HALIN, R.
Math. Annalen 172, 46—78 (1967)

Zur Klassifikation der endlichen Graphen nach H. Hadwiger und K. Wagner

R. HALIN

Einleitung

H. HADWIGER klassifiziert in seiner Arbeit [4] die endlichen Graphen G nach dem größten n, so daß G sich auf ein Simplex $S(n)$ (= vollständigen Graphen mit n Ecken) zusammenziehen läßt. K. WAGNER bezeichnet diese Zahl n als den Homomorphiegrad $h(G)$ des betreffenden Graphen G (s. [13], S. 438). Dieses $h(G)$ kann als ein sinnvolles Maß für die Feinheit von G angesehen werden.

Es liegt nun nahe, auch andere Feinheitsmaße für die endlichen Graphen zu betrachten. Im § 1 dieser Arbeit definieren wir allgemein ein solches Feinheitsmaß als eine Funktion f, die jedem endlichen Graphen G eine ganze Zahl $f(G)$ zuordnet derart, daß gewisse Monotoniebedingungen erfüllt sind. Jedes Feinheitsmaß f bestimmt — analog der Hadwigerschen Klassifikation — eine Klasseneinteilung der Gesamtheit aller endlichen Graphen, nämlich in die Klassen $\mathfrak{F}(n)$, wo jedes $\mathfrak{F}(n)$ genau die Graphen G mit $f(G)=n$ enthalte. $\mathfrak{F}^*(n)$ wird definiert als die Klasse der Graphen G mit $f(G)<n$. Im speziellen Falle, daß f gleich dem Homomorphiegrad h ist, fallen die $\mathfrak{F}^*(n)$ mit den Homomorphieklassen $\mathfrak{H}^*(n)$ (s. [13], S. 435) zusammen. Von besonderem Interesse wird für uns (bei gegebenem n) die Teilklasse $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ der maximalen Graphen $\in \mathfrak{F}^*(n)$ sein, d. h. derjenigen Graphen $G \in \mathfrak{F}^*(n)$, für die nach Adjunktion irgendeiner neuen Kante k zu G gilt: $f(G \cup k) \geqq n$.

Der Homomorphiegrad $h(G)$ hat die folgende wichtige Eigenschaft: Ist G aus zwei Graphen G', G'' längs eines Simplexes zusammengeheftet (d. h. bilden G', G'' eine sZ von G; vgl. [15], § 2), so ist $h(G)$ gleich dem Maximum der h-Werte von G' und G''. Feinheitsmaße mit dieser Eigenschaft heißen sZ-treu. Auch die Färbungszahl $\Phi(G)$ und eine Reihe weiterer wichtiger Funktionen auf der Menge der endlichen Graphen erweisen sich als sZ-treue Feinheitsmaße (vgl. die Beispiele im § 1, sowie (3.4)). Der Begriff des sZ-treuen Feinheitsmaßes erlaubt somit, bestimmte Probleme für all diese Funktionen gemeinsam zu behandeln.

Unsere Untersuchungen erstrecken sich in den §§ 3 bis 6 in der Hauptsache auf sZ-treue Feinheitsmaße f, die monoton bezüglich $\succ$ (das bedeutet: $G \succ G' \Rightarrow f(G) \geqq f(G')$) und in der Weise normiert sind, daß der Nullgraph den

Wert 0 erhält[1]. Für diese f wird in Satz 2 genau beschrieben, wie die Elemente der zugehörigen $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ aus den Elementen der Basen $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ (s. [15], S. 137) aufgebaut sind, und es ergeben sich für $n \leqq 5$ weitgehende Aussagen über diese Basen selbst. So folgt für $n \leqq 4$, daß das zu einem solchen f gehörende $\mathfrak{F}^*(n)$ mit der Homomorphieklasse $\mathfrak{H}^*(n)$ identisch ist. (Daraus folgt z. B., daß jeder Graph, dem bei einem dieser Feinheitsmaße ein Wert $\geqq 4$ zugeordnet wird, eine Unterteilung von $S(4)$ enthält; dieser Satz enthält die Richtigkeit der Hadwiger-Vermutung für $n \leqq 4$ als Spezialfall.) Im Falle $n = 5$, der für das Vierfarbenproblem der interessanteste ist, erhalten wir das überraschende Resultat, daß für jedes dieser f das zugehörige $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ außer höchstens dem Graphen W (dieser besteht aus einem Achteck mit seinen vier Hauptdiagonalen) keinen nicht ebenen Graphen enthalten kann[2]. Ein Satz von K. WAGNER (s. [12], S. 571 und [13], S. 444) besagt, daß $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{H}}^*(5)$ aus den primen ebenen Dreiecksgraphen sowie dem Graphen W besteht. Der wesentliche Inhalt dieses Satzes ist daher von einem allgemeineren Standpunkt aus wiedergewonnen.

Ein Graph heißt n-dünn, wenn er nicht homomorph zu einem n-fach zusammenhängenden Graphen ist. Die Klasse $\mathfrak{D}^*(n)$ der n-dünnen Graphen resultiert aus einem sZ-treuen, bezüglich $\succ$ monotonen Feinheitsmaß $d(G)$ (vgl. Def. 4). Durch Angabe der Basis von $\hat{\mathfrak{D}}^*(4)$ gelingt uns in Satz 6 eine vollständige Charakterisierung aller 4-dünnen Graphen.

Im § 6 betrachten wir Zusammenhänge zwischen den Klassen $\mathfrak{F}^*(n)$ und zwischen den Basen $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ (wo also n variiert) für ein Feinheitsmaß f in dem genannten engeren Sinne; ferner stellen wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß irgendeine Menge von Graphen ein $\mathfrak{F}^*(n)$ bzw. ein $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ (in bezug auf ein solches f) darstellt. Dabei bekommen wir einen gewissen Überblick über die Gesamtheit der Feinheitsmaße dieser Art. Satz 11 zeigt in Verbindung mit Satz 4 das sprunghafte Anwachsen der Schwierigkeit beim Übergang von den $\mathfrak{F}^*(4)$ zu den $\mathfrak{F}^*(5)$.

Im Schlußparagraphen schließlich werden Kriterien dafür aufgestellt, daß ein Graph homomorph zu einem 3- bzw. 4-fach zusammenhängenden Graphen mit einer bestimmten Mindestzahl von Ecken ist. Die Beweise ergeben sich fast unmittelbar aus den in den früheren Paragraphen entwickelten Methoden.

Zur Terminologie und Bezeichnungsweise

Betrachtet werden nur *endliche Graphen* ohne Schlingen und Zweiecke. Aus früheren Arbeiten übernehmen wir die Begriffe *Teilgraph*, *Untergraph*, *homomorph* (bezeichnet durch $\succ$), *Grad* $\gamma(e)$ einer Ecke e (s. [8], S. 76), *zusammenhängend*, *trennender Teilgraph*, *Komponente*, *Simplex*, *Unterteilung* (s. [6], S. 39), *n-fach zusammenhängend* (s. [8], S. 80). Ein Graph heißt *prim*, wenn er kein trennendes Simplex besitzt (s. [15], S. 133). Jeder Graph läßt sich durch sukzessives Aneinander-

[1] Da $\Phi(G)$ nicht monoton bezüglich $\succ$ ist (wie man etwa durch einmalige Unterteilung jeder Kante eines Simplexes einsieht), betrachtet man statt $\Phi(G)$ das Maß $\tilde{\Phi}(G) = \mathrm{Max}\{\Phi(H) \mid G \succ H\}$; dieses ist sZ-treu, hat die verlangten Monotonie- und Normiertheitseigenschaften und leistet für Färbungsprobleme dasselbe wie Φ.

[2] Es gibt solche f, für die $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ nur ebene Elemente enthält (s. § 6, Schluß).

heften von Primgraphen längs Simplexen auf eindeutige Weise aufbauen ([15], Satz 1). Hat man eine Graphenmenge Γ, so heißt die Menge aller Primgraphen, die in diesen *simplizialen Zerfällungen* (kurz: sZ; s. [15], S. 132) der Graphen $\in \Gamma$ vorkommen, die *Basis* von Γ (s. [15], Def. 2). Sie wird bezeichnet mit $\mathfrak{B}\Gamma$.

Das *Kreuzprodukt* $G \times G'$ von Graphen G und G' ist in [6], S. 39 erklärt. Wenn keine Irrtümer zu befürchten sind, bezeichnen wir für eine natürliche Zahl α den Graphen mit α Ecken und leerer Kantenmenge einfach mit α. $G \times 1$ bezeichnet insbesondere den Graphen, der durch Adjunktion einer neuen Ecke $e \notin G$ zu G, die zu jeder der Ecken aus G benachbart sein soll, entsteht.

Ist Γ eine Menge von Graphen, so bezeichne $\hat{\Gamma}$ die Menge aller *maximalen* Graphen $\in \Gamma$. Dabei heißt $G \in \Gamma$ maximal in Γ, wenn gilt:

$$G \cup N \in \Gamma \Leftrightarrow N \text{ leer},$$

wobei N irgendeine Menge von neuen Kanten (s. [6], S. 38) zu G ist.

Θ bezeichne den leeren Graphen oder Nullgraphen. Mit $\alpha(G)$ bezeichnen wir die Eckenzahl von G, mit $\varkappa(G)$ die Kantenzahl von G.

Um Worte zu sparen, wollen wir zwischen isomorphen Graphen im allgemeinen nicht unterscheiden.

§ 1. Feinheitsmaße im weiteren Sinne

Def. 1. Es sei f eine Funktion, die jedem endlichen Graphen G eine ganze Zahl $f(G)$ zuordnet; ϱ sei eine der in [8] (vgl. S. 76 und 78) betrachteten Relationen $\succ$, $\succ_v$ ($G \varrho G'$ bedeutet also z. B., daß G einen zu G' isomorphen Teilgraphen oder eine Unterteilung von G' enthält oder zu G' homomorph ist[3]). f heißt ein *bezüglich ϱ monotones Feinheitsmaß*, kurz ein Feinheitsmaß bezüglich ϱ, wenn gilt:

(1ϱ) $\quad G \varrho G' \Rightarrow f(G) \geqq f(G')$;

(2) $\quad f(G \times 1) = f(G) + 1$;

(3) $\quad G = G' \cup G'', \quad G' \cap G'' = \Theta \Rightarrow f(G) = \mathrm{Max}\{f(G'), f(G'')\}$.

Wenn $f(\Theta) = 0$[4] ist, so wollen wir f *normiert* nennen.

Man hat dann, wie man leicht feststellt:

(1.1) *G isomorph $G' \Rightarrow f(G) = f(G')$.*

Dies folgt aus der Antisymmetrie von ϱ; s. [8], (1.6).

(1.2) *$f(S) = f(\Theta) + \alpha(S)$ für Simplexe S.*

(1.3) *Ist G' Untergraph von G, so $f(G) \leqq f(G') + \alpha(G - G')$.*

Denn $G \subsetneqq G' \times \alpha(G - G')$.

(1.4) *Ist T Teilgraph von G und sind $G_1, \ldots, G_n$ die Komponenten von $G - T$, so ist $\mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1 \leqq \nu \leqq n} f(G_\nu) \leqq f(G) \leqq \alpha(T) + \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1 \leqq \nu \leqq n} f(G_\nu)$.*

(Wegen $f(G - T) = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1 \leqq \nu \leqq n} f(G_\nu)$ und (1.3).)

Insbesondere folgt:

(1.4') *Ist G kein Simplex, so ist $f(G) < f(\Theta) + \alpha(G)$.*

Denn sind e, e' in G nicht benachbarte Ecken, so bilden die restlichen Ecken ein e, e' trennendes T mit $\alpha(G) - 2$ Ecken.

(1.5) *Ist $f(G) = n$ ($G \neq \Theta$), so existiert ein Untergraph G' von G mit $f(G') = n - 1$.*

---

[3] Es genügt im folgenden, ϱ als eine dieser drei Relationen anzunehmen.

[4] Es bedeutet offenbar keine Einschränkung, $f(\Theta) = 0$ zu fordern; für die praktischen Fälle scheint es aber zweckmäßiger, $f(\Theta) \neq 0$ zuzulassen.

Denn streicht man sukzessive Ecken von G, so muß man einmal zu einem solchen G' gelangen, weil wegen (1.3) bei Streichung einer einzelnen Ecke der f-Wert jeweils nur um höchstens 1 abnehmen kann.

(1.6) *Ist k eine neue Kante zu G, so ist* $f(G \cup k) \leqq f(G) + 1$.

Daß bei Adjunktion einer neuen Kante k der f-Wert von G um höchstens 1 wächst, folgt sofort, wenn man eine mit k inzidierende Ecke streicht und (1.3) anwendet.

Def. 2. Ist f irgendein Feinheitsmaß, so bezeichnen wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $\mathfrak{F}(n)$, bzw. mit $\mathfrak{F}^*(n)$, die Menge aller Graphen G mit $f(G) = n$, bzw. mit $f(G) < n$, und mit $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ die Menge der maximalen Graphen aus $\mathfrak{F}^*(n)$, kurz:

$$\hat{\mathfrak{F}}^*(n) = \{G \mid f(G \cup N) < n \Leftrightarrow N \text{ leer}\},$$

wo mit N Mengen neuer Kanten zu G bezeichnet werden sollen.

$\mathfrak{F}(n)$ wollen wir auch die *f-Klasse für n*, $\mathfrak{F}^*(n)$ die *f-Klasse unterhalb n* nennen.

Natürlich wird durch Angabe der $\mathfrak{F}^*(n)$ (oder auch der $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$) das Feinheitsmaß f eindeutig bestimmt.

Man hat dann:

(1.7) *Ist $G \in \mathfrak{F}^*(n)$, so kann G durch Adjunktion einer (evtl. leeren) Menge N von neuen Kanten zu einem Element $\in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ erweitert werden.*

(1.8) *Ist $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ und kein Simplex, so ist* $f(G) = n - 1$.

(1.7) und (1.8) folgen unmittelbar aus (1.6). Wegen (1.2) hat man sofort:

(1.9) $\mathfrak{F}^*(1) \subset \mathfrak{F}^*(2) \subset \cdots \subset \mathfrak{F}^*(n) \subset \cdots$

(wobei $\subset$ die echte Inklusion bezeichnet).

Aus Def. 1, (2) folgert man noch leicht:

(1.10) $G \in \mathfrak{F}^*(n) \Leftrightarrow G \times 1 \in \mathfrak{F}^*(n+1)$,

und

(1.11) $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n) \Leftrightarrow G \times 1 \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n+1)$.

Wir betrachten einige

Beispiele von Feinheitsmaßen

1. Die *Färbungszahl* $\Phi(G)$;
2. der *Homomorphiegrad* $h(G)$: $h(G) = n \Leftrightarrow G \succ S(n)$, $\not\succ S(n+1)$;
3. $h'(G)$ werde definiert durch: $h'(G) = n \Leftrightarrow G \supseteqq U(S(n))$, $\not\supseteqq U(S(n+1))$;
4. $\tilde{\Phi}(G) = \operatorname{Max}\{\Phi(G') \mid G \succ G'\}$;
5. der *Minimalgrad*: $\mu(G) = \operatorname{Min}\{\gamma(e) \mid e \in G\}$;
6. im Turánschen Graphensatz wird i. w. das folgende Maß $t(G)$ untersucht: $t(G) = n \Leftrightarrow G \supseteqq S(n)$, $\not\supseteqq S(n+1)$;
7. das *Zusammenhangsmaß* $z(G)$: $z(G) = n \Leftrightarrow G$ enthält einen n-fach zusammenhängenden, aber keinen $(n+1)$-fach zusammenhängenden Teilgraphen (falls $\alpha(G) \geqq 2$; für $\alpha(G) = 1$ sei $z(G) = 0$, und es sei $z(\Theta) = -1$);
8. $z'(G)$, definiert durch: $z'(G) = n \Leftrightarrow G$ enthält eine Unterteilung eines n-fach zusammenhängenden, aber keines $(n+1)$-fach zusammenhängenden Graphen;

9. $d(G)$, definiert durch: $d(G) = n \Leftrightarrow G$ ist homomorph zu einem n-fach zusammenhängenden, aber nicht zu einem $(n+1)$-fach zusammenhängenden Graphen.

(In 8. und 9. denke man sich auch jeweils das unter 7. in der Klammer Gesagte hinzugefügt.) Mit dem Feinheitsmaß $d(G)$ werden wir uns im § 5 noch näher beschäftigen.

1., 5., 6., 7. sind Feinheitsmaße bezüglich $\supseteqq$, 2., 4., 9. bezüglich $\succ$, 3., 8. bezüglich $\succ_2$.

Jedem Feinheitsmaß f ordnen wir ein Feinheitsmaß $\tilde{f}$ bezüglich $\succ$ zu vermöge der Festsetzung
$$\tilde{f}(G) = \operatorname{Max}\{f(G') \mid G \succ G'\}.$$

Dann ist z. B. $h(G) = \tilde{h}'(G) = \tilde{t}(G)$ und $d(G) = \tilde{z}'(G) = \tilde{z}(G)$. HADWIGERs Vermutung läßt sich dann folgendermaßen formulieren: $\tilde{\Phi}(G) = h(G)$ für alle (endlichen) Graphen G.

Es werde noch auf folgendes interessante Problem hingewiesen: NORDHAUS und GADDUM zeigten, daß für zueinander komplementäre Graphen G und $\bar{G}$ gilt $2 \cdot \sqrt{\alpha(G)} \leqq \Phi(G) + \Phi(\bar{G})$ (s. [9], S. 227). Wenn HADWIGERs Vermutung richtig ist, müßte sich $2 \cdot \sqrt{\alpha(G)} \leqq h(G) + h(\bar{G})$ zeigen lassen. (Dies wäre eine schärfere Abschätzung als die sich aus dem Satz von RAMSEY mittels der bisher bekannten Schranken für $t(G) + t(\bar{G})$ ergebende, die von der Ordnung $\log \alpha(G)$ ist.)

