Math. Ann. 202, 1—25 (1973)

Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheoretischer Funktionen auf Restklassen. I.

Dieter Wolke

Meinem Lehrer Professor Dr. Hans-Egon Richert
in Dankbarkeit gewidmet

1. Einleitung

1.1. In dieser aus zwei Teilen bestehenden Arbeit sollen die Untersuchungen aus [12] und [15] über Mittelwertsätze Bombierischen Typs fortgesetzt werden. Eines der Hauptergebnisse ist

Satz 1. *Sei $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion mit*

$$|f(p^a)| \leqq D_1 a^{D_2} \quad \text{für alle} \quad p \in \boldsymbol{P} \quad \text{und} \quad a \in \boldsymbol{N}, \tag{1.1.1}$$

$$\sum_{p \leqq y} |f(p) - \tau| \ll y(\ln y)^{-A_1} \quad \text{für alle} \quad A_1 \in \boldsymbol{R}^+ \quad \text{und} \quad y \geqq 2, \tag{1.1.2}$$

wobei τ eine komplexe Zahl und D_1, D_2 positive reelle Konstanten sind. Dann gibt es zu jedem $A > 0$ eine von A und f abhängige positive Zahl A_2, so daß für $x \geqq 2$ und $Q := x^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{-A_2}$ gilt:

$$\sum_{k \leqq Q} \max_{(k,l)=1} \max_{y \leqq x} \left| \sum_{\substack{n \leqq y \\ n \equiv l(k)}} f(n) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq y \\ (n,k)=1}} f(n) \right| \ll x(\ln x)^{-A} \tag{1.1.3}$$

($\varphi(k)$ ist die Eulersche Funktion).

Im Falle $-\tau \in \boldsymbol{N}_0$ gilt

$$\sum_{k \leqq Q} \max_{l} \max_{y \leqq x} \left| \sum_{\substack{n \leqq y \\ n \equiv l\,(k)}} f(n) \right| \ll x(\ln x)^{-A}. \tag{1.1.4}$$

Anmerkung: Wird A fest vorgegeben, so kann auch A_1 in Abhängigkeit von A und f festgelegt werden.

Mit (1.1.3) bzw. (1.1.4) läßt sich die Summe $\sum_{n \leqq x} f(n)\, d(n+a)$ ($d(n)$ ist die Teilerfunktion, a eine ganze Zahl $\neq 0$) berechnen. (Zur Geschichte dieses Problems s. Wolke [15]).

Satz 2. *Genügt $f(n)$ den Bedingungen aus Satz 1, dann gilt die asymptotische Formel*

$$\sum_{n \leq x} f(n)\, d(n+a) = E(f,a)\, x(\ln x)^{\tau} + O\big(x(\ln x)^{\operatorname{Re}\tau - 1} \cdot (\ln\ln x)^{C}\big).$$

Im Fall $-\tau \in N_0$ ist $E(f,a)=0$. C hängt von f und a ab.

In ähnlicher Weise, wenn auch etwas komplizierter, kann die Summe

$$\sum_{n<m} d(n)\, f(m-n) \qquad (m \in N,\ m \text{ hinreichend groß})$$

behandelt werden (s. hierzu Ufimceva [13]).

Satz 1 kann wesentlich allgemeiner formuliert werden. Wie unten gezeigt wird, läßt sich als erzeugende Dirichlet-Reihe für $f(n)$ $(n \leq x)$ die Funktion

$$F(s) = \zeta^{\tau}(s)\, H(s) \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)-\tau}{p^s}\right) \tag{1.1.5}$$

benutzen. ($H(s)$ ist eine für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion, die hinreichend schwach anwächst). Satz 1, (1.1.3) bleibt richtig, wenn $F(s)$ die allgemeinere Gestalt hat

$$F(s) = \zeta^{\tau}(s) \prod_{\mu=1}^{\mu_0} (\zeta^{(\mu)}(s))^{a_\mu} \cdot H(s) \cdot \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{g(p)}{p^s}\right)$$

(a_μ natürlich oder $=0$, $g(p)$ im Mittel hinreichend klein). Wählt man insbesondere $\mu_0 = 1$, $a_1 = 1$, $g(p) \equiv 0$, $\tau = -1$, so erhält man den bekannten Primzahlsatz von Bombieri [1]. Desgleichen darf in (1.1.5) an Stelle der ζ-Funktion ein Produkt aus Potenzen beliebiger, fester L-Reihen stehen. Hier muß (1.1.3) allerdings noch modifiziert werden (vgl. Motohashi [8], Siebert-Wolke [12]).

