Math. Ann. 214, 235—266 (1975)

Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*

G.-M. Greuel

Einleitung

In der Arbeit [2] führte Brieskorn den singulären Gauß-Manin-Zusammenhang für isolierte Singularitäten von Hyperflächen ein. Dieser ist ein spezieller gewöhnlicher singulärer Differentialoperator und wird rein algebraisch mit Hilfe holomorpher Differentialformen definiert. Er liefert eine einfache Beschreibung der von Milnor in [19] auf topologischem Wege definierten lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie einer isolierten Hyperflächensingularität. Die Monodromie erwies sich als wirksames Mittel zur Untersuchung der lokalen topologischen Eigenschaften der Singularität.

Hamm zeigte in [11], daß die Monodromie nicht nur für Hyperflächen, sondern auch für vollständige Durchschnitte die Topologie der Singularität bis zu einem gewissen Grade bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs für vollständige Durchschnitte mit isolierter Singularität entwickelt.

Daneben gibt es in der algebraischen Geometrie schon seit längerem eine Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs. Sie wurde unter anderen von Grothendieck [9] und Katz [14] entwickelt. Man vergleiche auch Deligne [5], wo der algebraische und der analytische Fall behandelt wird. Allerdings wird dort der Gauß-Manin-Zusammenhang explizit nur für Familien von Mannigfaltigkeiten beschrieben, während Brieskorn dies zuerst für einparametrige Familien $f:\mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}$ komplexer Räume mit isolierter Singularität tat.

In dieser Arbeit werden mehrparametrige platte Familien von komplexen Räumen $f:X\to S$ untersucht, wobei S eine k-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. X und S sind dabei geeignete kleine Repräsentanten von Raumkeimen (X,x) und $(S,0)$ mit $f(x)=0$. Ist X ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt, hat die Menge $C\subset X$ der nichtregulären Punkte von f die minimale Dimension $k-1$ und hat die $(n=m-k)$-dimensionale Faser $X_0=f^{-1}(0)$ eine isolierte Singularität in x, so definieren wir in dieser Situation den (lokalen) singulären Gauß-Manin-Zusammenhang von X über S in x. Es sei $D=f(C)\subset S$ die Diskriminante von f, $S'=S-D$ und $X'=f^{-1}(S')$. Dann ist die Einschränkung $f:X'\to S'$ nach Milnor und Hamm ein differenzierbares Faserbündel, dessen Faser X_t den Homotopietyp eines Bouquets von n-dimensionalen Sphären hat.

* Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine erweiterte und gestraffte Fassung der Dissertation (Göttingen 1973) des Verfassers. Sie wurde aufgeschrieben während eines Gastaufenthaltes am Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik" in Bonn.

Die Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(S', t)$ auf der Kohomologie der Faser, genauer: die Darstellung $\pi_1(S', t) \to \mathrm{Aut}(H^n(X_t, \mathbb{Z}))$, ist die lokale Picard-Lefschetz-Monodromie von f in x.

Nach der Methode von Brieskorn ist es möglich, die komplexe Monodromie $\pi_1(S', t) \to \mathrm{Aut}(H^n(X_t, \mathbb{C}))$ algebraisch zu beschreiben: Das flache komplexe Vektorbündel $H^n = \bigcup_{t \in S'} H^n(X_t, \mathbb{C})$ besitzt einen wohlbestimmten kanonischen Zusammenhang, der auch, da er topologisch definiert ist, der lokale transzendente Zusammenhang von f in x genannt wird. H^n ist natürlich auch ein holomorphes Vektorbündel über S' und wir zeigen, daß die Garbe der Keime aller holomorphen Schnitte von H^n kanonisch isomorph ist zur relativen de Rham-Kohomologiegarbe $\mathscr{H}^n_{DR}(X'/S')$ von X' über S'. Der transzendente Zusammenhang auf $\mathscr{H}^n_{DR}(X'/S')$ läßt sich über ganz S zu einem Zusammenhang auf $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$ fortsetzen, aber nur zu einem „singulären" Zusammenhang, der längs der Hyperfläche D Polstellen besitzt. Diese Fortsetzung – der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang von X über S – läßt sich rein algebraisch definieren. Seine Monodromie stimmt dann mit der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie überein. Wir benutzen das tiefliegende Resultat von Saito und Hamm, daß die relative de Rham-Kohomologie $\mathscr{H}^{\cdot}_{DR}(X/S)$ kohärent ist.

Mit Hilfe eines Kriteriums von Malgrange zeigen wir auf einfache Weise, daß der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang regulär singulär ist. Das erlaubt im Prinzip, die Monodromie von Elementen aus $\pi_1(S', t)$, die als Rand einer holomorphen Kreisscheibe T mit $T \cap D = \{s\}$ darstellbar sind, explizit zu berechnen. Für solche Elemente aus $\pi_1(S', t)$ zeigen wir weiter, daß ihre Monodromie als Eigenwerte nur Einheitswurzeln hat. Der elegante Beweis von Brieskorn [2] für Hyperflächen läßt sich ohne Schwierigkeiten übertragen. Als weitere Anwendung der Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs erhalten wir unter Verwendung des analytischen Indexsatzes von Malgrange eine rein algebraische, berechenbare Formel für die Milnorzahl, d. h. für die mittlere Bettizahl der Faser X_t des Faserbündels $X' \to S'$. Die Idee für diesen Beweis, ebenso wie für den Beweis des Regularitätssatzes und die Anwendung auf den Hyperflächenfall stammen von Malgrange [17].

Es ist zu erwähnen, daß die Ergebnisse dieser Arbeit für den Hyperflächenfall schon seit längerem bekannt sind. Sie wurden zuerst von Brieskorn [2], Milnor [19] und Sebastiani [24] bewiesen. Die Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs für vollständige Durchschnitte mit isolierter Singularität wurde etwa gleichzeitig auch von Saito entwickelt. Die wesentlichen Ergebnisse von §§ 1 und 22 wurden von ihm in [21, 22] ohne Beweise veröffentlicht. Hamm hat Brieskorns Theorie ebenfalls verallgemeinert und den Gauß-Manin-Zusammenhang auch für nicht-isolierte Singularitäten untersucht [13]. Die Hauptresultate dieser Arbeit wurden in [4] angekündigt. Ein Übersichtsartikel über Probleme im Zusammenhang mit der Monodromie und dem Gauß-Manin-Zusammenhang wurde von Brieskorn in [3] veröffentlicht.

Ich möchte E. Brieskorn für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Unterstützung danken. Von ihm stammt der Vorschlag, die Methoden von Malgrange auch im Fall vollständiger Durchschnitte anzuwenden. K. Saito bin ich für verschiedene Hinweise Dank schuldig.

Inhalt

§ 1. Das de Rham-Lemma

1.1. Singularitäten und vollständige Durchschnitte

In diesem Abschnitt legen wir die Bezeichnungen fest und diskutieren die Voraussetzungen unter denen der Gauß-Manin-Zusammenhang definiert werden soll.

Es sei X ein (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$. X heißt vollständiger Durchschnitt in $x \in X$, wenn der Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X,x}$ als $\mathbb{C}$-Stellenalgebra isomorph ist zum Restklassenring des konvergenten Potenzreihenringes $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$ nach einem echten Ideal das von N-$\dim_x X$ Elementen erzeugt wird. Hierbei ist $\dim_x X$ die Krull-Dimension von $\mathcal{O}_{X,x}$. Wir setzen $\dim_x Y = -\infty$ für $Y \subset X$, $x \in X - Y$. Mit $\mathit{codh}\, \mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnen wir die homologische Kodimension (Profondeur) von $\mathcal{O}_{X,x}$. Gilt $\mathit{codh}\, \mathcal{O}_{X,x} = \dim_x X$, so ist X Macaulaysch in x, d. h. $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein Macaulay-Ring. Vollständige Durchschnitte sind Macaulaysch.

X heißt regulär in x, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Die (analytische) Menge der nicht-regulären oder kritischen Punkte von X bezeichnen wir mit $C(X)$.

Wir werden später oft stillschweigend benutzen, daß vollständige Durchschnitte mit niederdimensionaler kritischer Menge reduziert sind:

Lemma 1.1. *Der komplexe Raum X sei Macaulaysch in x. Dann ist X in x genau dann reduziert, wenn* $\dim_x C(X) < \dim_x X$ *gilt.*

Der Beweis ist eine leicht Folgerung aus dem Satz von Scheja über die Fortsetzung von Kohomologieklassen (vgl. [23]). Da wir diesen Satz häufig anwenden wollen, sei er hier zitiert.

Satz 1.2 (Scheja). *Es sei A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X. Sei $p \geqq 0$ und in jedem Punkt $x \in A$ gelte $\mathit{codh}_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x \geqq \dim_x A + p + 2$ (bzw. $\mathit{codh}_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x \geqq \dim_x A + p + 1$). Dann ist die*

Restriktionsabbildung

$$H^p(U,\mathscr{F})\to H^p(U-A,\mathscr{F})$$

bijektiv (bzw. injektiv) für jede offene Teilmenge $U\subset X$.

Bemerkung. Für Macaulay-Räume X gilt sogar, wie aus einem entsprechenden Satz von Scheja für reduzierte Räume folgt:

X ist in x normal, genau wenn $\dim_x C(X)+2\leqq \dim_x X$ *gilt.*

Ein Morphismus $f: X\to S$ komplexer Räume heißt regulär in $x\in X$, falls ein regulärer Raum F und Umgebungen $U\subset X$ von x und $V\subset S$ von $f(x)$ existieren, so daß $V\times F$ isomorph zu U ist und f bei diesem Isomorphismus über die Projektion $V\times F\to V$ faktorisiert. Das ist äquivalent dazu, daß f platt in x ist und daß x regulärer Punkt der Faser $X_{f(x)}$ ist. Mit $C(f)$ bezeichnen wir die kritische Menge von f, d. h. die Menge der nicht-regulären Punkte von f.

Nun sei $S=\mathbb{C}^k$, $G\subset\mathbb{C}^N$ ein Gebiet und $X\subset G$ überall ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt mit der Idealgarbe $\mathscr{I}=(g_1,\ldots,g_r)\mathcal{O}_G$, $r=N-m$. Sei $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_k)$ eine holomorphe Fortsetzung der Abbildung $f: X\to\mathbb{C}^k$ auf ganz G. $\tilde{\mathscr{C}}$ bezeichne die Idealgarbe in $\mathcal{O}_G$, die von $g_1,\ldots,g_r$ und für $k\leqq m$ zusätzlich von allen $(r+k)$-Unterdeterminanten der Jacobimatrix von $(g_1,\ldots,g_r,\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_k)$ erzeugt wird. Dann ist

$$\mathscr{C}(f):=\tilde{\mathscr{C}}/\mathscr{I}\,|X$$

eine kohärente analytische Garbe auf X, deren Nullstellenmenge gerade $C(f)$ ist. $\mathscr{C}(f)$ hängt nur von der Abbildung f, nicht aber von Willkürlichkeiten in der Definition ab und heißt das *kritische Ideal* von f ($\mathscr{C}(f)_x$ ist das $(N-r-k)$-te Fittingideal von $\Omega^1_{X/S,x}$). Im Fall $k=0$ beschreibt $\mathscr{C}(f)=\mathscr{C}(X)$ die kritische Menge von X und heißt kritisches Ideal von X. Unter obigen Voraussetzungen versehen wir $C(f)$ stets mit der Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_{C(f)}:=\mathcal{O}_X/\mathscr{C}(f)\,|\,C(f)\,.$$

Da X ein vollständiger Durchschnitt ist, gilt für die Abbildung $(g,\tilde{f})=(g_1,\ldots,g_r,\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_k): G\to\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^k$ die Gleichung $C(g,\tilde{f})\cap X=C(f)$. Nun ist $(g,\tilde{f})$ eine Abbildung zwischen regulären Räumen. Daher gilt bekanntlich für $r+k\leqq N$ und $x\in C(g,\tilde{f})$ die Ungleichung $\dim_x C(g,\tilde{f})\geqq r+k-1$. Wir erhalten also:

Lemma 1.3. *Ist X ein vollständiger Durchschnitt in $x\in X$ und $f: X\to S$ eine holomorphe Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit S mit* $\dim_x X\geqq\dim_{f(x)}S$, *so gilt entweder $x\notin C(f)$ oder*

$$\dim_x C(f)\geqq \dim_{f(x)}S-1\,.$$

Die Aussage des Lemmas folgt auch aus Lemma 1.8 und der exakten Sequenz im Beweis von Lemma 1.9. Gilt $\dim_x C(f)=\dim_{f(x)}S-1$, so ist $C(f)$ Macaulaysch in x, was leicht aus dem de-Rham-Lemma folgt (vgl. Lemma 1.9). Diese Aussage ist schon seit längerem bekannt. Sie wurde unter anderen von Eagon (Thesis, 1961) und Buchsbaum-Rim (Trans AMS, 1964) bewiesen.

Wir wenden uns jetzt den isolierten Singularitäten zu. Dabei sagen wir, $x\in X$ sei eine isolierte Singularität, wenn es eine Umgebung $U\subset X$ von x gibt, so daß $U-x$ regulär ist. Uns interessieren im folgenden platte Abbildungen, deren Fasern nur isolierte Singularitäten haben. Leicht zu beweisen ist das folgende Lemma.

Lemma 1.4. *Sei X ein vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ und $f: X \to S$, $f(x)=0$, eine holomorphe Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit S. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent* ($\dim_x X = m$, $\dim_0 S = k$)*:*

i) *f ist platt in x und x ist isolierte Singularität der Faser $X_0 = f^{-1}(0)$.*

ii) *x ist isolierte Singularität von X_0 und* $\dim_x X_0 = m-k$.

iii) *x ist isolierter Punkt von $X_0 \cap C(f)$ oder $x \notin C(f)$.*

iv) *$\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{C}(f)_x$ ist ein endlicher $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul.*

v) *Die Einschränkung $f: C(f) \to S$ ist eine endliche Abbildung in x.*

Die Aussagen i)–v) *implizieren, daß X_0 ein vollständiger Durchschnitt in x ist.*

$f: X \to S$ möge in $x \in X$ die äquivalenten Eigenschaften von Lemma 1.4 besitzen. Da dieses offenen Eigenschaften sind und wir nur am Abbildungskeim von f in x interessiert sind, können wir annehmen, daß X überall ein vollständiger Durchschnitt der gleichen Dimension und f überall platt (und damit offen) ist und daß die Einschränkung $f: C(f) \to S$ ein endlicher Morphismus komplexer Räume ist. Dann ist die Menge der kritischen Werte $D(f) := f(C(f))$ eine analytische Menge in S, die wir mit der Bildraumstruktur versehen. Als *Ideal der kritischen Werte* definieren wir das Annulatorideal in $\mathcal{O}_S$ von $f_* \mathcal{O}_{C(f)}$,

$$\mathcal{D}(f) := \mathcal{A}n(f_* \mathcal{O}_{C(f)}),$$

und versehen $D(f)$ mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{D(f)} := \mathcal{O}_S/\mathcal{D}(f) | D(f)$.[1].

Bemerkung. Erfüllt $f: X \to S$ überall die äquivalenten Eigenschaften von Lemma 1.4, so hat $C(f)$ die minimale Dimension $k-1$ genau dann, wenn $\dim C(X) \leqq k-1$ ist. [Der nichttriviale „wenn"-Teil folgt aus dem Satz von Sard und der Endlichkeit von $f: C(f) \to D(f)$.] Insbesondere ist dann $D(f)$ rein $(k-1)$-dimensional. Darüberhinaus folgt unter diesen Voraussetzungen leicht:

Lemma 1.5 (Saito [21, 22]). *$\mathcal{D}(f)_0$ ist ein Hauptideal in $\mathcal{O}_{S,0}$.*

1.2. Verallgemeinerung eines Lemmas von de Rham

Sei $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in die komplexe Mannigfaltigkeit S. Wir betrachten die Garbe Ω_X^p der Keime von holomorphen Differentialformen vom Grade p auf X und die Garbe $\Omega_{X/S}^p$ der Keime von relativen Differentialformen vom Grade p von X über S ([10], EGA IV.16.6).