Es kann auch sinnvoll sein, Feinheitsmaße zu betrachten, die nur auf einer Teilklasse Γ der Klasse aller endlichen Graphen definiert sind (im übrigen aber die Bedingungen von Def. 1 erfüllen). Zum Beispiel sei Γ die Klasse der nicht ebenen Graphen. Ist $G \in \Gamma$, so streiche man in jeder nicht ebenen Komponente von G je eine beliebige Ecke. In jeder nicht ebenen Komponente des entstehenden Graphen streiche man wieder je eine beliebige Ecke; mit jeder der so entstehenden Komponenten, sofern nicht eben, verfahre man wieder so, usf. Nach endlich vielen, etwa n Schritten, entsteht ein ebener Graph. Das Minimum der Zahlen n, für alle diese Streichungsverfahren, werde G als Feinheitsmaß $f(G)$ zugeordnet. Dieses $f(G)$ kann als ein Maß für die „Unebenheit" von G aufgefaßt werden.

§ 2. Äquivalenz von Feinheitsmaßen

f, g seien Feinheitsmaße. f heißt *nicht schwächer* als g, wenn gilt: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es ein $m = m(f, n)$, so daß aus $f(G) \geqq m$ folgt $g(G) \geqq n$. f, g heißen *äquivalent*, wenn f nicht schwächer als g und g nicht schwächer als f ist. Dadurch ist offenbar eine Äquivalenzrelation im üblichen Sinne erklärt. Die Äquivalenzklassen sind teilweise geordnet vermöge der (für unsere f offenbar reflexiven und transitiven) Nicht-Schwächer-Relation. — Wir nennen weiter f *stärker* als g, wenn f nicht schwächer als g und nicht äquivalent mit g ist. Es gilt dann:

(2.1) *$h(G)$ ist stärkstes Feinheitsmaß bezüglich $\succ$.*

(Denn sind f und n gegeben, so gilt: $h(G) \geqq n - f(\Theta) \Rightarrow G \succ S(n - f(\Theta)) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(G) \geqq n$.)

Insbesondere hat man

(2.2) *Ist f normiert und bezüglich $\succ$, so ist $f(G) \geqq h(G)$ für jeden Graphen G.*

(2.3) *Sind f, g Feinheitsmaße (bezüglich desselben ϱ), so ist auch $m(G) = \operatorname{Max}\{f(G), g(G)\}$ ein Feinheitsmaß bezüglich ϱ.*

Die Frage nach der Äquivalenz bestimmter Feinheitsmaße liefert interessante und schwierige Probleme. Das erste allgemeine Ergebnis in dieser Richtung ist der folgende Satz von K. WAGNER [14]:

Satz 1. *$h(G)$ und $\tilde{\Phi}(G)$ sind äquivalent.*

Von H. A. JUNG [16] wurde (schärfer) bewiesen, daß $\Phi(G)$ nicht schwächer als $h'(G)$ ist. — Die Vermutung (G_n) aus [7] (S. 61) besagt (in unserer Ausdrucksweise) die Äquivalenz von $h(G)$ und $\tilde{\mu}(G)$. Sie läßt sich mittels des Wagnerschen Beweisgedankens [14] auf paare Graphen reduzieren. — Beispiele nicht äquivalenter Feinheitsmaße sind $h(G)$ und $t(G)$ bzw. $h'(G)$ und $t(G)$. Denn für $G = n \times \binom{n}{2}$ ist $h(G) = h'(G) = n$, aber $t(G) = 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. — In einem Brief stellte mir B. GRÜNBAUM die Frage, ob zu jedem n ein $f(n)$ derart existiere, daß jeder $f(n)$-fach zusammenhängende Graph eine Unterteilung von $S(n)$ enthält, ob also $h'(G)$ und $z'(G)$ äquivalent seien. Diese Frage läßt sich auf die folgende zurückführen:

Vermutung. Zu jedem n gibt es ein $p(n)$ mit folgender Eigenschaft: Gibt man in einem $p(n)$-fach zusammenhängenden Graphen G zwei n-Tupel verschiedener Ecken $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ beliebig, aber in fester Reihenfolge vor, so kann man stets n fremde Wege $W_1, \ldots, W_n$ in G finden derart, daß W_i von a_i nach b_i führt $(i = 1, \ldots, n)$.

Angenommen, diese Vermutung sei richtig. Man gebe ein n vor und setze $k = \binom{n}{2}$ sowie $m = 2k + \mathrm{Max}\{p(k^2), 2k^2\}$. Es sei G irgendein m-fach zusammenhängender Graph; in G seien zwei k-Tupel verschiedener Ecken $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ gegeben. Man bestimme nun zu jedem a_i k zu a_i benachbarte Ecken a_{ij} $(j = 1, \ldots, k)$ sowie zu jedem b_i k zu b_i benachbarte Ecken b_{ji} $(j = 1, \ldots, k)$ derart, daß keine zwei der $2k + 2k^2$ vielen Ecken a_i, b_i, a_{ij}, b_{ji} zusammenfallen (das geht, weil der Grad jeder Ecke in G mindestens $2k + 2k^2$ ist). $G - \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}$ ist dann $p(k^2)$-fach zusammenhängend, d. h. es gibt nach Annahme k^2 viele fremde Wege W_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k)$ derart, daß stets W_{ij} von a_{ij} nach b_{ij} führt. Die W_{ij} bilden zusammen mit den Kanten (a_i, a_{ij}), (b_i, b_{ji}) eine Unterteilung U eines $k \times k$, dessen Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ sind. Wegen $k = \binom{n}{2}$ folgt dann $U \supseteqq U(S(n))$.

§ 3. sZ-treue Feinheitsmaße. Allgemeine Zerlegungssätze

Def. 3. Wir nennen ein Feinheitsmaß f *sZ-treu*, wenn (schärfer als (3) in Def. 1) gilt

(4) $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex) $\Rightarrow f(G) = \mathrm{Max}\{f(G'), f(G'')\}$.

Durch vollständige Induktion folgt dann für sZ-treues f (vgl. den § 2 von [15]):

(3.1) *Ist $G_1, \ldots, G_l$ eine sZ von G, so ist $f(G) = \mathrm{Max}\{f(G_\lambda) \mid \lambda = 1, \ldots, l\}$; insbesondere $f(G) = \mathrm{Max}\{f(P) \mid P$ prim, $\subseteqq G\}$.*

Wir notieren folgenden Hilfssatz:

(3.2) *Es sei $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex) und $G \succ H$ vermöge einer homomorphen Abbildung φ. H', H'' bzw. T (letzteres nicht notwendig Simplex) seien die Bilder von G', G'' bzw. S bei φ. Dann ist $G' \succ H'$, $G'' \succ H''$, $S \succ T$ vermöge der entsprechenden Einschränkungen von φ, und es ist $H = H' \cup H''$, $H' \cap H'' = T$. Insbesondere folgt, wenn H mindestens $(\alpha(S)+1)$-fach zusammenhängend ist, daß schon wenigstens einer der Graphen G', G'' (vermöge φ) $\succ H$ sein muß.*

Dies folgt im wesentlichen daraus, daß für jeden zusammenhängenden Untergraphen $Z \subseteqq G$ stets auch jeder der Graphen $Z \cap G'$, $Z \cap G''$ zusammenhängend (evtl. leer) ist.

Daraus erhalten wir nun:

(3.3) *Ist das Feinheitsmaß $f(G)$ sZ-treu, so ist das Feinheitsmaß $\tilde{f}(G) = \operatorname{Max}\{f(H) \mid G \succ H\}$ gleichfalls sZ-treu.*

Beweis. Es sei H ein Graph mit $G \succ H$ und $f(H) = \tilde{f}(G)$. G sei längs eines Simplexes S zerlegt: $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$. Nach (3.2) ist $H = H' \cup H''$, $H' \cap H'' = T$, wobei $G' \succ H'$, $G'' \succ H''$, $S \succ T$ vermöge der Homomorphie $G \succ H$ gilt. Daher kann T durch Adjunktion einer (evtl. leeren) Menge N von neuen Kanten zu einem Simplex erweitert werden, ohne daß unsere Homomorphie zerstört wird, und es folgt $f(H \cup N) = f(H) = \tilde{f}(G)$ wegen $G \succ H \cup N \supseteq H$. Wegen der sZ-Treue von f ist nun $f(H \cup N) = \operatorname{Max}\{f(H' \cup N), f(H'' \cup N)\}$, und wegen $G' \succ H' \cup N$, $G'' \succ H'' \cup N$ hat man also $\tilde{f}(G) \geqq \operatorname{Max}\{\tilde{f}(G'), \tilde{f}(G'')\} \geqq$ $\geqq \operatorname{Max}\{f(H' \cup N), f(H'' \cup N)\} = \tilde{f}(G)$, womit die sZ-Treue von $\tilde{f}$ folgt.

Wir können feststellen:

(3.4) *Jedes der Feinheitsmaße $\Phi(G), h(G), h'(G), \tilde{\Phi}(G), t(G), z(G), z'(G), d(G)$ ist sZ-treu.*

Wir wollen, um unsere Ausführungen nicht unnötig zu komplizieren, in dem Rest dieses Paragraphen die betrachteten Feinheitsmaße als *normiert* (s. Def. 1) voraussetzen. Dies bedeutet ja gegenüber dem allgemeinen Falle nur eine Verschiebung um eine additive Konstante.

Aus den Ergebnissen des § 2 von [15] folgt für jedes Feinheitsmaß f und jede natürliche Zahl n die Existenz der Basis $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ von $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ (s. Def. 2), so daß also jedes $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ sich aus Graphen $\in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ durch sukzessive Anheften längs Simplexen aufbauen läßt. Dieser Aufbau soll im folgenden genauer untersucht werden.

(3.5) *Es sei f ein sZ-treues normiertes Feinheitsmaß bezüglich $\succ$ (oder auch bezüglich $\succ_\nu$, $\nu \geqq 2$). Es sei $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex), G', $G'' \supset S$. Notwendig und hinreichend dafür, daß G in $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ liegt, ist, daß simultan die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *G', G'' gehören beide zu $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$;*

2. *Wenn $\alpha(S) < n-2$, so gibt es in wenigstens einem der Graphen G', G'' kein Simplex, das S echt als Teilgraph enthält.*

Beweis. Die Bedingungen 1. und 2. sind notwendig für $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. Denn ist z. B. $G' \notin \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, so ist entweder $f(G') \geqq n$ (dann auch $f(G) \geqq n$), oder es existiert eine nicht leere Menge N von neuen Kanten zu G', so daß $f(G' \cup N) < n$ gilt; dann ist aber wegen der vorausgesetzten sZ-Treue $f(G \cup N) = \operatorname{Max}\{f(G' \cup N), f(G'')\} = f(G)$, d. h. G nicht maximal in $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. — Ist die Bedingung 2. nicht erfüllt, so existieren also Ecken $e' \in G' - S$, $e'' \in G'' - S$, die mit den Ecken von S zusammen Simplexe S' bzw. S'' (die also S echt enthalten) in G' bzw. G'' aufspannen; $\alpha(S) < n-2$. Nun sei k die (nicht in G vorkommende) Kante (e', e''). S', S'' und k spannen ein Simplex S^* der Ordnung $\alpha(S)+2 < n$ auf. Wir haben $G \cup k = G' \cup S^* \cup G''$ mit $(G' \cup S^*) \cap G'' = S''$, $G' \cap S^* = S'$, so daß (wegen $f(G')$, $f(S^*)$, $f(G'')$ sämtlich $<n$ und der sZ-Treue von f) auch $f(G \cup k) < n$ folgt.

Umgekehrt setzen wir die Bedingungen 1. und 2. als erfüllt voraus. Es sei k mit den Endpunkten p, q eine neue Kante zu G. Liegen p, q beide in G' (oder in G''), so folgt $f(G \cup k) \geqq f(G' \cup k) \geqq n$. Daher kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $p \in G' - S$, $q \in G'' - S$ gilt. Sind p, q beide zu jeder Ecke $\in S$ benachbart, so muß $\alpha(S) \geqq n-2$ gelten (wegen Bedingung 2.); p, q, S spannen dann zusammen mit k ein Simplex der Ordnung $\geqq n$ auf, und es folgt $f(G \cup k) \geqq n$.

Also sei (etwa) p zu einer Ecke $s \in S$ nicht benachbart. Wir betrachten das Teilsimplex S_0 von S, in das eine Ecke $\in S$ genau dann aufgenommen werde, wenn sie von p aus (in G') durch einen Weg erreichbar ist, der keine innere Ecke mit S gemeinsam hat.

Falls p mit S_0 (in G') ein Simplex aufspannt, so folgt $S_0 \subsetneqq S - \{s\}$; S_0 trennt dann also s und p in G'. Wegen der im ersten Beweisteil als notwendig erkannten Bedingungen für $G' \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ folgt somit $\alpha(S_0) = n-2$. Ist nun auch q zu jeder Ecke $\in S_0$ benachbart, so spannen p, q, S_0 zusammen mit k ein $S(n)$ auf. Ist q aber zu (wenigstens) einer Ecke $s'' \in S_0$ nicht benachbart, so bilden k und (p, s'') eine unterteilte neue Kante zu G''.

Es sei jetzt p zu einer Ecke $s' \in S_0$ nicht benachbart. Ist nun q zu s' benachbart, so bilden k und (q, s') eine unterteilte neue Kante zu G'. Ist q aber zu s' nicht benachbart, so existiert nach Definition von S_0 ein von p nach s' führender Weg $Z \subsetneqq G'$, der mit S außer s' keine Ecke gemeinsam hat. Z und k bilden dann zusammen eine unterteilte neue Kante zu G''.

In jedem Falle folgt $f(G \cup k) \geqq n$ aus der Maximalität von G', G''.

Aus (3.5) zusammen mit Satz 1 aus [15] erhalten wir jetzt (man berücksichtige insbesondere auch, daß wegen (3.5) die Basis von $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ Teilmenge von $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ ist, also gerade aus allen primen Graphen $\in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ besteht):

Satz 2. *Es sei f ein normiertes, sZ-treues Feinheitsmaß bezüglich $\succ$ (oder auch bezüglich $\succ_\nu$ für ein $\nu \geqq 2$). Dann ist für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Gesamtheit $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ der maximalen Graphen der f-Klasse unterhalb n identisch mit der Klasse aller Graphen G der Form*

$$G = P_1 \cup \ldots \cup P_l,$$

wobei $P_1, \ldots, P_l$ aus der Basis $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ stammen und für jedes $\lambda = 2, \ldots, l$ gilt:

1. *$(P_1 \cup \ldots \cup P_{\lambda-1}) \cap P_\lambda$ ist ein Simplex S_λ mit $P_1 \cup \ldots \cup P_{\lambda-1} \supset S_\lambda$, $P_\lambda \supset S_\lambda$,*
2. *Wenn $\alpha(S_\lambda) < n-2$ gilt, dann existiert in wenigstens einem der beiden Graphen $P_1 \cup \ldots \cup P_{\lambda-1}$, P_λ kein Simplex, das S_λ als echten Teilgraph enthält.*

Für die Elemente der Basis gilt folgende Charakterisierung:

(3.6) *Es sei f normiert, sZ-treu und bezüglich $\succ$. Dann und nur dann gehört ein Graph G zur Basis $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ für ein gewisses n, wenn gilt: 1. $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ und 2. G enthält kein Element von $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, mit Ausnahme von Simplexen der Ordnung $\leqq n-2$, als echten Teilgraph.*

Beweis. Daß die Bedingungen 1. und 2. hinreichend für $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ sind, folgt sofort aus (3.5). (Denn ein $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, das nicht prim ist, muß sich längs eines Simplexes in zwei Graphen G', G'', die nach (3.5) wieder in $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ liegen, aufspalten; wegen der sZ-Treue und (1.8) ist wenigstens einer der Graphen G', G'' kein Simplex der Ordnung $\leqq n-2$.)

Wegen (3.5) ist 1. auch notwendig für $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. Ist 2. nicht erfüllt, so sei $H \subset G$ ein Graph $\in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$; H kein Simplex der Ordnung $\leqq n-2$. Existierte in G

eine neue Kante k zu H, so wäre natürlich $f(G) \geqq f(H \cup k) > f(H) = n-1$. Daher gibt es in G eine Ecke $e \notin H$. T sei die Menge aller Ecken $\in H$, die von e aus erreichbar sind durch Wege $\subseteqq G$, die keine innere Ecke mit H gemeinsam haben. Zu je zwei Ecken $\in T$ gibt es also in G einen Weg, der diese verbindet und keine innere Ecke mit H gemeinsam hat. Daraus folgt wegen der Maximalität von H, daß T in G ein Simplex aufspannt. Existiert eine Ecke $e' \in H - T$, so trennt T offenbar e und e', so daß G also nicht prim ist. Ist andererseits $T = H$, so nach Voraussetzung $\alpha(H) = n-1$. Dann aber folgt durch Zusammenzug der e enthaltenden Komponente von $G - T$ auf eine Ecke: $G \succ T \times 1$, also $f(G) \geqq n$, mit Widerspruch.

Bemerkung. Ist f ein Feinheitsmaß bezüglich $\succ_v$ mit $v \geqq 2$, so kann man durch eine entsprechende Überlegung beweisen (wobei ein $S(n-1)$ als echter Teilgraph in einem Basiselement von $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ vorkommen kann): Es sei G ein Graph, dessen Primgraphen-sZ nicht nur aus lauter Simplexen der Ordnung $n-1$ besteht. Dann und nur dann ist $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, wenn 1. $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ ist und 2. G kein Element $\in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, das kein Simplex ist, als echten Teilgraphen enthält.

Man habe in einem Graphen G einen Untergraphen T. Mit $S(T)$ bezeichnen wir das durch Hinzunahme neuer Kanten zu T (mit den Ecken von T) gebildete Simplex. Wir nennen G *auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar* (s. [15], S. 132), wenn sich G auf $S(T)$ so homomorph abbilden läßt, daß jede Ecke $\in T$ in sich übergeht. Dann gilt:

Satz 3. *Es sei f ein normiertes, sZ-treues Feinheitsmaß bezüglich $\succ$. Ist $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ für ein gewisses n, hat man eine Zerlegung von G der Form*

$$G = G' \cup G'', \qquad G' \cap G'' = T,$$

und ist weiter sowohl G' als auch G'' auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar, so folgt:

$$T = S(T),$$

d. h. T ist Simplex.

