus ${}_tP$ durch iterierten σ -Prozeß entstehende Mannigfaltigkeit, für welche der gesamte B_t in ${}_t\bar{P}$ entsprechende Divisor nur singularitätenfreie, sich transversal schneidende Komponenten hat und die Komponenten ungerader Multiplizität disjunkt sind. Es sei

$$\bar{X}_t \rightarrow {}_t\bar{P}$$

die $X_t \rightarrow {}_tP$ entsprechende verzweigte Überlagerung. Dann ist $\bar{X}_t \rightarrow X_t$ eine Auflösung der Singularitäten von X_t . Auf \bar{X}_t hat man über P_1^∞ die folgende Konfiguration singularitätenfreier rationaler Kurven



Dabei ist die mit \odot bezeichnete Kurve das strikte Bild von P_1^∞ , während die übrigen Kurven über dem singulären Punkt von B_t in P_1^∞ liegen. Es sei

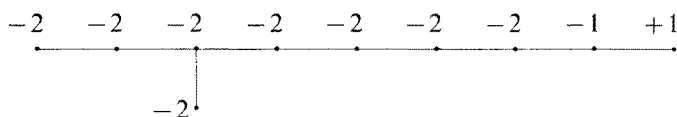
$$\bar{X}_t \rightarrow \hat{X}_t$$

der iterierte inverse σ -Prozeß, in dem sukzessive 5 exzeptionelle Kurven 1. Art in der obigen Konfiguration heruntergeblasen werden. Dann bleibt von der obigen Konfiguration eine rationale Kurve E_t mit Selbstschnitt $+1$ und einer gewöhnlichen Spitze übrig. $-E_t$ repräsentiert den kanonischen Divisor, und daher verschwinden das geometrische Geschlecht p_g und die Plurigeschlechter P_m von \hat{X}_t . Man kann leicht die Eulercharakteristik von \bar{X}_t und dann von \hat{X}_t berechnen und erhält $c_2 = 11$ für \hat{X}_t . Also ist $\chi(\hat{X}_t) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = \frac{1}{12}(1 + 11) = 1$.

Aus $\chi = 1$ und $P_m = 0$ folgt nach Castelnuovo:

Die \hat{X}_t sind *rational*.

Auf \hat{X}_0 hat man die folgende Konfiguration von rationalen Kurven, die bis auf die mit positivem Selbstschnitt alle singularitätenfrei sind:



Hierin ist E_0 die Kurve mit Selbstschnitt $+1$, und die Kurve mit Selbstschnitt -1 ist das strikte Bild der Geraden in ${}_0P$ durch die beiden singulären Punkte von ${}_0B$. In dieser Konfiguration kann man sukzessive 8 exzeptionelle Kurven 1. Art abblasen, und erhält so

$$\hat{X}_0 \rightarrow {}_0P',$$

wo ${}_0P'$ eine rationale Fläche mit 2. Bettzahl 1, also die projektive Ebene ist. E_0 geht dabei in eine cuspidale Kubik über, und die 8 exzeptionellen Kurven liegen über ihrem Wendepunkt.

Für $t \neq 0$ sieht man leicht, daß für alle exzeptionellen Kurven C auf \hat{X}_t das virtuelle Geschlecht verschwindet und $CC = -1$ ist, und sie also exzeptionelle Kurven 1. Art sind. Daher folgt, daß man in \hat{X}_t , $t \neq 0$, acht disjunkte exzeptionelle Kurven 1. Art C_1, \dots, C_8 so abblasen kann, daß man bei diesem inversen σ -Prozeß

$$\hat{X}_t \rightarrow {}_tP'$$

eine projektive Ebene ${}_tP'$ erhält. E_t geht natürlich wieder in eine cuspidale Kubik über, aber die C_1, \dots, C_8 diesmal in 8 verschiedene einfache Punkte p_1, \dots, p_8 der Kubik. – Es sei q die Spitze der Kubik. Sowohl für $t = 0$ als auch $t \neq 0$ ist ein Punkt q' in der ersten infinitesimalen Umgebung des Punktes q von ${}_tP'$ ausgezeichnet, nämlich der, dem in ${}_tP$ die Kurve P_1^∞ entspricht.