Ist X lokal um $x \in X$ in ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^N$ eingebettet und wird die Idealgarbe von X von in G holomorphen Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ erzeugt, so ist $\Omega_X^p = \Omega_G^p \Big/ \sum_{i=1}^{r} (g_i \Omega_G^p + dg_i \wedge \Omega_G^{p-1}) | X$, wobei Ω_G^p die Garbe der Keime von holomorphen Formen auf G ist. Sind $f_1, \ldots, f_k$ die Komponentenfunktionen von f bezüglich Koordinaten in S, so gilt $\Omega_{X/S}^p = \Omega_X^p \Big/ \sum_{i=1}^{k} df_i \wedge \Omega_X^{p-1}$. Die äußere Ableitung auf $\Omega_G^{\cdot}$ induziert äußere Ableitungen auf $\Omega_X^{\cdot}$ bzw. auf $\Omega_{X/S}^{\cdot}$, so daß wir Kom-

[1] $D(f)$ ist topologisch die Diskriminante von f, doch ist die hier definierte analytische Struktur nicht mit beliebigem Basiswechsel verträglich.

plexe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen bzw. von $f^{\cdot}\mathcal{O}_S$-Moduln erhalten ($f^{\cdot}$ bezeichne die topologische Urbildgarbe).

Nach Festlegung der Koordinaten in S um $f(x)$ induziert f eine Abbildung $df:\Omega^p_{X/S,x}\to\Omega^{p+k}_{X,x}$, die repräsentantenweise durch äußere Multiplikation von links mit $df_1\wedge\dots\wedge df_k$ definiert ist. Ist $k=1$ und X in x regulär, so besagt ein Lemma von de Rham [20], daß diese Abbildung für $0\leqq p<\dim_x X$ injektiv ist, falls f in x eine isolierte Singularität besitzt. Dieses Lemma wurde von Brieskorn in [2] benutzt, um den Gauß-Manin-Zusammenhang für isolierte Hyperflächensingularitäten zu definieren. Bei der Untersuchung von vollständigen Durchschnitten statt Hyperflächen benötigen wir die folgende Verallgemeinerung:

Lemma 1.6. (De Rham-Lemma). *Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^N$, seien $f=(f_1,\dots,f_k):G\to\mathbb{C}^k$, $g=(g_1,\dots,g_r):G\to\mathbb{C}^r$, $h=(h_1,\dots,h_s):G\to\mathbb{C}^s$ holomorphe Abbildungen mit $k\geqq 1$, $r\geqq 0$, $s\geqq 0$ und sei zur Abkürzung*

$$\Omega^p:=\Omega^p_G\Big/\left(\sum_{j=1}^{s}h_j\Omega^p_G+\sum_{i=1}^{r}dg_i\wedge\Omega^{p-1}_G\right).$$

Dann ist für $x\in G$ die Abbildung

$$df:\Omega^p_x\Big/\sum_{j=1}^{k}df_j\wedge\Omega^{p-1}_x\to\Omega^{p+k}_x,$$

die repräsentantenweise durch äußere Multiplikation von links mit $df_1\wedge\dots\wedge df_k$ definiert ist, injektiv für $0\leqq p<codh\,\mathcal{O}_{G,x}/(h_1,\dots,h_s)-\dim_x C(f,g)\cap N(h)$.

Hierbei ist $C(f,g)$ die kritische Menge der Abbildung $(f,g):G\to\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^r$ und $N(h)$ die Nullstellenmenge von $h_1,\dots,h_s$.

Beweis. Wir setzen $\mathcal{O}=\mathcal{O}_G/(h_1,\dots,h_s)$, $C=C(f,g)$, $N=N(h)$, $(g_1,\dots,g_r,f_1,\dots,f_k)=(e_1,\dots,e_u)$, $u=r+k$ und bemerken, daß für einen endlichen $\mathcal{O}_x$-Modul M die Gleichung $codh_{\mathcal{O}_x}M=codh_{\mathcal{O}_{G,x}}M$ besteht.

a) Es sei $x\notin C\cap N$.

Für $x\notin N$ ist die Behauptung wegen $\Omega^p_x=0$ trivial. Ist $x\notin C$, so können $e_1,\dots,e_u$ als Koordinaten in einer Umgebung von x in G gewählt werden. Dann sind $de_1,\dots,de_u$ Elemente einer Basis von $\Omega^1_{G,x}$ und die Behauptung des Lemmas folgt durch eine einfache Rechnung für alle $p\geqq 0$.

b) Sei $x\in C\cap N$. Wir setzen

$$\Omega^p(i)=\Omega^p_G\Big/\sum_{j=1}^{s}h_j\Omega^p_G+\sum_{j=1}^{i}de_j\wedge\Omega^{p-1}_G.$$

Behauptung. $codh\,\Omega^p_x(i)\geqq codh\,\mathcal{O}_x-p$ für $0\leqq p\leqq codh\,\mathcal{O}_x-\dim_x C\cap N$ und $0\leqq i\leqq u$.

Beweis. Durch Induktion über p.

Für $p=0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $p\geqq 1$ und die Behauptung für $p-1$ schon bewiesen. Wir betrachten die Sequenz

$$0\to\Omega^{p-1}_x(i)\xrightarrow{de_i}\Omega^p_x(i-1)\to\Omega^p_x(i)\to 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$codh\,\Omega^{p-1}_x(i)>codh\,\mathcal{O}_x-p\geqq\dim_x C\cap N.$$

Da die Multiplikation mit de_i außerhalb $C \cap N$ injektiv ist, folgt aus dem Fortsetzungsatz von Scheja, daß dies auch in x gilt. Folglich ist obige Sequenz exakt und die Behauptung für p folgt durch Induktion über i, denn $\Omega_x^p(0) = \Omega_{G,x}^p \otimes \mathcal{O}_x$ ist frei über $\mathcal{O}_x$.

c) Die Injektivität von $df: \Omega_x^p(u) \to \Omega_x^{p+k}$ folgt nun aus Behauptung b) mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Scheja, da df nach a) außerhalb $C \cap N$ schon injektiv ist.

Wir interessieren uns im folgenden für den Fall, daß $(h_1, \ldots, h_s) = (g_1, \ldots, g_r)$ ist und daß durch die Idealgarbe $\mathcal{I} = (g_1, \ldots, g_r)\, \mathcal{O}_G$ ein vollständiger Durchschnitt $X \subset G \subset \mathbb{C}^N$ der Dimension $m = N - r$ definiert wird. Die äußere Multiplikation von links mit $dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_r$ induziert dann eine Abbildung

$$\lambda: \Omega_X^p \to \Omega_G^{p+r} / \mathcal{I} \cdot \Omega_G^{p+r} | X .$$

Das Bild von λ für $p = m$ ist – mit der üblichen Identifikation $\Omega_G^N = \mathcal{O}_G$ – das kritische Ideal $\mathscr{C}(X)$.

Ist $f = (f_1, \ldots, f_k): X \to S = \mathbb{C}^k$, $k \geqq 1$, eine holomorphe Abbildung, so betrachten wir weiter die Abbildung

$$df: \Omega_{X/S}^p \to \Omega_X^{p+k}$$

die durch Multiplikation von links mit $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ induziert wird und die Komposition

$$\lambda df: \Omega_{X/S}^p \to \Omega_G^{p+k+r} / \mathcal{I} \cdot \Omega_G^{p+k+r} | X .$$

Für $p = m - k$ ist das Bild von λdf das kritische Ideal $\mathscr{C}(f)$.

Um einfache Bezeichnungen zu haben, nennen wir die Homomorphismen λ, df und λdf *de Rham-Multiplikationen.* Es ist leicht zu sehen, daß Kern und Bild dieser Abbildungen nicht von der Wahl des (minimalen) Erzeugendensystems von $\mathcal{I}$ bzw. von der Wahl lokaler holomorpher Koordinaten in S abhängen. Die später benötigten Aussagen über die de Rham-Multiplikationen, die leicht aus dem de Rham-Lemma folgen, fassen wir jetzt zusammen:

Proposition 1.7. *Ist X ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ und $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit S, so ist λ in x injektiv für* $0 \leqq p < \operatorname{codim}_x C(X)$, *während df und λdf für* $0 \leqq p < \operatorname{codim}_x C(f)$ *injektiv sind.*

1.3. Folgerungen aus dem de Rham-Lemma

Aus Behauptung b) im Beweis des de Rham-Lemmas folgt unmittelbar:

Lemma 1.8. *Ist X ein vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ und $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit S, so gilt:*

$$\mathit{codh}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X/S,x}^p) \geqq \dim_x X - p \quad \text{\textit{für}} \quad 0 \leqq p \leqq \operatorname{codim}_x C(f) .$$

(Im Fall $\dim S = 0$ *gilt* $\Omega_{X/S,x}^p = \Omega_{X,x}^p$ *und* $C(f) = C(X)$.*)*

Lemma 1.9. *Es sei* $f: X \to S, f(x) = 0$, *wie in Lemma* 1.8 *mit* $\dim_0 S = k (\geqq 1)$ *und* $\dim_x C(f) = k - 1$. *Dann ist* $\mathcal{O}_{C(f),x}$ *ein Macaulay-Ring.*

Zusatz. Erfüllt f in x zusätzlich die äquivalenten Aussagen von Lemma 1.4, so gilt nach einer generischen linearen Koordinatentransformation in S um 0 für die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_k$ von f, daß $f_1, \ldots, f_{k-1}$ eine $\mathcal{O}_{C(f),x}$-Sequenz bilden. Hierbei bedeutet generisch, daß die Aussage für alle linearen Koordinatentransformationen $A \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{k \cdot k}$ außerhalb von endlich vielen Untervektorräumen $U_i \neq \mathbb{C}^{k \cdot k}$ gilt.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Zusatzes ist $\mathcal{O}_{C(f),x}$ endlich als Modul über $\mathcal{O}_{D(f),0}$, $\mathcal{O}_{S,0}$ und über $\mathcal{O}_{X,x}$. Daher ist für einen endlich erzeugten $\mathcal{O}_{C(f),x}$-Modul die homologische Kodimension über allen vier Ringen gleich. Diese Tatsache werden wir oft benutzen, ohne es explizit zu erwähnen.

Beweis von Lemma 1.9. Aus der exakten Sequenz ($m = \dim_x X$)

$$0 \to \Omega^{m-k}_{X/S,x} \xrightarrow{\lambda df} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{C(f),x} \to 0$$

und Lemma 1.8 folgt $codh\, \mathcal{O}_{C(f),x} \geqq k-1$. Andererseits gilt

$$codh\, \mathcal{O}_{C(f),x} \leqq \dim_x C(f) = k-1\,.$$

Für den Zusatz braucht man nur zu zeigen, daß $f_1, \ldots, f_{k-1}$ ein Parametersystem bilden. Das folgt aus [27], II.4, Satz 1.

Die folgende Aussage ist für Induktionsbeweise nützlich:

Lemma 1.10. *Für $f: X \to S$ mögen die Bezeichnungen und die äquivalenten Aussagen von Lemma 1.4 gelten. Hat X in x eine isolierte Singularität, so gilt nach einer generischen linearen Koordinatentransformation in S um 0 für die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_k$ von f, daß*

$$X_{k-i} = \{y \in X \mid f_1(y) = \cdots = f_i(y) = 0\}$$

für $0 \leqq i \leqq k$ mit der durch $f_1, \ldots, f_i$ definierten Strukturgarbe ein $(m-i)$-dimensionaler vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität in $x \in X_{k-i}$ ist. Insbesondere gilt für die analytische Einschränkung $(f_{i+1}, \ldots, f_j) \mid X_{k-i}: X_{k-i} \to \mathbb{C}^{j-i}$: $\dim_x C((f_{i+1}, \ldots, f_j) \mid X_{k-i}) = \dim_x C(f_1, \ldots, f_j) \cap X_{k-i} = j-i-1$ für $0 \leqq i < j \leqq k$.

Beweis. Durch wiederholte Anwendung von Satz 1 aus [27], II.4.

Proposition 1.11. *Sei X ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ und $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung in die k-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit S, $k \geqq 0$, mit $\dim_x C(f) < m$. Dann gilt:*

i) *$\Omega^p_{X/S,x}$ ist ein torsionsfreier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul für $0 \leqq p < \mathrm{codim}_x C(f)$.*

ii) *$\Omega^p_{X/S,x}$ ist ein Torsionsmodul für $p > m-k$.*

iii) *Hat X in x eine isolierte Singularität, so ist $\dim_{\mathbb{C}} T\Omega^m_{X,x} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C(X),x}$.*

Beweis. $T\Omega^p_{X/S,x}$ bezeichne den $\mathcal{O}_{X,x}$-Torsionsmodul von $\Omega^p_{X/S,x}$. Dann folgt i) mit Hilfe von Proposition 1.7 aus der Tatsache, daß für alle $p \geqq 0$ gilt:

$$T\Omega^p_{X/S,x} = \mathrm{Kern}(\lambda df: \Omega^p_{X/S,x} \to \Omega^{p+r+k}_{G,x} \otimes \mathcal{O}_{X,x})\,.$$

Denn $\mathrm{Kern}(\lambda df)$ ist auf $C(f)$ konzentriert, also ein Torsionsmodul und $\Omega^p_{X/S,x}/\mathrm{Kern}(\lambda df)$ ist unter λdf isomorph zu einem Untermodul eines freien Moduls.

ii) ist trivial, da für $p > m-k$ $\Omega^p_{X/S}$ auf $C(f)$ konzentriert ist.

Für iii) nehmen wir an, daß $X \subset G \subset \mathbb{C}^N$ durch holomorphe Funktionen $g_1, \ldots, g_r$, $N-r=m$, definiert sei, die wie in Lemma 1.10 gewählt seien.

Nach dem de Rham-Lemma ist die folgende Sequenz exakt:

$$(\Omega_{G,x}^{m-1})^r \xrightarrow{\varphi} \Omega_{G,x}^m \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \Omega_{G,x}^N \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{G,x}/\mathscr{C}(g)_x \to 0$$

mit $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_r) = \sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge \omega_i$, $\tilde{\lambda}(\omega) = dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r \wedge \omega$ und π als kanonischer Restklassenabbildung.

Diese Sequenz ist somit der Beginn einer freien Auflösung von $R := \mathcal{O}_{G,x}/\mathscr{C}(g)_x$. Daher folgt aus der Definition von Tor mit $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{G,x}$

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}(R, \mathcal{O}_{X,x}) \cong \mathrm{Kern}(\lambda : \Omega_{X,x}^m \to \mathcal{O}_{X,x}) = T\Omega_{X,x}^m .$$

Zur Berechnung von Tor können wir aber auch eine freie $\mathcal{O}$-Auflösung von $\mathcal{O}_{X,x}$ wählen, z. B. den Koszulkomplex $K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(g)$ bezüglich $g = (g_1, \ldots, g_r)$ (vgl. [25]). Dann ist $K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(R; g) = K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(g) \otimes R$ der Koszulkomplex von R bezüglich g und es gilt

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}(R, \mathcal{O}_{X,x}) \cong H_1(K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(R; g)) .$$

Da $g_1, \ldots, g_r$ so gewählt waren, daß $g_1, \ldots, g_{r-1}$ eine R-Sequenz bilden, ist $H_1(K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(R; g)) \cong H_1(K_{\cdot}^{\mathcal{O}}(R'; g_r)) \cong \mathrm{Kern}(g_r)$, wo $R' = R/(g_1, \ldots, g_{r-1})$ und $g_r : R' \to R'$ die Multiplikation mit g_r ist. Die Behauptung folgt nun aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Kern}(g_r) \to R' \xrightarrow{g_r} R' \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}(X)_x \to 0 .$$

Bemerkung. Proposition 1.11 i) und Lemma 1.8 für den absoluten Komplex wurden von Vetter bereits in [25] auf algebraischem Wege bewiesen. Darüber hinaus gilt, wie von Vetter und Lebelt (Dissertation, TU Clausthal, 1973) gezeigt wurde, daß für einen vollständigen Durchschnitt X und $x \in C(X)$ die Torsionsfreiheit von $\Omega_{X,x}^p$ auch $\mathrm{codim}_x C(X) > p$ impliziert. Für isolierte Singularitäten folgt das auch aus Proposition 1.11 iii). Die zusätzlich erhaltene Formel benötigen wir jedoch später bei der Berechnung der Milnorzahl.