Beweis. Es sei $S(T) = T \cup N$, wo N eine Menge von neuen Kanten zu T ist. Ist N nicht leer, so folgt $f(G \cup N) \geqq n$ wegen $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. Nun ist

$$G \cup N = (G' \cup N) \cup (G'' \cup N), \qquad (G' \cup N) \cap (G'' \cup N) = S(T),$$

so daß wegen der sZ-Treue von f gelten muß: $f(G' \cup N) \geqq n$ oder $f(G'' \cup N) \geqq n$. Nun ist aber, wie man durch Zusammenzug von G'' auf $T \cup N$ bzw. von G' auf $T \cup N$ erkennt, sowohl $G \succ G' \cup N$ als auch $G \succ G'' \cup N$; mithin müßte auch $f(G) \geqq \operatorname{Max}\{f(G' \cup N), f(G'' \cup N)\} \geqq n$ sein, mit Widerspruch. Also ist N leer, und es folgt $T = S(T)$.

Speziell in den Fällen $n \leqq 5$ läßt Satz 3 weitreichende Folgerungen zu, wie in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§ 4. Der Fall $n \leqq 4$

In diesem Paragraphen bedeute stets f ein normiertes, sZ-treues Feinheitsmaß bezüglich $\succ$; $\mathfrak{F}^*(n)$ bezeichne die f-Klasse unterhalb n für $n = 1, 2, \ldots$.

(4.1) *Für $n \geqq 4$ ist jedes $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ (mindestens) 2-fach zusammenhängend; wird $G \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ durch einen Untergraphen T mit $\alpha(T) = 2$ getrennt, so ist T ein*

Simplex, G also nicht prim. Jedes $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ $(n \geqq 4)$, mit Ausnahme der $S(v)$ mit $v \leqq 3$, ist daher (mindestens) 3-fach zusammenhängend.

Beweis. Daß G zusammenhängend ist und keine trennende Ecke besitzt, folgt sofort aus (3.5). Also ist G 2-fach zusammenhängend. — Trennt T mit den Ecken t', t'' den Graphen G, so ist $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = T$, $G', G'' \supset T$. Wegen des 2-fachen Zusammenhanges gibt es sowohl in G' als auch in G'' einen t' mit t'' verbindenden Weg (vgl. etwa [8], (2.1), (d)). Damit folgt nach Satz 3 $S(T) = T$.

Satz 4. *Für $n \leqq 4$ besteht $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ nur aus den Simplexen $S(v)$ mit $v \leqq n-1$. Insbesondere folgt für jedes $n \leqq 4$ die Gleichheit der Klassen $\mathfrak{F}^*(n)$ für alle sZ-treuen und normierten Feinheitsmaße bezüglich $\succ$* [5]*. Speziell ist $\hat{\mathfrak{F}}^*(2) = \mathfrak{F}^*(2)$ gleich der Klasse aller Graphen ohne Kanten, $\hat{\mathfrak{F}}^*(3)$ gleich der Klasse aller Bäume, $\hat{\mathfrak{F}}^*(4)$ gleich der Klasse aller Graphen, die durch sukzessives Zusammenheften von Dreiecken längs Kanten entstehen (zuzüglich der $S(v)$ mit $v \leqq 2$).*

Beweis. Ist G ein Element von $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(4)$ mit $\alpha(G) \geqq 4$, so ist nach (4.1) G 3-fach zusammenhängend. Jeder 3-fach zusammenhängende Graph G enthält aber eine Unterteilung von $S(4)$.[6] Also können in $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(4)$ nur die $S(v)$ mit $v \leqq 3$ liegen. Daraus folgt (etwa mittels der Operation $\times 1$) die Behauptung des Satzes auch für $n = 1, 2, 3$.

Damit haben wir:

Satz 4'. *Für jedes sZ-treue, normierte Feinheitsmaß bezüglich $\succ$ (oder auch bezüglich $\succ_v$ für ein $v \geqq 2$) gilt:*

$$f(G) \geqq 4 \Leftrightarrow G \supseteqq U(S(4)).$$

Denn die Klasse $\mathfrak{F}^*(4)$ ist nach Satz 4 ja gleich der (speziell aus $h(G)$ resultierenden) Klasse $\mathfrak{H}^*(4)$ aller nicht zu $S(4)$ homomorphen Graphen. Weiter ist $G \succ S(4)$ nach [6], (1.1) mit $G \supseteqq U(S(4))$ gleichbedeutend.

Aus diesem Grunde und wegen (3.3) haben wir:

Satz 4''. *Für jedes sZ-treue, normierte Feinheitsmaß g (also bezüglich jeder der Relationen $\succ$, $\succ_v$) gilt:*

$$g(G) \geqq 4 \Rightarrow G \supseteqq U(S(4)).$$

Dieser Satz enthält für $g = \Phi$ die Richtigkeit der Hadwiger-Vermutung für $n \leqq 4$ als Spezialfall.

§ 5. Der Fall $n = 5$

Der Fall $n = 5$ ist der für das Vierfarbenproblem interessanteste. Nach einem Satz von K. Wagner (s. etwa [13], Satz 1) ist der Vierfarbensatz mit der Richtigkeit der Aussage „$\Phi(G) \geqq 5 \Rightarrow G \succ S(5)$, für alle G“, der Hadwiger-Vermutung für $n = 5$, äquivalent. Man kann letztere Aussage auch so ausdrücken: Für die (speziellen) Feinheitsmaße $h(G)$ und $\tilde{\Phi}(G)$ sind die zugehörigen Klassen

[5] Dies läßt sich auch noch für Feinheitsmaße bezüglich $\succ_v$ $(v \geqq 2)$ zeigen.

[6] Siehe z. B. [1], Satz 8 oder auch [8], Satz 3. — Ist nämlich k eine Kante in G, so gibt es zwei von k verschiedene Wege Z, Z', die die Endpunkte von k verbinden und sonst zueinander fremd sind. G, vermindert um diese Endpunkte, muß zusammenhängend sein; daher existiert ein Weg Z'', der innere Ecken von Z, Z' verbindet und sonst zu $Z \cup Z'$ fremd ist. $Z \cup Z' \cup Z'' \cup k$ bildet ein $U(S(4)) \subseteqq G$.

unterhalb 5 gleich. Es wird deshalb von Interesse sein, Aussagen über die f-Klassen unterhalb 5, insbesondere über die Basen der $\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$, zu gewinnen. Hier und in dem ganzen folgenden Paragraphen bedeute stets f ein sZ-treues, normiertes Feinheitsmaß bezüglich $\succ$, $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ für jedes n die f-Klasse unterhalb n.

Wir beweisen zunächst zwei entscheidende Hilfssätze.

(5.1) *Es seien für $n \geqq 5$ Elemente G, H aus der Basis $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ gegeben* ($\alpha(H) \geqq 3$). *H enthalte kein Dreieck. Liegt dann in G eine Unterteilung von H, so folgt $G = H$.*

Beweis. Angenommen, es sei $U(H) \subset G$, $U(H) \neq H$. Wegen (4.1) sind G und H beide 3-fach zusammenhängend. Ist Z eine unterteilte Kante von H, also ein Weg $\subset U(H)$, der zwei verschiedene Verzweigungspunkte v', v'' von $U(H)$ verbindet und eine Ecke $e \neq v', v''$ enthält, so muß es einen Weg Q in G geben, der eine Ecke $e' \in Z - \{v', v''\}$ mit einer Ecke $e'' \in U(H) - Z$ verbindet und $Q \cap U(H) = \{e', e''\}$ erfüllt; andernfalls würden v', v'' den Graphen G trennen. Es gibt dann einen Verzweigungspunkt $v \neq v', v''$ in $U(H)$, so daß entweder $e'' = v$ gilt oder e'' Teilpunkt (nicht Verzweigungspunkt) einer unterteilten, von v auslaufenden Kante Z^* von H ist. Nach Voraussetzung existiert höchstens eine der Kanten (v, v'), (v, v'') in H. Ist etwa v zu v' in H nicht benachbart, so ziehen wir e'' längs Z^* mit v und e' längs Z mit v' zusammen. Es folgt so $G \succ H \cup k$, wo k eine neue Kante zu H ist, mit Widerspruch zu $G \in \mathfrak{F}^*(n)$ und $H \in \hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. Also kann es keine unterteilte Kante von H geben, d. h. es ist $G \supseteq H$. Mit Hilfe von (3.6) folgt dann sofort $G = H$.

(5.2) *Es sei $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$, $n \geqq 5$; T mit den Ecken t, t', t'' sei ein trennender Untergraph von G. Dann gilt:*

1. *Je zwei der Ecken t, t', t'' sind in G nicht benachbart;*
2. *$G - T$ hat genau zwei Komponenten;*
3. *eine dieser Komponenten hat die Eckenzahl* 1, *die andere eine Eckenzahl* $\geqq 2$.

Beweis. Es seien $H_1, \ldots, H_l$ ($l \geqq 2$) die Komponenten von $G - T$; der durch $H_\lambda \cup T$ aufgespannte Untergraph von G werde mit G_λ bezeichnet ($\lambda = 1, \ldots, l$). Wegen (4.1) ist G 3-fach zusammenhängend; zu jeder Ecke $e \in H_\lambda$ gibt es also drei bis auf e fremde Wege Z, Z', Z'', die e mit resp. t, t', t'' verbinden.

Existiert nun in G etwa die Kante (t, t'), so sehen wir durch Zusammenzug von Z'' auf t'', daß G_λ auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar ist.

Als nächstes behandeln wir den Fall, daß (etwa) Z keine Kante ist. Da G durch e, t nicht getrennt wird, muß es dann in G_λ einen Weg Q geben, der eine Ecke $p \in Z - \{e, t\}$ mit einer $q \neq e$ aus $Z' \cup Z''$ (etwa o. B. d. A. $q \in Z'$) verbindet und $Q \cap (Z \cup Z' \cup Z'') = \{p, q\}$ erfüllt. Wir ziehen nun p längs Z mit t und q längs Z' mit t' zusammen. Durch den weiteren Zusammenzug von Z'' auf t'' folgt dann, daß G_λ auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar ist.

Sind Z, Z', Z'' sämtlich Kanten und ist $\alpha(H_\lambda) \geqq 2$, so wähle man eine zu e benachbarte Ecke $f \in H_\lambda$. Da e nicht G trennt, existiert ein Weg Q von f zu einem der t, t', t'' (etwa zu t), der e vermeidet und außer t keine Ecke von T trifft. Dann folgt durch Ersetzung von Z durch $Q \cup (e, f)$ nach dem vorigen Fall, daß G_λ auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar ist.

Nach diesen Überlegungen folgt: G_λ ist sicher dann auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar, wenn es in G eine Kante gibt, die Ecken $\in T$ verbindet, oder wenn $\alpha(H_\lambda) \geqq 2$ ist. Daher folgt wegen der Primität von G nach Satz 3 die Behauptung 1. des Satzes und daß $\alpha(H_\lambda) \geqq 2$ nur für höchstens eines der H_λ gilt. (Ist etwa $\alpha(H_1) \geqq \alpha(H_2) \geqq 2$, so erfüllt G mit $G' = G_1$, $G'' = G_2 \cup \ldots \cup G_l$ die Bedingungen von Satz 3.)

Ist andererseits $\alpha(H_\lambda) = 1$ für $\lambda = 1, \ldots, l$, so ergänzen wir T durch Adjunktion neuer Kanten zu einem Dreieck. Der entstehende Graph ist dann aus lauter Tetraedern $S(4)$ längs $S(T)$ zusammengeheftet, wegen der sZ-Treue also $\in \mathfrak{F}^*(5)$, entgegen der Maximalität von G.

Daher ist für genau ein λ (etwa $\lambda = 1$) $\alpha(H_\lambda) \geqq 2$. Ist $l \geqq 3$, so sind natürlich $G' = G_1$ und $G'' = G_2 \cup \ldots \cup G_l$ beide auf $S(T)$ identisch T-zusammenziehbar. Daher folgen wegen Satz 3 auch die Behauptungen 2. und 3.

Nunmehr folgt:

Satz 5. *Es sei f ein normiertes, sZ-treues Feinheitsmaß bezüglich $\succ$. Dann gilt: Als einziges nicht ebenes Element der Basis von $\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ kommt nur der Graph W in Frage, der aus einem Achteck mit seinen vier Hauptdiagonalen besteht* (s. etwa [15], S. 141, Fig. 5 oder [7], S. 49, Fig. 3).

Beweis. Es sei $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ nicht eben. Wegen $f(G) < 5$ folgt $G \not\succ S(5)$. Daher ist nach KURATOWSKI $G \supseteqq U(3,3)$. Aus dem Satz (2.2) in [7] folgt somit: Entweder gibt es in G eine trennende Eckenmenge T mit 3 Ecken, so daß $G - T$ mindestens 3 Komponenten hat, oder G enthält eine Unterteilung von W. Der erste Fall ist wegen (5.2) unmöglich. Im zweiten Falle ist notwendig $f(W) < 5$; es ist $W \cup k \succ S(5)$ für jede neue Kante k zu W (s. [7], (1.2)), d. h. $W \in \hat{\mathfrak{F}}^*(5)$. W ist prim und enthält kein Dreieck, so daß wegen (5.1) folgt $G = W$, womit der Satz bewiesen ist.

In dem speziellen Falle, daß f der Homomorphiegrad h ist, erhalten wir aus Satz 5 den Satz von K. WAGNER, *daß die Basis von $\hat{\mathfrak{H}}^*(5)$ aus den primen ebenen Dreiecksgraphen und dem Graphen W besteht* (s. [13], Satz 4)[7]; denn $W \in \hat{\mathfrak{H}}^*(5)$, und die ebenen Dreiecksgraphen sind ja, wie relativ leicht folgt (s. etwa [6], Satz 4) gerade die ebenen Graphen, die nach Adjunktion irgendeiner neuen Kante $\succ S(5)$ werden. Ist f hingegen gleich $\tilde{\Phi}$, so bildet die Bestimmung der ebenen Basiselemente im Falle $n = 5$ gerade die entscheidende Schwierigkeit. Wir wollen die $\tilde{\Phi}$-Klasse unterhalb n mit $\mathfrak{Q}^*(n)$ bezeichnen; *$\mathfrak{Q}^*(n)$ ist dann also gerade die Klasse der Graphen, die nicht homomorph zu einem Graphen mit der Färbungszahl $\geqq n$ sind. Offenbar ist $W \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{Q}}^*(5)$, und W ist nach Satz 5 das einzige nicht ebene Element dieser Basis.* Ebene Elemente von $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{Q}}^*(5)$

[7] Herr Prof. O. ORE wies mich auf die folgende Lücke in meinem Beweis dieses Satzes in [7] hin: Auf S. 53 wird aus (2.1) und (2.4) der Satz 1 geschlossen. Indessen braucht im Falle $G = G' \cup G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(L)$, $G' \cap G'' = S(3)$ nicht notwendig jeder der Graphen G', G'' wieder in $\hat{\mathfrak{H}}^*(L)$ zu liegen. Diese Lücke schließt sich wie folgt: Zunächst kann o.B.d.A. G als 3-fach zusammenhängend vorausgesetzt werden; dann sind auch G', G'' 3-fach zusammenhängend. Mittels [7], (1.1), S. 49 und [6], (1.4), S. 41 schließt man nun unschwer für 3-fach zusammenhängendes H, $\alpha(H) \neq 5$: $H \in \hat{\mathfrak{H}}^*(L) \Leftrightarrow H \in \hat{\mathfrak{F}}^*(S(5))$. Damit folgt, daß G, G', G'' in $\hat{\mathfrak{F}}^*(S(5))$ liegen müssen, und G', G'' müssen dann auch in $\hat{\mathfrak{F}}(L)$ liegen, außer wenn G', G'' gleich D_5 gilt; D_5 reduziert sich aber weiter auf zwei $S(4)$.

sind z. B. die unendlich vielen primen Dreiecksgraphen der Form $C(v) \times 2$ ($C(v)$ bezeichnet einen Kreis der Länge v), $v = 4, 5, \ldots$, die ja sämtlich 4-färbbar sind und deren homomorphe Bilder, wie leicht zu sehen ist, ebenfalls eine zulässige Färbung mit höchstens 4 Farben gestatten. Hingegen ist *die Aussage, daß die ebenen Elemente von* $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{Q}}^*(5)$ *mit den primen ebenen Dreiecksgraphen übereinstimmen, äquivalent mit dem Vierfarbensatz* (denn sie ist ja offenbar äquivalent mit der Aussage, daß jedes homomorphe Bild eines jeden maximalen Graphen der Ebene höchstens die Färbungszahl 4 hat). Es läßt sich nicht ohne weiteres schließen, daß die ebenen Elemente der Basis notwendig Dreiecksgraphen sind. Man kann nicht einmal sagen, ob alle 4-färbbaren primen ebenen Dreiecksgraphen zur Basis gehören, da man zeigen kann, daß es zu jedem ebenen Graphen G einen 3-färbbaren primen ebenen Dreiecksgraphen gibt, der eine Unterteilung von G enthält.

(O.B.d.A. sei G 2-fach zusammenhängend. Wir unterteilen jede Kante von G durch je eine neue Ecke einmal (der entstehende Graph G' ist 2-färbbar) und legen sodann in jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ von G' eine neue Ecke, die wir mit jeder Ecke des $\mathfrak{G}$ berandenden Polygons durch eine Kante verbinden. Der entstehende Dreiecksgraph leistet das Verlangte.)

Wir betrachten nun das (in § 1 als 9. Beispiel definierte) Feinheitsmaß $d(G)$. $d(G)$ ist sZ-treu, aber nicht normiert. Dem Fall $n=5$ bei normierten Feinheitsmaßen entspricht wegen $d(\Theta) = -1$ der Fall $d(G) = 4$.

Def. 4. Ein Graph G heiße *n-dünn*, wenn er nicht homomorph zu einem n-fach zusammenhängenden Graphen ist; G heiße *maximal n-dünn*, wenn G n-dünn ist, aber nach Adjunktion einer beliebigen neuen Kante homomorph zu einem n-fach zusammenhängenden Graphen wird. Die Klasse der n-dünnen Graphen werde bezeichnet mit $\mathfrak{D}^*(n)$, die der maximal n-dünnen also mit $\hat{\mathfrak{D}}^*(n)$. Somit: $G \in \mathfrak{D}^*(n) \Leftrightarrow d(G) < n$.