1.5. Für jedes t hat man (für $t \neq 0$ nach Wahl der C_1, \dots, C_8) die birationalen holomorphen Abbildungen

$$\bar{X}_t \rightarrow X_t, \quad \bar{X}_t \rightarrow \hat{X}_t, \quad \hat{X}_t \rightarrow {}_tP'.$$

Durch Komposition erhält man eine birationale Transformation

$$\varphi_t: {}_tP' \rightarrow X_t,$$

und durch weitere Komposition mit der Überlagerung u_t eine rationale Transformation

$$\psi_t: {}_tP' \rightarrow {}_tP.$$

Nun sei $t \neq 0$. Um ψ_t zu analysieren, beweist man zunächst, daß die Bildkurven $\psi_t(p_i)$ der 8 Basispunkte singularitätenfreie Quadriken in ${}_tP$ sind, die P_1^∞ in dem singulären Punkt von B_t berühren und B_t überall mit gerader Multiplizität schneiden. Hieraus folgt, daß die einer allgemeinen Geraden von ${}_tP$ entsprechende Kurve in ${}_tP'$ Doppelpunkte in p_1, \dots, p_8 hat. Ferner schneidet sie die cuspidale Kubik in der Spitze q in Richtung q' mit Multiplizität 2. Weil sie von einer 2-fachen Überlagerung von P_1 mit 6 Verzweigungspunkten kommt, hat sie das Geschlecht $p = 2$, und damit ergibt sich aus der Plückerformel, daß sie eine Sextik ist.

Mithin gilt:

Lemma 1.1 (Noether). Für $t \neq 0$ ist ψ_t die rationale Transformation, die zu dem 2-dimensionalen Linearsystem L_t der Sextiken in ${}_tP'_2$ gehört, welche Doppelpunkte in den Punkten p_1, \dots, p_8 auf der cuspidalen Kubik haben und im allgemeinen einfach mit der Tangentialrichtung q' durch die Spitze q gehen.

Nach M. Noether kann man eine Basis $\Psi_i^{(i)}, i = 1, 2, 3$ für L_1 wählen, so daß die Transformation ψ_1 durch $z_i = \Psi_i^{(i)}, i = 1, 2, 3$ gegeben ist, und daß folgendes gilt: Φ_1 ist die Form der cuspidalen Kubik, Φ'_1 die Form einer anderen Kubik durch p_1, \dots, p_8 und Ψ'_1 die Form einer irreduziblen Sextik mit Doppelpunkten in p_1, \dots, p_8 und einem einfachen Zweig mit Tangentialrichtung q' in q , und es gilt

$$\begin{aligned} \Psi'_1 &= \Psi_1 \\ \Psi''_1 &= \Phi_1 \Phi'_1 \\ \Psi'''_1 &= \Phi_1^2. \end{aligned}$$

1.6. Die Idee für die Konstruktion einer Familie X' von Flächen X'_t , die die Familie X von Flächen X_t auflöst, ist diese: Die minimalen Auflösungen X'_t von X_t für $t \neq 0$ entstehen aus ${}_tP'$ durch Aufblasen von p_1, \dots, p_8 und q und q' auf der Kubik, und X'_0 entsteht aus ${}_0P'$ durch Aufblasen von q, q' und 8 konsekutiven Punkten über dem Wendepunkt der Kubik. Daher kann man versuchen, eine Familie von X'_t zu konstruieren, indem man in allen ${}_tP'$ gleichzeitig sukzessive 8 Punkte aufbläst, wobei diese mit $t \rightarrow 0$ geeignet gegen den Wendepunkt streben. Die folgende Konstruktion der Auflösung besteht in der Präzisierung dieser Idee.