Für später notieren wir noch eine einfache Folgerung.

Lemma 1.12. *Für $f : X \to S$ mögen in x die Bezeichnungen und äquivalenten Aussagen von Lemma 1.4 gelten. Es sei $\dim_x C(X) \leqq k-1$. Dann gilt $\mathscr{C}(f)_x \cdot \Omega_{X/S,x}^{m-k+1} = 0$. Ist X in x regulär oder $k \geqq 2$, so ist $\mathscr{C}(f)_x$ genau das Annulatorideal von $\Omega_{X/S,x}^{m-k+1}$.*

Beweis. Sei X in x regulär oder $k \geqq 2$. Wir wählen die Koordinaten in S wie in Lemma 1.10. Dann folgt aus Proposition 1.7, angewandt auf

$$f' = (f_1, \ldots, f_{k-1}) : X \to \mathbb{C}^{k-1} ,$$

daß die durch die de Rham-Multiplikation induzierte Abbildung df' oder $\lambda df'$

$$\Omega_{X/S,x}^{m-k+1} \to \mathscr{C}(f')_x/\mathscr{C}(f)_x$$

bijektiv ist. Wegen $\dim_x C(f') = \dim_x C(f) - 1$ und da $\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}(f)_x$ Macaulaysch ist, gibt es ein Element aus $\mathscr{C}(f')_x$, das in $\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}(f)_x$ einen Nichtnullteiler repräsentiert. Also ist $\mathscr{C}(f)_x$ das Annulatorideal von $\mathscr{C}(f')_x/\mathscr{C}(f)_x$.

Da $\mathscr{C}(f)$ und $\Omega_{X/S}^p$ mit Basiswechsel verträglich sind, folgt $\mathscr{C}(f)_x \cdot \Omega_{X/S,x}^m = 0$ im Fall $k = 1$ aus dem eben bewiesenen.

§ 2. Der Gauß-Manin-Zusammenhang

2.1. Die lokale Picard-Lefschetz-Monodromie

Wir erinnern an die topologische Beschreibung der Monodromie einer isolierten Singularität.

Es sei Y ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt, $x \in Y$, und $f: Y \to \mathbb{C}^k$, $f(x) = 0$, eine holomorphe Abbildung. Wir setzen in diesem Paragraphen voraus:

i) $\dim_x C(f) = k - 1$,

ii) $C(f) \cap f^{-1}(0) \subset \{x\}$.

Die Bedingungen i) und ii) sind zusammen äquivalent zu ii) und

i′) $\dim_x C(X) \leqq k - 1$.

Lemma 1.4 liefert äquivalente Bedingungen zu ii).

Dann ist Y in x reduziert. Ist $n := \dim_x f^{-1}(0)$ $(= m - k) \geqq 1$, so ist sogar $f^{-1}(0)$ in x reduziert und Y in x normal (vgl. Lemma 1.1 und die anschließende Bemerkung).

Um die Singularität von $f^{-1}(0)$ in x zu untersuchen, wurde von Milnor für Hyperflächensingularitäten (d. h. Y regulär, $k = 1$) und für spezielle Beispiele auch von Brieskorn die folgende Methode entwickelt, die Hamm auf den Fall vollständiger Durchschnitte erweitert hat.

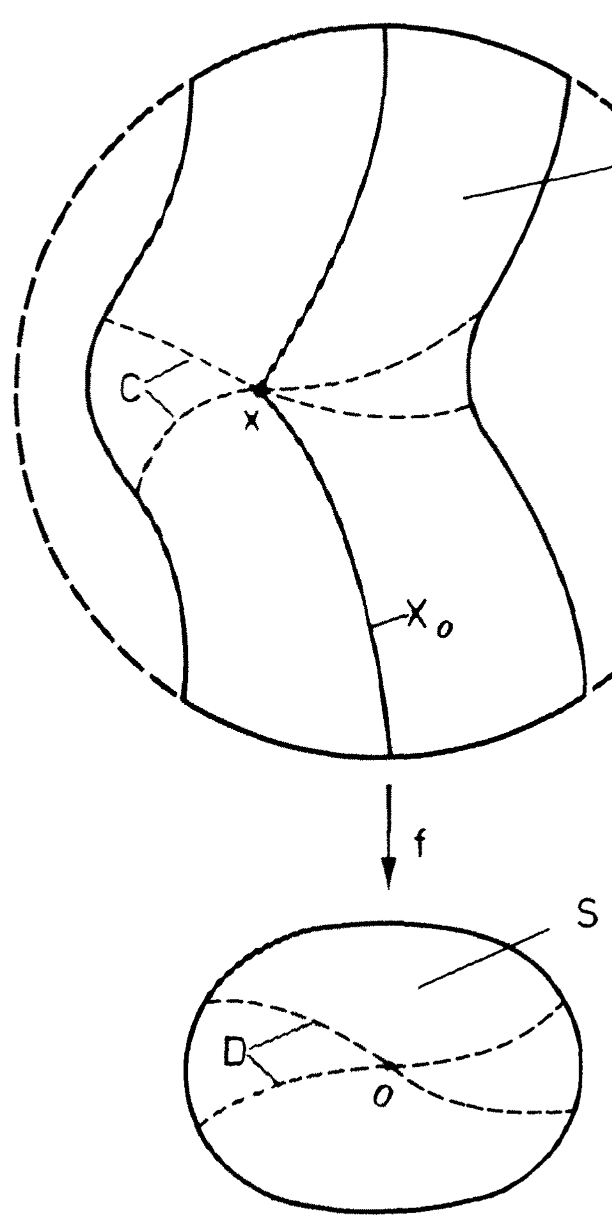
Wir nehmen an, daß Y in ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^N$ eingebettet ist und wählen geeignete Umgebungen von x in Y und von 0 in $\mathbb{C}^k$:

$$X = \{y \in Y \mid \|y - x\| < \varepsilon,\ \|f(y)\| < \delta\},$$

$$S = \{t \in \mathbb{C}^k \mid \|t\| < \delta\},$$

wobei $0 < \delta \ll \varepsilon$ hinreichend klein gewählt seien. Die Einschränkung von f auf X sei ebenfalls mit f bezeichnet,

$$f: X \to S.$$



Ist $C \subset X$ die kritische Menge von f und $D \subset S$ die Menge der kritischen Werte, so setzen wir

$$S' = S - D$$
$$X' = X - f^{-1}(D).$$

Die Fasern $X_t = f^{-1}(t) \subset X$, $t \in S$, sind dann n-dimensionale vollständige Durchschnitte, die höchstens isolierte Singularitäten haben und die genau für $t \in S'$ komplexe Mannigfaltigkeiten sind. Darüberhinaus gilt:

Satz 2.1 (Milnor [19], Hamm [11]). *Die Einschränkung $f: X' \to S'$ ist ein lokal-triviales differenzierbares Faserbündel, dessen Faser den Homotopietyp eines Bouquets $S^n \vee \cdots \vee S^n$ von n-dimensionalen Sphären hat.*

Die Anzahl der Sphären in dem Bouquet, also die mittlere Bettizahl (bzgl. reduzierte Homologie) von X_t, $t \in S'$, wird *Milnorzahl* von f in x genannt und mit μ bezeichnet. Da $X' \to S'$ ein Faserbündel ist, operiert für $t \in S'$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(S', t)$ auf der singulären Homologie oder Kohomologie der Faser. Die zugehörige Darstellung

$$\varrho_{\mathbb{Z}}: \pi_1(S', t) \to \operatorname{Aut}(H^n(X_t, \mathbb{Z})), \qquad t \in S'$$

heißt die *(lokale Picard-Lefschetz-) Monodromie* von f in x.

Brieskorns Theorie des singulären Gauß-Manin-Zusammenhangs ermöglicht es, die *komplexe Monodromie*

$$\varrho_{\mathbb{C}}: \pi_1(S', t) \to \operatorname{Aut}(H^n(X_t, \mathbb{C}))$$

zu berechnen, die schon einen großen Teil der Information über die Singularität enthält. Z. B. liefert sie Kriterien dafür, wann die singuläre Faser X_0 eine topologische Mannigfaltigkeit ist (vgl. Milnor [19], Hamm [11]). Im Hyperflächenfall entscheidet sie für ungerades n sogar über die differenzierbare Struktur des Umgebungsrandes der Singularität (vgl. [19]).

Die komplexe Monodromie kann man auch wie folgt beschreiben: Die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in dem flachen Vektorbündel $H^n = \bigcup_{t \in S'} H^n(X_t, \mathbb{C})$ ist kanonisch isomorph zu der lokal freien Garbe $R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{S'}$, wobei $R^n f_* \mathbb{C}_{X'}$ die n-te direkte Bilgarbe der auf X' konstanten Garbe $\mathbb{C}_{X'}$ ist. Das flache Vektorbündel H^n bzw. die Garbe $R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ besitzt einen kanonischen integrablen Zusammenhang (vgl. [5])

$$\nabla: R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'} \to (R^n f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}) \oplus_{\mathcal{O}_{S'}} \Omega^1_{S'},$$

der durch $\nabla(\omega \otimes f) = \omega \otimes df$ charakterisiert ist. Seine horizontalen Schnitte, d. h. der Kern von ∇, sind also gerade die lokal konstanten Schnitte von H^n. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S', t)$ operiert dann (vgl. [5], I.1.) auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $(R^n f_* \mathbb{C}_{X'})_t$ der kanonisch isomorph zu $H^n(X_t, \mathbb{C})$ ist (vgl. Lemma 2.4). Die Monodromie von ∇ identifiziert sich kanonisch mit der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie von f in x.

Es ist das Ziel, den kanonischen Zusammenhang ∇ auf S' zu einem „singulären" Zusammenhang auf ganz S – dem Gauß-Manin-Zusammenhang – zu erweitern. Eine kohärente Fortsetzung von $R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ auf S wird die relative de Rham-Kohomologiegarbe $\mathcal{H}^n_{DR}(X/S)$ sein. Daher stellen wir im folgenden Abschnitt die benötigten Eigenschaften der relativen de Rham-Kohomologie zusammen.

2.2. *Die relative de Rham-Kohomologie*

Es sei $f: X \to S$ wie in § 2.1. Wir betrachten den Komplex $\Omega^\cdot_{X/S}$ der relativen Differentialformen von X über S mit dem durch die äußere Differentiation induzierten Differentialoperator. Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\Omega^\cdot_{X/S}$ außerhalb der kritischen Menge C von f eine Auflösung der topologischen Urbildgarbe $f^\cdot \mathcal{O}_S$ ist (vgl. z. B. [2], Lemma 1.1). Umgekehrt gilt, wie aus § 5.2i) hervorgeht, daß die Exaktheit der Sequenz $0 \to (f^\cdot \mathcal{O}_S)_x \to \Omega^\cdot_{X/S,x}$ die Regularität von f in x impliziert.

Der Komplex der Bildgarben $f_* \Omega^\cdot_{X/S}$ ist ein Komplex von $\mathcal{O}_S$-Moduln und die Kohomologiegarben $\mathcal{H}^p(f_* \Omega^\cdot_{X/S})$ sind die relativen de Rham-Kohomologiegarben von X über S. Daß sie sich so einfach beschreiben lassen, liegt an der speziellen Wahl von X und S. Ist $f: Y \to T$ ein beliebiger Morphismus komplexer Räume, so definiert man allgemein die relative de Rham-Kohomologie von Y über T

$$\mathcal{H}^\cdot_{DR}(Y/T) := \mathbb{R}^\cdot f_*(\Omega^\cdot_{Y/T}),$$

als die Hyperkohomologie des Funktors f_* bezüglich des Komplexes $\Omega^\cdot_{Y/T}$. Dies ist die Kohomologie des (bzgl. der totalen Graduierung einfachen) Komplexes $f_* \mathcal{W}^{\cdot\cdot}$, wo $\mathcal{W}^{\cdot\cdot}$ die kanonische welke oder irgendeine andere azyklische Cartan-Eilenberg-Auflösung des Komplexes $\Omega^\cdot_{Y/T}$ ist (vgl. [10], EGA 0, 11.4).

Bezüglich der beiden Filtierungen in $f_* \mathcal{W}^{\cdot\cdot}$ hat man zwei Spektralsequenzen mit den E_2-Termen

$$'E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(R^q f_*(\Omega^\cdot_{Y/T})) \Rightarrow \mathbb{R}^\cdot f_*(\Omega^\cdot_{Y/T})$$
$$''E_2^{pq} = R^p f_*(\mathcal{H}^q(\Omega^\cdot_{Y/T})) \Rightarrow \mathbb{R}^\cdot f_*(\Omega^\cdot_{Y/T}).$$

Hierbei bezeichnet $R^p f_*$ die p-te Bildgarbe und $R^q f_*(\Omega^\cdot_{Y/T})$ den Komplex $R^q f_*(\Omega^i_{Y/T})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Nach der Wahl von X und S gibt es für jedes $t \in S$ eine Umgebungsbasis von Polyzylindern V, s. d. $f^{-1}(V) \subset X$ Steinsch ist. Daher entartet die erste Spektralsequenz und wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^p(f_* \Omega^\cdot_{X/S}) \cong \mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{X/S}).$$

Entsprechend gilt $\mathcal{H}^p(f_* \Omega^\cdot_{X'/S'}) \cong \mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{X'/S'})$.

Der folgende Satz ist für die Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs fundamental.

Satz 2.2 (Hamm [13], Saito [21]). *Die relativen de Rham-Kohomologiegarben $\mathcal{H}^p_{DR}(X/S)$ sind kohärente analytische Garben auf S.*

Bemerkung. Hamm und Saito benutzen bei dem schwierigen Beweis die Methoden von Kiehl bzw. Knorr. Die Methode aus [2], die den Algebraisierungssatz von Mather und den Grauertschen Kohärenzsatz benutzt, läßt sich auch auf unseren Fall verallgemeinern, liefert den Satz jedoch nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen über f.

Wir zeigen jetzt, daß die Einschränkung von $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$ auf S' mit der Garbe der holomorphen Schnitte in dem flachen Vektorbündel H^n übereinstimmt.

Proposition 2.3. *Die Einschränkung der relativen de Rham-Kohomologie auf das Komplement der kritischen Werte ist lokal frei. Für alle p hat man kanonische Isomorphismen*

$$\mathscr{H}^p_{DR}(X/S)\,|\,S' \cong R^p f_*(\mathbb{C}_{X'}) \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$$

$$\mathscr{H}^p_{DR}(X/S)_t \cong H^p(X_t, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S,t} \quad \text{für} \quad t \in S'.$$

Insbesondere verschwindet $\mathscr{H}^p_{DR}(X'/S')$ für $p \neq 0, n$ wegen der Ergebnisse von Milnor und Hamm.