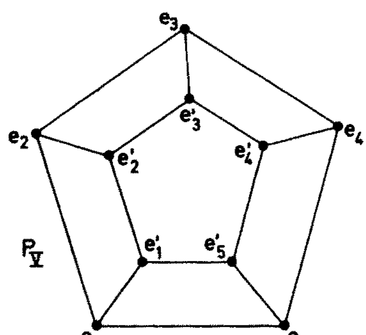

Fig. 1

Für $n \leqq 3$ sind die n-dünnen Graphen im vorigen Paragraphen charakterisiert worden. Unser Ziel für den Rest dieses Paragraphen ist die *vollständige Charakterisierung aller 4-dünnen Graphen.* Natürlich genügt dazu die Kennzeichnung aller maximal 4-dünnen Graphen und zu dieser wegen Satz 2 die Aufstellung der Basis von $\hat{\mathfrak{D}}^*(4)$.

Unter einem *Fünfecksprisma* P_V verstehen wir den folgenden Graphen (s. Fig. 1): Seine Ecken seien $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 = e_0, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5 = e'_0$; seine Kanten seien (e_i, e_{i+1}), (e'_i, e'_{i+1}) für $i = 0, \ldots, 4$, sowie (e_i, e'_i) für $i = 1, \ldots, 5$.

Nunmehr folgt:

Satz 6. *Die Basis* $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{D}}^*(4)$ *besteht aus den Simplexen der Ordnung* $\leqq 4$, *dem Graphen* W *sowie dem Graphen* P_V. *Bezeichnen wir das Dreieck sowie jeden irgendwie aus lauter Tetraedern längs Dreiecken zusammengehefteten Graphen kurz als einen* G_0^3, *so folgt (wegen Satz 2): Die Gesamtheit der maximal 4-dünnen Graphen ist gleich der Gesamtheit aller Graphen* G *der Form*

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_l ,$$

wo jedes G_λ *entweder ein* G_0^3 *oder isomorph zu* W *oder* P_V *ist und für* $\lambda = 2, \ldots, l$ *gilt:*

$$(G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda = S_\lambda$$

ist ein Simplex der Ordnung 2, wobei ferner nur die Einschränkung gilt, daß keine zwei verschiedenen G_0^3 *unter den* G_λ *eine gemeinsame Kante besitzen dürfen.*

Es ist leicht zu sehen (etwa durch Betrachtung der Kanten- und Eckenzahlen [8]), daß W und P_V 4-dünn sind. Da das Oktaeder (2, 2, 2) 4-fach zusammenhängend ist, folgt somit Satz 6 aus dem allgemeineren

Satz 6'. *Es sei* f *ein normiertes,* sZ*-treues Feinheitsmaß bezüglich* $\succ$. *Dem Oktaeder* (2, 2, 2) *sei vermöge* f *der Wert 5 zugeordnet. Dann enthält* $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ *außer den Simplexen der Ordnung* $\leqq 4$ *höchstens die Graphen* W *und* P_V [9].

Beweis. Ist k eine neue Kante zu W, so folgt $W \cup k \succ S(5)$ (vgl. [7], S. 50 oben). Ist k eine neue Kante zu P_V, so genügt es aus Symmetriegründen, folgende drei Fälle zu betrachten:

1. $k = (e_1, e_2')$. Die Zusammenzüge der Kanten (e_2, e_3), (e_4, e_5), (e_3', e_4'), (e_1', e_5') führen $P_V \cup k$ in (2, 2, 2) über.

2. $k = (e_1, e_3')$. Die Zusammenzüge der Kanten (e_2, e_3), (e_1', e_2'), (e_4, e_5), (e_4', e_5'), (e_4, e_4'), (e_5, e_5') führen $P_V \cup k$ in $S(5)$ über.

3. $k = (e_1, e_3)$. Die Zusammenzüge der Kanten (e_2, e_2'), (e_3', e_4'), (e_1', e_5'), (e_4, e_5) führen $P_V \cup k$ in (2, 2, 2) über.

Daher folgt: *Wenn* W *bzw.* P_V *in* $\mathfrak{F}^*(5)$ *liegt, so auch in* $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$.

Es sei nun G (mit $\alpha(G) \geqq 5$) ein Element von $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$. Ist G nicht eben, so folgt wegen Satz 5 $G = W$. Daher haben wir nur noch den Fall zu betrachten:

$$G \text{ ist eben}.$$

Wäre $\alpha(G) = 5$, so G notwendig gleich $S(5)$, vermindert um eine Kante, zerfiele also längs eines Dreiecks. Daher folgt $\alpha(G) \geqq 6$.

Wegen (4.1) ist G 3-fach zusammenhängend. Nach dem Satz 3 in [8] enthält G entweder eine Unterteilung des Prismas P_{III} oder des Sternes $(1, 2, 2) = X(5)$[10]. Gilt $G \geqq U(X(5))$, so wähle man eine in G enthaltene Unter-

[8] In einem 4-fach zusammenhängenden Graphen ist die Kantenzahl mindestens doppelt so groß wie die Eckenzahl. Beim Zusammenzug einer Kante erniedrigt sich die Eckenzahl um 1, die Kantenzahl um mindestens 1. Ein kubischer Graph der Eckenzahl $\leqq 10$ kann daher nicht $\succ$ einem 4-fach zusammenhängenden Graphen sein.

[9] Dann und nur dann enthält $\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ einen dieser beiden Graphen nicht, wenn sein f-Wert $\geqq 5$ ist. — Natürlich sind beide Graphen prim. Eine Abbildung des Oktaeders (2, 2, 2) findet man etwa in [8], Fig. 4 (S. 86).

[10] Definition des Sternes und seines Zentrums in [13], S. 446.

teilung U eines Sternes $X(m)$ mit maximalem m. Ist eine der Kanten dieses $X(m)$ echt unterteilt, so muß es einen Weg $Z \subseteqq G$ geben, der von einem echten Teilpunkt dieser Kante zu einer Ecke $\in U$, die nicht der betr. (unterteilten) Kante angehört, führt und der keine innere Ecke mit U gemeinsam hat. Z enthält das Zentrum von $X(m)$ nicht; sonst folgte nämlich, daß die betrachtete Kante mit dem Zentrum nicht inzident ist, und man erhielte einen Widerspruch zur Maximalwahl von m. Man bekommt so, wie man durch die Betrachtung einiger einfacher Fälle einsieht, jedenfalls zwei disjunkte Kreise in G. Auch wenn $U = X(m)$ ist und in G eine Ecke $\notin U$ oder eine neue Kante zu U existiert, erhält man (unter Ausnutzung des 3-fachen Zusammenhanges von G) stets zwei fremde Kreise $\subseteqq G$. Das Enthaltensein zweier disjunkter Kreise in einem 3-fach zusammenhängenden Graphen ist aber gleichbedeutend damit, daß dieser eine Unterteilung von P_{III} enthält[11]. Natürlich ist (etwa wegen (5.2)) kein Stern in $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(5)$ enthalten. Damit also folgt:

$$G \supseteqq U(P_{III}).$$

Wir denken uns jetzt eine feste Einbettung von G in die Ebene gegeben. Jedes P_{III} zerlegt die Ebene in 5 Gebiete, von denen zwei durch Dreiecke, drei durch Vierecke des P_{III} berandet sind. Wir wollen die Vierecksgebiete mit I, II, III, die Dreiecksgebiete mit IV, V bezeichnen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß III das Außengebiet ist. *Wir wollen allgemein bei einem P_{III} die Bezeichnung zugrundelegen, wie sie in Fig. 2 beschrieben ist, und entsprechend wollen wir auch bei einer Unterteilung von P_{III} bezeichnen.* Sind x, y zwei in P_{III} benachbarte Verzweigungspunkte

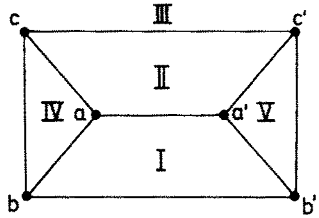

Fig. 2

(= Ecken $\geqq 3$. Grades) in $U(P_{III})$, so bezeichnet $\langle x, y\rangle$ die evtl. unterteilte Kante (Kantenzug der Unterteilung), die in $U(P_{III})$ zwischen x, y verläuft. Sind v, w Ecken aus $\langle x, y\rangle$, so bezeichnet $\langle v, w\rangle$ den Teilweg von $\langle x, y\rangle$, dessen Endpunkte v, w sind; wir setzen weiter $\langle v, w\langle = \langle v, w\rangle - \{w\}$, $\rangle v, w\rangle = \langle v, w\rangle - \{v\}$, $\rangle v, w\langle = \langle v, w\rangle - \{v, w\}$. Sind H, H' disjunkte Teilgraphen von $U(P_{III})$, so heißt ein Weg $Z \subseteqq G$ ein *H, H'-Weg*, wenn er eine Ecke $h \in H$ mit einer Ecke $h' \in H'$ verbindet und $Z \cap U(P_{III}) = \{h, h'\}$ erfüllt. Ist K eine Kom-

[11] Hat man zwei fremde Kreise in einem 3-fach zusammenhängenden Graphen, so wähle man auf diesen je ein Tripel von Ecken sowie dazu ein Tripel von Wegen gemäß [8], (2.1), (e); passend gewählte Teilwege bilden dann zusammen mit den Kreisen ein $U(P_{III})$. — *Wir können festellen: Ein ebener 3-fach zusammenhängender Graph enthält genau dann kein $U(P_{III})$, wenn er ein Stern ist.*

ponente von $G-U(P_{\mathrm{III}})$, so heißen die Ecken $\in U(P_{\mathrm{III}})$, die zu (wenigstens) einer Ecke $\in K$ benachbart sind, die *Berührpunkte* von K (in bezug auf das $U(P_{\mathrm{III}})$).

Wir nennen ein $U(P_{\mathrm{III}}) \subseteqq G$ eine *ausgezeichnete Unterteilung* von P_{III}, wenn weder III noch IV noch V eine Ecke $\in G$ enthalten oder von einer Kante $\in G$ durchquert werden. Es soll jetzt gezeigt werden, daß es in G ein ausgezeichnetes $U(P_{\mathrm{III}})$ gibt.

Liegt nämlich in III eine Ecke $e \in G$ (bei Zugrundelegung irgendeines $U(P_{\mathrm{III}}) = U \subseteqq G$), so gibt es 3 fremde Wege, die von e zu U hinführen. Mittels dieser erhält man entweder einen Weg Z, der Ecken p, q desselben Kantenzuges von U verbindet, oder einen Weg Z, der Ecken p, q inzidenter Kantenzüge von U verbindet (jeweils mit $Z \cap U = \{p, q\}$), wo p, q nicht beide Verzweigungspunkte von U sind. Im ersten Falle ersetze ich $\langle p, q\rangle$ durch Z; im zweiten Falle (wenn etwa die Ecke, in der die betreffenden beiden Kantenzüge inzidieren, b ist) ersetze ich den IV berandenden Kreis durch $Z \cup \langle b, p\rangle \cup \langle b, q\rangle$ (falls $b' = q$, so $c \neq p$, und ich kann II als Gebiet V in einer neuen Unterteilung von P_{III} wählen). Ähnlich kann ich verfahren, wenn k eine Kante $\notin U$ ist, die durch III läuft und zwei Ecken des Randes von III verbindet, sofern $k \neq (b, c')$, $\neq (c, b')$ ist. In allen diesen Fällen erhalte ich durch passende Abänderung ein (neues) $U(P_{\mathrm{III}})$, so daß das diesem entsprechende, „neue" Gebiet III weniger Ecken bzw. Kanten von G als das „alte" III enthält.

Ist dagegen k (etwa) gleich (b, c'), so können wir nach dem Vorigen annehmen, daß III bis auf k von Ecken und Kanten $\in G$ frei ist, da wir andernfalls wie eben III reduzieren können (die Kante (c, b') kann ja nicht auch in G liegen, weil sonst $G \succ S(5)$ folgte). Ist nun z. B. $\langle c, c'\rangle$ keine Kante, so gibt es wegen des 3-fachen Zusammenhanges einen Weg Z, der eine Ecke $p \in \rangle c, c'\langle$ mit einer Ecke q des Randes von II, die $\notin \langle c, c'\rangle$ ist, verbindet und $Z \cap U = \{p, q\}$ erfüllt. p, q zerlegen den Rand von II in zwei Teile; derjenige dieser Teile, der c enthält, zusammen mit Z einerseits, sowie $k \cup \langle b, b'\rangle \cup \langle b', c'\rangle$ andererseits können dann als unterteilte Dreiecke eines neuen $U(P_{\mathrm{III}})$ gewählt werden, derart daß III mit G einen leeren Durchschnitt hat. Entsprechend schließt man auch, wenn $\langle b, c\rangle$ keine Kante ist. Daher können wir annehmen: $\langle b, b'\rangle$, $\langle c, c'\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle b', c'\rangle$ sind Kanten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann weiter angenommen werden, daß IV (und ebenso V) gleich einem der beiden Gebiete von G ist, die $\langle b, c\rangle$ (bzw. $\langle b', c'\rangle$) auf dem Rande enthalten. Andernfalls können a, a' und die inzidierenden Kantenzüge entsprechend abgeändert werden.

Gibt es in G einen $\langle c, a\langle, \rangle c', a'\rangle$-Weg Z, so folgt, da $\{b, a', c'\}$ wegen (5.2) unser G nicht trennen kann, die Existenz eines $\langle b', a'\langle, \rangle b, a\rangle \cup \langle a, a'\langle$-Weges Z' (IV und V enthalten ja keine Ecken und Kanten von G). Wir können so zusammenziehen, daß Z von c nach a', Z' von b' nach a führt (Fig. 3). Man erhält dann eine Unterteilung von $(2, 2, 2)$.

Gibt es andererseits keinen solchen Weg Z, so gibt es möglicherweise einen, wenn man $\langle a, a'\rangle$ durch einen anderen $\rangle c, a\rangle \cup \langle a, b\langle, \rangle c', a'\rangle \cup \langle a', b'\langle$-Weg $\subseteqq G$ ersetzt. Es sei also nicht möglich, auf diese Weise zu einem solchen Z zu gelangen. Da G durch $\{b, a, c'\}$ nach (5.2) nicht getrennt werden kann, existieren $\langle c, a\langle, \rangle a, a'\langle$-Wege in G. Es sei l die (von a aus betrachtet) letzte Ecke auf $\langle a, a'\rangle$, die von $\langle c, a\langle$ aus durch einen solchen Weg Z^* erreichbar ist. Wir können offenbar annehmen, daß $\langle a, a'\rangle$ so gewählt ist, daß die Kantenzahl $\varkappa$ von $\langle l, a'\rangle$ minimal ist. Da nun G nach (5.2) durch $\{b, l, c'\}$ nicht getrennt wird, existiert entweder ein $\rangle l, a'\langle, \rangle b, a\rangle \cup \langle a, l\langle$-Weg Z'' (dieser trifft dann Z^* nicht, und indem man $\langle a, a'\rangle$ mit Hilfe von Z'' in geeigneter Weise abändert

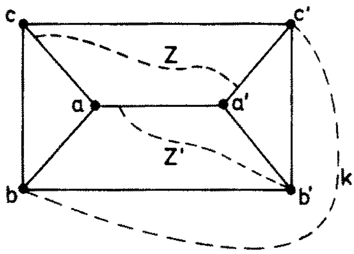

Fig. 3

(Fig. 4), erhält man einen Widerspruch zur Minimalwahl von $\varkappa$), oder es existiert ein $\langle a', b'\rangle, \rangle b, a\rangle \cup \langle a, l\langle$-Weg Z^{**}; dieser trifft dann Z^* nicht, und wir können (ähnlich wie in Fig. 3) durch passende Zusammenzüge erreichen, daß Z^* von c nach a', Z^{**} von b' nach a führt, wodurch wir wieder $G \succ (2, 2, 2)$ erhalten mit Widerspruch.

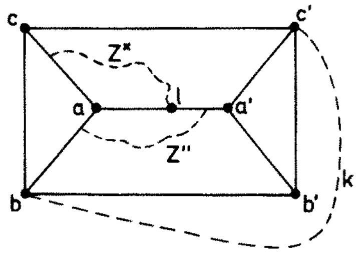

Fig. 4

Wir sehen, daß wir $U(P_{\mathrm{III}}) \subsetneqq G$ immer so wählen können, daß das Außengebiet III von Ecken und Kanten aus G frei ist. Daß weiter dann auch noch die Gebiete IV und V von Ecken und Kanten $\in G$ frei gemacht werden können, ist sehr leicht zu sehen. Gibt es nämlich einen Weg $Z \subsetneqq G$, der etwa zwei Ecken p, q des Randes von IV verbindet und $Z \cap U(P_{\mathrm{III}}) = \{p, q\}$ erfüllt, so enthält wenigstens eines der beiden durch p, q bestimmten Teilstücke dieses Randes eine Kante von $\langle b, c\rangle$; dieses Teilstück zusammen mit Z kann als Rand des Gebietes IV eines neuen $U(P_{\mathrm{III}})$ gewählt werden, derart daß das „neue" Gebiet III wiederum frei von G ist; das „neue" IV enthält dann weniger Ecken und Kanten von G als das „alte" IV. Durch Iteration dieses Schlusses folgt schließlich:

G enthält ein ausgezeichnetes $U(P_{\mathrm{III}})$.

Ein solches $U(P_{\mathrm{III}}) = U$ wollen wir also im folgenden stets, mit den Bezeichnungen von Fig. 2, zugrundelegen. Jede Komponente von $G - U$ liegt also in I oder II. Natürlich ist $G \neq U(P_{\mathrm{III}})$.

Fall I. *Es existiert eine Komponente K von $G - U$, so daß die Berührpunkte von K auf nicht weniger als 3 Kantenzügen von U liegen.* O.B.d.A. darf angenommen werden, daß K in I liegt.

A. *Die Zahl der Berührpunkte von K ist $\geqq 4$.*

Dann kann durch geeignete Zusammenzüge von Teilwegen des Randes von I erreicht werden, daß alle 4 Ecken a, a', b, b' Berührpunkte von K werden. Durch Zusammenzug von $\langle c, c' \rangle$ sowie von K (jeweils auf eine Ecke) folgt $G \succ (2, 2, 2)$.

B. *Die Zahl der Berührpunkte von K ist genau 3.*

Sie seien t, t', t''. Wegen (5.2) besteht K nur aus einer Ecke e, und keine zwei der Ecken t, t', t'' sind benachbart. — Aus Symmetriegründen ist die folgende Fallunterscheidung 1. bis 4. erschöpfend.

1. $t \in \rangle a, b \langle,\ t' \in \rangle a', b' \langle,\ t'' \in \rangle a, a' \langle$.
2. $t \in \rangle a, b \langle,\ t' \in \rangle a', b' \langle,\ t'' \in \rangle b, b' \langle$.