Um den Beweis nicht unnötig in die Länge zu ziehen, wollen wir auf diese Verallgemeinerungen verzichten.

Die Haupt-Hilfsmittel im Beweis zu Satz 1 sind das „Große Sieb" für Charaktersummen (s. Gallagher [4]), Sätze von Siegel (s. Prachar [9]) und Montgomery [7] über Nullstellen der L-Reihen sowie Ideen aus Gallagher [5] und Wolke [15]. Da wir an verschiedenen Stellen wie in den letztgenannten Arbeiten vorgehen, werden wir dort weitgehend auf Einzelheiten verzichten.

Ähnlich wie in [12] und [15] zeigen wir (1.1.3) zuerst mit Riesz-Mitteln. Der Tauber-Schluß und die Herleitung von (1.1.4) aus (1.1.3) geschieht wie in [12]. Ebenso verzichten wir im Beweis zu (1.1.3) auf das Maximum über $y \leq x$, da dies außer Schreibarbeit keine Komplikationen mit sich bringt.

In Teil II sollen die hier entwickelten Methoden auf Folgen angewandt werden, die mit der Folge der Primzahlen verwandt sind.

1.2. Bezeichnungen

d, k, l, m, n, r: natürliche Zahlen,

ν, μ, ϱ: nichtnegative, ganze Zahlen,

p: Primzahlen,

$s = \sigma + it$: komplexe Variable mit dem Realteil σ und dem Imaginärteil t.

Im Beweis zu Satz 1 und 2 bezeichnet C positive, nicht notwendig gleiche Konstanten, die von D_1, D_2 und τ abhängen können. $B_1, \ldots, B_{13}$ sind hinreichend große, von A, D_1, D_2 und τ abhängende Konstanten. Jedes B_j kann außerdem von $B_1, -, B_{j-1}$ abhängen.

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ sind positive, hinreichend kleine Konstanten.

Entsprechendes gilt in Teil II für $C', B'_1, -, B'_6$.

Die O- und $\ll$-Konstanten können von allen vorkommenden Konstanten abhängen.

x sei genügend groß und fest gewählt. $l_1 = \ln x$, $l_{j+1} = \ln l_j$ $(j = 1, 2)$. $p(n) =$ größter Primteiler von $n, p(1) = 1$.

$$d_r(n) = \sum_{n = n_1 \ldots n_r} 1, \qquad \nu(n) = \sum_{p \mid n} 1 .$$

(Die Schreibweise $d_C(n)$ soll zusätzlich zur obigen Festlegung bezüglich C stets implizieren, daß C ganzzahlig ist; ähnlich bei $d_{kC}(n)$.)

$\chi(n)$ ist stets ein Dirichletscher Charakter. Leere Summen werden als 0, leere Produkte als 1 definiert.

$\sum\limits_{\chi \bmod k}^{*}$ bedeutet Summation über alle primitiven Charaktere modulo$k$.

2. Hilfssätze

Die $\ll$-Konstanten können hier auch von r abhängen.

2.1. Lemma 1. *Für $r \geqq 2$ und $y \geqq 3$ gilt*

$$\sum_{n \leqq y} (d_r(n))^2 \leqq 9^{r^2} y (\ln y)^{r^2 - 1} .$$

Dies ist Lemma 7 aus Elliott [3].

Lemma 2. *Sei $y \geqq 2$, $(\ln y)^2 < z \leqq y$ und $u = \dfrac{\ln y}{\ln z}$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\sum_{n \leqq y,\, p(n) \leqq z} d^r(n) \ll y (\ln y)^{2^{r+1}} \exp(-u \ln u + 2^{r+1} u) .$$

Dies kann entweder nach der Methode von de Bruijn [2] gezeigt werden oder mit Hilfe einer Idee von Rankin [10], z. B. wie in Wolke [14].

Lemma 3. *(Großes Sieb). Für beliebige komplexe Zahlen $a_n (M < n \leqq M + N)$ gilt*

$$\sum_{k \leqq y} \sum_{\chi \bmod k}^{*} \left| \sum_{M < n \leqq M+N} \chi(n)\, a_n \right|^2 \ll (y^2 + N) \sum_{M < n \leqq M+N} |a_n|^2 .$$

Diese Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus (3) und (5) in Gallagher [4].