Beweis. Die Einschränkung liefert einen Isomorphismus $\mathscr{H}^p_{DR}(X/S)\,|\,S' \cong \mathscr{H}^p_{DR}(X'/S')$. Da $\Omega^{\cdot}_{X'/S'}$ eine Auflösung von $f^{\cdot}\mathcal{O}_{S'}$ ist, entartet die zweite Spektralsequenz und wir erhalten

$$\mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X'/S'}) \cong R^p f_*(f^{\cdot}\mathcal{O}_{S'}).$$

Das cup-Produkt induziert einen Homomorphismus

$$R^p f_*(\mathbb{C}_{X'}) \otimes \mathcal{O}_{S'} \to R^p f_*(f^{\cdot}\mathcal{O}_{S'}),$$

der halmweise der gewünschte Isomorphismus ist. Das folgt aus dem folgenden Lemma und dem universellen Koeffiziententheorem.

In § 2.1 hatten wir X als die Menge $\{y \in Y \mid \|y - x\| < \varepsilon,\ \|f(y)\| < \delta\}$ definiert, und $f: X \to S$ war die Einschränkung von $f: Y \to \mathbb{C}^k$. Sei nun $\bar{X} = \{y \in Y \mid \|y - x\| \leqq \varepsilon,\ \|f(y)\| < \delta\}$ und $\bar{f}: \bar{X} \to S$ die Einschränkung von $f: Y \to \mathbb{C}^k$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 2.4. *Ist $\mathscr{F}$ irgendeine Garbe von abelschen Gruppen auf S, so induziert die Einschränkung einen Isomorphismus*

$$R^p \bar{f}_*(\bar{f}^{\cdot}\mathscr{F}) \cong R^p f_*(f^{\cdot}\mathscr{F}).$$

Insbesondere folgt hieraus der kanonische Isomorphismus

$$R^p f_*(f^{\cdot}\mathscr{F})_t \cong H^p(X_t, \mathscr{F}_t) \quad \text{für} \quad t \in S.$$

Beweis. Analog zum Beweis der zweiten Behauptung in Lemma 1.4 aus [2].

2.3. Der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang

Sei $f: X \to S$ wie in § 2.1. Wir definieren den singulären Gauß-Manin-Zusammenhang von X über S durch einen verbindenden Homomorphismus in einer langen exakten Hyperkohomologiesequenz (vgl. [14] für den regulären Fall).

Wir definieren einen neuen Komplex $F^{\cdot}_{X/S}$ durch

$$F^p_{X/S} = \Omega^p_X \Big/ \sum_{1 \leq i < j \leq k} df_i \wedge df_j \wedge \Omega^{p-2}_X ,$$

wenn $f_1, \ldots, f_k$ wieder die Komponenten von f bezüglich lokaler Koordinaten in S sind. Ist $K^{\cdot}$ ein beliebiger Komplex, so sei $K^{\cdot}_{(n)}$ der Komplex mit $K^p_{(n)} = K^p$ für $p \leq n$ und $K^p_{(n)} = 0$ für $p > n$. Wir haben dann die exakte Sequenz von Komplexen

$$(*) \quad 0 \to \Omega^{\cdot}_{X/S(n)} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} f^*\Omega^1_S \xrightarrow{\phi} F^{\cdot+1}_{X/S\,(n+1)} \to \Omega^{\cdot+1}_{X/S(n+1)} \to 0 ,$$

wo ϕ durch die kanonische Abbildung $\Omega^p_X \otimes f^*\Omega^1_S \to \Omega^{p+1}_X$, $\sum_{i=1}^k \omega_i \otimes dt_i \mapsto \sum_{i=1}^k df_i \wedge \omega_i$ induziert wird. Die Injektivität von ϕ folgt, wenn wir $\sum_{i=1}^k df_i \wedge \omega_i$ mit $df_1 \wedge \cdots \wedge df_{i-1} \wedge df_{i+1} \wedge \cdots \wedge df_k$ multiplizieren und Proposition 1.7 anwenden. Die zugehörige lange exakte Hyperkohomologiesequenz hat die Gestalt

$$\begin{aligned} &\cdots \to \mathscr{H}^{p-1}_{DR}(X/S) \bigotimes_{\mathcal{O}_S} \Omega^1_S \to \mathbb{R}^p f_*(F^{\cdot}_{X/S}) \to \mathscr{H}^p_{DR}(X/S) \xrightarrow{\delta} \\ (**) \qquad &\to \mathscr{H}^p_{DR}(X/S) \otimes \Omega^1_S \to \cdots \\ &\cdots \to \mathbb{R}^n f_*(F^{\cdot}_{X/S}) \to \mathscr{H}^n_{DR}(X/S) \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^n f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)}) \otimes \Omega^1_S \to \cdots . \end{aligned}$$

Der Kokern der Inklusion von $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$ in $\mathbb{R}^n f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)})$ ist isomorph zu $df_*\Omega^n_{X/S}$, also auf die Menge der kritischen Werte D von f konzentriert. Nach Lemma 1.5 ist D eine Hyperfläche in S, deren Idealgarbe $\mathscr{D}(f)$ von einer auf S holomorphen Funktion erzeugt wird, die wir mit h bezeichnen.

Es sei $\mathcal{O}_S(D)$ die Garbe der meromorphen Funktionskeime auf S, die höchstens längs D Pole haben und $\Omega^1_S(D) = \Omega^1_S \bigotimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(D)$. Wegen $h \cdot f_*\Omega^{n+1}_{X/S} = 0$ (vgl. Lemma 1.12) induziert daher δ durch $\omega \mapsto h \cdot \delta(\omega) \otimes 1/h$ eine Abbildung

$$\nabla_{X/S} : \mathscr{H}^n_{DR}(X/S) \to \mathscr{H}^n_{DR}(X/S) \otimes \Omega^1_S(D) ,$$

den *(lokalen) singulären Gauß-Manin-Zusammenhang* von X über S.

$\nabla_{X/S}$ besitzt offenbar die Eigenschaften eines singulären Zusammenhanges mit Polstellen längs D, d. h. es gilt:

i) $\nabla_{X/S}$ ist $\mathbb{C}$-linear,

ii) $\nabla_{X/S}(g \cdot \omega) = g \cdot \nabla_{X/S}(\omega) + \omega \otimes dg$ für $g \in \mathcal{O}_S$ und $\omega \in \mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$.

Wir zeigen jetzt, daß $(\mathscr{H}^n_{DR}(X/S), \nabla_{X/S})$ tatsächlich eine singuläre Fortsetzung des in § 2.1 definierten transzendenten Zusammenhangs $(R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}) \otimes \mathcal{O}_{S'}, \nabla)$ ist. Dazu ist zu zeigen, daß die horizontalen Schnitte der Einschränkung $\nabla_{X/S} | S'$ unter dem Isomorphismus $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S) | S' \cong R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}) \otimes \mathcal{O}_{S'}$ gerade die lokalen Schnitte von $R^n f_*(\mathbb{C}_{X'})$ sind.

Aus der (auf S' eingeschränkten) exakten Sequenz $(**)$ folgt, daß die horizontalen Schnitte von $\nabla_{X/S} | S'$ gerade die Bilder der Schnitte von $\mathbb{R}^n f_*(F^{\cdot}_{X'/S'})$ in $\mathscr{H}^n_{DR}(X'/S')$ sind. Die kanonische Restklassenabbildung $F^{\cdot}_{X'/S'} \to \Omega^{\cdot}_{X'/S'}$ induziert eine Abbildung der zweiten Spektralsequenzen

$$\begin{array}{ccc} {}_1''E_2^{pq} = R^p f_*(\mathscr{H}^q(F^{\cdot}_{X'/S'})) & \Rightarrow & \mathbb{R}^{\cdot} f_*(F^{\cdot}_{X'/S'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_2''E_2^{pq} = R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X'/S'})) & \Rightarrow & \mathscr{H}^{\cdot}_{DR}(X'/S') \,. \end{array}$$

Wegen ${}_2''E_2^{pq} = 0$ für $q > 0$ ist das Bild von $\mathbb{R}^n f_*(F^{\cdot}_{X'/S'})$ in $\mathscr{H}^n_{DR}(X'/S') \cong {}_2''E_2^{n0}$ gerade das Bild von $\bigoplus_{p+q=n} {}_1''E_\infty^{pq}$ in $\bigoplus_{p+q=n} {}_2''E_\infty^{pq} \cong {}_2''E_2^{n0} = R^n f_*(f^{\cdot}\mathcal{O}_{S'})$, also das Bild von ${}_1''E_\infty^{n0}$ in ${}_2''E_2^{n0}$. Da ${}_1''E_2^{n0} \to {}_1''E_\infty^{n0}$ surjektiv ist, ist dies das Bild von ${}_1''E_2^{n0} = R^n f_* \mathbb{C}_{X'}$ in ${}_2''E_2^{n0}$, das bei dem Isomorphismus $R^n f_*(f^{\cdot}\mathcal{O}_{S'}) \cong R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ auf $R^n f_* \mathbb{C}_{X'}$ abgebildet wird.

Wir fassen zusammen:

Satz 2.5. *Ist $f: X \to S$ wie in § 2.1, so existiert auf der relativen de Rham-Kohomologiegarbe $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$ ein singulärer Zusammenhang $\nabla_{X/S}$ mit Polstellen längs der Menge der kritischen Werte $D \subset S$ (der lokale singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang), dessen Einschränkung auf $S' = S - D$ mit dem durch die Milnor-Hamm-Faserung definierten transzendenten Zusammenhang übereinstimmt. Insbesondere identifiziert sich die Monodromie von $\nabla_{X/S} | S'$ mit der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie.*

Wir zeigen jetzt, wie sich $\nabla_{X/S}$ auf $\mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ mittels des Isomorphismus mit $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$ explizit beschreiben läßt (vgl. Brieskorn [2] und Saito [22]):

Eine Klasse $[\omega] \in \mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ wird durch einen Kozykel in $f_*\Omega^n_{X/S}$ und folglich durch ein Element $\omega \in f_*\Omega^n_X$ mit

$$d\omega = \sum_{i=1}^{k} df_i \wedge \alpha_i\,, \qquad \alpha_i \in f_*\Omega^n_X$$

repräsentiert. Hierbei sind $f_1, \ldots, f_k$ die Komponenten von f bezüglich Koordinaten $t_1, \ldots, t_k$ in S. Sei $[\alpha_i]$ die Klasse von α_i in $f_*\Omega^n_{X/S}/df_*\Omega^{n-1}_{X/S}$. Ist h ein Erzeugendes des Ideals der kritischen Werte $\mathscr{D}(f)$, so gilt $h \cdot [\alpha_i] \in \mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ (vgl. Lemma 1.12), und die Formel für $\nabla_{X/S}: \mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}) \to \mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}) \otimes \Omega^1_S(D)$ ist

$$\boxed{\nabla_{X/S}[\omega] = \sum_{i=1}^{k} h \cdot [\alpha_i] \otimes dt_i/h}$$

Man beachte, daß das nicht bedeutet, daß der Gauß-Manin-Zusammenhang nur einen Pol erster Ordnung hat, denn h braucht natürlich nicht reduziert zu sein.

Für die praktische Rechnung ist es nützlich, die Definition des singulären Gauß-Manin-Zusammenhangs von $\mathscr{H} := \mathscr{H}^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ auf größere Garben $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$, $\mathscr{H}'''$ zu erweitern:

Die de Rham-Multiplikationen λ, df und λdf (vgl. § 1.2) induzieren Abbildungen $\lambda: f_*\Omega^m_X \to f_*\mathcal{O}_X$, $df: f_*\Omega^n_{X/S} \to f_*\Omega^m_X$ und $\lambda df: f_*\Omega^n_{X/S} \to f_*\mathcal{O}_X$, für die die Aussagen von Proposition 1.7 entsprechend gelten. Denn wegen der Wahl von X und S ist mit $U \subset S$ auch $f^{-1}(U) \subset X$ Steinsch, und daher ist f_* auf der Kategorie der kohärenten Garben ein exakter Funktor. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}' &= f_*\Omega^n_{X/S}/d f_*\Omega^{n-1}_{X/S}\\
\mathscr{H}'' &= f_*\Omega^m_X/df(d f_*\Omega^{n-1}_{X/S})\\
\mathscr{H}''' &= f_*\mathcal{O}_X/\lambda df(d f_*\Omega^{n-1}_{X/S})\,.
\end{aligned}$$

Ist X regulär, so stimmen $\mathscr{H}''$ und $\mathscr{H}'''$ natürlich überein. Es gibt ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{H}'' \arrow[d, "\lambda"] \\
\mathscr{H} \subset \mathscr{H}' \arrow[urr, hook, "df"] \arrow[rr, hook, "\lambda df"'] & & \mathscr{H}'''\,.
\end{tikzcd}$$

df und λdf sind als Folge des de Rham-Lemmas injektiv, der Kern von λ wird durch die Torsionselemente von $f_*\Omega^m_X$ repräsentiert. Außerhalb der kritischen Werte D sind diese Garben kanonisch isomorph und haben deshalb denselben Rang. Aus der Kohärenz von $\mathscr{H}$ folgt leicht die Kohärenz der anderen Garben.

Proposition 2.6. *$\mathscr{H}', \mathscr{H}'', \mathscr{H}'''$ sind kohärente analytische Garben auf S. Ihr Rang ist wie der von $\mathscr{H}$ gleich der Milnorzahl μ (bzw. $\mu+1$ für $n=0$).*

Da alle vier Garben außerhalb D übereinstimmen, gibt es ganze positive Zahlen r_1, r_2, r_3, so daß gilt:

$$h^{r_1}\cdot\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}\,,\qquad h^{r_2}\cdot\mathscr{H}''\subset df(\mathscr{H}')\cong\mathscr{H}'\,,\qquad h^{r_3}\cdot\mathscr{H}'''\subset\lambda df(\mathscr{H}')\cong\mathscr{H}'\,.$$

Diese Inklusionen gelten für $r_1\geqq 1$ wegen Lemma 1.12, offensichtlich für $r_3\geqq 1$ und für $r_2\geqq 2$ wegen $h\cdot\mathrm{Kern}(\lambda)=0$.

$\nabla_{X/S}$ kann daher folgendermaßen zu einem singulären Zusammenhang mit Polstellen längs D auf $\mathscr{H}'$ und analog auf $\mathscr{H}''$ und $\mathscr{H}'''$ erweitert werden:

$$\begin{aligned}
&\nabla'_{X/S}:\mathscr{H}'\to\mathscr{H}'\otimes\Omega^1_S(D)\,,\\
&\nabla'_{X/S}(\omega)=(1/h)\,\nabla_{X/S}(h\omega)-\omega\otimes(dh/h)\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung. $\nabla'_{X/S}:\mathscr{H}'\to\mathscr{H}'\otimes\Omega^1_S(D)$ wird durch die Abbildung $\lambda df(\mathscr{H}')\to\mathscr{H}'''\otimes\Omega^1_S,\ \lambda df([\omega])\mapsto\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\lambda df_1\wedge\dots\wedge df_{i-1}\wedge df_{i+1}\wedge\dots\wedge df_k\wedge d\omega\otimes dt_i$ induziert. Daher folgt mit Lemma 1.12, daß für reguläres X oder $k>1$ der Pol von $\nabla'_{X/S}$ genau D ist, d. h. es gilt

$$\mathscr{D}(f)=\{g\in\mathcal{O}_S\,|\,g\nabla'_{X/S}:\mathscr{H}'\to\mathscr{H}'\otimes\Omega^1_S\}\,.$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen ziehen wir noch eine Konsequenz für die relative de Rham-Kohomologie. Wir bemerken, daß der Randhomorphismus δ in der exakten Sequenz (**) für $0<p<n$ einen nichtsingulären integrablen Zusammenhang auf $\mathscr{H}^p_{DR}(X/S)$ definiert. Daraus folgt, daß diese Garben lokal frei sind (vgl. [5]). Da sie aber auf $D\subset S$ konzentriert sind, müssen sie verschwinden.