In diesen beiden Fällen ist offenbar $G \geqq U(P_{\mathrm{V}})$. Da P_{V} kein Dreieck enthält, folgt $G = P_{\mathrm{V}}$ wegen (5.1).

3. $t = a,\ t' \in \rangle a', b' \langle,\ t'' \in \rangle b, b' \langle$.

G wird durch c, a, t'' getrennt. Daher muß $\langle b, a \rangle$ nach (5.2) eine Kante sein. b, a, c' können mithin nach (5.2) keinen trennenden Teilgraphen von G bilden. Also muß es in G einen $\langle c, a \langle \cup \langle c, c' \langle, \rangle a, a' \rangle \cup \langle a', c' \langle$-Weg Z geben; durch passende Zusammenzüge sieht man unschwer ein, daß $Z \cap U = \{c, a'\}$ angenommen werden darf (Fig. 5). Durch die Zusammenzüge von $\langle b, t'' \rangle$, (e, t'), $\langle b', c' \rangle$ erhält man dann $G \succ (2, 2, 2)$.

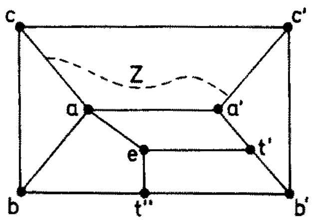

Fig. 5

4. $t \in \rangle a, a' \langle,\ t' \in \rangle a, b \langle,\ t'' \in \rangle b, b' \rangle$.

Nach (5.2) kann $\{c, t, t''\}$ keine trennende Eckenmenge von G sein. Daher existiert entweder ein $\rangle c, a \rangle \cup \langle a, t \langle, \rangle t, a' \rangle$-Weg Z oder ein $\rangle c, a \rangle \cup \langle a, t \langle, \rangle c, c' \rangle \cup \rangle a', c' \rangle$-Weg Z. Im ersten Falle kann $Z \cap U = \{a, a'\}$ angenommen werden, und es folgt $G \succ (2, 2, 2)$ durch die Zusammenzüge von (e, t), $\langle b, t' \rangle$, $\langle t'', b' \rangle$, $\langle c, c' \rangle$ je auf eine Ecke. Im zweiten Falle kann $Z \cap U = \{a, c'\}$ angenommen werden, und es folgt $G \succ (2, 2, 2)$ durch die Zusammenzüge von $\langle t, a' \rangle$, (e, t'), $\langle b, c \rangle$, $\langle t'', b' \rangle$ je auf eine Ecke.

Fall II. *Es existieren Komponenten von $G-U$; alle diese haben ihre Berührpunkte in der Vereinigung zweier Kantenzüge von U.*

A. *Es existiert eine Komponente K von $G-U$* (o.B.d.A. in I), *deren Berührpunkte nicht in einem einzigen Kantenzuge von U enthalten sind.* Wir bezeichnen die Menge der Berührpunkte von K mit B.

1. $B \subseteqq \langle b, b' \rangle \cup \langle a, b \rangle$ (oder symmetrisch: $\subseteqq \langle b, b' \rangle \cup \langle a', b' \rangle$).

Es sei l die nächst a gelegene Ecke von B auf $\langle b, a \rangle$, l' die nächst b' gelegene Ecke von B auf $\langle b, b' \rangle$. l, l', c trennen G, und jede der beiden Komponenten von $G-\{l, l', c\}$ hat mindestens 2 Ecken; dies kann nach (5.2) nicht sein.

2. $B \subseteqq \langle a, b \rangle \cup \langle a', b' \rangle$.

K hat auf einem der beiden Kantenzüge $\langle a, b \rangle$, $\langle a', b' \rangle$ (etwa auf $\langle a', b' \rangle$) nur einen Berührpunkt t; sonst folgte $G \succ (2,2,2)$ ähnlich wie im Falle I, A. Es seien l, l' die Ecken $\in B$, die auf $\langle a, b \rangle$ nächst a bzw. b liegen. Natürlich trennen l, l', t den Graphen G. Wegen (5.2) ist also $\alpha(B)=3$, $\alpha(K)=1$, und $\langle l, l' \rangle$ ist keine Kante. $p \in \rangle l, l' \langle$ wird aber durch l, l' von den Ecken $\in U - \langle l, l' \rangle$ getrennt, was nicht sein kann.

3. $B \subseteqq \langle a, a' \rangle \cup \langle b, b' \rangle$.

α) Liegen auf $\langle a, a' \rangle$ und $\langle b, b' \rangle$ je mindestens zwei Berührpunkte, so folgt $G \succ (2,2,2)$ wie im Falle I, A.

β) Liegt auf $\langle a, a' \rangle$ nur ein Berührpunkt t, so seien l, l' die auf $\langle b, b' \rangle$ nächst b bzw. b' gelegenen Ecken $\in B$. t, l, l' trennen G. Wie in 2. folgt ein Widerspruch.

γ) Auf $\langle b, b' \rangle$ liege nur ein $t \in B$. l, l' seien die auf $\langle a, a' \rangle$ nächst a bzw. a' gelegenen Ecken $\in B$. O.B.d.A. kann $t \neq b'$ angenommen werden. Damit t, l', c' kein trennendes Dreieck bilden, muß nach (5.2) gelten: es existiert ein $\rangle l', a' \rangle \cup \langle a', c' \langle$, $\langle a, l' \langle \cup \langle a, c \rangle \cup \langle c, c' \langle$-Weg Z in G (falls $l' = a'$ ist, folgt dies, weil $\langle a', c' \rangle$ dann keine Kante sein kann). Falls ein solches Z nach $\rangle c, a \rangle \cup \langle a, l' \langle$

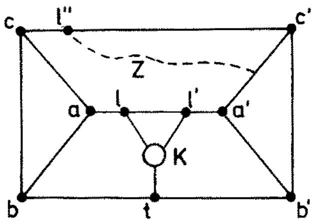

Fig. 6

führt, folgt (durch passende Abänderung von U mittels Z), daß entweder derselbe Fall mit einem weniger Ecken bzw. Kanten $\in G$ enthaltenden Gebiet II eintritt, oder wir zu dem Fall I zurückgelangen. Daher münde jedes solche Z in $\langle c, c' \langle$. l'' sei die am nächsten bei c gelegene Ecke $\in \langle c, c' \langle$, die durch ein solches Z erreichbar ist (*Fig.* 6). l'', l', t spannen dann nach (5.2) ein trennendes Dreieck auf.

4. $B \subseteqq \langle a, b \rangle \cup \langle a, a' \rangle$ (oder symmetrisch: $\subseteqq \langle a', b' \rangle \cup \langle a, a' \rangle$).

Es sei l die auf $\langle a, b \rangle$ nächst b gelegene Ecke $\in B$, und l' die auf $\langle a, a' \rangle$ nächst a' gelegene Ecke $\in B$. b, l', c' dürfen dann kein trennendes Dreieck bilden.

α) Existiert ein $\rangle b, l\rangle$, $\rangle b, b'\rangle$-Weg $Z' \subsetneqq G$, so erhalten wir, falls Z' keine Kante ist, einen schon früher behandelten Fall wieder (vermöge der Komponente von $G-U$, der die inneren Ecken von Z angehören); ist aber Z' Kante, so spannen c und die Endpunkte dieser Kante nach (5.2) ein trennendes Dreieck auf. Wir können daher die Existenz eines solchen Z' ausschließen. Ebenso können wir die Existenz eines $\rangle b, l\rangle$, $\rangle b', a'\rangle \cup \langle a', l'\langle$-Weges ausschließen; denn mittels eines solchen könnten wir leicht das $U(P_{\mathrm{III}})$ so abändern, daß wir zu Fall 2. zurückgelangen.

β) Es existiert dann ein $\rangle l', a'\rangle \cup \langle a', c'\langle$, $\langle a, l'\langle \cup \langle a, c\rangle \cup \langle c, c'\langle$-Weg Z. Wie im Falle 3. kann man annehmen, daß jedes solche Z auf $\langle c, c'\langle$ endet. l'' sei die nächst c gelegene unter den Ecken $\in \langle c', c\langle$, die durch ein solches Z erreichbar ist. Es folgt, daß b, l', l'' einen trennenden Teilgraphen von G bilden, entgegen (5.2).

B. *Alle Berührpunkte von K liegen auf demselben Kantenzuge von $U(P_{\mathrm{III}})$.* (K liege etwa in I.)

α) *Ist dieser Kantenzug $\langle a, a'\rangle$*, so sei t der nächst a, t' der nächst a' gelegene Berührpunkt von K. Damit t, t' nicht G trennen, muß es einen $\rangle t, t'\langle$, R-Weg Z geben, wo R den um $\langle t, t'\rangle$ verminderten Rand von II bezeichnet. Mündet Z auf $\langle a, a'\rangle - \langle t, t'\rangle$, so erhalten wir durch Abänderung von $\langle a, a'\rangle$ mittels Z ein neues $U(P_{\mathrm{III}})$, in dem derselbe Fall (mit $K \subseteqq I$) gilt, dessen Gebiet II aber weniger Ecken und Kanten $\in G$ enthält. Mündet Z aber nicht auf $\langle a, a'\rangle$, so ersetzen wir in $\langle a, a'\rangle$ das Stück $\langle t, t'\rangle$ durch einen von t nach t' über K führenden Weg; dies führt auf einen der früher behandelten Fälle.

β) Ist dieser Kantenzug nicht $\langle a, a'\rangle$, so bestimme man t, t' entsprechend wie in α); t, t' müssen notwendig G trennen, was nicht sein kann.

Als letztes haben wir den

Fall III. *Jede Ecke von G liegt auf $U(P_{\mathrm{III}})$.*

1. Verbindet eine Kante $\in G$ Ecken des gleichen Kantenzuges von U, so kann offenbar o.B.d.A. angenommen werden, daß diese Kante zu dem betreffenden Kantenzug gehört.

2. Es existiert in G eine Kante (p, q) mit $p \in \rangle a, a'\langle$, $q \in \rangle b, b'\langle$ (bzw. symmetrisch: $q \in \rangle c, c'\langle$).

p, q, c dürfen G wegen (5.2) nicht trennen. Daher existiert eine Kante (r, s), wobei $r \in \rangle c, a\rangle \cup \langle a, p\langle$, s entweder in $\rangle p, a'\rangle \cup \langle a', c'\langle$ oder in $\rangle c, c'\rangle$ liegt. – Im ersten Falle können wir $U(P_{\mathrm{III}})$ mit Hilfe von (r, s) so abändern, daß einer der Fälle I oder II eintritt. Daher können wir annehmen, daß für jedes solche (r, s) gilt $s \in \rangle c, c'\rangle$. Es sei l das nächst c' gelegene dieser s. p, q, l trennen G entgegen (5.2).

3. Es gibt in G eine Kante $k = (p, q)$, die Ecken aus Kantenzügen von $U(P_{\mathrm{III}})$ verbindet, welche aus inzidenten Kanten von P_{III} resultieren.

α) Ist $p \in \langle a, b\langle$, $q \in \rangle b, b'\rangle$, so spannen c, q, p offenbar ein trennendes Dreieck auf.

β) Es sei nun $p \in \rangle a, b\rangle$, $q \in \rangle a, a'\rangle$. Damit c, p, q kein trennendes Dreieck aufspannen, muß eine Kante (r, s) in G existieren, die von $\rangle c, a\rangle \cup \langle a, q\langle$ nach $\rangle q, a'\rangle \cup \langle a', c'\langle \cup \langle c', c\langle$ führt. Liegt s in $\rangle q, a'\rangle \cup \langle a', c'\langle$, so kann man durch

Abänderung von $U(P_{\mathrm{III}})$ mittels (r, s) erreichen, daß einer der früheren Fälle I, II eintritt. Liegt r in $\langle a, c\langle$, s in $\rangle c, c'\rangle$, so erhält man α). Daher können wir annehmen, daß für jede solche Kante (r, s) gilt $r \in \rangle a, q\langle$, $s \in \rangle c, c'\rangle$. Ist $p \neq b$, so können wir wieder $U(P_{\mathrm{III}})$ mit Hilfe von k abändern. Ist $p = b$, so bilden $b = p, q, c'$ eine trennende Eckenmenge von G, die nicht mit (5.2) in Einklang steht.

Die übrigen nach 3. möglichen Fälle sind symmetrisch zu α) oder β).

4. In G existiert eine Kante $k = (d, d')$ mit $d \in \rangle a, b\langle$, $d' \in \rangle a', b'\langle$ (oder symmetrisch: $d \in \rangle a, c\langle$, $d' \in \rangle a', c'\langle$).

Wir können annehmen, daß $\langle a, a'\rangle$ eine Kante ist; andernfalls tauschen wir es gegen die Kante k aus und erhalten einen früheren Fall.

Existiert eine Ecke $p \in \rangle b, b'\langle$, so muß es in G eine Kante geben, die von p zu $\langle d, b\langle$ oder $\langle d', b'\langle$ führt, und wir erhalten Fall 3. Daher können wir annehmen, daß $\langle b, b'\rangle$ und (symmetrisch dazu) $\langle c, c'\rangle$ Kanten sind.

Existiert eine Ecke $p \in \rangle a, d\langle$ und ist $k' = (p, q)$ eine von p ausgehende Kante $\notin U$, so liegt q in $\langle a', d'\rangle$. Ist $q \neq a', d'$, so erhalten wir $G \supseteqq U(P_{\mathrm{V}})$, d. h. $G = P_{\mathrm{V}}$ nach (5.1). Ist $q = a'$, so erhalten wir 3.; ist $q = d'$, so ersetzen wir $\langle a, a'\rangle$ durch k und erhalten wiederum 3.

Entsprechend schließen wir, wenn einer der Wege $\langle a', d'\rangle$, $\langle a, c\rangle$, $\langle a', c'\rangle$, $\langle d, b\rangle$, $\langle d', b'\rangle$ keine Kante ist.

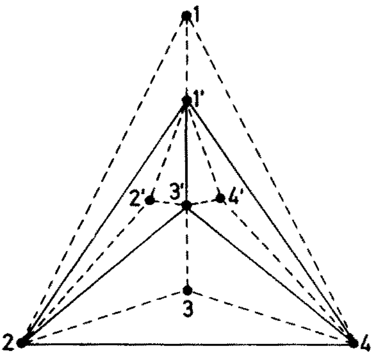

Fig. 7

Wir können daher annehmen, daß $U \cup k$ gleich dem Würfelgraphen P_{IV} ist. Enthält G eine neue Kante zu P_{IV}, so erhalten wir jedenfalls einen der früheren Fälle. P_{IV} liegt aber keinesfalls in $\mathfrak{F}^*(5)$ (auch nicht, wenn $P_{\mathrm{V}} \notin \mathfrak{F}^*(5)$), denn P_{IV} ist in einer sZ, deren Glieder lauter Tetraeder sind, enthalten (s. Fig. 7).

Damit ist unser Satz bewiesen, da alle möglichen Fälle erschöpft sind.

§ 6. Allgemeine Bemerkungen zur Struktur der sZ-treuen Feinheitsmaße

In diesem Paragraphen werden wir untersuchen, wie die einzelnen Klassen bei einem sZ-treuen Feinheitsmaß allgemein aussehen, wie sie untereinander zusammenhängen und innerhalb welcher Grenzen wir die Basis für eine solche

Klasse frei wählen können. Wir werden dabei gleichzeitig Beispiele von sZ-treuen Feinheitsmaßen in beliebiger Anzahl gewinnen.

Der Einfachheit halber bedeute in diesem Paragraphen „Feinheitsmaß" stets dasselbe wie „sZ-treues, normiertes Feinheitsmaß bezüglich $\succ$"[12]. $\mathfrak{F}^*(n)$ bezeichnet stets die f-Klasse unterhalb n für ein solches Feinheitsmaß f.

Wegen (1.11) und der Neutralität des Primseins von Graphen gegenüber $\times 1$ haben wir zunächst:

(6.1) $G \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n) \Leftrightarrow G \times 1 \in \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n+1)$; *durch* $\mathfrak{F}^*(n+1)$ *sind also alle Klassen* $\mathfrak{F}^*(v)$ *mit* $v \leqq n$ *eindeutig bestimmt.*

Wir nennen eine Menge $\mathfrak{M}$ von Graphen ein *Γ-System*, wenn gilt:

1. $G \in \mathfrak{M}$, $G \supseteqq H \Rightarrow H \in \mathfrak{M}$;
2. $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex), $G', G'' \in \mathfrak{M} \Rightarrow G \in \mathfrak{M}$.

Wir nennen $\mathfrak{M}$ ein *Ξ-System*, wenn gilt:

1'. $G \in \mathfrak{M}$, $G \succ H \Rightarrow H \in \mathfrak{M}$;

2. $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex), $G', G'' \in \mathfrak{M} \Rightarrow G \in \mathfrak{M}$.

Der Durchschnitt von Γ-Systemen bzw. Ξ-Systemen ist stets wieder ein Γ-System bzw. ein Ξ-System. Da die Klasse aller endlichen Graphen ein Γ-System und auch ein Ξ-System ist, gibt es zu jeder Graphenmenge $\mathfrak{M}$ das kleinste $\mathfrak{M}$ enthaltende (das *durch* $\mathfrak{M}$ *erzeugte*) Γ- bzw. Ξ-System; es werde mit $\Gamma\mathfrak{M}$ bzw. $\Xi\mathfrak{M}$ bezeichnet.

(6.2) $\Gamma\mathfrak{M}$ *(bzw.* $\Xi\mathfrak{M}$*) ist die Menge aller Teilgraphen von solchen Graphen, die eine* sZ *besitzen, deren Glieder lauter Elemente von* $\mathfrak{M}$ *(bzw. lauter homomorphe Bilder von Elementen* $\in \mathfrak{M}$*) sind.*

Beweis. Im Falle $\Gamma\mathfrak{M}$ ist offenbar alles klar. – Daß im Falle $\Xi\mathfrak{M}$ die genannte Menge in $\Xi\mathfrak{M}$ liegt, ist auch sofort klar. Umgekehrt bildet diese Menge ein Ξ-System: Liegt G in dieser Menge und ist $G \succ H$, so ist $G \subseteqq G^*$, wo G^* eine sZ $G_1^* \cup \cdots \cup G_l^*$ besitzt, so daß jedes G_λ^* homomorphes Bild eines $M_\lambda \in \mathfrak{M}$ ist. Es ist $G^* \succ H$ etwa vermöge φ; mithin nach (3.2) $H = \varphi(G_1^*) \cup \cdots \cup \varphi(G_l^*)$; darin können wir die $(\varphi(G_1^*) \cup \cdots \cup \varphi(G_{\lambda-1}^*)) \cap \varphi(G_\lambda^*)$ für $\lambda = 2, \ldots, l$ durch Mengen N_λ neuer Kanten zu Simplexen erweitern, ohne die Homomorphie φ zu zerstören. Wegen $M_\lambda \succ G_\lambda^* \succ \varphi(G_\lambda^*) \cup N_\lambda$ folgt daher, daß auch H zu dieser Menge gehört. 2. ist leicht einzusehen.