In P'_2 seien die homogenen Koordinaten (y_1, y_2, y_3) so gewählt, daß die cuspidale Kubik die folgende Form hat:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 - y_3^3.$$

Dann definieren wir für $t \neq 0$ bireguläre Abbildungen

$$\begin{aligned} g_t &: {}_1P' \rightarrow {}_tP' \\ h_t &: {}_1P \rightarrow {}_tP \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} g_t(1; y_1, y_2, y_3) &= (t; t^{-3} y_1, y_2, t^{-2} y_3) \\ h_t(1; z_1, z_2, z_3) &= (t; t^{-2} z_1, t^{-6} z_2, t^{-12} z_3). \end{aligned}$$

Entsprechend definieren wir Formen $\Psi_t^{(i)}(y)$ durch

$$\begin{aligned}\Psi_t' (y_1, y_2, y_3) &= t^{-2} \Psi_1' (t^3 y_1, y_2, t^2 y_3) \\ \Psi_t'' (y_1, y_2, y_3) &= t^{-6} \Psi_1'' (t^3 y_1, y_2, t^2 y_3) \\ \Psi_t''' (y_1, y_2, y_3) &= t^{-12} \Psi_1''' (t^3 y_1, y_2, t^2 y_3).\end{aligned}$$

Man beweist leicht: Für $\Psi_0^{(i)} = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi_t^{(i)}$ gilt mit gewissen nicht verschwindenden Konstanten a, b, c

Lemma 1.2.

$$\begin{aligned}\Psi_0' &= a y_2^5 y_3 \\ \Psi_0'' &= b (y_1^2 y_2 - y_3^3) y_2^3 \\ \Psi_0''' &= c (y_1^2 y_2 - y_3^3)^2.\end{aligned}$$

Daraus und aus der Definition der $\Psi_t^{(i)}$ folgt: wenn man die Transformation $\tilde{\psi}_t: {}_tP' \rightarrow {}_tP$ durch

$$\tilde{\psi}(t; y) = (t; \Psi_t'(y), \Psi_t''(y), \Psi_t'''(y))$$

definiert, dann gilt für die in 1.5 definierten ψ_t (bei cohärenter Wahl der C_1, \dots, C_8 für $t \neq 0$)

Lemma 1.3.

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_t &= \psi_t && \text{für alle } t \\ \tilde{\psi}_t &= h_t \psi_1 g_t^{-1} && \text{für } t \neq 0.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formen $\Psi_t^{(i)}$ definieren wir die folgenden Transformationen Φ und Ψ .

$$\Psi: \mathbb{C} \times P_2' \rightarrow \mathbb{C} \times P_2$$

ist die meromorphe Abbildung, die durch

$$\Psi(t; y) = (t; \Psi_t'(y), \Psi_t''(y), \Psi_t'''(y))$$

definiert wird.

$$\Phi: \mathbb{C} \times P_2' \rightarrow X$$

ist die eindeutig bestimmte meromorphe Abbildung mit $u \circ \Phi = \Psi$, für deren Beschränkungen $\Phi_t: {}_tP' \rightarrow X_t$ gilt $\Phi_t = \varphi_t$.

1.7. Nunmehr können wir endlich die gesuchte Modifikation

$$\pi: X' \rightarrow X$$

konstruieren, und zwar als eine Auflösung der Singularitäten des Graphen der meromorphen Abbildung $\Phi: \mathbb{C} \times P_2' \rightarrow X$. Und zwar erhalten wir die Modifikation $\sigma: X' \rightarrow \mathbb{C} \times P_2'$ folgendermaßen durch iterierten σ -Prozeß längs singularitätenfreien Kurven.

Es seien p_1, \dots, p_8, q, q' die Basispunkte von Φ_1 in ${}_1P'$. Es sei $\tau: X^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} \times P_2'$ der σ -Prozeß längs der Kurve $\{g_t(q), t \in \mathbb{C}\}$, und $\tau': X^{(1)} \rightarrow X^{(0)}$ der σ -Prozeß längs der Kurve $\{g_t(q'), t \in \mathbb{C}\}$. Ferner sei $\sigma^i: X^{(i+1)} \rightarrow X^{(i)}$ für $i = 1, \dots, 8$ der σ -Prozeß längs der singularitätenfreien Kurve, welche man als das strikte Bild in $X^{(i)}$ von der Kurve $C^i = \{g_t(p_i) \mid t \in \mathbb{C}\}$ erhält. Dann ist

$$\sigma = \sigma^8 \sigma^7 \sigma^6 \sigma^5 \sigma^4 \sigma^3 \sigma^2 \sigma^1 \tau' \tau.$$

Definition. $X' = X^{(9)}$
 $\pi = \Phi \circ \sigma$
 $f' = f \circ \pi.$

- Satz 1.4.** i) X' ist singularitätenfrei.
 ii) f' ist regulär, d. h. $S(f') = \emptyset$.
 iii) π ist holomorph.
 iv) Für alle $t \in \mathbb{C}$ ist die durch π induzierte Abbildung der Fasern

$$\pi_t : X'_t \rightarrow X_t$$

die minimale Auflösung der Singularitäten von X_t .