Satz 2.7. *Für $f: X \to S$ wie in § 2.1 und $n > 0$ gilt:*
i) $\mathscr{H}^0_{DR}(X/S) \cong \mathcal{O}_S$.
ii) $\mathscr{H}^p_{DR}(X/S) = 0$ *für* $0 < p < n$.

Für $p > n$ weiß man nur, daß $\mathscr{H}^p_{DR}(X/S)$ eine auf G konzentrierte Torsionsgarbe ist. Es wird vermutet, daß diese Garben für $p > n$ verschwinden ([3, 22]).

§ 3. Regularität und Algebraizität

3.1. Die Regularität des singulären Gauß-Manin-Zusammenhangs

Es sei $f: X \to S$, $f(x) = 0$, wie in § 2.1. Wir zeigen, daß man statt mit der relativen de Rham-Kohomologie auf S auch mit der Kohomologie des relativen Komplexes auf X rechnen kann.

Proposition 3.1. *Es gibt kanonische Isomorphismen*

$$\mathscr{H}^{\cdot}_{DR}(X/S)_0 \cong H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{X/S,x}),$$
$$\mathbb{R}^{\cdot} f_*(\Omega^{\cdot}_X)_0 \cong H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{X,x}).$$

Beweis. Wir betrachten für $t \in S$ die 2. Spektralsequenz

$$''E_2^{pq} = \left(R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))\right)_t \Rightarrow \mathscr{H}^{\cdot}_{DR}(X/S)_t.$$

Sei $q > 0$. Dann ist $\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})$ auf die abgeschlossene Menge $C \subset X$ konzentriert, und es gilt $R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})) \cong R^p(f|C)_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))$. Daher folgt mit [8], 4.11.1

$$''E_2^{pq} \cong H^p(X_t, \mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})).$$

Für $q = 0$ gilt dieser Isomorphismus wegen Lemma 2.4. Es ist

$$''E_2^{pq} = 0 \quad \text{für} \quad p \neq 0, \quad q \neq 0,$$

denn für $q \neq 0$ ist $\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})|X_t$ auf endlich viele Punkte konzentriert. Für $t = 0$ gilt auch $''E_2^{p0} = 0$, da X_0 auf x zusammenziehbar ist. Es folgt $\mathscr{H}^q_{DR}(X/S)_0 \cong {}''E_2^{0q} \cong H^0(X_0, \mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})) \cong \mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})_x = H^q(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$.

Für den absoluten Komplex schließt man genauso.

Bemerkung. Entsprechend sind die kanonischen Homomorphismen

$$\mathscr{H}_0' \to H' := \Omega^n_{X/S,x}/d\Omega^{n-1}_{X/S,x}$$
$$\mathscr{H}_0'' \to H'' := \Omega^m_{X,x}/df(d\Omega^{n-1}_{X/S,x})$$
$$\mathscr{H}_0''' \to H''' := \mathcal{O}_{X,x}/\lambda df(d\Omega^{n-1}_{X/S,x}).$$

Isomorphismen (vgl. die Bezeichnungen von § 2.3). Betrachten wir den Gauß-Manin-Zusammenhang auf $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$, $H', \ldots$ so schreiben wir $\nabla_{X/S,x}$, $\nabla'_{X/S,x}, \ldots$.

Lemma 3.2. *Für alle $t \in S$ gilt*

$$H^p(X_t, \mathbb{C}) = 0 \quad \textit{für} \quad p \neq 0, n.$$

Beweis. Es ist nur noch für $t\in C-0$ etwas zu zeigen. Sei wieder $K^p_{(n)}=K^p$ für $p\leqq n$ und $K^p_{(n)}=0$ für $p>n$ für einen Komplex $K^{\cdot}$. Wir betrachten wieder die 2. Spektralsequenz von $\mathbb{R}^{\cdot}f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)})_t$. Es ist $H^p(X_t,\mathbb{C})\cong {}''E_2^{p0}={}''E_\infty^{p0}\subset \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)})_t=0$ für $p>n$.

Um die Aussage für $0<p<n$ zu beweisen betrachten wir die 2. Spektralsequenz (vgl. Beweis von Proposition 3.1)

$$''E_2^{pq}=\big(R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)}))\big)_t \Rightarrow \mathbb{R}^{\cdot}f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S(n)})_t=:\mathscr{H}_t'^{\,p}.$$

Wegen $''E_2^{pq}=0$ für $q\neq 0,n$ (vgl. Satz 2.7 und obige Bemerkung) gibt es die exakte Gysin-Sequenz (vgl. [8], 4.6.2)

$$\cdots\to {}''E_2^{p-1-n,n}\to {}''E_2^{p0}\to \mathscr{H}_t'^{\,p}\to\cdots.$$

Es gilt $''E_2^{p0}\cong H^p(X_t,\mathbb{C})\otimes\mathcal{O}_{S,t}$, $\mathscr{H}_t'^{\,p}\cong\mathscr{H}^p(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S(n)})_t=0$ für $p\neq 0,n$ und $''E_2^{p-1-n,n}=0$ wegen $p<n$.

Daraus folgt die Behauptung.

Ist $t\in S$ ein beliebiger Punkt, so ist $C\cap X_t$ eine endliche Menge $\{x_i\}_{i\in I(t)}$ mit $C\cap X_t=\emptyset$ für $t\in S'$ und $C\cap X_0=\{x\}$. Seien $V\subset S$ eine hinreichend kleine Umgebung von t und X_i (wie in § 2.1 gewählte) kleine disjunkte Umgebung von x_i in X. Die Beziehung zwischen dem Gauß-Manin-Zusammenhang von X/S in t und den lokalen Gauß-Manin-Zusammenhängen von X_i/V in t wird nun geklärt:

Proposition 3.3. *Es gibt ein kanonisches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & (R^n f_*\mathbb{C}_X)_t\bigotimes\limits_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{S,t} & \to & \mathscr{H}^n_{DR}(X/S)_t & \to & \bigoplus\limits_{i\in I(t)}\mathscr{H}^n_{DR}(X_i/V)_t & \to 0\\
& \Big\downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nabla_{X/S,t}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \oplus\nabla_{X_i/V,t}} & \\
0\to & (R^n f_*\mathbb{C}_X)_t\bigotimes\limits_{\mathbb{C}}\Omega^1_S(D)_t & \to & \mathscr{H}^n_{DR}(X/S)_t\otimes\Omega^1_S(D)_t & \to & \bigoplus\limits_{i\in I(t)}\mathscr{H}^n_{DR}(X_i/V)_t\otimes\Omega^1_S(D)_t & \to 0
\end{array}$$

Hierbei ist ∇ der nicht-singuläre Zusammenhang $\nabla(\omega\otimes g)=\omega\otimes dg$ und $\nabla_{X_i/V}$ der lokale singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang von X_i über V.

Beweis. Aus dem Beweis von Proposition 3.1 und aus Lemma 3.2 folgt, daß für die 2. Spektralsequenz von $\mathscr{H}^{\cdot}_{DR}(X/S)_t$ gilt: $''E_2^{pq}\cong H^p(X_t,\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))=0$ für $p\neq 0,n$. Daher gibt es nach [8] 4.5.1 und 4.6.1 eine exakte Sequenz

$$\cdots\to {}''E_2^{0,n-1}\to {}''E_2^{n0}\to\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)_t\to {}''E_2^{0n}\to {}''E_2^{n1}\to\cdots.$$

Es ist $''E_2^{0,n-1}={}''E_2^{n1}=0$, $''E_2^{n0}\cong(R^n f_*\mathbb{C}_X)_t\otimes\mathcal{O}_{S,t}$ und $''E_2^{0n}\cong\bigoplus\limits_{i\in I(t)}\mathscr{H}^n_{DR}(X_i/V)_t$ (vgl. Proposition 3.1). Daß die Zusammenhänge mit der exakten Sequenz verträglich sind, überlegt man sich anhand der expliziten Beschreibung von $\nabla_{X/S}$.

Bemerkung. Entsprechend hat man eine exakte Sequenz

$$0\to(R^n f_*\mathbb{C}_X)_t\otimes\mathcal{O}_{S,t}\to\mathscr{H}'(X/S)_t\to\bigoplus_{i\in I(t)}\mathscr{H}'(X_i/V)_t\to 0,$$

die mit den angegebenen Zusammenhängen verträglich ist.

Das Verhalten des Gauß-Manin-Zusammenhangs bei Basiswechsel und Proposition 3.3 gestatten es bei den folgenden Untersuchungen, sich auf den Fall eines 1-dimensionalen Basisraumes zu beschränken. Wir betrachten den Basiswechsel

$$\begin{array}{ccc} X\times_S T = Y & \xrightarrow{\varphi'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \xrightarrow[\varphi]{} & S, \end{array}$$

wobei $T\subset\mathbb{C}^s$ eine kleine offene Kugel um 0 und $\varphi: T\to S$ endlich mit $\varphi(0)=0$, $\varphi^{-1}(D)\neq T$ ist. Dann ist $D'=D(f')\subset T$ niederdimensional und $f': Y\to T$ erfüllt die Bedingungen i) und ii) von § 2.1. Weiter gelten auch alle globalen Aussagen von X/S entsprechend für Y/T, insbesondere ist der Gauß-Manin-Zusammenhang von Y/T erklärt.

Proposition 3.4. *Der Gauß-Manin-Zusammenhang ist mit dem Basiswechsel $\varphi: T\to S$ verträglich. D. h. es gibt ein kanonisches kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*\mathscr{H}'(X/S) & \xrightarrow{\varphi^*\nabla'_{X/S}} & \varphi^*\mathscr{H}'(X/S)\bigotimes\limits_{\mathcal{O}_T}\Omega^1_T(D') \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\psi} & & {\scriptstyle\psi\otimes 1}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathscr{H}'(Y/T) & \xrightarrow[\nabla'_{Y/T}]{} & \mathscr{H}'(Y/T)\bigotimes\limits_{\mathcal{O}_T}\Omega^1_T(D'). \end{array}$$

Hierbei ist ψ die Komposition der Isomorphismen

$$\varphi^*\mathscr{H}'(X/S)\xrightarrow{\cong} f'_*\varphi'^*\Omega^n_{X/S}/d f'_*\varphi'^*\Omega^{n-1}_{X/S}\xrightarrow{\cong}\mathscr{H}'(Y/T)=f'_*\Omega^n_{Y/T}/d f'_*\Omega^{n-1}_{Y/T},$$

während $\varphi^*\nabla'_{X/S}$ wie folgt erklärt ist: Wir betrachten die Komposition

$$\varphi^{\cdot}\mathscr{H}'(X/S)\bigotimes_{\varphi^{\cdot}\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T\xrightarrow{\varphi^{\cdot}\nabla'_{X/S}\otimes 1}\varphi^{\cdot}\Big(\mathscr{H}'(X/S)\bigotimes_{\mathcal{O}_S}\Omega^1_S(D)\Big)\bigotimes_{\varphi^{\cdot}\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T$$
$$\cong\varphi^*\mathscr{H}'(X/S)\bigotimes_{\mathcal{O}_T}\varphi^*\Omega^1_S(D)\xrightarrow[1\otimes\varkappa]{}\varphi^*\mathscr{H}'(X/S)\bigotimes_{\mathcal{O}_T}\Omega^1_T(D'),$$

wobei $\varkappa$ durch die kanonische Abbildung $\varphi^*\Omega^1_S\to\Omega^1_T$ induziert ist. Dann ist $\varphi^*\nabla'_{X/S}(\omega\otimes g)=1\otimes\varkappa(\varphi^{\cdot}\nabla'_{X/S}(\omega)\otimes g)+\omega\otimes dg$.

Bemerkungen. 1) Entsprechend hat man ein kanonisches kommutatives Diagramm mit $\mathscr{H}^n_{DR}$ statt mit $\mathscr{H}'$. Ob aber $\psi:\varphi^*\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)\to\mathscr{H}^n_{DR}(Y/T)$ ein Isomorphismus ist, ist ungeklärt (notwendig ist die Freiheit von $\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)$, vgl. § 4.2). Anders als bei $\mathscr{H}'$ ist ψ jedoch nicht bijektiv, falls φ die Inklusion eines Punktes von D' ist.

2) Ist $\varphi(0)\neq 0$, dann ist $\psi:\varphi^*\mathscr{H}'(X/S)\to\mathscr{H}'(Y/T)$ ebenfalls ein Isomorphismus. Da aber Y_0 mehrere isolierte Singularitäten haben kann, wurde der Gauß-Manin-Zusammenhang von Y/T für diese Situation nicht explizit definiert. Die vorstehende Proposition rechtfertigt es, wenn wir den Gauß-Manin-Zusammenhang von Y/T auf $\mathscr{H}'(Y/T)$ durch $\nabla'_{Y/T}=(\psi\otimes 1)\circ\varphi^*\nabla'_{X/S}\circ\psi^{-1}$ definieren.

Beweis von Proposition 3.4. Wir zeigen, daß ψ halmweise ein Isomorphismus ist. Dabei wird die Voraussetzung $\varphi^{-1}(D)\neq T$ nicht benötigt.

Es ist $(\varphi^* \mathscr{H}'(X/S))_0 \cong \Omega^n_{X/S,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{O}_{T,0}/d\left(\Omega^{n-1}_{X/S,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{O}_{T,0}\right)$ wegen Proposition 3.1. Da φ endlich ist, gilt in $y=(x,0)$ $\mathcal{O}_{Y,y} \cong \mathcal{O}_{X,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{O}_{T,0}$ und daher $\Omega^{\cdot}_{X/S,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathcal{O}_{T,0} \cong \Omega^{\cdot}_{X/S,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y} \cong \Omega^{\cdot}_{Y/T,y}$ ([10], EGA IV, 16.4.5). Wegen

$\mathscr{H}'(Y/T)_0 \cong \Omega^n_{Y/T,y}/d\Omega^{n-1}_{Y/T,y}$ folgt die Behauptung für den Halm über 0. Für die Nachbarhalme führt man die Situation mit der exakten Sequenz aus der Bemerkung nach Proposition 3.3 auf den obigen Fall zurück.

Außerhalb D' sind $\varphi^* \nabla'_{X/S}$ und $\nabla'_{Y/T}$ gewöhnliche nicht-singuläre Zusammenhänge. Wegen $\operatorname{Kern}(\varphi^* \nabla'_{X'/S'}) \cong \varphi^{\cdot}(R^n f_* \mathbb{C}_{X'}) \xrightarrow[\cong]{\psi} R^n f'_* \mathbb{C}_{Y'} \cong \operatorname{Kern}(\nabla'_{Y'/T'})$ mit $T' = T - D'$ und $Y' = f'^{-1}(T')$ ist das Diagramm über T' kommutativ. Da $\mathscr{H}'(Y/T)$ frei ist (vgl. Proposition 4.6) gilt dies auf ganz T.

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Gauß-Manin-Zusammenhang regulär singulär ist. Dazu erinnern wir an den Begriff der Regularität:

Sei zunächst $\dim S = k = 1$. Es sei K der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{S,0} = \mathbb{C}\{t\}$ und V der μ-dimensionale Vektorraum $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x}) \otimes K$. Dann läßt sich $\nabla = \nabla_{X/S,x}$ mittels Produktregel zu einem Zusammenhang $\nabla: V \to V \otimes \Omega^1_S$ fortsetzen. Die kovariante Ableitung von ∇ nach $d/dt \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{S,0}}(\Omega^1_{S,0}, \mathcal{O}_{S,0})$ ist die Komposition

$$\nabla_{d/dt}: V \xrightarrow{\nabla} V \otimes \Omega^1_{S,0} \xrightarrow{1 \otimes d/dt} V.$$

Es gilt:

i) $\nabla_{d/dt}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

ii) $\nabla_{d/dt}(g \cdot \omega) = (dg/dt)\,\omega + g\nabla_{d/dt}(\omega)$, $g \in \mathcal{O}_{S,0}$, $\omega \in V$.