Man definiere für jede Graphenmenge $\mathfrak{M}$:

$$h_1(\mathfrak{M}) = \mathrm{Max}\{n \mid \text{Ex. } G \in \mathfrak{M} \text{ mit } G \supseteqq S(n)\};$$
$$h(\mathfrak{M}) = \mathrm{Max}\{n \mid \text{Ex. } G \in \mathfrak{M} \text{ mit } G \succ S(n)\},$$

falls diese Maxima existieren; sonst werde $h_1(\mathfrak{M})$ bzw. $h(\mathfrak{M})$ gleich ∞ gesetzt.

Wir wollen eine Graphenmenge $\mathfrak{M}$ *vollständig* nennen, wenn $\Xi\mathfrak{M} = \Gamma\mathfrak{M}$ ist und sie alle $S(n)$ mit $n \leqq h(\mathfrak{M})$ enthält.

Man sieht unschwer ein:

(6.3) *Es ist* $h_1(\mathfrak{M}) = h_1(\Gamma\mathfrak{M})$, $h(\mathfrak{M}) = h(\Xi\mathfrak{M})$. *Dann und nur dann ist* $\Gamma\mathfrak{M}$ *bzw.* $\Xi\mathfrak{M}$ *verschieden von der Gesamtheit aller endlichen Graphen, wenn* $h_1(\mathfrak{M}) < \infty$ *bzw.* $h(\mathfrak{M}) < \infty$ *ist.*

[12] Statt $\succ$ kann man auch eine der Relationen $\succ_v$ betrachten; man muß dann anstelle von $h(G)$ im folgenden die Funktion $h_v(G) = \mathrm{Max}\{n \mid G \succ_v S(n)\}$ treten lassen.

Hat man eine Graphenmenge $\mathfrak{M}$ und einen Graphen T, so verstehen wir unter $\mathfrak{M} \times T$ die Menge $\{G \mid G = H \times T \text{ mit } H \in \mathfrak{M}\}$.

Jedes $\mathfrak{F}^*(n)$[13] ist offenbar ein Ξ-System, und es ist $h(\mathfrak{F}^*(n)) = n-1$. Umgekehrt gilt auch:

(6.4) *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ξ-System mit $h(\mathfrak{M}) = n-1$, so wird durch die Festsetzung*

$$\mathfrak{F}^*(n) = \mathfrak{M};$$
$$\mathfrak{F}^*(n+r+1) = \Gamma(\mathfrak{F}^*(n+r) \times 1) \quad \text{für} \quad r = 0, 1, \ldots;$$
$$\mathfrak{F}^*(n-r) = \{G \mid G \times S(r) \in \mathfrak{M}\} \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, n-1$$

ein Feinheitsmaß f[13] erklärt. Ist G ein Graph, so ist $f(G)$ gleich dem Maximum aller Werte, die der Graph G bei irgendeinem Feinheitsmaß[13] besitzt, das jedem Graphen $\in \mathfrak{M}$ einen Wert $\leqq n-1$ zuordnet.

Beweis. Jedes $\mathfrak{F}^*(n-r)$ bildet ein Ξ-System. Ist nämlich $H \in \mathfrak{F}^*(n-r)$, d. h. $G \times S(r) \in \mathfrak{M}$, und $G \succ H$, so $G \times S(r) \succ H \times S(r) \in \mathfrak{M}$, d. h. auch $H \in \mathfrak{F}^*(n-r)$. — Ist $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = S$ (Simplex), $G' \times S(r) \in \mathfrak{M}$, $G'' \times S(r) \in \mathfrak{M}$, so $G \times S(r) = (G' \times S(r)) \cup (G'' \times S(r))$ mit $(G' \times S(r)) \cap (G'' \times S(r)) = S \times S(r)$, d. h. $G \times S(r) \in \mathfrak{M}$. — Ferner gilt, wie leicht zu sehen ist, für jedes Ξ-System $\Xi: \Gamma(\Xi \times 1)$ ist ein Ξ-System.

Da also alle $\mathfrak{F}^*(s)$ Ξ-Systeme bilden, haben wir:

1) $f(G) = s-1$, $G \succ H \Rightarrow H \in \mathfrak{F}^*(s-1)$, d. h. $f(H) \leqq s-1$.

Weiter hat man:

2) $G \in \mathfrak{F}^*(s) \Leftrightarrow G \times 1 \in \mathfrak{F}^*(s+1)$.

Dies ist zunächst klar für $s \leqq n-1$. Ist $s \geqq n$ und ist $G \times 1 \in \mathfrak{F}^*(s+1)$, so gibt es also nach (6.2) einen Graphen $H \supseteqq G \times 1$, der (o.B.d.A.) dieselbe Eckenmenge wie $G \times 1$ hat und eine sZ $(G_1 \times 1), \ldots, (G_l \times 1)$ mit $G_\lambda \in \mathfrak{F}^*(s)$ besitzt. Die (dem Faktor 1 entsprechende) Hauptecke von $G \times 1$ liegt also in allen $G_\lambda \times 1$. Daher muß G die sZ $G_1 \cup \cdots \cup G_l$ besitzen, d. h. G muß in $\mathfrak{F}^*(s)$ liegen, da die Glieder der sZ dort liegen.

Die umgekehrte Inklusion ist nach der obigen Festsetzung sofort klar.

3) Die sZ-Treue unseres f ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Γ-Systeme.

4) Die Maximaleigenschaft unseres f ergibt sich daraus, daß alle Feinheitsmaße g, die jedem $G \in \mathfrak{M}$ einen Wert $\leqq n-1$ zuordnen, $\mathfrak{G}^*(n) \supseteqq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}^*(n+r+1) \supseteqq \Gamma(\mathfrak{G}^*(n+r) \times 1)$ erfüllen müssen.

Wir können feststellen:

Satz 7. *Ist $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von Graphen mit $h(\mathfrak{A}) = n-1$, so gibt es Feinheitsmaße f derart, daß $f(A) \leqq n-1$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt*[13]. *Ordnet man jedem G das Maximum der Werte $f(G)$ für alle diese f zu, so liefert dies ein Feinheitsmaß $f_{\mathfrak{A}}$; $f_{\mathfrak{A}}$ ist gerade das in* (6.4) *erklärte f, wenn man $\mathfrak{M} = \Xi\mathfrak{A}$ wählt.*

$f_{\mathfrak{A}}(G)$ ist in gewissem Sinne kennzeichnend für die Stellung, die Stufe, die der Graph G in der Hierarchie der endlichen Graphen in bezug auf die Graphenmenge $\mathfrak{A}$ einnimmt.

Beispiele. 1. $\mathfrak{A}$ besteht aus einem Simplex $S(n-1)$. Dann ist $f_{\mathfrak{A}}$ unabhängig von dem speziellen n, und $f_{\mathfrak{A}}$ ist dasjenige Feinheitsmaß, das jedem Graphen G

[13] Man beachte die Vereinbarung über f zu Beginn dieses Paragraphen!

das Maximum aller Werte $f(G)$ (für alle Feinheitsmaße f) zuordnet. Wir wollen speziell dieses Feinheitsmaß mit $s(G)$ bezeichnen. $s(G)$ ist zugleich das Minimum aller Zahlen t, so daß G in einem Graphen, dessen Primgraphen-sZ aus lauter Simplexen der Ordnung t (bzw. $\leqq t$) besteht, als Teilgraph (oder auch als homomorphes Bild) enthalten ist. $s(G) \leqq t$ ist auch gleichbedeutend mit: G ist von der Form $G_1 \cup \cdots \cup G_l$ mit 1. $\alpha(G_\lambda) \leqq t$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$; 2. für jedes $\lambda = 2, \ldots, l$ existiert ein $\mu < \lambda$, so daß $(G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda$ sowohl in G_λ als auch in G_μ echt enthalten ist.

2. $\mathfrak{A}$ ist die Menge der ebenen Graphen. $\Xi\mathfrak{A}$ ist dann die Gesamtheit aller Teilgraphen derjenigen Graphen, die sich aus ebenen Dreiecksgraphen durch Zusammenheften längs Dreiecken aufbauen lassen. Einen Graphen der letzten Art wollen wir (wie in [7], S. 54 oben) kurz einen G^3 nennen. Für diese Graphen ist der $f_{\mathfrak{A}}$-Wert $\leqq 4$; hingegen ist $f_{\mathfrak{A}}(W) = f_{\mathfrak{A}}(S(5)) = 5$. Faßt man $f_{\mathfrak{A}}(G)$ als ein Maß für die „Unebenheit" von G auf, so sind also die aus ebenen Graphen zusammengehefteten[14], nicht ebenen Graphen (also z. B. auch der Kuratowskische Graph (3, 3)) „in geringerem Maße uneben" als die Graphen W und $S(5)$. Aus dem Satz über die Basis von $S(5)$ erhält man unmittelbar folgende *Erweiterung des Satzes von* KURATOWSKI:

Satz 8. *Der Graph G ist genau dann nicht eben, wenn er eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt, von denen die beiden ersten (einerseits) und die dritte (andererseits) einander ausschließen:*

1. *G ist homomorph zu* $S(5)$;

2. *G enthält eine Unterteilung von W;*

3. *G ist Teilgraph eines* G^3 *(insbesondere also aus lauter ebenen Graphen längs Graphen der Eckenzahl* $\leqq 3$ *zusammengeheftet*[14]*), und es gibt eine Eckenmenge T von 3 Ecken* t_1, t_2, t_3 *in G, so daß* $G - T$ *mindestens 3 Komponenten* K_1, K_2, K_3 *besitzt mit* $|K_i, t_j| = 1$[15] *für* $i, j = 1, 2, 3$.

Es gibt also, entsprechend den Bedingungen 1., 2., 3. von Satz 8, drei verschiedene Kategorien nicht ebener Graphen. Da jeder Graph der Eckenzahl α mit mehr als $3\alpha - 6$ Kanten homomorph zu $S(5)$ ist[16], folgt durch eine einfache Abschätzung, daß mit wachsendem α asymptotisch 100% aller endlichen Graphen zu der ersten Kategorie gehören.

Hat man ein Ξ-System $\mathfrak{M}$ mit $h(\mathfrak{M}) = n - 1$, also ein $\mathfrak{F}^*(n)$, gegeben, so kann man fragen, durch welche Bedingung die möglichen $\mathfrak{F}^*(n+1)$ charakterisiert sind. Es ist klar, daß die Bedingungen $G \times 1 \in \mathfrak{F}^*(n+1) \Rightarrow G \in \mathfrak{F}^*(n)$ und $\mathfrak{F}^*(n+1) \supseteqq \Gamma(\mathfrak{F}^*(n) \times 1)$ notwendig sind. Mittels (6.4) folgt unschwer, daß sie auch hinreichend sind. Daher können wir formulieren:

---

[14] Genauere, einschränkende Bedingungen für diese Zusammenheftungen ergeben sich durch Betrachtung der G^3.

[15] $|K_i, t_j| = 1$ bedeutet, daß es in G eine Kante gibt, die eine Ecke $\in K_i$ mit t_j verbindet. – Es ist unmittelbar klar, daß Bedingung 3. das Vorhandensein eines $U(3, 3)$ in G impliziert.

[16] Dies kann man aus dem Basissatz für $S(5)$ schließen. – Übrigens hat speziell jeder aus lauter Tetraedern längs Dreiecken zusammengeheftete Graph mit α Ecken die Kantenzahl $3\alpha - 6$; daher ist auch für jedes andere solche f der betrachteten Art $3\alpha - 5$ die kleinste Zahl λ, so daß man aus $\alpha(G) = \alpha$ und $\varkappa(G) \geqq \lambda$ folgern kann $f(G) \geqq 5$.

Satz 9. *Ist f ein Feinheitsmaß*[13], *so bilden die $\mathfrak{F}^*(n)$ eine echt aufsteigende Folge $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}_4 \subset \ldots$ von Graphenmengen, wobei folgendes gilt:*

1. *Jedes $\mathfrak{M}_n$ ist ein Ξ-System;*
2. $h(\mathfrak{M}_n) = n - 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$;
3. $\mathfrak{M}_{n+1} \supseteqq \Gamma(\mathfrak{M}_n \times 1)$;
4. $G \times 1 \in \mathfrak{M}_{n+1} \Rightarrow G \in \mathfrak{M}_n$[17].

Umgekehrt bestimmt jede Folge von Graphenmengen $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}_4 \subset \ldots$, die die obigen Bedingungen 1. *bis* 4. *erfüllt, eindeutig ein Feinheitsmaß*[13] *f, so daß $\mathfrak{F}^*(n) = \mathfrak{M}_n$ für $n = 2, 3, \ldots$ gilt.*

Man kann nach dem Gesagten zweierlei Feinheitsmaße unterscheiden:

1. Die $f_{\mathfrak{A}}$; diese sind gekennzeichnet dadurch, daß von einer bestimmten Stelle n ab stets $\mathfrak{F}^*(n+r+1) = \Gamma(\mathfrak{F}^*(n+r) \times 1)$ gilt,
2. die Feinheitsmaße f, für die unendlich oft $\mathfrak{F}^*(n+1) \supset \Gamma(\mathfrak{F}^*(n) \times 1)$ gilt.

Natürlich ist anzunehmen, daß die in den früheren Paragraphen auftretenden Feinheitsmaße $h(G)$, $\tilde{\Phi}(G)$, $d(G)$ von der zweiten Art sind; tatsächlich weiß ich aber nicht einmal, ob es überhaupt Feinheitsmaße zweiter Art gibt.

Wir wollen speziell noch Bedingungen für die Basen der $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ untersuchen. *Es bedeute im folgenden stets $\mathfrak{P}$ eine Menge von Primgraphen.* $\mathfrak{P}$ heißt *verträglich*, wenn für jedes $G \in \Xi\mathfrak{P}$, jedes $P \in \mathfrak{P}$ und jede neue Kante k zu P gilt: $G \not\succ P \cup k$.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}(\hat{\Xi}\mathfrak{P})$ enthalten, wenn $\mathfrak{P}$ verträglich ist[18]. Die verträglichen $\mathfrak{P}$ mit $h(\mathfrak{P}) < \infty$ sind also gerade die Teilmengen der Basen $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$.

Also ist z. B. jede Menge, die aus primen ebenen Dreiecksgraphen besteht, oder die Menge, die nur aus W besteht, verträglich. Dagegen ist aber etwa das $\mathfrak{P}$, das nur aus dem Graphen (3, 3) besteht, nicht verträglich, da $(3,3) \succ S(4)$ gilt, $(1,1,1,3) \supset (3,3)$ aber aus 3 längs eines gemeinsamen Dreiecks zusammengehefteten Tetraedern besteht. Entsprechendes gilt für den Würfelgraphen, der $\succ S(4)$ ist, aber in einem Graphen enthalten ist, der aus 5 Tetraedern längs Dreiecken zusammengeheftet ist (s. Fig. 7).

Man kann zeigen, daß die Verträglichkeit von $\mathfrak{P}$ äquivalent ist mit

1. $P' \not\succ P \cup k$ für alle $P, P' \in \mathfrak{P}$ und jede neue Kante k zu P, und
2. $[G \in \Xi\mathfrak{P},\ G = G' \cup G'',\ G' \cap G'' = S$ (Simplex), $P \in \mathfrak{P},\ G \succ P] \Rightarrow G' \succ P$ oder $G'' \succ P$.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{P}$ verträglich, wenn jede endliche Teilmenge von $\mathfrak{P}$ verträglich ist. Die Vereinigung einer aufsteigenden Kette verträglicher $\mathfrak{P}_i$ ist wieder verträglich. Daher ist jedes verträgliche $\mathfrak{P}$ in (wenigstens) einem verträglichen $\mathfrak{P}_{\max}$ enthalten, das nach Hinzufügung irgendeines $\bar{P}$, welches nicht isomorph zu einem $P \in \mathfrak{P}_{\max}$ ist, unverträglich wird.

Ist $\mathfrak{P}$ verträglich, so ist die Gesamtheit aller Werte n, so daß $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ für ein passend gewähltes Feinheitsmaß gilt, bestimmt durch $h(\mathfrak{P}) + 1 \leqq n \leqq m + 1$; dabei ist m das Maximum der Zahlen μ derart, daß $\mathfrak{P} \cup \{S(\mu)\}$ verträglich ist. (Ist z. B. $P \in \mathfrak{P}$ kein Simplex, so ist $m < \alpha(P)$; natürlich $m \geqq h(\mathfrak{P})$ wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{P}$.) Mit Hilfe von (6.2) zeigt man leicht:

(6.5) *Für ein verträgliches $\mathfrak{P}$ ist*

$$\mathfrak{B}(\hat{\Xi}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q},$$

---

[17] Aus $h(\mathfrak{M}_2) = 1$ und 4. folgt schon $h(\mathfrak{M}_i) = i - 1$ für $i = 3, 4, \ldots$.

[18] $\hat{\Xi}\mathfrak{P}$ bezeichnet die maximalen Elemente von $\Xi\mathfrak{P}$, $\mathfrak{B}(\hat{\Xi}\mathfrak{P})$ die primen darunter.

wo $\mathfrak{Q}$ die Gesamtheit der primen Graphen $Q \notin \mathfrak{P}$ mit folgenden Eigenschaften ist:

1. *Q ist homomorphes Bild (mindestens) eines $P \in \mathfrak{P}$,*
2. *$\mathfrak{P} \cup \{Q\}$ ist verträglich.*

Jedes verträgliche $\mathfrak{P}$ mit $h(\mathfrak{P}) = n-1$ läßt sich also durch Hinzufügung gewisser homomorpher Bilder von Graphen $\in \mathfrak{P}$ zu einem $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ erweitern.