Beweis. i) und ii) folgen unmittelbar daraus, daß X' durch σ -Prozesse entsteht, und zwar längs Kurven, die transversal zu den Faserungen $X^{(i)} \rightarrow \mathbb{C}$ sind. Die übrigen Behauptungen ergeben sich leicht aus den Resultaten der Abschnitte 1.4 bis 1.6.

Nach dem in 1.2 Gesagten ist mit der Existenz von π Satz 0.1 bewiesen.

1.8. Die Konstruktion von Φ hing von der Wahl des Systems von Kurven C_1, \dots, C_8 ab. Hierfür gibt es nach M. Noether [14] $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5$ Möglichkeiten. Die Konstruktion von σ hing von der Numerierung der Punkte p_1, \dots, p_8 ab, und dafür gibt es $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ Möglichkeiten. Man erhält:

Lemma 1.5. Es gibt $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ Auflösungen der Ikosaedersingularität. Dies ist die Ordnung der Weylschen Gruppe von E_8 .

§ 2. Picard-Lefschetz-Monodromie und Coxeter-Killing-Transformation

2.1. Es sei $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$ und $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ein isolierter Punkt von $S(f)$. Es sei ε eine für das Folgende hinreichend klein gewählte Zahl und $X = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|x\| < \varepsilon\}$. X_t sei die Faser von $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Für hinreichend kleines $s \neq 0$ sei $E_s = \{x \in X \mid |f(x)| = s\}$ und $S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = s\}$. Dann ist

$$E_s \rightarrow S^1$$

ein differenzierbares lokaltriviales Faserbündel, und insbesondere hat man eine *Monodromie*

$$h : H_n(X_s, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X_s, \mathbb{Z}).$$

Die Gruppen $H_n(X_s, \mathbb{Z})$ sind frei, und daher ist die Ordnung der Monodromie, falls sie endlich ist, gleich der Ordnung der transponierten komplexifizierten Monodromie

$$h_{\mathbb{C}}^n : H^n(X_s, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_s, \mathbb{C}).$$

In Kapitel I, § 4 meiner Habilitationsschrift ist eine Methode zur Berechnung von $h_{\mathbb{C}}^n$ entwickelt worden. In 2.2 wenden wir diese auf Abbildungen f an, deren Faser X_0 einen rationalen Doppelpunkt als Singularität hat. In diesen Fällen könnte man die Monodromie übrigens mit der Methode berechnen, die Milnor hierfür vor kurzem in [12], § 9 entwickelt hat.

2.2. Es sei also jetzt $f(x_0, x_1, x_2)$ eine der in 1.1 angegebenen Funktionen.

Die Fälle A_k, E_6 und E_8 lassen sich auf einen Schlag erledigen, denn in diesen Fällen ist f von der Form

$$f = x_0^{a_0} + x_1^{a_1} + x_2^{a_2},$$

und in Kapitel I, § 4 meiner Habilitationsschrift (oder auch [5], Lemma 4), wurde bewiesen, daß das charakteristische Polynom der Monodromie das folgende ist

$$\Delta_a(\lambda) = \prod_{0 < j_k < a_k} (\lambda - e^{2\pi i \sum j_k / a_k}).$$

Der Fall D_k : Im folgenden bezeichne res den Poincaré-Residuum-Operator. Die folgenden holomorphen Differentialformen bilden eine Basis für $H^2(X, \mathbb{C})$:

$$\omega = \text{res} \frac{x_1}{f-t} dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$\omega_j = \text{res} \frac{x_2^j}{f-t} dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \quad j=0, \dots, k-2.$$

Da $h_{\mathbb{C}}^t$ induziert wird durch

$$(x_0, x_1, x_2) \rightarrow (e^{2\pi i \frac{k-1}{2k-2}} x_0, e^{2\pi i \frac{k-2}{2k-2}} x_1, e^{2\pi i \frac{2}{2k-2}} x_2),$$

ergibt sich:

Die Eigenwerte der Monodromie sind $e^{2\pi i \frac{m}{2k-2}}$ mit $m=1, 3, 5, \dots, 2k-3, k-1$.