Bezüglich einer Basis von V schreibt sich $\nabla_{d/dt}$ in der Form

$$\nabla_{d/dt} = d/dt - A\,,$$

wobei A eine $\mu \times \mu$-Matrix mit Koeffizienten aus K ist und Zusammenhangsmatrix genannt wird. ∇ [bzw. irgendein Differentialoperator $\delta: V \to V$ mit i) und ii)] heißt *regulär singulär*, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich der die Zusammenhangsmatrix höchstens Pole erster Ordnung hat.

Ist $\dim S$ beliebig, so heißt $\nabla_{X/S}$ regulär singulär, wenn für jede holomorphe Abbildung $\varphi: T \to S$ ($T \subset \mathbb{C}$ sei die offene Einheitskreisscheibe) mit $\varphi^{-1}(D) = \{0\}$ das analytische Urbild

$$\varphi^* \nabla_{X/S}: \varphi^*(\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)) \to \varphi^*(\mathscr{H}^n_{DR}(X/S)) \otimes \Omega^1_T(0)$$

im obigen Sinne regulär singulär ist. Weitere Kriterien findet man bei Deligne [5]. Es ist klar, daß $\nabla_{X/S}$ genau dann regulär singulär ist, wenn dies für eine der Fortsetzungen von § 2.3 gilt.

Wir wollen ein neues Kriterium von Malgrange für die Regularität im eindimensionalen Fall verwenden: Es sei V ein μ-dimensionaler K-Vektorraum und δ ein Differentialoperator auf V, der i) und ii) erfüllt. Sind $E \subset F$ endlich erzeugte $\mathcal{O}_{S,0}$-Untermoduln von V vom Rang μ mit $\delta(E) \subset F$, so induziert $\delta: E \to F$ mittels der Produktregel ii) eine Fortsetzung auf die Komplettierung bzgl. des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{S,0}$, $\delta: \hat{E} \to \hat{F}$. Malgrange zeigt in [16], daß $\delta: E \to F$ und $\delta: \hat{E} \to \hat{F}$ einen endlichen Index ($= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kern}(\delta) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kokern}(\delta)$) besitzen und gibt die folgende Charakterisierung der regulär singulären Differentialoperatoren (leichte Folgerung aus Theorem 3.3 und Proposition 3.4 in [16]):

Satz 3.5 (Malgrange). *δ ist genau dann regulär singulär, wenn gilt*

$$\operatorname{Index}(\delta; E, F) = \operatorname{Index}(\delta; \hat{E}, \hat{F}).$$

Satz 3.6. *Ist $f: X \to S$ wie in § 2.1, dann ist der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang $\nabla_{X/S}$ regulär singulär.*

Beweis. Sei zunächst $\dim S = 1$. Es seien $H^p = H^p(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$, $H'^p = \Omega^p_{X/S,x}/d\Omega^{p-1}_{X/S,x}$ und $(H^p)^\wedge$, $(H'^p)^\wedge$ ihre Komplettierungen bezüglich des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{S,0}$. Weiter seien $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$ bzw. $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x}$ die Komplettierungen von $\Omega^{\cdot}_{X,x}$ bzw. $\Omega^{\cdot}_{X/S,x}$ nach dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ und $\hat{H}^p = H^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x})$, $\hat{H}'^p = \hat{\Omega}^p_{X/S,x}/d\hat{\Omega}^{p-1}_{X/S,x}$. Dann haben wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(\Omega^{\cdot}_{X,x}) \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"'] & H^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H'^n \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{n+1}_{X,x}/d\Omega^n_{X,x} \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & H'^{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & 0 \\
& & (H^n)^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & (H'^n)^\wedge \arrow[d, "\cong"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & H^n(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x}) \arrow[r] & \hat{H}^n \arrow[r] & \hat{H}'^n \arrow[r] & \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x}/d\hat{\Omega}^n_{X,x} \arrow[r] & \hat{H}'^{n+1} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Die erste Zeile ist nichts anderes als die exakte Sequenz (**) von 2.3 unter Benutzung der Isomorphismen von 3.1 und $\Omega^1_{S,0} \cong \mathcal{O}_{S,0}$. Der Randhomomorphismus δ ist die kovariante Ableitung von $\nabla_{X/S,x}$ längs d/dt, während $(H^n)^\wedge \to (H'^n)^\wedge$ die Fortsetzung von δ auf die Komplettierung ist. Die dritte Zeile wird so wie die erste konstruiert, wobei man das de Rham-Lemma auf $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$ statt $\Omega^{\cdot}_{X,x}$ anwendet. Daß es auch für diesen Fall gilt, folgt daher, daß die Komplettierung auf der Kategorie der endlichen Moduln ein exakter Funktor ist. Die senkrechten Abbildungen sind durch die Inklusion in die Komplettierungen induziert.

Da X in x eine isolierte Singularität hat, ist nach einem Satz von Bloom (vgl. [2], Proposition 3.1) die Abbildung $H^p(\Omega^{\cdot}_{X,x}) \to H^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x})$ ein Isomorphismus endlichdimensionaler Vektorräume. Daraus folgt, daß $(H^n)^\wedge \to \hat{H}^n$ und $(H'^n)^\wedge \to \hat{H}'^n$ Isomorphismen sind. Der Beweis aus [2], Proposition 3.2 kann wörtlich übertragen werden. Die restlichen Isomorphismen sind einfache Folgerungen aus dem Satz von Bloom.

Aus dem Diagramm folgt, daß das Kriterium von Malgrange erfüllt ist.

Sei $\dim S$ beliebig und $\varphi: T \to S$ eine holomorphe Abbildung der Kreisscheibe um 0 nach S mit $\varphi^{-1}(D) = \{0\}$. Wegen Proposition 3.4 und Bemerkung 2) ist zu zeigen, daß mit den dortigen Bezeichnungen $\nabla'_{Y/T}$ regulär ist. Nach Proposition 3.3 haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to (R^n f'_* \mathbb{C}_Y)_0 \otimes \mathcal{O}_{T,0} \to \mathscr{H}'(Y/T)_0 \to \bigoplus_{i \in I(0)} \mathscr{H}'(Y_i/V)_0 \to 0$$

von Zusammenhängen, in der der erste nicht-singulär ist.

Da der letzte nach dem ersten Teil des Beweises regulär ist, folgt, daß auch $\nabla'_{Y/T}$ regulär ist. (vgl. [5], II.1.13). Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkungen. 1) Hat die Zusammenhangsmatrix nur Pole erster Ordnung, so können Lösungen und Monodromie explizit berechnet werden. Ist der Zusammenhang regulär-singulär, so läßt sich die Zusammenhangsmatrix durch eine meromorphe Koordinatentransformation auf eine Matrix mit Pol erster Ordnung transformieren. Die Transformationsmatrix kann durch Lösen endlich vieler algebraischer Gleichungen gefunden werden. Die Bedeutung des Regularitätssatzes liegt unter anderem darin, daß die Monodromie des Gauß-Manin-Zusammenhanges in diesem Sinne berechenbar ist. Man vergleiche hierzu auch [2] und die dort angegebene Literatur.

2) Für den Hyperflächenfall wurde die Regularität zuerst von Brieskorn mit Hilfe des Regularitätssatzes von Griffiths bewiesen (vgl. [2]). Inzwischen existieren für diesen Fall mehrere verschiedene Beweise, u. a. von Deligne, Malgrange und Saito, in denen völlig andere Methoden als bei uns benutzt werden. Saito hat in [22] für beliebig-dimensionalen Basisraum noch stärkere Eigenschaften als die Regularität angegeben. Der hier gegebene algebraische Beweis war eine leichte Folgerung aus dem Kriterium von Malgrange und aus dem Satz von Bloom, der allerdings mit Hilfe einer Auflösung der Singularität von X bewiesen wird.

3.2. Die Algebraizität des singulären Gauß-Manin-Zusammenhangs

Die Überlegungen dieses Abschnittes sind einfache Verallgemeinerungen der Ergebnisse von Brieskorn [2], § 3. Es sei zunächst $\dim S = 1$.

Es sei $X \subset G \subset \mathbb{C}^N$ gegeben durch die Idealgarbe $\mathscr{I} = (g_1, \ldots, g_r)\mathcal{O}_G$ mit $r = N - m$. Sei $\mathscr{I}_x = I$ und $\tilde{f}: G \to S, \tilde{f}(x) = 0$, eine holomorphe Fortsetzung von $f: X \to S$ auf G. Aus Lemma 1.10 angewandt auf die Abbildung $(\tilde{f}, g_1, \ldots, g_r)$ folgt, daß diese Fortsetzung lokal so gewählt werden kann, daß $\tilde{f}$ in x eine isolierte Singularität hat.

Wählen wir eine Koordinate t in S, so hat die zu $\tilde{f}$ gehörige Funktion in x eine isolierte Singularität. Daher können wir, wie von Mather [18], Tougeron und anderen bewiesen wurde, Koordinaten $z_1, \ldots, z_N$ in G um x wählen, so daß $\tilde{f}$ bezüglich dieser Koordinaten ein Polynom ist. Die Koordinaten t und $z_1, \ldots, z_N$ seien ab jetzt fest gewählt und wir identifizieren $\mathcal{O}_{S,0}$ bzw. $\mathcal{O}_{G,x}$ mit den konvergenten Potenzreihenringen $\mathbb{C}\{t\}$ bzw. $\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$.

Ist ψ irgendein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen, so operiert ψ auf den Koeffizienten der formalen Potenzreihen und induziert Automorphismen der (bezüglich der maximalen Ideale) adischen Komplettierungen $\hat{\mathcal{O}}_{S,0} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ und $\hat{\mathcal{O}}_{G,x} = \mathbb{C}\{\{z\}\}$, die wir auch mit ψ bezeichnen. Hierbei gehen $\tilde{f}$ in das Polynom $\psi\tilde{f}$ und die g_i in formale Potenzreihen ψg_i über, die das Ideal $\psi(\hat{I})$ in $\hat{\mathcal{O}}_{G,x}$ erzeugen. Wir zeigen, daß $\psi(\hat{I})$ die Komplettierung eines Ideals $J \subset \mathcal{O}_{G,x}$ ist: Da X in x vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität ist, gibt es wieder nach Mather oder Tougeron eine holomorphe Koordinatentransformation $h: \mathbb{C}\{z\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}\{y\}$, so daß das Ideal $h(I)$ von Polynomen $p_1, \ldots, p_r$ in y erzeugt wird. Daher erzeugen $\psi p_1, \ldots, \psi p_r$ ein Ideal I' in $\mathbb{C}\{y\}$, dessen Komplettierung gleich $\psi(\widehat{h(I)}) = h(\psi(\hat{I}))$ ist. Setzen wir $J = h^{-1}(I')$ so gilt $\hat{J} = \psi(\hat{I})$.

Sei (Y, x) der durch $\mathcal{O}_{G,x}/J$ definierte Raumkeim und $f': (Y, x) \to (S, 0)$ der durch die Einschränkung von $\psi\tilde{f}$ definierte Abbildungskeim. ψ induziert auf kanonische Weise einen Isomorphismus $\psi: \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\cong} \hat{\mathcal{O}}_{Y,x}$, so daß das folgende

Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \arrow[d, "\cong"] & \hat{\mathcal{O}}_{S,0} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\cong"] & \supset & \mathbb{C} \arrow[d, "\psi"', "\cong"] \\
\hat{\mathcal{O}}_{Y,x} & \hat{\mathcal{O}}_{S,0} \arrow[l, "f'^*"] & \supset & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind f^* und f'^* die durch f und f' induzierten Abbildungen der lokalen Ringe. Daher induziert ψ kanonische Isomorphismen $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x} \xrightarrow{\cong} \hat{\Omega}^{\cdot}_{Y,x}$, $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x} \xrightarrow{\cong} \hat{\Omega}^{\cdot}_{Y/S,x}$ und schließlich $H^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x}) \to H^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{Y/S,x})$. Mittels des Isomorphismus $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})^{\wedge} \cong H^n(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x})$ und des entsprechenden für Y/S erhält man einen Isomorphismus

$$\psi : H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})^{\wedge} \xrightarrow{\cong} H^n(\Omega^{\cdot}_{Y/S,x})^{\wedge}$$

über dem Ringisomorphismus $\psi : \hat{\mathcal{O}}_{S,0} \to \hat{\mathcal{O}}_{S,0}$.

Mit Brieskorn [2] sagen wir, daß $\nabla_{X/S,x}$ *algebraisch* ist, falls für jeden Körperautomorphismus ψ von $\mathbb{C}$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})^{\wedge} \arrow[r, "\nabla_{X/S,x}"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})^{\wedge} \otimes \Omega^1_S(0) \arrow[d, "\psi\otimes 1"', "\cong"] \\
H^n(\Omega^{\cdot}_{Y/S,x})^{\wedge} \arrow[r, "\nabla_{Y/S,x}"] & H^n(\Omega^{\cdot}_{Y/S,x})^{\wedge} \otimes \Omega^1_S(0) .
\end{tikzcd}$$

Satz 3.7. *Sei $f : X \to S$ wie in § 2.1 mit $\dim S = 1$. Dann ist der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang $\nabla_{X/S,x}$ algebraisch.*

Beweis. Der Beweis ist trivial, da das entsprechende Diagramm mit $H^n(\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/S,x})$, $H^n(\hat{\Omega}^{\cdot}_{Y/S,x})$ statt $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})^{\wedge}$, $H^n(\Omega^{\cdot}_{Y/S,x})^{\wedge}$ kommutiert, was sofort aus der expliziten Beschreibung von $\nabla_{X/S,x}$ folgt.

Sei $\dim S$ beliebig, $T \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\varphi : T \to S$ eine holomorphe Abbildung mit $\varphi^{-1}(D) = \{0\}$. Sei $\alpha : [0,1] \to T' = T - 0$ ein geschlossener Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = z$, $\varphi(z) = t \in S'$ und $w \in \pi_1(S', t)$ das durch $\varphi \circ \alpha$ repräsentierte Element. Dann erhalten wir als Folgerung aus der Algebraizität und Regularität:

Satz 3.8. *Ist $g \in \pi_1(S', t)$ zu w konjugiert, so sind die Eigenwerte der Monodromietransformation $\varrho(g) \in \mathrm{Aut}(H^n(X_t, \mathbb{C}))$ Einheitswurzeln.*

Beweis. a) Ist $\dim S = 1$, so argumentiert man genauso wie Brieskorn [2], 0.6.

Sei $\dim S$ beliebig. Wegen Proposition 3.4 ist zu zeigen, daß die Monodromietransformation von $[\alpha] \in \pi_1(T', z)$ bzgl. $\nabla'_{Y/T}$, $Y = X \times_S T$, als Eigenwerte nur Einheitswurzeln hat.

Da der Gauß-Manin-Zusammenhang regulär singulär ist, existiert eine K-Basis von $\mathscr{H}'(Y/T) \otimes K$ ($K =$ Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{T,0}$), so daß die Zusammenhangsmatrix von $\nabla'_{Y/T,0}$ die Gestalt $\sum_{j=-1}^{\infty} A_j z^j$ hat, wo A_j konstante Matrizen sind und wo $\exp(2\pi i A_{-1})$ die Monodromiematrix von $[\alpha]$ ist.

Die Behauptung folgt jetzt aus der exakten Sequenz von Proposition 3.3. Denn nach a) gilt die Behauptung für die lokalen Monodromien der isolierten Singularitäten der Faser Y_0, während die Monodromie eines nicht-singulären Zusammenhangs die Identität ist.