2.2. Die nächsten Lemmata befassen sich mit Charakteren, für die gewisse Charaktersummen groß werden.

Für

$$\tfrac{1}{2} \leqq \alpha < 1 \quad \text{und ganzes} \quad T \tag{2.2.1}$$

bezeichne $\mathfrak{G}(\alpha, T)$ den Streifen

$$\sigma \geqq \alpha, \qquad T \leqq t \leqq T + 1 . \tag{2.2.2}$$

Für hinreichend großes $y \leqq x^{\frac{1}{2}}$ und komplexe Zahlen $a(n)$ mit

$$a(n) \ll (d(n))^C \tag{2.2.3}$$

schreiben wir

$$B(s, \chi) = B(s, \chi, \beta_1, y') = \sum_{y^{\beta_1} < n \leqq y'} \frac{\chi(n)\, a(n)}{n^s} . \tag{2.2.4}$$

Lemma 4. *Bezeichne $A_1(\alpha, T)$ die Anzahl der $\chi = \chi^* \bmod k, k \leqq y$, mit*

$$|B(s, \chi)| \geqq 1 \quad \textit{für ein} \quad s \in \mathfrak{G}(\alpha, T) . \tag{2.2.5}$$

Dann gilt

$$A_1(\alpha, T) \ll y^{\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}}\, l_1^C, \quad \textit{falls} \quad y' \leqq y^2 , \tag{2.2.6}$$

$$A_1(\alpha, T) \ll y^{6\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\, l_1^{2r+C}, \quad \textit{falls} \quad y' \leqq y l_1^r \quad (C = C(\beta_1)) . \tag{2.2.7}$$

Beweis zu (2.2.6). Für $\sigma \geqq 2$ ist offenbar $|B(s, \chi)| < 1$. Wir dürfen also $\alpha \leqq \sigma \leqq 2$ annehmen.

Wenn wir das Intervall $(y^{\beta_1}, y']$ in $\ll \ln y$ Intervalle $(z_\nu, z_{\nu+1}]$ $(z_{\nu+1} \leqq 2 z_\nu)$ und das Rechteck $\alpha \leqq \sigma \leqq 2$, $T \leqq t \leqq T+1$ in $\ll \ln^2 y$ Rechtecke $\mathfrak{R}_\mu$ mit Seitenlängen $\leqq \dfrac{1}{\ln y}$ einteilen, so folgt wie in Wolke [15], Lemma 8

$$A_1(\alpha, T) \leqq \sum_{\nu, \mu, \varrho} A_{\nu, \mu, \varrho} \qquad (0 \leqq \varrho \leqq \ln^4 y) . \tag{2.2.8}$$

Dabei ist $A_{\nu, \mu, \varrho}$ die Anzahl der χ mit

$$\begin{aligned} |B_\nu^{(\varrho)}(s_\mu, \chi)| = \left| \sum_{z_\nu < n \leqq z_{\nu+1}} (-1)^\varrho (\ln n)^\varrho \frac{a(n)\, \chi(n)}{n^{s_\mu}} \right| \\ > (\ln z_{\nu+1})^{\varrho - 2} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

(s_μ ist ein fester Punkt aus $\mathfrak{R}_\mu$).

Für beliebiges ν, μ und ϱ schätzen wir $A_{\nu,\mu,\varrho}$ ab. Sei

$$d_1 = \left[\frac{2\ln y}{\ln z_\nu}\right] + 1, \qquad d_2 = d_1 - 1 \qquad (\text{also } d_1, d_2 \ll 1). \tag{2.2.10}$$

Dann erhält man wie in [15], Lemma 8 mit Lemma 3

$$A_{\nu,\mu,\varrho} \ll (\ln z_\nu)^{(-2d_j)(\varrho-2)} (y^2 + z_\nu^{d_j}) \cdot \sum_{z_\nu^{d_j} < n \leqq z_{\nu+1}^{d_j}} \frac{|a_j^2(n)|}{n^{2\alpha}} \qquad (j = 1, 2).$$

Dabei ist wegen (2.2.2) und (2.2.10)

$$a_j(n) = \sum_{\substack{n = n_1 \ldots n_{d_j} \\ z_\nu < n_l \leqq z_{\nu+1};\, l = 1, \ldots, d_j}} (-1)^{\varrho d_j} (\ln n_1)^\varrho \ldots (\ln n_{d_j})^\varrho \cdot a(n_1) \ldots a(n_{d_j})$$
$$\ll (\ln z_{\nu+1})^{\varrho d_j} (d(n))^C$$

und

$$\begin{aligned}\sum_n |a_j(n)|^2 &\ll (\ln z_{\nu+1})^{2\varrho d_j} \sum_{n \leqq z_{\nu+1}^{d_j}} (d(n))^C \\ &\ll (\ln z_{\nu+1})^{2\varrho d_j} z_\nu^{d_j} (\ln y)^C .\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Aus den letzten Zeilen folgt

$$A_{\nu,\mu,\varrho} \ll l_1^C \min(z_\nu^{2d_1(1-\alpha)} \cdot y^2 z_\nu^{d_2(1-2\alpha)}). \tag{2.2.12}$$