Der Fall E_7 : Die folgenden holomorphen 2-Formen bilden eine Basis für $H^2(X_t, \mathbb{C})$:

$$\omega_j = \text{res} \frac{x_2^j}{f-t} dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \quad j=0, 1, 2, 3, 4, 6, 7.$$

Da $h_{\mathbb{C}}^t$ von der folgenden Transformation

$$(x_0, x_1, x_2) \rightarrow (e^{2\pi i \frac{9}{18}} x_0, e^{2\pi i \frac{6}{18}} x_1, e^{2\pi i \frac{4}{18}} x_2)$$

induziert wird, ergibt sich:

Die Eigenwerte der Monodromie sind $e^{2\pi i \frac{m}{18}}$ mit $m=1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$.

Wir fassen zusammen:

Satz 2.1. Die Picard-Lefschetz-Monodromie einer Abbildung, welche eine isolierte Singularität vom Typ $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ hat, hat die gleiche Jordansche Normalform wie die Coxetertransformation des Wurzelsystems R_G .

2.3. Es sei $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^1$ wie in 2.2, und $\varphi: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$ eine Überlagerung. T^1 sei das Urbild von S^1 . Durch Liften der in 2.1 definierten Faserung $E_s \rightarrow S^1$ erhält man eine Faserung $F \rightarrow T^1$, und es ist klar, daß diese die Monodromie $h^{0_0(\varphi)}$ hat, wenn h die Monodromie von $E_s \rightarrow S^1$ ist. Falls eine Auflösung von f über φ existiert, muß offenbar $F \rightarrow T^1$ differenzierbar ein triviales Faserbündel sein. Mithin gilt

Lemma 2.2. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Auflösung von $f: X \rightarrow S$ über $\varphi: T \rightarrow S$ ist, daß für $x \in S(f)$ und t mit $\varphi(t) = f(x)$ gilt: $O_t(\varphi)$ ist ein Vielfaches der Ordnung der Picard-Lefschetz-Monodromie der Singularität von f in x .

Satz 2.1 und Lemma 2.2 zusammen ergeben die Notwendigkeit der Bedingung von Satz 0.2 für die Existenz einer Auflösung von f über φ . Daß die Bedingung auch hinreichend ist, folgt nach [3], 2.6 leicht aus der Tatsache, daß wir in [3] und in § 1 Auflösungen über einem φ mit $O_t(\varphi) = h_G$ konstruiert haben. Damit ist Satz 0.2 vollständig bewiesen.

2.4. F. Hirzebruch hat in [9], S. 15 die folgende, über Satz 2.1 hinausgehende Vermutung geäußert: (Notation wie in 2.1 und 2.2).

Vermutung: $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^1$ wie in 2.2 habe die Faser \mathbb{C}^2/G . Dann gibt es einen Isomorphismus von $H_2(X_s, \mathbb{Z})$ auf die Gruppe der Gewichte P_G , so daß die Schnittzahl von Homologieklassen dem Skalarprodukt $-\langle \alpha^*, \beta \rangle$ von Gewichten entspricht, und daß die Picard-Lefschetz-Monodromie als Coxetertransformation operiert.

In dieser Vermutung folgt die Richtigkeit aller Aussagen mit Ausnahme derjenigen über die Coxetertransformation aus der nunmehr in Satz 0.1 auch für E_8 bewiesenen Existenz einer Auflösung. Da die Monodromie die Schnittzahl invariant läßt, folgt ferner, daß die Monodromie als ein Element von $\text{Aut}(R_G)$ operiert.

In den Fällen E_7, E_8 und A_1 ist $\text{Aut}(R_G) = W_G$ (vgl. z. B. [16]), und die Monodromie ist also ein Element der Weylgruppe. Sobald man dieses weiß, ist man aber fertig, denn die Monodromie hat nach Satz 2.1 die gleichen Eigenwerte wie die Coxetertransformationen, und letztere sind in der Weylgruppe durch ihre Eigenwerte charakterisiert (vgl. z. B. [11], Corollary 9.2).