Bemerkung. A'Campo hat vermutet, daß die Bedingung, daß $\varphi(T)$ die Diskriminante nur in einem Punkt schneidet, auch notwendig für die Aussage des Satzes ist.

§ 4. De Rham-Kohomologie von vollständigen Durchschnitten

4.1. Zum Verschwinden der absoluten de Rham-Kohomologie

Aus den Ergebnissen von § 2 lassen sich leicht Folgerungen über das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen des absoluten de Rham-Komplexes $\Omega_X^{\cdot}$ ziehen. Aus Satz 2.7, der langen exakten Sequenz zu Beginn von § 2.3 für $k=1$ (also $\dim X = n+1$) und dem Isomorphismus $\mathbb{R}^p f_*(\Omega_X^{\cdot})_0 \cong H^p(\Omega_{X,x}^{\cdot})$ von Proposition 3.1 folgt

$$H^p(\Omega_{X,x}^{\cdot}) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < p < n\,.$$

Ist X eine Hyperfläche, so wurde diese Aussage schon von Brieskorn in [2] bewiesen. Nun hat Sebastiani in [24] gezeigt, daß dann sogar $H^n(\Omega_{X,x}^{\cdot}) = 0$ gilt. Wir wollen dieses Ergebnis für vollständige Durchschnitte mit beliebigen Singularitäten verallgemeinern. Dabei benutzen wir ähnlich wie Sebastiani Ergebnisse von Bloom und Herrera über die Spaltung der Hyperkohomologie von $\Omega_X^{\cdot}$. Um die Resultate von Bloom und Herrera auch auf globale Situationen anwenden zu können, nehmen wir an, daß alle komplexen Räume parakompakt sind.

Zur Vorbereitung zwei Lemmata. Es sei $f: X \to S$ ein Morphismus des überall m-dimensionalen komplexen Raumes X in die komplexe Mannigfaltigkeit S und $Y \subset X$ eine abgeschlossene analytische Teilmenge mit $\dim Y \leqq c$ (c eine ganze Zahl), die die kritische Menge $C(f)$ von f umfaßt. X^* sei die komplexe Mannigfaltigkeit $X - Y$. Der absolute Fall ($\dim S = 0$) sei in Lemma 4.1 und 4.2 mit eingeschlossen. Dann ist $C(f) = C(X)$, $\Omega_{X/S}^{\cdot} = \Omega_X^{\cdot}$ und $f^{\cdot}\mathcal{O}_S = \mathbb{C}$.

Lemma 4.1. *Ist X ein vollständiger Durchschnitt, so ist der Beschränkungshomorphismus*

$$H^p(\Gamma(X, \Omega_{X/S}^{\cdot})) \to H^p(\Gamma(X^*, \Omega_{X^*/S}^{\cdot}))$$

bijektiv für $0 \leqq p < m - c - 1$ und injektiv für $p = m - c - 1$.

Beweis. Leichte Folgerung aus Lemma 1.8 und dem Fortsetzungssatz von Scheja.

Lemma 4.2. *Ist X ein Steinscher vollständiger Durchschnitt, so ist der kanonische Homomorphismus*

$$H^p(\Gamma(X^*, \Omega_{X^*/S}^{\cdot})) \to H^p(X^*, f^{\cdot}\mathcal{O}_S)$$

bijektiv für $0 \leqq p < m - c - 1$ und injektiv für $p = m - c - 1$.

Beweis. Da die 2. Spektralsequenz der Hyperkohomologie des Schnittflächenfunktors Γ bezüglich des Komplexes $\Omega_{X^*/S}^{\cdot}$ entartet, hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{H}^{\cdot}(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*/S}) := \mathbb{R}^{\cdot}\Gamma(\Omega^{\cdot}_{X^*/S}) \cong H^{\cdot}(X^*, f^{\cdot}\mathcal{O}_S).$$

Wir betrachten nun die erste Spektralsequenz der Hyperkohomologie von Γ bezüglich $\Omega^{\cdot}_{X^*/S}$,

$$'E_2^{pq} = H^p(H^q(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*/S})) \Rightarrow \mathbb{H}^{\cdot}(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*/S}).$$

Da X Steinsch ist, verschwinden die Kohomologiegruppen $H^q(X, \Omega^p_{X/S})$ für $q > 0$. Wegen $codh\,\Omega^p_{X/S} \geqq m - p$ für $0 \leqq p \leqq m - c$ (vgl. Lemma 1.8) folgt aus dem Fortsetzungssatz von Scheja

$$H^q(X^*, \Omega^p_{X/S}) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < q < m - c - 1 - p,$$

also $'E_2^{pq} = 0$ für $q \neq 0$, $p + q < m - c - 1$. Folglich ist die Abbildung $'E_2^{p0} \cong {'E_\infty^{p0}} \to \mathbb{H}^p(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*/S})$ bijektiv für $0 \leqq p < m - c - 1$ und injektiv für $p = m - c - 1$.

Wir wenden uns jetzt dem absoluten Fall zu. Ist $(X, \Omega^{\cdot}_X)$ die Hyperkohomologie von Γ bezüglich $\Omega^{\cdot}_X$, so hat man nach Bloom-Herrera [1], Theorem 3.1, das folgende kommutative Diagramm von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^p(X, \Omega^{\cdot}_X) & \xrightarrow{I} & H^p(X, \mathbb{C}) \\
\downarrow{\scriptstyle \varrho} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\
H^p(\Gamma(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*})) & \longrightarrow & \mathbb{H}^p(X^*, \Omega^{\cdot}_{X^*}) & \xrightarrow[J]{} & H^p(X^*, \mathbb{C}).
\end{array}$$

I, J werden mit Hilfe von Integration über semianalytische Ketten definiert, ϱ ist der Beschränkungshomomorphismus und i^* der durch die Inklusion $i: X^* \to X$ induzierte Homomorphismus in der gewöhnlichen Kohomologie. Bloom-Herrera zeigen, daß I surjektiv ist. J ist sogar bijektiv, da X^* eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Ist X Steinsch, so ist $H^p(\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X)) \to \mathbb{H}^p(X, \Omega^{\cdot}_X)$ bijektiv. Mit Lemma 4.1 und 4.2 folgt daher:

Satz 4.3. *Ist X ein Steinscher vollständiger Durchschnitt, so hat man für* $0 \leqq p < \operatorname{codim} C(X)$ *einen kanonischen Isomorphismus*

$$H^p(\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X)) \cong H^p(X, \mathbb{C}).$$

Hierbei ist $\operatorname{codim} C(X) = \inf_{x \in X} (\dim_x X - \dim_x C(X))$.

Da jeder Punkt eines komplexen Raumes eine Umgebungsbasis aus Steinschen zusammenziehbaren Mengen besitzt, erhalten wir als Folgerung das angekündigte Resultat:

Satz 4.4. *Es sei X ein vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ mit* $\dim_x C(X) < \dim_x X$. *Dann gilt*

i) $H^0(\Omega^{\cdot}_{X,x}) = \mathbb{C}$,

ii) $H^p(\Omega^{\cdot}_{X,x}) = 0$ *für* $0 < p < \operatorname{codim}_x C(X)$.

Bemerkung. Mit Hilfe von Lemma 4.1 und 4.2 erhalten wir aus obigem Diagramm eine weitere Folgerung:

Ist X ein Steinscher vollständiger Durchschnitt, $Y \subset X$ eine abgeschlossene analytische Teilmenge mit $C(X) \subset Y$, so ist die durch die Inklusion induzierte Abbildung der singulären Kohomologie

$$H^p(X, \mathbb{C}) \to H^p(X - Y, \mathbb{C})$$

bijektiv für $0 \leqq p < \operatorname{codim} Y - 1$ und injektiv für $p = \operatorname{codim} Y - 1$. Für die lokale Situation, in der X zusammenziehbar ist, vergleiche man die stärkeren Aussagen von Hamm [11].

Für spätere Zwecke wollen wir noch eine weitere Aussage über $\Omega_X^{\cdot}$ beweisen. Ist $T\Omega_X^{\cdot} \subset \Omega_X^{\cdot}$ der Unterkomplex, bestehend aus den $\mathcal{O}_X$-Torsionsgarben von $\Omega_X^{\cdot}$, so setzen wir

$$\tilde{\Omega}_X^{\cdot} := \Omega_X^{\cdot}/T\Omega_X^{\cdot}.$$

Ist $X \subset G \subset \mathbb{C}^N$ reduziert, so kann man diesen Komplex auch wie folgt beschreiben: Sei $\mathcal{H}^p \subset \Omega_G^p$ die Untergarbe, deren lokale Schnitte über einer offenen Menge $U \subset G$ unter der Abbildung $\Gamma(U, \Omega_G^p) \to \Gamma(U \cap (X - C(X)), \Omega_{X-C(X)}^p)$ verschwinden. Dann ist $\tilde{\Omega}_X^p = \Omega_G^p/\mathcal{H}^p | X$. Diese Garben wurden zuerst von Ferrari in [6, 7] definiert und untersucht. Nun gilt der verwendete Spaltungssatz von Bloom und Herrera auch für $\tilde{\Omega}_X^{\cdot}$ statt $\Omega_X^{\cdot}$, der dortige Beweis kann wörtlich übertragen werden. Ebenso gelten Lemma 4.1 [wegen Proposition 1.11 i)] und Lemma 4.2, also auch Satz 4.3 und 4.4 für $\tilde{\Omega}_X^{\cdot}$. Insbesondere folgt aus Satz 4.4:

Lemma 4.5. *Ist X ein m-dimensionaler vollständiger Durchschnitt in $x \in X$ und $c = \dim_x C(X)$, so gilt*

$$d\Omega_{X,x}^{m-c-1} \cap T\Omega_{X,x}^{m-c} = 0.$$

Man beachte, daß für $m > 0$ und $c \geqq 0$ stets $T\Omega_{X,x}^{m-c} \neq 0$ gilt (vgl. Bemerkung zu Proposition 1.11).

4.2. Zur Freiheit der relativen de Rham-Kohomologie

Wir benutzen die Ergebnisse des vorigen Abschnittes, um zu untersuchen, wann die $\mathcal{O}_S$-Garben $\mathcal{H}_{DR}^n(X/S), \mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}'''$ (nach eventueller Verkleinerung von S) frei sind. Wegen der Isomorphismen von 3.1 können wir uns auf die Untersuchung der Moduln $H^n(\Omega_{X/S,x}^{\cdot})$, H', H'' und H''' beschränken. Über $f: X \to S$, $f(x) = 0$, mögen die Voraussetzungen von § 2.1 gelten.

Proposition 4.6. *H' ist ein endlich erzeugter freier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ (bzw. $\mu + 1$ für $n = 0$).*

Beweis. Da $\mathcal{O}_{S,0}$ regulär ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß H' Macaulaysch ist. Wir wählen die Koordinaten in S wie in Lemma 1.10 und zeigen, daß dann die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_k$ von f eine H'-Sequenz bilden.

Es sei $\Omega_r^{\cdot} = \Omega_{X/S,x}^{\cdot} \Big/ \sum_{i=1}^{r} f_i \Omega_{X/S,x}^{\cdot}$, $H'_r = H' \Big/ \sum_{i=1}^{r} f_i H'$ und $f_{r+1}\underline{\omega} = 0$ für ein $\underline{\omega} \in H'_r$. Ist $\omega \in \Omega_r^n$ ein Repräsentant von $\underline{\omega}$ so gilt $f_{r+1}\omega = d\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega_r^{n-1}$. Das bedeutet, daß α ein Element in $H^{n-1}(\Omega_{r+1}^{\cdot})$ repräsentiert. Aus Satz 2.7 und Satz 4.4 (für $r = k - 1$) folgt $\alpha = f_{r+1}\beta + \gamma$ mit $d\gamma = 0$. Also ist $f_{r+1}(\omega - d\beta) = 0$. Da nach Proposition 1.11 Ω_r^n torsionsfrei ist, folgt $\omega = d\beta$ also $\underline{\omega} = 0$ Das war zu zeigen.

Korollar 4.7. *$H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$ ist ein endlich erzeugter torsionsfreier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ (bzw. $\mu+1$ für $n=0$), der für $k=1$ und $k=2$ frei ist. Es gilt $codh_{\mathcal{O}_{S,0}} H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x}) \geqq \min\{k, 2\}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der exakten Sequenz

$$0 \to H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x}) \to H' \xrightarrow{d} d\Omega^n_{X/S,x} \to 0$$

und $codh\,\Omega^{n+1}_{X/S,x} \geqq k-1$ (Lemma 1.8 mit Bemerkung zu Lemma 1.9) also $codh\, d\Omega^n_{X/S,x} \geqq 1$ falls $k \geqq 2$.

Proposition 4.8. *H'' ist genau dann ein freier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ (bzw. $\mu+1$ für $n=0$), wenn x regulärer Punkt von X ist.*

Beweis. Ist X nicht regulär in x, so repräsentieren die $\mathcal{O}_{X,x}$-Torsionselemente von $\Omega^m_{X,x}$ wegen $df(d\Omega^{n-1}_{X,x}) \cap T\Omega^m_{X,x} = 0$ auch nicht-verschwindende $\mathcal{O}_{S,0}$-Torsionselemente von H''.

Sei nun X regulär in x und die Komponenten $f_1, \ldots, f_k$ von f wie in Lemma 1.10 gewählt. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$H''_r = H'' \Big/ \sum_{i=1}^r f_i H'', \quad \Omega^{\cdot}_r = \Omega^{\cdot}_{X/S,x} \Big/ \sum_{i=1}^r f_i \Omega^{\cdot}_{X/S,x}, \quad \mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{X,x} \Big/ \sum_{i=1}^r f_i \mathcal{O}_{X,x}$$

und $df: \Omega^n_r \to \mathcal{O}_r$ für die de Rham-Multiplikation.

Dann ist $H''_r = \mathcal{O}_r / df(d\Omega^{n-1}_r)$ und $\mathrm{Kern}(df \mid d\Omega^{n-1}_r) = T\Omega^n_r \cap d\Omega^{n-1}_r = 0$ wie aus Proposition 1.11 (für $r<k$) und Lemma 4.5 (für $r=k$) folgt.

Ist $f_{r+1}\omega = df(d\alpha)$ für $\omega \in \mathcal{O}_r$ und $\alpha \in \Omega^{n-1}_r$, so gilt also $d\alpha = f_{r+1}\beta$ mit $\beta \in \Omega^n_r$. Da f_{r+1} Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_r$ ist, folgt $\omega = df(\beta)$ und da $\Omega^n_r / d\Omega^{n-1}_r$ nach Proposition 4.6 frei ist, folgt $\beta = d\gamma$ und wir erhalten wie gewünscht $\omega = df(d\gamma)$.

Korollar 4.9. *H''' ist ein endlich erzeugter freier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ (bzw. $\mu+1$ für $n=0$).*

Bemerkung. Die Freiheit von $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$, $H', H'' = H'''$ für Hyperflächensingularitäten wurde zuerst von Sebastiani in [24] bewiesen. Die Freiheit von H' und $H''=H'''$ für reguläres X und beliebiges k wurde von Saito in [22] vermutet. Ebenso die Freiheit von $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$, die wir nur für $k=1, 2$ beweisen konnten. Es ist aber nicht schwer zu sehen, daß die analytische Menge der Punkte, in denen $\mathcal{H}^n_{DR}(X/S)$ nicht frei ist, mindestens 2-kodimensional ist. Daß bedeutet, daß $\mathcal{H}^n_{DR}(X/S)$ für beliebiges k längs der kritischen Werte D von f generisch frei ist.

§ 5. Die Milnorzahl

5.1. Die Berechnung der Milnorzahl

Die bisherigen Ergebnisse erlauben es, eine rein algebraische Formel für die Milnorzahl μ eines vollständigen Durchschnitts mit isolierter Singularität anzugeben. Für $f: X \to S$ mögen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von § 2.1 gelten. Dann ist $\mu = \dim_{\mathbb{C}} H^n(X_t, \mathbb{C})$, $t \in S - D$.