Sei

$$z_\nu \in I_l = \left[y^{\frac{2}{l+1}}\ y^{\frac{2}{l}}\right] \qquad (l = 1, 2, \ldots).$$

Hier ist

$$d_1 = d_2 + 1 = l + 1 .$$

Innerhalb von I_l wächst $z_\nu^{2d_1(1-\alpha)}$ mit z_ν, während $y^2 z_\nu^{d_2(1-2\alpha)}$ fällt. Das Minimum wird am größten, wenn beide Ausdrücke übereinstimmen, d. h. für

$$z_\nu = y^{2(d_2 + 2(1-\alpha))^{-1}} . \tag{2.2.13}$$

(Aufgrund von $\frac{1}{2} \leqq \alpha < 1$ liegt dieser Wert in I_l.) Für jedes l ist daher das Minimum in (2.2.12)

$$\leqq y^{\frac{4(d_2+1)(1-\alpha)}{d_2 + 2(1-\alpha)}} . \tag{2.2.14}$$

Der Exponent von y ist eine in d_2 fallende Funktion. Wegen $d_2 \geqq 1$ erhält man daher aus (2.2.12)

$$A_{\nu,\mu,\varrho} \ll l_1^C y^{\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}} . \tag{2.2.14}$$

Summieren wir diese Ungleichung gemäß (2.2.8) über ν, μ und ϱ, so ergibt sich die Behauptung (2.2.6).

Zu (2.2.7): Wir verfahren in der gleichen Weise, nur setzen wir statt (2.2.10)

$$d_1 = \left[\frac{2\ln y_1}{\ln z_\nu}\right] + 1, \qquad d_2 = d_1 - 1, \qquad y_1 = y l_1^r .$$

Wegen $y' \leqq y_1$ ist hier $d_2 \geqq 2$. In (2.2.12) und den folgenden Zeilen steht nun y_1 an Stelle von y. Setzen wir in (2.2.14) $d_2 = 2$, so folgt wegen

$$\frac{4(d_2-1)(1-\alpha)}{d_2+2(1-\alpha)} \leqq 6\,\frac{1-\alpha}{2-\alpha} \leqq 2$$

die Behauptung (2.2.7).

Im nächsten Lemma behandeln wir einen Spezialfall von (2.2.6).

Lemma 5. *Gelte zusätzlich zu* (2.2.3)

$$a(n)=0 \quad \textit{für} \quad p(n) > R_1 = \exp\left(l_1^{\frac{1}{100}}\right)$$

und bezeichne $A_2(\alpha, T)$ *die Anzahl der* $\chi^* \bmod k,\, k \leqq y$ *mit*

$$B(s,\chi) = \sum_{y<n\leqq y^2} \frac{a(n)\,\chi(n)}{n^s} \gg \exp\left(-(\ln y)^{\frac{24}{25}}\right) \tag{2.2.15}$$

$$\textit{für ein} \quad s \in \mathfrak{G}(\alpha, T)\,.$$

Dann gilt für $y \geqq \exp\left(l_1^{\frac{1}{4}}\right)$

$$A_2(\alpha, T) \ll y^{\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}} \tag{2.2.16}$$

Beweis. Für $y \leqq z_\nu \leqq y^2$ ist (s. (2.2.11))

$$\sum_n |a_j(n)|^2 \ll (\ln z_{\nu+1})^{\varrho d_j} \sum_{\substack{n \leqq z_{\nu+1}^{d_j} \\ p(n) \leqq R_1}} d^C(n)\,.$$

Die letzte Summe läßt sich nach Lemma 2 abschätzen durch

$$\ll l_1^C z_\nu^{d_j} \exp\left(-\tfrac{1}{2} u \ln u\right)$$

mit

$$u = \frac{\ln z_\nu^{d_j}}{\ln R_1} \geqq \frac{\ln y}{l_1^{\frac{1}{100}}} \geqq \frac{\ln y}{(\ln y)^{\frac{1}{25}}} = (\ln y)^{\frac{24}{25}}\,,$$

also

$$\sum_n |a_j(n)|^2 \ll \ln^{\varrho d_j} z_{\nu+1} \cdot z_\nu^{d_j} \exp\left(-3(\ln y)^{\frac{24}{25}}\right).$$

Der Rest ergibt sich wie im Beweis zu Lemma 4, (2.2.6).