In den Fällen A_k, E_6 und D_{2m+1} ist $\text{Aut}(R_G) = W_G \times \mathbb{Z}_2$. Wäre die Monodromie h kein Element von W_G , dann wäre $-h \in W_G$, und wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von h sind, hätte man mit $-h$ ein Element in W_G mit den Eigenwerten $-\lambda_1, \dots, -\lambda_k$. Damit ergibt sich in allen Fällen ein Widerspruch zu [11], Cor. 9.2. Mithin:

Satz 2.3. Obige Vermutung ist richtig für $A_k, D_{2m+1}, E_6, E_7, E_8$.

Ich bin sicher, daß sie auch in den anderen Fällen richtig ist.

§ 3. Charakteristische Kegel und Weylsche Kammern

3.1. In diesem Paragraphen beweisen wir Satz 0.3. Dieser Satz hat seinen Ursprung in Hironakas Ph. D. Thesis, Harvard (1960).

Es sei $f: X' \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung und \mathcal{J} eine kohärente Idealgarbe auf X . Es sei $f^{-1}(\mathcal{J})$ die von $f^*\mathcal{J}$ erzeugte kohärente Idealgarbe auf X' . Zu \mathcal{J} existiert eine eindeutig bestimmte kleinste Modifikation $f_{\mathcal{J}}: X_{\mathcal{J}} \rightarrow X$, so daß $f_{\mathcal{J}}^{-1}(\mathcal{J})$ invertierbar ist, d. h. lokalfrei vom Rang 1 ist. $f_{\mathcal{J}}$ ist die zu \mathcal{J} gehörige *monoidale Modifikation* (vgl. [7], [8]). Wir wollen solche \mathcal{J} finden, für die $X_{\mathcal{J}} \rightarrow X$ eine Auflösung der Singularitäten von X von einer besonderen

Art ist. Umgekehrt kann man mit Hironaka für eine vorgegebene Modifikation ψ fragen, welche \mathcal{J} ein invertierbares $\psi^{-1}(\mathcal{J})$ haben. Hironakas diesbezügliche Resultate motivieren die folgende Definition.

Definition. Es sei (X, x) eine isolierte Singularität und $\psi: X' \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation. Der *charakteristische Kegel* $C_x(\psi)$ von ψ in x ist die Menge der $j \in C(\mathcal{O}_{X, x})$ mit $\tilde{\psi}_j = \psi$.

3.2. Im folgenden beziehen wir uns ohne weitere Erklärungen auf die Notationen und Aussagen der Einleitung.

Nach Satz 0.2 existieren Auflösungen. Also sei $\tilde{\psi}: X' \rightarrow X_T$ eine Auflösung. Auf $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}_t)$ ist durch komplex-analytische Schnitttheorie eine quadratische Form definiert, und es wurde bereits in 0.2 erwähnt, daß für die exzeptionellen Kurven E_1, \dots, E_k der Auflösung $\tilde{\psi}_t: X'_t \rightarrow X_t$ die negative Schnittmatrix $-(E_i \cdot E_j)$ eine *Cartan-Matrix* ist, d. h. eine Matrix $\langle \alpha_i^*, \alpha_j \rangle$, wo $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ein System einfacher Wurzeln von R_G ist. Die durch die Cartan-Matrix definierte Bilinearform überträgt sich durch den Isomorphismus $\bar{\psi}$ auf $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$, und es gibt daher einen Isomorphismus $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t}) \cong P_G$, so daß die Bilinearform auf $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$ gerade die durch $(\alpha, \beta) = \langle \alpha^*, \beta \rangle$ definierte Bilinearform ist. Man weiß aus der Theorie der Wurzelsysteme, daß in P_G durch (\cdot, \cdot) das System der Wurzeln R_G (und damit auch die Systeme S von einfachen Wurzeln, die Weylkammern von P_G usw.) eindeutig bestimmt sind. Entsprechendes gilt dann für $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$ nach Wahl der Auflösung ψ . In Wahrheit hängt diese Struktur auf der Divisorenklassengruppe aber auch nicht von der Wahl von ψ ab. Dies ist deswegen klar, weil nach 0.5 der Isomorphismus $\bar{\psi}$ dem durch die Inklusion $X'_t \rightarrow X'$ induzierten Isomorphismus $(R^2 \tilde{\psi}_* \mathbb{Z})_{x_t} \rightarrow (R^2 \tilde{\psi}_t^* \mathbb{Z})_{x_t}$ entspricht. Die Behauptung folgt dann daraus, daß für jede Auflösung ψ die Abbildung $f': X' \rightarrow T$ ein lokaltriviales differenzierbares Faserbündel ist, und daß die Schnittform topologisch definiert werden kann.