Proposition 5.1. *$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^n_{X_0,x} / d\Omega^{n-1}_{X_0,x}$ für $n>0$ und $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_0,x} - 1$ für $n=0$.*

Beweis. Nach Proposition 4.6 ist H' ein freier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ. Die Behauptung folgt aus dem Isomorphismus $H'/\mathfrak{m}H' \cong \Omega^n_{X_0,x}/d\Omega^{n-1}_{X_0,x}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{S,0}$ ist.

Bemerkung. Die Formel zeigt insbesondere, daß μ nur von der Singularität der Faser X_0, nicht aber von der ganzen Abbildung f abhängt. Man kann daher für einen n-dimensionalen vollständigen Durchschnitt Y mit isolierter Singularität in $y \in Y$

$$\mu(Y,y) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \Omega^n_{Y,y}/d\Omega^{n-1}_{Y,y} & (n>0) \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y,y} - 1 & (n=0) \end{cases}$$

definieren. Jedoch ist die Aussage $\mu = \mu(X_0, x)$ noch nicht das was wir wünschen, nämlich eine berechenbare Formel zu finden. Denn hier wäre der Kokern des Differentialoperators d zu bestimmen. Doch ist Proposition 5.1 ein wichtiger Schritt auf dem Weg dazu.

Es ist klar, daß wir uns bei der Bestimmung von $\mu(X_0, x)$ je nach Vorteil auf den Fall „$k=1$ und X vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität" oder auf den Fall „X regulär und k beliebig" beschränken können.

Sei jetzt $k=1$, also $\mathcal{O}_{S,0} = \mathbb{C}\{t\}$. Wir erinnern an den analytischen Indexsatz von Malgrange (vgl. [16], Proposition 1.1) in einer für uns geeigneten Formulierung: Es seien $E \subset F$ endlich erzeugte $\mathbb{C}\{t\}$-Moduln vom gleichen Rang (äquivalent: $\dim_{\mathbb{C}} F/E < \infty$) und $\delta: E \to F$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\delta(g\omega) = g\delta(\omega) + \omega\, dg/dt$ für alle $g \in \mathbb{C}\{t\}$ und $\omega \in E$. Dann existiert der Index von δ ($= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kern}(\delta) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kokern}(\delta)$) und es gilt:

Satz 5.2 (Malgrange). $\operatorname{Index}(\delta; E, F) = \operatorname{Rang}(E) - \dim_{\mathbb{C}}(F/E)$.

Wir betrachten jetzt die kovariante Ableitung längs d/dt des singulären Gauß-Manin-Zusammenhangs ∇' auf H'. Auf dem isomorphen Modul $df \wedge H' = df \wedge \Omega^n_{X,x}/df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x} \subset H'' = \Omega^{n+1}_{X,x}/df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x}$ induziert sie eine Abbildung

$$\nabla'_{d/dt}: df \wedge H' \to H'', \qquad [df \wedge \omega] \mapsto [d\omega]$$

für $\omega \in \Omega^n_{X,x}$. Aus Satz 4.4 folgt, daß $\nabla'_{d/dt}$ für $n>0$ injektiv ist. Denn ist $d\omega = df \wedge d\alpha$, also $d(\omega - df \wedge \alpha) = 0$, so folgt $\omega - df \wedge \alpha = d\beta$ und daher $df \wedge \omega = df \wedge d\beta$. Folglich ist

$$\operatorname{Index}(\nabla'_{d/dt}; df \wedge H', H'') = -\dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+1}_{X,x}/d\Omega^n_{X,x} = -\mu(X,x)$$

(bzw. $= 1 - \mu(X,x)$ für $n=0$). Wegen $H''/df \wedge H' = \Omega^{n+1}_{X/S,x}$ erhalten wir aus dem Indexsatz:

Lemma 5.3. *Für* $k=1$ *gilt* $\mu(X_0, x) + \mu(X,x) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^m_{X/S,x}$.

Bemerkung. Aus den exakten Sequenzen

$$0 \to T\Omega^m_{X,x} \to \Omega^m_{X/S,x} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{C}(X)_x/\mathscr{C}(f)_x \to 0$$

(wegen $df \wedge \Omega^{m-1}_{X,x} \cap T\Omega^m_{X,x} = 0$) und

$$0 \to \mathscr{C}(X)_x/\mathscr{C}(f)_x \to \mathcal{O}_{C(f),x} \to \mathcal{O}_{C(X),x} \to 0$$

folgt mit Proposition 1.11 iii)

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega^m_{X/S,x} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C(f),x} .$$

Es ist klar, daß Lemma 5.3 eine Rekursionsformel über die Einbettungskodimension von X_0 für die Bestimmung von $\mu(X_0, x)$ liefert. Es sei jetzt $X \subset \mathbb{C}^m$ eine offene Teilmenge und X_0 sei gegeben durch die in X holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, $\dim_x X_0 = m - k = n$. Außerdem nehmen wir an, daß die $(n+i)$-dimensionalen vollständigen Durchschnitte

$$X_i = \{y \in X \mid f_1(y) = \cdots = f_{k-i}(y) = 0\}, \qquad i = 0, \ldots, k,$$

eine isolierte Singularität in $x \in X_i$ haben. Das ist nach Lemma 1.10 stets möglich. Es sei $S_i \subset \mathbb{C}$ offen, so daß die analytische Einschränkung von f_{k-i+1} auf X_i eine holomorphe Abbildung

$$f_{k-i+1} : X_i \to S_i$$

definiert. Auf diese können wir Lemma 5.3 anwenden und erhalten $\mu(X_{i-1}, x) + \mu(X_i, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+i}_{X_i/S_i,x}$. Bildet man die alternierende Summe, so erhält man wegen $\mu(X_k, x) = \mu(X, x) = 0$:

Satz 5.4. $\mu(X_0, x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+i}_{X_i/S_i,x}$.

Wegen der Bemerkung zu Lemma 5.3 kann man $\mu(X_0, x)$ auch direkt durch die f_i und die Minoren der Funktionalmatrix von $(f_1, \ldots, f_k)$ beschreiben: Es sei $\mathscr{C}_{i,x} \subset \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,x}$ das Ideal, das von den Funktionen $f_1, \ldots, f_{i-1}$ und von allen i-Minoren der Funktionalmatrix von $(f_1, \ldots, f_i)$ erzeugt wird:

$$\mathscr{C}_{i,x} = \left(f_1, \ldots, f_{i-1}, \frac{\partial(f_1, \ldots, f_i)}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_i})}, 1 \leqq j_1 < \cdots < j_i \leqq m \right).$$

Korollar 5.5. $\mu(X_0, x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x} / \mathscr{C}_{i,x}$.

Die Formel aus Korollar 5.5 wurde auch von Lê Dũng Tráng [15] gefunden. Mit Hilfe von Morsetheorie zeigt er, daß $\mu(X_i, x) + \mu(X_{i+1}, x)$ gleich der Multiplizität der Diskriminante der semiuniversellen Deformation von X_i ist, woraus die Formel von Lemma 5.3 leicht folgt. Für $k = 1$ erhalten wir die wohlbekannte Formel von Milnor.

5.2. *Folgerungen*

Sei X_0 wie in Satz 5.4 gegeben; für diesen letzten Abschnitt sei außerdem $n > 0$. Nach Satz 4.4 gilt $H^p(\Omega^{\cdot}_{X_0,x}) = 0$ für $0 < p < n$. Die höheren Kohomologiegruppen sind endlichdimensional. Problem: Gibt es wie im Hyperflächenfall eine rein algebraische Formel für die Dimension dieser Vektorräume, d. h. gibt es ein algebraisches Kriterium für die Exaktheit des Komplexes $\Omega^{\cdot}_{X_0,x}$? Aus der Formel für die Milnorzahl folgt zunächst nur eine algebraische Formel für die alternierende Summe der Dimensionen dieser Vektorräume.

Lemma 5.6.

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\dim_{\mathbb{C}}H^{n+i-1}(\Omega^{\cdot}_{X_0,x})=\mu(X_0,x)-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\dim_{\mathbb{C}}\Omega^{n+i}_{X_0,x}.$$

Wir wenden uns jetzt wieder dem Komplex $\tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_0,x}=\Omega^{\cdot}_{X_0,x}/T\Omega^{\cdot}_{X_0,x}$ zu. Für diesen Komplex geben wir ein rein algebraisches Exaktheitskriterium. Sei $\mathscr{C}_x\subset\mathcal{O}_{X,x}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,x}$ das von $f_1,\ldots,f_k$ und von allen k-Minoren der Jakobimatrix von $(f_1,\ldots,f_k)$ erzeugte Ideal:

$$\mathscr{C}_x=\left(f_1,\ldots,f_k,\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})},\ 1\leqq j_1<\cdots<j_k\leqq m\right).$$

Proposition 5.7. i) $H^0(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_0,x})=\mathbb{C}$.

ii) $H^p(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_0,x})=0$ *für* $0<p<n$, $p>n$.

iii) $\dim_{\mathbb{C}}H^n(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_0,x})=\mu(X_0,x)-\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}_x$.

Beweis. i) und ii) wurden schon in 4.1 gezeigt. Es ist $H^n(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_0,x})=\Omega^n_{X_0,x}/(d\Omega^{n-1}_{X_0,x}+T\Omega^n_{X_0,x})$. Wegen $d\Omega^{n-1}_{X_0,x}\cap T\Omega^n_{X_0,x}=0$ (Lemma 4.5) folgt die Behauptung aus Proposition 1.11.

Aus Proposition 5.7 kann man wegen $\mu(X_0,x)\geqq\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}_x$ leicht Abschätzungen für $\mu(X_0,x)$ erhalten. Zunächst folgt

i) $\mu(X_0,x)=0$ genau wenn x regulärer Punkt von f ist.

ii) Ist X_0 keine Hyperfläche, dann gilt $\mu(X_0,x)\geqq 2n+3$, wobei das Gleichheitszeichen für jedes n angenommen wird (vgl. Beispiel unten). Insbesondere impliziert $\mu(X_0,x)=1$, daß X_0 eine Hyperfläche und damit ein gewöhnlicher Doppelpunkt in x ist.

Ist m die Einbettungsdimension von X_0 in x und $k=m-n$, so erhalten wir als allgemeine (naive) Abschätzung:

iii) $$\mu(X_0,x)\geqq\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i-1}{i}-k\sum_{i=0}^{k-2}\binom{m+i-1}{i}-\binom{m}{k}.$$

Ferrari zeigt in [6], daß die Kohomologie von $\Omega^{\cdot}_{X_0,x}$ verschwindet, falls X_0 holomorph auf x kontrahierbar ist. Das trifft z. B. zu, falls X_0 in x quasihomogen ist. D. h. (X_0,x) ist biholomorph äquivalent zu einem Raumkeim, der bezüglich einer Einbettung in einen $\mathbb{C}^N$ durch quasihomogene Polynome gleichen Gewichts (aber eventuell verschiedenen Grads) definiert ist. Dabei heißt ein Polynom $p\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]$ quasihomogen vom Gewicht $(r_1,\ldots,r_N)$, $0<r_i\leqq 1/2$ rational, wenn p Linearkombination von Monomen $x_1^{m_1}\cdot\cdots\cdot x_N^{m_N}$ mit $r_1m_1+\cdots+r_Nm_N=1$ ist. Aus Proposition 5.7 folgt daher

Korollar 5.8. *Ist X_0 ein quasihomogener vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität in $x\in X_0$, so gilt*

$$\mu(X_0,x)=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{C}_x.$$

Diese Formel war von Saito vermutet und von Hamm [12] für das folgende Beispiel auf ganz anderem Wege bewiesen worden.

Beispiel. (Hamm). Sei $f_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j^{a_j}$, $i = 1, \ldots, k$. Es sei $k < m$ und c_{ij} eine komplexe Matrix, deren k-Minoren alle von Null verschieden sind. Die a_j seien ganze Zahlen $\geqq 2$. Ist X_0 der durch die f_i im $\mathbb{C}^m$ definierte vollständige Durchschnitt mit isolierter Singularität in 0, so liefert eine einfache Berechnung der Dimension des Artinringes $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\mathscr{C}_0$:

$$\mu(X_0, 0) = \sum_{i=n+1}^{m} \binom{i-1}{n} \cdot \sum_{i \leqq j_1 < \cdots < j_i \leqq m} (a_{j_1} - 1) \cdot \cdots \cdot (a_{j_i} - 1).$$

Literatur

1. Bloom, T., Herrera, M.: De Rham cohomology of analytic space. Inventiones math. **7**, 275—296 (1969)
2. Brieskorn, E.: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. manuscripta math. **2**, 103—161 (1970)
3. Brieskorn, E.: Vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie. Astérisque **7** et **8** (Sing. à Cargèse), 393—410 (1973)
4. Brieskorn, E., Greuel, G.-M.: Singularities of complete intersections. Erscheint in Proceedings of the International Conference on Manifolds and related Topics, Tokio 1973
5. Deligne, P.: Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lect. Notes in Math. **163**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
6. Ferrari, A.: Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **XXIV**, 65—77 (1970)
7. Ferrari, A.: Coomologia e forme differenziali sugli spazi analitici complessi. Ann. Scuolo Norm. Sup. Pisa **XXV**, 469—480 (1971)
8. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Herman 1964
9. Grothedieck, A.: Crystals and the de Rham cohomologie of schemes. In: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1968
10. Grothendieck, A., Dieudonne, J.: Eléments de geometrie algebrique. IHES Publ. Math. **11**, **32** (1962, 1967)
11. Hamm, H.: Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann. **191**, 235—252 (1971)
12. Hamm, H.: Exotische Sphären als Umgebungsränder in speziellen komplexen Räumen. Math. Ann. **197**, 44—56 (1972)
13. Hamm, H.: Die analytische Berechnung der lokalen komplexen Picard-Lefschetz-Monodromie (oder ähnlich) (in Vorbereitung)
14. Katz, N.: Nilpotent connections and the monodromy theorem. Appl. of a Res. of Turritin. IHES Publ. Math. **39**, 175—232 (1970)
15. Lê Dũng Tráng: Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète. Ersch. in Funkcional'nyj Analiz
16. Malgrange, B.: Sur les points singuliers des equations différentielles. Sem. Goulaouic-Schwartz 1971—1972, Exposé XX
17. Malgrange, B.: Integrals asymptotiques et monodromie. Ersch. in Ann. scient. Ec. Norm. Sup.
18. Mather, J.: Stability of C^∞-Mappings. III. Finitely Determined Map-Germs. IHES Publ. Math. **35**, 127—156 (1968)
19. Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61. Princeton: Princeton Univ. Press 1968
20. De Rham. G.: Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. Com. math. Helv. **28**, 346—352 (1954)
21. Saito, K.: Calcul algébrique de la monodromie. Astérisque **7** et **8** (Sing. à Cargèse), 195—211 (1973)
22. Saito, K.: Regularity of Gauß-Manin-connection of a flat family of isolated singularities. In: Quelques journées singuliers. Paris: Ecole Polytechnique (1973)

23. Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. **144**, 345—360 (1961)
24. Sebastiani, M.: Preuve d'un conjecture de Brieskorn. manuscripta math. **2**, 301—308 (1970)
25. Serre, J.-P.: Algèbre locale—Multiplicités. Lecture Notes in Math. **11**. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer 1965
26. Vetter, U.: Äußere Potenzen von Differentialmoduln reduzierter vollständiger Durchschnitte. Manuscripta math. **2**, 67—75 (1970)
27. Grauert, H., Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren. Die Grundlehren der Math. Wiss. 176. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971

G.-M. Greuel
Mathematisches Institut der Universität
D-5300 Bonn
Wegelerstr. 10
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 23. September 1974)