Im Fall, daß $B(s,\chi)$ nicht bei y^{β_1}, sondern bereits bei 1 beginnt, sind die Aussagen schwächer. Gelte

$$a(n) \ll d_C(n) \tag{2.2.17}$$

und sei

$$B_1(s,\chi) = \sum_{n \leqq y^2} \frac{a(n)\,\chi(n)}{n^s}\,. \tag{2.2.18}$$

$A_3(\alpha, T)$ bzw. $A_4(\alpha, T)$ bezeichne die Anzahl der χ^* mod k, $k \leqq y$ mit

$$|B_1(s,\chi)| > \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right) \quad \text{für ein} \quad s \in \mathfrak{G}(\alpha, T) \tag{2.2.19}$$

bzw.

$$|L(s,\chi)| > \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right) \quad \text{für ein} \quad s \in \mathfrak{G}(\alpha, T)\,. \tag{2.2.20}$$

Wir zeigen

Lemma 6.

$$A_i(\alpha, T) \ll y^{\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}} \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right), \quad \textit{falls} \quad |T| \ll y^{\frac{1}{4}} \quad (i = 3, 4)\,. \tag{2.2.21}$$

Beweis zu der Ungleichung mit A_3: Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqq \exp((\ln y)^{\frac{3}{4}})} \frac{a(n)\,\chi(n)}{n^s} &\ll \sum_{n \leqq \exp((\ln y)^{\frac{3}{4}})} \frac{d^C(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \\ &\ll \exp\left((\ln y)^{\frac{3}{4}}\right)\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

brauchen wir uns nur mit der Summe von $\exp\left((\ln y)^{\frac{3}{4}}\right)$ bis y^2 zu befassen. Dies verläuft in gleicher Weise wie in Lemma 4. Wir definieren $A_{\nu,\mu,\varrho}$ wie in (2.2.9), wobei z_ν allerdings zwischen $\exp\left((\ln y)^{\frac{3}{4}}\right)$ und y^2 liegen darf. Wegen

$$\sum_{n = n_1 \dots n_{d_j}} d_C(n_1) \dots d_C(n_{d_j}) \leqq d_{C d_j}(n)$$

erhalten wir hier in Analogie zu (2.2.11)

$$\sum_n |a_j(n)|^2 \ll (\ln z_{\nu+1})^{2\varrho d_j} C^{d_j} \sum_{n \leqq z_{\nu+1}^{d_j}} (d_{C d_j}(n))^2 \quad \text{mit} \quad d_j \ll (\ln y)^{\frac{1}{4}}\,. \tag{2.2.23}$$

Die letzte Summe ist nach Lemma 1

$$\ll z_{\nu+1}^{d_j} (C \ln y)^{(C d_j)^2} \ll z_{\nu+1}^{d_j} (\ln y)^{C (\ln y)^{\frac{1}{2}}} \leqq z_{\nu+1}^{d_j} \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{7}}\right).$$

(2.2.23) und die letzte Zeile führen in ähnlicher Weise wie in Lemma 4 zur behaupteten Ungleichung.

Die zweite Aussage des Lemmas folgt aus der ersten und aus

$$\begin{aligned}L(s,\chi) &= \sum_{n \leqq y'} \frac{\chi(n)}{n^s} + O\left((|T|+1) \int_{y'}^{\infty} u^{-\sigma-1} \left|\sum_{n \leqq u} \chi(n)\right| du\right) \\ &= \sum_{n \leqq y'} \frac{\chi(n)}{n^s} + O(\ln y) \qquad \left(y' = y^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}$$

Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir einen Dichtesatz über die Nullstellen der L-Reihen. Die Abschätzung von Montgomery [7] scheint für unsere Zwecke die günstigste zu sein. Die T-Abhängigkeit, worauf dort Wert gelegt wird, spielt bei uns keine entscheidende Rolle. Wir benutzen Montgomerys Satz in folgender abgeschwächter Form.

Lemma 7. *Sei $A_5(\alpha, T)$ die Anzahl der χ^* mod k, $k \leqq y$ mit*

$$L(s, \chi) = 0 \quad \textit{für ein} \quad s \in \mathfrak{G}(\alpha, T).$$

Dann gilt

$$A_5(\alpha, T) \ll (|T|+1)^2 (\ln y)^{13} y^{\frac{6(1-\alpha)}{2-\alpha}}.$$

3. Beweis zu Satz 1, (1.1.3)

Unser Ziel ist zunächst (1.1.3). A_1 und A_2 denken wir uns in Abhängigkeit von A, D_1, D_2 und τ hinreichend groß gewählt. Eine explizite Darstellung von A_1 und A_2 könnte aus dem Beweis entnommen werden.

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Das Ergebnis der einzelnen Schritte ist jeweils zu Beginn der Abschnitte vermerkt.