Mit dieser Definition der Struktur von P_G auf $C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$ wird nach dem oben Gesagten die Aussage i) von Satz 0.3 trivial.

3.3. Wir beweisen:

Lemma 3.1. Es sei ψ eine Auflösung. Dann gilt

$$C_{x_t}(\tilde{\psi}) = C(S(\psi)),$$

d. h. der charakteristische Kegel von $\tilde{\psi}$ in x_t ist gerade die Weylsche Kammer des ψ entsprechenden einfachen Wurzelsystems $S(\psi)$.

Beweis. Wir zeigen in (a) die Inklusion $C_{x_t}(\tilde{\psi}) \subset C(S(\psi))$ und in (b) die Inklusion $C(S(\psi)) \subset C_{x_t}(\tilde{\psi})$.

(a) Es sei $j \in C_{x_t}(\tilde{\psi})$, \mathcal{J} ein Repräsentant von j , welcher (f) nicht als assoziiertes Primideal hat, und \mathcal{J} die Fortsetzung von \mathcal{J} als kohärente Idealgarbe. \mathcal{J}_t sei die durch \mathcal{J} erzeugte Idealgarbe in \mathcal{O}_{X_t} . Dann folgt daraus, daß $\tilde{\psi}: X' \rightarrow X_T$ nach Annahme die monoidale Modifikation zu \mathcal{J} ist, daß $\tilde{\psi}_t: X'_t \rightarrow X_t$ die monoidale Modifikation zu \mathcal{J}_t ist (vgl. [7], S. 129, 130). Es sei $i: X'_t \rightarrow X'$ die Einbettung. Dann ist klar, daß $\tilde{\psi}_t^{-1}(\mathcal{J}_t) = i^{-1} \tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{J})$ gilt. Andererseits ent-

spricht für invertierbare Idealgarben i^{-1} dem Beschränkungshomomorphismus

$$\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) \rightarrow \text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}_t).$$

Ferner ist klar: Wenn $\psi^{-1}(\mathcal{J})$ invertierbar ist, dann repräsentiert $\psi^{-1}(\mathcal{J})$ in $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi})$ das j bei dem kanonischen Isomorphismus

$$\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}) = C(\mathcal{O}_{X_T, x_t})$$

entsprechende Element. Mithin: Das j in $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi}_t)$ entsprechende Element ist $\tilde{\psi}_t^{-1}(\mathcal{J}_t)$. Hieraus folgt die Behauptung. Denn man überlegt sich leicht: Wenn für eine Idealgarbe \mathcal{J} auf X_t die zugehörige monoidale Modifikation gerade die Auflösung $\tilde{\psi}_t: X'_t \rightarrow X_t$ ist, dann gilt für den zu $\tilde{\psi}_t^{-1}(\mathcal{J})$ gehörigen Divisor D , daß $D \cdot E_i < 0$ für jede exzeptionelle Kurve E_i .