Weiter gilt:

(6.6) *Für verträgliches $\mathfrak{P}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *$\mathfrak{B}(\hat{\Xi}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$;*

b) *Ist $P \in \mathfrak{P}$, $P \succ Q$ (Q prim) und $\mathfrak{P} \cup \{Q\}$ verträglich, so ist $Q \in \mathfrak{P}$;*

c) *$\mathfrak{P}$ ist vollständig;*

d) *Jedes prime homomorphe Bild eines $P \in \mathfrak{P}$ liegt in $\Gamma\mathfrak{P}$, und $\mathfrak{P}$ enthält alle Simplexe der Eckenzahl $\leqq h(\mathfrak{P})$.*

Die verträglichen und vollständigen Primgraphenmengen $\mathfrak{P}$ mit $h(\mathfrak{P}) = n-1$ sind also identisch mit den $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$.

Beweis. a)$\Leftrightarrow$b) ist klar wegen (6.5).

b)$\Rightarrow$c): Zunächst sind natürlich alle Simplexe der Eckenzahl $\leqq h(\mathfrak{P})$ in $\mathfrak{P}$ enthalten, da diese mit $\mathfrak{P}$ verträglich sind. Ist nun $H \in \Xi\mathfrak{P}$, so ist wegen (6.2) $H \subseteqq G \in \hat{\Xi}\mathfrak{P}$, wo G eine Primgraphen-sZ $G_1 \cup \cdots \cup G_l$ besitzt, in der die G_λ homomorphe Bilder von Graphen $\in \mathfrak{P}$ sind. Natürlich sind auch die $G_\lambda \in \hat{\Xi}\mathfrak{P}$. Also: $G_\lambda \in \mathfrak{B}(\hat{\Xi}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, mithin $H \in \Gamma\mathfrak{P}$, d. h. $\Xi\mathfrak{P} \subseteqq \Gamma\mathfrak{P}$.

c)$\Rightarrow$d) ist klar.

d)$\Rightarrow$b): Es sei $P \in \mathfrak{P}$, $P \succ Q$ (Q prim) und $\mathfrak{P} \cup \{Q\}$ verträglich. Dann ist (wegen $Q \in \Gamma\mathfrak{P}$ und (6.2)) Q in einem Graphen enthalten, der eine Primgraphen-sZ $P_1 \cup \cdots \cup P_l$ $((P_1 \cup \cdots \cup P_{\lambda-1}) \cap P_\lambda = S_\lambda$ (Simplex), $\lambda = 2, \ldots, l)$ mit $P_\lambda \in \mathfrak{P}$ besitzt. Wären für ein λ $(2 \leqq \lambda \leqq l)$ $Q \cap ((P_1 \cup \cdots \cup P_{\lambda-1}) - S_\lambda)$ und $Q \cap (P_\lambda - S_\lambda)$ beide nicht leer, so würde Q durch $Q \cap S_\lambda$ getrennt; $Q \cap S_\lambda$ kann daher wegen der Primität von Q kein Simplex sein. Dann läge aber $Q \cup k$ für wenigstens eine neue Kante k zu $Q \cap S_\lambda$ in $\Xi\mathfrak{P}$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\mathfrak{P} \cup \{Q\}$ verträglich sein sollte. Daraus schließt man, daß Q in einem P_λ enthalten ist, und zwar, wiederum wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{P} \cup \{Q\}$, als Untergraph. Ist Q Simplex, so natürlich von einer Ordnung $\leqq h(\mathfrak{P})$, d. h. Q liegt in $\mathfrak{P}$. Ist Q kein Simplex, so folgt $Q = P_\lambda$, d. h. wiederum $Q \in \mathfrak{P}$. (Denn existiert eine Ecke $e \in P_\lambda - Q$, so betrachte man alle Wege $\subseteqq P_\lambda$, die in e beginnen, in Q enden und mit Q nur den Endpunkt gemeinsam haben. Sind zwei verschiedene dieser Endpunkte, etwa q', q'', nicht benachbart, so folgt offenbar $P_\lambda \succ Q \cup (q', q'')$ mit Widerspruch zur Verträglichkeit von $\mathfrak{P} \cup \{Q\}$. Andernfalls aber bilden diese Endpunkte ein trennendes Simplex von P_λ, was wiederum, wegen der Primität von P_λ, einen Widerspruch ergibt.)

Weil die verträglichen $\mathfrak{P}$ gerade die Teilmengen der $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ sind und wegen (6.1) hat man

(6.7) *$\mathfrak{P}$ ist verträglich genau dann, wenn $\mathfrak{P} \times 1$ verträglich ist.*

Weiter hat man auch:

(6.8) *$\mathfrak{P}$ ist vollständig genau dann, wenn $\mathfrak{P} \times 1$ (zuzüglich des Nullgraphen) vollständig ist.*

Beweis. Zunächst sei $\mathfrak{P}$ vollständig. Natürlich enthält $\mathfrak{P} \times 1$, bis auf den Nullgraphen, alle Simplexe der Eckenzahl $\leqq h(\mathfrak{P} \times 1) = h(\mathfrak{P}) + 1$. Es sei nun $H \in \Xi(\mathfrak{P} \times 1)$. Es existiert nach (6.2) ein $G \supseteqq H$, so daß $G = G_1 \cup \cdots \cup G_l$ eine sZ ist, wo die G_λ homomorphe Bilder von Graphen $\in \mathfrak{P} \times 1$ sind, etwa $P_\lambda \times 1 \succ G_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, l$). Streicht man in G_λ irgendeine Ecke und nennt den entstehenden Graphen G'_λ ($\lambda = 1, \ldots, l$), so folgt $P_\lambda \succ G'_\lambda$. Weil $\mathfrak{P}$ vollständig ist, existieren also Graphen $G^*_\lambda \supseteqq G'_\lambda$, so daß G^*_λ eine $sZ \bigcup\limits_\mu P^*_{\lambda\mu}$ mit $P^*_{\lambda\mu} \in \mathfrak{P}$ besitzt. Dann ist also $G^*_\lambda \times 1 = \left(\bigcup\limits_\mu P^*_{\lambda\mu}\right) \times 1 = \bigcup\limits_\mu (P^*_{\lambda\mu} \times 1) \supseteqq G'_\lambda \times 1 \supseteqq G_\lambda$. Durch Zusammenheftung der $G^*_\lambda \times 1$ längs den Simplexen der sZ von G erhält man einen Graphen, der H als Teilgraph enthält und in dessen Primgraphenzerlegung die $P'_{\lambda\mu} \times 1$ auftreten. Also ist $\Xi(\mathfrak{P} \times 1) \subseteqq \Gamma(\mathfrak{P} \times 1)$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{P} \times 1$ (zuzüglich des Nullgraphen) vollständig, so muß $\mathfrak{P}$ natürlich alle $S(n)$ mit $n \leqq h(\mathfrak{P})$ enthalten. Ist $G \in \Xi\,\mathfrak{P}$, so $G \times 1 \in (\Xi\,\mathfrak{P}) \times 1 \subseteqq \subseteqq \Xi(\mathfrak{P} \times 1) = \Gamma(\mathfrak{P} \times 1)$. Man erweitere $G \times 1$ durch Adjunktion von Kanten zu einem $\hat{H} = \hat{G} \times 1 \in \hat{\Gamma}(\mathfrak{P} \times 1)$. In der Primgraphen-$sZ$ von $\hat{H}$ treten nach (6.2) lauter Teilgraphen von Elementen $\in \mathfrak{P} \times 1$ auf. Alle diese Glieder haben die aus dem Faktor 1 resultierende Hauptecke von $\hat{H}$ gemeinsam; $\hat{G} \supseteqq G$ hat daher eine sZ, in der alle Glieder Teilgraphen von Graphen $\in \mathfrak{P}$ sind, d. h. G liegt in $\Gamma\,\mathfrak{P}$.

Man erhält mittels (6.1) und (6.6) die folgende Charakterisierung der Feinheitsmaße f mit Hilfe der Basen der $\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$:

Satz 10. *Ist f ein Feinheitsmaß*[13]*, so bilden die $\mathfrak{B}\,\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$ eine abzählbare Folge von Primgraphenmengen $\mathfrak{P}_n$ ($n = 2, 3, \ldots$) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Jedes $\mathfrak{P}_n$ ist verträglich und vollständig;*
2. $h(\mathfrak{P}_n) = n - 1$;
3. $\mathfrak{P}_{n+1} \supseteqq \mathfrak{P}_n \times 1$;
4. $P \times 1 \in \mathfrak{P}_{n+1} \Rightarrow P \in \mathfrak{P}_n$.

Umgekehrt bestimmt jede Folge von Primgraphenmengen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, die die obigen Bedingungen 1. *bis* 4. *erfüllt, eindeutig ein Feinheitsmaß*[13] *f, so daß $\mathfrak{B}\,\hat{\mathfrak{F}}^*(n) = \mathfrak{P}_n$ für $n = 2, 3, \ldots$ gilt.*

Aus (6.7) und (6.8) folgt, daß für eine Graphenmenge $\mathfrak{A}$ mit $h(\mathfrak{A}) = n - 1$ die Basen der $\hat{\mathfrak{F}}^*_{\mathfrak{A}}(n+r)$ (also bezüglich des durch $\mathfrak{A}$ induzierten Feinheitsmaßes $f_{\mathfrak{A}}$) gleich $\mathfrak{B}(\hat{\Xi}\,\mathfrak{A}) \times S(r)$ (zuzüglich der $S(v)$ mit $v \leqq r - 1$) sind, für $r = 1, 2, \ldots$.

Aus (6.5) erhält man: Ist irgendein $\mathfrak{B}\,\hat{\mathfrak{F}}^*_0(n)$ sowie eine Zahl $\alpha \geqq n - 1$ gegeben, so bilden schon die Elemente der Eckenzahl $\leqq \alpha$ zuzüglich gewisser ihrer homomorpher Bilder ein $\mathfrak{B}\,\hat{\mathfrak{F}}^*(n)$. Daraus folgt durch Anwendung auf die Klasse der primen ebenen Dreiecksgraphen:

Satz 11. *Es gibt unendlich viele sZ-treue, normierte Feinheitsmaße f_i bezüglich $\succ$, für die schon die entsprechenden $\hat{\mathfrak{F}}^*_i(5)$ zu je zweien verschieden sind.*

Es ist zu vermuten, daß es sogar $2^{\aleph_0}$ viele solche Feinheitsmaße gibt; zum Beweis dieser Vermutung muß man aber feinere Homomorphieeigenschaften der ebenen Dreiecksgraphen untersuchen. Es genügte zu zeigen, daß es ein unendliches System von primen ebenen Dreiecksgraphen gibt, in dem keine zwei verschiedenen in einer Homomorphiebeziehung stehen.

Satz 11 (in Verbindung mit Satz 4) wirft ein bezeichnendes Licht auf die Schwierigkeit des Vierfarbenproblems: Während unterhalb des Wertes 4 alle Feinheitsmaße f, also insbesondere auch h und $\tilde{\Phi}$, übereinstimmen, fächern sie sich, grob anschaulich gesprochen, beim Übergang auf den f-Wert 4 gleich auf unendlich viele (vermutlich sogar kontinuum-viele) verschiedene auf.

§ 7. Weitere Homomorphiesätze

Für zwei natürliche Zahlen m, n bezeichne $\mathfrak{D}^*_{m,n}$ die Klasse aller Graphen, die nicht homomorph zu einem m-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ vielen Ecken sind. Wir werden im folgenden $\mathfrak{D}^*_{m,n}$ für $m \leqq 4$ und beliebige n untersuchen [19].

Es sei $G = G' \cup G''$, $G' \cap G'' = T$ mit $\alpha(T) \leqq 2$, $G', G'' \supset T$. H sei ein 3-fach zusammenhängender Graph. Ist T ein Simplex (dies ist sicher der Fall für $\alpha(T) \leqq 1$) und $G \succ H$, so folgt aus (3.2), daß wenigstens einer der Graphen G', G'' homomorph zu H sein muß. Ist G nicht durch ein Simplex mit $\leqq 2$ vielen Ecken trennbar, besteht also T aus zwei nicht benachbarten Ecken t, t', so adjungiere man die Kante $k = (t, t')$ zu G.

Nun enthält G sowohl eine Unterteilung von $G' \cup k$ als auch eine Unterteilung von $G'' \cup k$, da t, t' sowohl in G'' als auch in G' jeweils durch einen Weg verbindbar sind. Daher ist $G \cup k \succ H$ genau dann, wenn $G \succ H$ ist.

Wenn daher ein Graph G homomorph zu einem 3-fach zusammenhängenden Graphen H ist, so ist G (mit $\alpha(G) \geqq \alpha(H)$) entweder selbst 3-fach zusammenhängend, oder G enthält eine Unterteilung eines Graphen G^* mit $\alpha(G^*) < \alpha(G)$, so daß $G^* \succ H$ ist. Damit folgt rekursiv:

(7.1) *Ist G homomorph zu einem 3-fach zusammenhängenden Graphen H mit n Ecken, so enthält G eine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ vielen Ecken (der seinerseits $\succ H$ ist). $\mathfrak{D}^*_{3,n}$ ist also gleich der Klasse der Graphen, die keine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden H mit $\alpha(H) \geqq n$ enthalten.*

Ist $G \in \mathfrak{D}^*_{3,n}$ und nicht zusammenhängend, so verbinde man irgend zwei Ecken aus verschiedenen Komponenten durch eine neue Kante; besitzt G eine trennende Ecke t, so verbinde man irgend zwei zu t benachbarte Ecken, die durch t getrennt werden, durch eine neue Kante. In beiden Fällen folgt aus (3.2), daß der erweiterte Graph wiederum zu $\mathfrak{D}^*_{3,n}$ gehört. Jeder Graph aus $\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ (ausgenommen $S(v)$, $v \leqq 2$) ist daher 2-fach zusammenhängend. Ist $G \in \hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ mit $\alpha(G) \geqq n$, so folgt die Existenz eines trennenden T mit $\alpha(T) = 2$, und nach unseren obigen Überlegungen ist T ein $S(2)$. $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ besteht also nur aus den $S(v)$ mit $v \leqq n-1$. Heftet man sukzessive Graphen der Ordnung $\leqq n-1$ längs Kanten aneinander, so ist jeder auf diese Weise entstehende Graph G nach (3.2) aus $\mathfrak{D}^*_{3,n}$. Haben zwei dieser Simplexe, etwa S' und S'', eine Kante gemeinsam und gilt $\alpha(S') + \alpha(S'') \leqq n+1$, so kann man $S' \cup S''$ durch Adjunktion neuer Kanten zu einem Simplex der Eckenzahl $\alpha(S') + \alpha(S'') - 2$ erweitern; der entstehende Obergraph von G ist dann gleichfalls von der genannten Gestalt,

[19] Es erübrigt sich, den Fall $m = 2$ gesondert zu behandeln, da er analog dem Fall $m = 3$, nur noch einfacher, erledigt wird.

also $\in\mathfrak{D}^*_{3,n}$, so daß $G\notin\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ folgt. Haben umgekehrt je zwei der Simplexe, aus denen G aufgebaut ist, nur dann eine Kante gemeinsam, wenn die Summe ihrer Eckenzahlen $\geqq n+2$ ist, so folgt durch vollständige Induktion leicht $G\in\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$. Damit haben wir:

Satz 12. *$\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ ist gleich der Gesamtheit aller Graphen G der Form $G=S_1\cup\cdots\cup S_l$, mit $(S_1\cup\cdots\cup S_{\lambda-1})\cap S_\lambda=k_\lambda$ (Simplex der Ordnung 2) für $\lambda=2,\ldots,l$, wo S_λ Simplexe mit $3\leqq\alpha(S_\lambda)\leqq n-1$ sind und für $\mu<\lambda$ nur dann $S_\mu\cap S_\lambda=k_\lambda$ gilt, wenn $\alpha(S_\mu)+\alpha(S_\lambda)\geqq n+2$ ist.*

Ein Graph G enthält also dann und nur dann keine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ Ecken, wenn er die Form hat $G=G_1\cup\cdots\cup G_l$, mit $\alpha(G_\lambda)\leqq n-1$ $(\lambda=1,\ldots,l)$ und $\alpha((G_1\cup\cdots\cup G_{\lambda-1})\cap G_\lambda)\leqq 2$, wo ferner $(G_1\cup\cdots\cup G_{\lambda-1})\cap G_\lambda$ sowohl in G_λ als auch in mindestens einem der $G_\mu(\mu<\lambda)$ echt enthalten ist $(\lambda=2,\ldots,l)$.

Es bezeichne $\vartheta(\alpha,n)$ die größte Zahl von Kanten, die ein Graph der Eckenzahl α besitzen kann, ohne eine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ vielen Ecken zu enthalten. Man schließt unschwer, daß $G\in\hat{\mathfrak{D}}^*_{3,n}$ mit $\alpha(G)=\alpha$ genau dann $\vartheta(\alpha,n)$ Kanten enthält, wenn es mit höchstens einer Ausnahme aus lauter $S(n-1)$ zusammengeheftet ist. Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\vartheta(\alpha,n)=\left[\frac{\alpha-2}{n-3}\right]\cdot\frac{n}{2}\cdot(n-3)+\binom{r}{2}, \tag{7.2}$$

wobei $r=\alpha-n+1-\left[\dfrac{\alpha-n+1}{n-3}\right]\cdot(n+3)+2$ ist; $2\leqq r\leqq n-2$.

Aus dem Satz von KURATOWSKI in Verbindung mit [7], (1.1) schließt man, daß jeder nicht ebene 3-fach zusammenhängende Graph G mit $\alpha(G)\geqq 6$ ein $U(3,3)$ enthält. Aus dieser Tatsache zusammen mit der Fußnote 11 folgt:

(7.3) *Ist G mit $\alpha(G)\geqq 6$ 3-fach zusammenhängend, so enthält G eine Unterteilung eines der Graphen* $(3,3)$, P_{III}, $X(6)$.