3.1. Wir zeigen zuerst durch elementare Schlüsse, daß es ausreicht, (1.1.3) *für die einfacheren, in* (3.1.3) *und* (3.1.4) *definierten Funktionen f_1 und f_2 zu beweisen (s.* (3.1.6)*).*

Sei $\mathfrak{A}_1$ die Menge der $p \in (R_1, x]$ $\left(R_1 = \exp(l_1^{\frac{1}{100}})\right)$ mit

$$|f(p) - \tau| > l_1^{-B_2}. \tag{3.1.1}$$

Dann folgt aus (1.1.2) für jedes $y \in (R_1, x)$

$$\sum_{\substack{p \leqq y \\ p \in \mathfrak{A}_1}} 1 \leqq l_1^{B_2} \sum_{p \leqq y} |f(p) - \tau| \ll l_1^{B_2} y (\ln y)^{-A_1} \ll y l_1^{-B_4}. \tag{3.1.2}$$

Wir definieren zwei multiplikative Funktionen f_1 und f_2 durch

$$f_1(p^\nu) = \begin{cases} \tau, & \text{falls} \quad \nu = 1 \quad \text{und} \quad p \in (R_1, x], \\ f(p^\nu) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$f_2(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p \notin \mathfrak{A}_1, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Für $k \leqq Q$ und $(k, l) = 1$ (im folgenden sollen k und l stets diese Bedingungen erfüllen), sei

$$\Delta(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} f(n) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1}} f(n). \tag{3.1.5}$$

$\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ erklären wir entsprechend mit $f_1(n)$ bzw. $f_2(n)$.

Es sei bereits bewiesen

$$\sum_{k \leqq Q} \max_{(k,l)=1} |\Delta^{(\nu)}(x, k, l)| \ll \frac{x}{l_1^{B_3}} \quad (\nu = 1, 2). \tag{3.1.6}$$

Σ' bzw. Σ'' bedeute in diesem Abschnitt Summation über n mit

$$d(n) \leqq l_1^{B_2} \quad \text{bzw.} \quad d(n) > l_1^{B_2}. \tag{3.1.7}$$

(Die erste Ungleichung impliziert insbesondere $\nu(n) \ll l_2$.)

Aus (1.1.1) folgt

$$f(n), f_\nu(n) \ll (d(n))^C \qquad (\nu = 1, 2) \tag{3.1.8}$$

und somit

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} |f(n)| \ll l_1^{-B_2} \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} (d(n))^C.$$

Die letzte Summe läßt sich abschätzen durch

$$\ll \frac{x}{k} l_1^C (d(k))^C$$

(s. Siebert, Wolke [12], Lemma 5).

Man erhält

$$\max\left(\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}}'' |f(n)|, \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1}}'' |f(n)| \right) \ll \frac{x}{k} l_1^{C-B_2} (d(k))^C. \tag{3.1.9}$$

Entsprechendes zeigt man für f_1 und f_2. (3.1.9) bedingt

$$\Delta(x,k,l) - \Delta^{(1)}(x,k,l)$$

$$\ll \frac{x}{k} l_1^{C-B_2} (d(k))^C + \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}}' |f(n) - f_1(n)| + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1}}' |f(n) - f_1(n)|$$

$$= \frac{x}{k} l_1^{C-B_2} (d(k))^C + \Sigma_1' + \Sigma_2'. \tag{3.1.10}$$

Wir befassen uns mit Σ_1'. Σ_2' läßt sich mit ähnlichen Argumenten, aber wesentlich einfacher abschätzen.

Die in Σ_1' erfaßten Zahlen teilen wir in drei Teilmengen auf:

A) Für kein $p > R_1$ gilt $p \mid n$ und $p^2 \nmid n$;

B) $n \not\equiv 0(p_1)\ \forall\, p_1 \in \mathfrak{A}_1$, aber $p_2 \mid n$ und $p_2^2 \nmid n$ für mindestens ein $p_2 \in (R_1, x] \setminus \mathfrak{A}_1$;

C) $n \equiv 0(p)$ für mindestens ein $p \in \mathfrak{A}_1$.