(b) Es sei $j \in C(S(\psi))$. Dann sei D ein Divisor in X' , der das j entsprechende Element in $\text{Pic}_{x_t}(\tilde{\psi})$ repräsentiert, und \mathcal{J}_D seine Idealgarbe. Man macht sich leicht klar, daß die kohärente Idealgarbe $\mathcal{J} = f_* \mathcal{J}_D$ in x_t ein j repräsentierendes divisorielles Ideal als Halm hat, und daß ferner genau dann $\mathcal{J}_D = f^{-1} \mathcal{J}$ gilt, wenn \mathcal{J}_D eine A -Garbe ist. Wir haben also zu zeigen, daß \mathcal{J}_D eine A -Garbe ist, denn dann faktorisiert $\tilde{\psi}$ durch $X' \rightarrow (X_T)_{\mathcal{J}} \rightarrow X_T$, und man macht sich leicht klar, daß in Wahrheit $X' \rightarrow (X_T)_{\mathcal{J}}$ ein Isomorphismus ist und also $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_j$. Nun sei also ein $p \in X'$ gegeben. Wegen $D \cdot E_i \leq 0$ für alle exzeptionellen Kurven E_i existiert ein Divisor $D' \geq D$ mit $D' \cdot E_i = 0$ für alle E_i und $p \notin \text{Träger}(D' - D)$. Aber wegen $D' \cdot E_i = 0$ ist D' natürlich ein Hauptdivisor (g) , und wegen $D' \geq D$ ist g ein globaler Schnitt in \mathcal{J}_D , dessen Keim in p das Ideal $(\mathcal{J}_D)_p$ erzeugt. Da man für jedes p einen solchen Schnitt finden kann, ist \mathcal{J}_D eine A -Garbe.

3.4. Aus Lemma 3.1 folgt insbesondere: wenn ψ eine Auflösung ist, dann ist $\psi = \psi_j$ für alle $j \in C(S(\psi))$, und insbesondere ist also für solche Systeme einfacher Wurzeln $S = S(\psi)$ die Modifikation $\psi(S)$ wohldefiniert und es gelten die in 0.3 iii) behaupteten Beziehungen $S(\psi(S)) = S$ und $\psi(S(\psi)) = \psi$. Jede Auflösung ist also von der Form $\psi = \psi(S)$ mit eindeutig bestimmtem S , und es gibt höchstens so viele Auflösungen wie Weylsche Kammern $C(S)$. Wenn man also noch weiß, daß es mindestens so viele verschiedene Auflösungen wie Weylsche Kammern gibt, dann ist Satz 0.3 vollständig bewiesen. Die Existenz dieser Auflösungen folgt aus den Konstruktionen in [3] und in § 1. Für den Fall E_8 haben wir die entsprechende Feststellung bereits mit Lemma 1.5 getroffen, für die anderen Fälle ist sie mehr oder weniger explizit in [3], 3.2 enthalten.

Schlußbemerkung. Wir haben 0.3 und die Existenz der Auflösungen nicht so bewiesen, wie es die Formulierung des Satzes erwarten lassen würde. Wünschenswert wäre ein Beweis, der zunächst für alle G gleichzeitig zeigt, daß die Divisorenklassengruppe isomorph zu P_G ist, und dann, daß die $\psi(S)$ wohldefiniert und gerade die Auflösungen sind. Ein solcher Beweis ist mir z. Z. leider nicht bekannt.

Literatur

1. Artin, M.: On isolated rational singularities of surfaces. Am. J. Math. **88**, 129—136 (1966).
2. Atiyah, M. F.: On analytic surfaces with double points. Proc. Roy. Soc. A, **247**, 237—244 (1958).
3. Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. **166**, 76—102 (1966).

4. — Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Invent. math.* **4**, 336—358 (1968).
5. — Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. math.* **2**, 1—14 (1966).
6. Cartan, H.: Familles d'espaces complexes et fondements de la Géométrie Analytique. Séminaire Henri Cartan, 13^e année, 1960/61.
7. Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I. *Ann. of Math.* **79**, 109—203 (1964).
8. —, and H. Rossi: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces. *Math. Ann.* **156**, 313—333 (1964).
9. Hirzebruch, F.: Über Singularitäten komplexer Flächen. *Rend. Mat. e Appl.* **25**, 213—232 (1966).
10. Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig: Teubner 1884.
11. Kostant, B.: The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. *Amer. J. Math.* **81**, 973—1032 (1959).
12. Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Erscheint demnächst.
13. Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Publ. Math. de l'Institut des Hautes Etudes Sci.* No. 9, Paris 1961.
14. Noether, M.: Über eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelsebenen. *Math. Ann.* **33**, 525—545 (1889).
15. Remmert, R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Coll. de Topologie*, Strasbourg 1954.
16. Serre, J. P.: *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. New York: Benjamin 1966.

Egbert Brieskorn
Mathematisches Institut der Universität Bonn
53 Bonn, Wegelerstr. 10

(Eingegangen am 29. Februar 1968)