Mittels Satz 12 für $n=6$ ist die Klasse aller Graphen, die keine Unterteilung eines dieser drei Graphen enthalten, charakterisiert. Es ist also $\mathfrak{D}^*_{3,6}$ gleich dem Durchschnitt der Klassen $\mathfrak{H}^*(3,3)$, $\mathfrak{H}^*(P_{\mathrm{III}})$ und $\mathfrak{H}^*(X(6))$[20]. Diese drei Klassen können sämtlich auch einzeln charakterisiert werden. Für die beiden ersten sind in früheren Arbeiten Charakterisierungen gegeben worden (s. [11] sowie [5], S. 68 und [7], S. 58). Im folgenden lösen wir das Problem für $\mathfrak{H}^*(X(6))$. Wir bezeichnen mit $T(0)$ ein Dreieck, mit $T(1)$ ein Tetraeder $S(4)$ und für $m\geqq 2$ mit $T(m)$ einen Graphen, der aus m längs eines gemeinsamen Dreiecks zusammengehefteten Tetraedern $S(4)$ besteht. Dann gilt:

Satz 13. *Die Basis von $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ besteht aus den Simplexen $S(t)$ mit $t\leqq 5$, dem Graphen L (s. [6], Fig. 1; er besteht aus einem* $(3,3)$ *mit zwei nicht inzidenten neuen Kanten), dem Oktaeder* $(2,2,2)$, *dem in Fig. 8 dargestellten Graphen Q mit 7 Ecken und dem Würfelgraphen P_{IV}. $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ ist gleich der Gesamtheit aller Graphen G der Form*

$$G=G_1\cup\cdots\cup G_l$$

[20] $\mathfrak{H}^*(G)$ bezeichnet die Klasse der nicht zu G homomorphen Graphen.

mit $(G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda = k_\lambda$ *(Simplex der Eckenzahl 2) für* $\lambda = 2, \ldots, l$, *wo jedes* G_λ *einer der Graphen* $S(5)$, L, $(2,2,2)$, Q, P_{IV} *oder ein* $T(m)$ *mit* $m \neq 2$ *ist und wobei ferner, falls* $\mu \neq \lambda$ *und* G_μ *ein* $T(m)$, G_λ *ein Dreieck ist, niemals* G_λ *eine Kante des den m Tetraedern von* $T(m)$ *gemeinsamen Dreiecks enthält.*

Beweis. Man zeigt zunächst durch einige einfache Fallunterscheidungen, daß die angegebenen primen Graphen tatsächlich Basiselemente von $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ sind, sodann durch vollständige Induktion, daß jeder Graph G der beschriebenen Form wirklich zu $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ gehört.

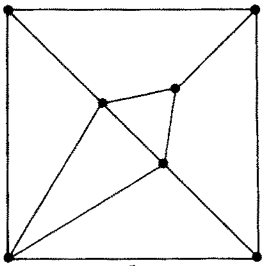

Fig. 8

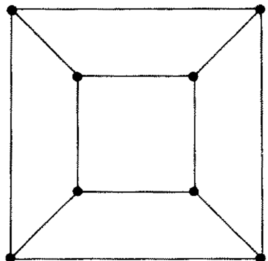

Fig. 9

Es sei nun $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ mit $\alpha(G) \geqq 6$. Wird G durch ein T mit $\alpha(T) \leqq 2$ getrennt, so folgt mit Hilfe von (3.2) und ähnlichen Überlegungen wie zu Beginn dieses Paragraphen, daß T in G ein trennendes Simplex $S(2)$ bildet; die hierdurch bestimmten Bestandteile von G liegen dann wegen (3.2) wieder in $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$. Wir werden zeigen, daß G, falls es 3-fach zusammenhängend ist, gleich einem der Graphen L, $(2,2,2)$, Q, P_{IV} oder ein $T(m)$ (wegen $\alpha(G) \geqq 6$ natürlich mit $m \geqq 3$) ist. Damit wird dann bewiesen sein, daß jedes Element von $\hat{\mathfrak{H}}^*(X(6))$ die im Satz genannte Form hat. (Die Einschränkung über die Durchschnitte der $S(3)$ und der $T(m)$ unter den G_λ ist nötig; enthält nämlich $S(3)$ eine Kante k des genannten Dreiecks von $T(m)$, so erhält man durch Verbindung der Ecken $\notin k$ dieser beiden Dreiecke ein $T(m+1)$.)

Fall I. *G ist nicht eben.* Wir wenden den Kuratowskischen Satz an.

Enthält G eine Unterteilung von $S(5)$, in der wenigstens eine Kante echt unterteilt ist, so folgt wie im Beweis von [7], (1.1), daß G homomorph zu dem Graphen der Fig. 2 von [7] (s. S. 49) ist; dieser enthält offenbar ein $X(6)$ als Teilgraph. Enthält G ein $S(5)$, so wird dieses längs Kanten abgespalten.

Andererseits enthalte G eine Unterteilung U von $(3,3)$, für das wir die Bezeichnungen von [7] (s. S. 48) zugrundelegen. Existiert auf einem Kantenzuge von U, etwa aus Symmetriegründen o.B.d.A. auf $\langle 1,2 \rangle$, eine innere Ecke p (also $p \neq 1, 2$), so spannen die Ecken $1, 2$ in G entweder ein trennendes $S(2)$ auf, oder es gibt einen Weg Z, der eine innere Ecke p' von $\langle 1,2 \rangle$ mit einer Ecke $q \in U - \langle 1,2 \rangle$ verbindet und $Z \cap U = \{p', q\}$ erfüllt. Ist q nicht Verzweigungspunkt von U, so kann q mit einem Verzweigungspunkt $\neq 1, 2$ von U (längs eines Teilkantenzuges von U) zusammengezogen werden. Wir können also (aus Symmetriegründen o.B.d.A.) annehmen, daß Z von p' nach $1'$ führt. Dann folgt durch Zusammenzug von $\langle 1', 2' \rangle$ auf eine Ecke: $G \succ X(6)$.

Daher können wir im folgenden annehmen, daß jedes $U(3,3) \subseteqq G$ schon ein $(3,3)$ ist. Ist $(3,3) \subseteqq G$ und p eine Ecke $\in G-(3,3)$, so betrachte man alle Wege $\subseteqq G$, die in p beginnen und genau nur den Endpunkt mit $(3,3)$ gemeinsam haben. Gäbe es zwei solche Wege mit Endpunkten, die verschiedenen Klassen von $(3,3)$ angehören, so könnte man die Kante von $(3,3)$, die diese Ecken verbindet, mit Hilfe dieser beiden Wege durch einen echt unterteilten Kantenzug ersetzen. Daher kann angenommen werden, daß die genannten Endpunkte alle einer Klasse von $(3,3)$, etwa der Klasse 1, angehören, und — weil andernfalls G durch ein $S(2)$ getrennt würde — daß die Ecken $1, 1', 1''$ durch Wege Z, Z', Z'', die bis auf p fremd sind (vgl. [8], (2.1) (d)) und keine innere Ecke mit $(3,3)$ gemeinsam haben, von p aus erreichbar sind. Z, Z', Z'' müssen Kanten sein; andernfalls könnte man p mit Z, Z', Z'' an die Stelle der Ecke 2 mit den von ihr ausgehenden Kanten in $(3,3)$ treten lassen und erhielte ein $U(3,3)$ mit wenigstens einer echt unterteilten Kante. Gäbe es ein $q \in G-(3,3)$, von dem aus $2, 2', 2''$ in der genannten Weise erreichbar wären, oder eine Kante $k \in G$, die Ecken der Klasse 2 von $(3,3)$, etwa die Ecken $2, 2'$, verbindet, so käme man (mittels Z, Z', Z'') durch Zusammenzug der Kante $(2'', 1)$ leicht zu $G \succ X(6)$.

Daher folgt, daß alle Ecken $\in G-(3,3)$ zu den Ecken derselben Klasse von $(3,3)$ benachbart sind, ferner, falls wenigstens ein $p \in G-(3,3)$ existiert, daß keine zwei Ecken der anderen Klasse und keine zwei Ecken $\in G-(3,3)$ benachbart sind. (Denn jede Ecke $\in G-(3,3)$ kann ja aus Symmetriegründen die Rolle einer Ecke dieser Klasse übernehmen.) Es folgt dann sofort, daß G gleich einem $T(m)$ mit $m \geqq 4$ sein muß. Enthält aber G nur 6 Ecken, so folgt leicht, daß entweder $G=L$ oder $G=T(3)$ ist. — Damit ist der nicht ebene Fall erledigt.

Fall II. *G ist eben.* Dann folgt aus (7.3) die Existenz eines $U(P_{\mathrm{III}}) \subseteqq G$; die Bezeichnungen seien wie in Fig. 2 gewählt.

Ist $G \supseteqq P_{\mathrm{III}}$, so folgt im Falle $\alpha(G)=6$ leicht $G=(2,2,2)$; wenn eine Ecke $p \in G-P_{\mathrm{III}}$ existiert, so folgt, daß die p enthaltende Komponente von $G-P_{\mathrm{III}}$ nur 2 Berührpunkte besitzt, daß G also längs einer Kante zerfällt, da sich sonst durch Unterscheidung weniger einfacher Fälle $G \succ X(6)$ ergäbe.

Es besitze also wenigstens ein Kantenzug von $U(P_{\mathrm{III}})$ wirklich eine unterteilende (innere) Ecke.

Gibt es eine Ecke $p \in\, \rangle a, a'\langle$, so folgt, falls a, a' nicht trennen, die Existenz eines $\rangle a, a'\langle$, $\rangle a, b\rangle \cup \langle b, b'\rangle \cup \langle b', a'\rangle$-Weges Z in G (aus Symmetriegründen o.B.d.A.). Durch Zusammenzug von $\rangle a, b\rangle \cup \langle b, b'\rangle \cup \langle b', a'\langle$ auf eine Ecke folgt dann $G \succ X(6)$. Also kann im folgenden (aus Symmetriegründen) angenommen werden, daß $\langle a, a'\rangle$, $\langle b, b'\rangle$, $\langle c, c'\rangle$ Kanten sind.

Besitzt etwa $\langle a, b\rangle$ eine innere Ecke und existiert ein $\rangle a, b\langle$, $\rangle a, c\rangle \cup \langle c, b\langle$-Weg Z, so folgt durch Zusammenzug von $\rangle a, c\rangle \cup \langle c, b\langle \cup \langle c, c'\rangle$ auf eine Ecke: $G \succ X(6)$. Wenn daher G nicht durch a, b getrennt wird, muß ein $\rangle a, b\langle$, $\langle a', b'\rangle$-Weg Z existieren. Falls Z in $\rangle a', b'\langle$ endet, folgt $G \supseteqq U(P_{\mathrm{IV}})$, und wir schließen wie in dem Beweis von (5.1), daß entweder $G=P_{\mathrm{IV}}$ ist oder ein P_{IV} längs einer Kante abspaltet. Also ende Z (etwa) in a'. Enthielte Z eine innere Ecke z, so gäbe es bezüglich z mindestens 3 Berührpunkte auf $U(P_{\mathrm{III}})$ (sonst zerfällt G längs eines $S(2)$); man schließt unschwer, daß dann aber $G \succ X(6)$ wäre. Also kann Z als eine Kante (p, a') angenommen werden.

1) Existiert ein $\langle b, c\rangle$, $\langle b', c'\rangle$-Weg (natürlich verschieden von den Kanten (b, b'), (c, c')) in G, so kann durch geeignete Zusammenzüge eingesehen werden, daß o.B.d.A. dieser Weg entweder als von b nach c' oder von c nach b' führend angenommen werden kann; es folgt dann aber $G \succ X(6)$ durch Zusammenzug von $\langle p, b\rangle$ bzw. von $\langle a, c\rangle$.

2) Existiert ein $\langle a, c\rangle$, $\langle a', c'\rangle$-Weg ($\neq (a, a'), (c, c')$), der nicht von a nach c' führt, so folgt $G \succ X(6)$ durch Unterscheidung einiger einfacher Fälle.

3) Existiert ein $\langle a, b\rangle$, $\langle a', b'\rangle$-Weg $\neq (p, a')$, der nicht von p nach b' führt, so folgt wiederum leicht $G \succ X(6)$.

4) In den beiden Fällen (die nicht gleichzeitig auftreten können), daß ein p, a' oder ein a, c' verbindender Weg (der also nur Endpunkte mit $U(P_{\mathrm{III}})$ gemeinsam hat) existiert, folgt somit jeweils leicht $G = Q$ bzw., daß G längs einer Kante zerfällt.

Aus Symmetriegründen sind damit alle Fälle erschöpft, und unser Satz ist bewiesen.

Aus diesem Satz zusammen mit [15], (3.4) folgt sofort:

Satz 13'. *$\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{H}}^*(C(5))$ besteht aus den $S(n)$ mit $n \leqq 4$ ($C(5)$ bezeichnet den Kreis der Länge 5). Man erhält genau alle maximalen Graphen ohne einen Kreis der Länge $\geqq 5$, indem man sukzessive Simplexe der Ordnung 2, 3 oder 4 sowie Graphen der Form $(1, 1, m)$ ($m \geqq 3$) längs Ecken aneinanderheftet, wobei darauf zu achten ist, daß unter diesen Gliedern kein $S(2)$ mit einem $(1, 1, m)$ ($m \neq 2$) einen Faktor 1 gemeinsam hat.*

Es sei nun G ein Element der Basis $\mathfrak{B}\hat{\mathfrak{D}}^*_{4,n}$ mit $\alpha(G) \geqq n \geqq 5$. Dann ist G trennbar durch einen Untergraphen T mit $\alpha(T) \leqq 3$, der kein Simplex ist. Es folgt durch einen ganz ähnlichen Schluß wie in (5.2), daß G in der in (5.2) genannten Weise zerfällt, d. h. G besitzt eine Ecke 3. Grades, die in keinem Dreieck von G enthalten ist.

Man betrachte nun einen Graphen $G \in \hat{\mathfrak{D}}^*_{4,n}$. G besitzt eine sZ $G_1, \ldots, G_l$ ($(G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda = S_\lambda$, $\lambda = 2, \ldots, l$), wo die G_λ aus der oben genannten Basis stammen. Sind diese Basiselemente nicht sämtlich Simplexe der Ordnung $\leqq n-1$, so existiert also in (mindestens) einem der G_λ eine Ecke e vom Grade 3 (in bezug auf G_λ), die in keinem Dreieck von G_λ enthalten ist. e besitzt auch in G den Grad 3, falls es in keinem der S_λ liegt; für ein S_λ, das e enthält, muß aber $\alpha(S_\lambda) \leqq 2$ gelten. Daher können wir schließen:

Satz 14. *Ein 3-fach zusammenhängender Graph G, in dem jede Ecke einen Grad $\geqq 4$ hat, ist homomorph zu einem 4-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ vielen Ecken genau dann, wenn er nicht von der Form ist:*

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_l$$

mit $\alpha(G_\lambda) < n$ ($\lambda = 1, \ldots, l$) *und* $\alpha((G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda) = 3$ ($\lambda = 2, \ldots, l$), *sowie* $(G_1 \cup \cdots \cup G_{\lambda-1}) \cap G_\lambda \subset G_\lambda$ *und* $\subset G_\mu$ *für ein* $\mu < \lambda$ ($\lambda = 2, \ldots, l$).

Hat nämlich G die im Satz genannte Form, so vervollständige man jedes G_λ durch Adjunktion neuer Kanten zu einem Simplex. Wegen (3.2) kann dann der entstehende Graph nicht homomorph zu einem 4-fach zusammenhängenden Graphen mit $\geqq n$ vielen Ecken sein.

Ist umgekehrt $G \in \mathfrak{D}^*_{4,n}$, so erweitere man G durch Adjunktion neuer Kanten zu einem $\hat{G} \in \hat{\mathfrak{D}}^*_{4,n}$. Nach der oben angestellten Überlegung ist $\hat{G}$ aus lauter Simplexen der Ordnung $\leqq n-1$ zusammengeheftet (längs Dreiecken)[21] Daraus folgt sofort, daß G die behauptete Form hat.

Auch für die 3-fach zusammenhängenden Graphen mit Graden $\geqq 4$ läßt sich die Maximalzahl von Kanten bei gegebener Eckenzahl, so daß G noch in $\mathfrak{D}^*_{4,n}$ liegt, durch eine Formel analog (7.2) angeben; wir wollen dies aber nicht weiter verfolgen.

Literatur

[1] DIRAC, G. A.: In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. Math. Nachr. **22**, 61—85 (1960).

[2] — Homomorphism theorems for graphs. Math. Ann. **153**, 69—80 (1964).

[3] — On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs. J. reine angew. Math. **214/215**, 43—52 (1964).

[4] HADWIGER, H.: Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich **88**, 133—142 (1943).

[5] HALIN, R.: Über einen graphentheoretischen Basisbegriff und seine Anwendung auf Färbungsprobleme. Diss. Köln 1962.

[6] — Bemerkungen über ebene Graphen. Math. Ann. **153**, 38—46 (1964).

[7] — Über einen Satz von K. WAGNER zum Vierfarbenproblem. Math. Ann. **153**, 47—62 (1964).

[8] — u. H. A. JUNG: Über Minimalstrukturen von Graphen, insbesondere von n-fach zusammenhängenden Graphen. Math. Ann. **152**, 75—94 (1963).

[9] ORE, O.: Theory of graphs. Providence 1962.

[10] TUTTE, W. T.: A theory of 3-connected graphs. Indag. Math. **23**, 441—455 (1961).

[11] WAGNER, K.: Über eine Erweiterung eines Satzes von KURATOWSKI. Deut. Math. **2**, 280—285 (1937).

[12] — Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann. **114**, 570—590 (1937).

[13] — Bemerkungen zu HADWIGERS Vermutung. Math. Ann. **141**, 433—451 (1960).

[14] — Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. Math. Ann. **153**, 139—141 (1964).

[15] — u. R. HALIN: Homomorphiebasen von Graphenmengen. Math. Ann. **147**, 126—142 (1962).

[16] JUNG, H. A.: Anwendung einer Methode von K. WAGNER bei Färbungsproblemen von Graphen. Math. Ann. **161**, 325—326 (1965).

Dr. R. HALIN
Mathematisches Institut der Universität
5 Köln-Lindenthal, Weyertal 86

(Eingegangen am 6. November 1965)

[21] Hätten zwei verschiedene der Basiselemente von $\hat{G}$ mit den Eckenzahlen α_1 und α_2 ein $S(v)$ mit $v \geqq 4$ gemeinsam, so müßte $\alpha_1 + \alpha_2 - v \leqq n-1$ gelten; die Vereinigung der beiden Graphen könnte dann aber zu einem Simplex erweitert werden, ohne daß der entstehende Graph aus $\mathfrak{D}^*_{4,n}$ herausfällt.