$\Sigma_{1,B}'$ und $\Sigma_{1,C}'$ seien die entsprechenden Summen. Aufgrund von (3.1.3) ist $f(n) = f_1(n)$ für $n \in$ A), also

$$\Sigma_1' \leqq \Sigma_{1,B}' + \Sigma_{1,C}'. \tag{3.1.11}$$

Zu $\Sigma_{1,B}'$: Wir setzen $b(n) = \prod\limits_{\substack{p \mid n \\ p \in (R_1, x],\, p^2 \nmid n}} p.$

Für $p|b(n)$ gilt hier das Gegenteil von (3.1.1) und daher im Fall $\tau \neq 0$ mit (3.1.7)

$$\begin{aligned} f(b(n)) &= \prod_{p|b(n)} f(p) = \prod_{p|b(n)} (\tau + O(l_1^{-B_2})) \\ &= f_1(b(n))\{1 + O(l_2 l_1^{-B_2})\} \\ &= f_1(b(n)) + O(l_1^{-B_1}). \end{aligned}$$

Das gleiche erhält man im Fall $\tau = 0$. Da für die in $\Sigma'_{1,B}$ erfaßten n

$$\left(\frac{n}{b(n)} \cdot b(n)\right) = 1 \quad \text{sowie} \quad f\left(\frac{n}{b(n)}\right) = f_1\left(\frac{n}{b(n)}\right)$$

gilt, haben wir

$$f(n) - f_1(n) \ll f\left(\frac{n}{b(n)}\right) l_1^{-B_1} \ll l_1^{-B_1}(d(n))^C$$

und somit

$$\Sigma'_{1,B} \ll l_1^{-B_1} \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} (d(n))^C \ll x l_1^{-B_1+C} \frac{(d(k))^C}{k}. \tag{3.1.12}$$

In $\Sigma'_{1,C}$ schätzen wir $|f(n) - f_1(n)|$ trivial durch $\ll (d(n))^C \leqq l_1^{CB_2}$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} \Sigma'_{1,C} &\leqq l_1^{CB_2} \sum_{\substack{n \leqq x,\, n \equiv l(k) \\ n \equiv 0(p),\, p \in \mathfrak{A}_1}} 1 \\ &\leqq l_1^{CB_2} \left| \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k) \\ n \equiv 0(p),\, p \in \mathfrak{A}_1}} 1 - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1 \\ n \equiv 0(p),\, p \in \mathfrak{A}_1}} 1 \right| \\ &\quad + \frac{l_1^{CB_2}}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x,\, (n,k)=1 \\ n \equiv 0(p),\, p \in \mathfrak{A}_1}} 1. \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist wegen (3.1.2)

$$\ll x \sum_{p \in \mathfrak{A}_1} \frac{1}{p} \leqq x \sum_{\substack{\nu \\ R_{1/2} < 2^\nu = y \leqq x}} y^{-1} \sum_{p \in \mathfrak{A}_1,\, p \leqq y} 1 \ll \frac{x}{l_1^{B_4 - 1}}.$$

Mit (3.1.4) und elementarer Rechnung folgt aus den letzten Zeilen

$$\begin{aligned} \Sigma'_{1,C} &\ll l_1^{CB_2} \left| \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} 1 - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1}} 1 \right| \\ &\quad + l_1^{CB_2} |\Delta^{(2)}(x,k,l)| + \frac{x}{k} l_1^{CB_2 + 3 - B_4} \\ &\ll l_1^{CB_2} |\Delta^{(2)}(x,k,l)| + \frac{x}{k l_1^{A+1}}. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

(3.1.10), (3.1.11), (3.1.13), die Ungleichung $\Sigma_2' \ll \frac{x}{k l_1^{A+1}}$, sowie (3.1.6) zusammen ergeben

$$\begin{aligned}\sum_{k \leqq Q} \max_{(k,l)=1} |\Delta(x,k,l)| &\ll \sum_{k \leqq Q} \max_{(k,l)=1} |\Delta^{(1)}(x,k,l)| \\ &+ \sum_{k \leqq Q} \left\{ \max_{(k,l)=1} (\Sigma_1' + \Sigma_2')(x,k,l) + \frac{x}{k} l_1^{-A-1} \right\} \\ &\ll \frac{x}{l_1^A} + \sum_{k \leqq Q} l_1^{CB_2} \max_{(k,l)=1} |\Delta^{(2)}(x,k,l)| \ll \frac{x}{l_1^A},\end{aligned}$$

womit das Ziel dieses Abschnittes erreicht ist.

3.2. Fortan stehe f für eine der beiden Funktionen f_1 oder f_2. (1.1.1) gilt für beide (evtl. müssen D_1 und D_2 zu 1 vergrößert werden). (1.1.2) gilt für f_1 mit den gleichen Konstanten, für f_2 mit $\tau = 1$ und $A_1 - B_2$ statt A_1.

In diesem Abschnitt sollen die in (1.1.3) *abzuschätzende Summe mit Riesz-Mitteln analytisch dargestellt und erste, schon in* [12] *und* [15] *vorgenommene Umformungen durchgeführt werden.*

Mit

$$R = 9 + |[\mathrm{Re}\,\tau]|. \tag{3.2.1}$$

schreiben wir

$$\Delta_R(x,k,l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l(k)}} f(n) \ln^R\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,k)=1}} f(n) \ln^R\left(\frac{x}{n}\right). \tag{3.2.2}$$

$$S = \sum_{k \leqq Q} \max_{(k,l)=1} |\Delta_R(x,k,l)| \tag{3.2.3}$$

und

$$S' = \sum_{\substack{k \leqq Q \\ \nu(k) \leqq B_5 l_2}} \max_{(k,l)=1} |\Delta_R(x,k,l)|. \tag{3.2.4}$$

Wie in Teil 3.2 sieht man

$$S \ll S' + \frac{x}{l_1^{B_4}}. \tag{3.2.5}$$

Im folgenden werde daher $\nu(k) \leqq B_5 l_2$ vorausgesetzt.

Sei $\chi = \chi \bmod k$ ein beliebiger Charakter. Für $\sigma > 1$ setzen wir

$$F(s,\chi) = \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{\chi(p) f(p)}{p^s} + \cdots\right) \prod_{p > x} \left(1 + \frac{\tau \chi(p)}{p^s}\right). \tag{3.2.6}$$

Dann zeigt man ähnlich wie in [12], Lemma 1

$$F(s,\chi) = L^\tau(s,\chi)\, G(s,\chi)\, H(s,\chi) \qquad (\sigma > \tfrac{1}{2}) \tag{3.2.7}$$

mit

$$G(s,\chi) = \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{(f(p) - \tau)\chi(p)}{p^s}\right). \tag{3.2.8}$$

$\sim H(s,\chi)$ ist eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ analytische Funktion mit

$$H(s,\chi) \ll \prod_p \left(1 + \frac{C}{p^{2\sigma}}\right) \ll (\zeta(2\sigma))^C \ll l_1^C, \quad \text{falls} \quad \sigma \geqq \frac{1}{2} + l_1^{-1}. \tag{3.2.9}$$

Ist $\chi^* = \chi^* \bmod k^* (k^* \mid k)$ der χ erzeugende primitive Charakter, dann sieht man wie in [12] mit (1.1.1)

$$F(s,\chi) = F(s,\chi^*)\, H(s,\chi^*,k). \tag{3.2.10}$$

wobei

$$H(s,\chi^*,k) \ll (\nu(k))^C \ll l_1^{CB_5}, \quad \text{falls} \quad \sigma \geqq \tfrac{1}{2}. \tag{3.2.11}$$

Trivialerweise erhält man

$$F(s,\chi) \ll l_1^C \qquad (\sigma \geqq 1 + l_1^{-1}). \tag{3.2.12}$$

Die Darstellung von S' durch Integrale erfolgt wie in [12], ebenso das Ordnen nach primitiven Charakteren und das Abschneiden der Integrale.

$$\begin{aligned} S \ll l_2 \sum_{\substack{\mu \geqq 1 \\ y = 2^\mu \leqq 2Q}} y^{-1} \sum_{k \in \left(\frac{y}{2}, y\right]}' \sum_{\chi \bmod k}^* \sum_{k_1 \leqq \frac{Q}{k}}' \frac{1}{k_1} \\ \cdot \left| \int_{\alpha - iy_1}^{\alpha + iy_1} \frac{x^s}{s^{R+1}} F(s,\chi)\, H(s,\chi,kk_1)\, ds \right| + \frac{x}{l_1^{B_4}}. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Dabei ist

$$y_1 = \begin{cases} \exp(l_1^{\frac{1}{4}}), & \text{falls} \quad y \leqq \exp(l_1^{\frac{1}{4}}), \\ y^{\frac{1}{4}}, & \text{falls} \quad k \in \left(\frac{y}{2}, y\right], \ \exp l_1^{\frac{1}{4}} < y \leqq 2Q. \end{cases}$$

$\sum\limits_k'$ bedeutet Summation über k mit $\nu(k) \leqq B_5 l_2$, $\alpha = 1 + l_1^{-1}$.

3.3. Im nächsten Schritt zeigen wir, daß bei einem zulässigen Fehler von $\ll \frac{x}{l_1^{B_4}}$ *in den Integralen in* (3.2.13)

$$G(s,\chi) = \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{f(p) - \tau}{p^s} \chi(p)\right)$$

ersetzt werden darf durch

$$G_1(s,\chi) = \sum_{n \leqq R_2} \frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s} \tag{3.3.1}$$

mit

$$g(n) = \begin{cases} \mu^2(n) \prod_{p \mid n} (f(p) - \tau), & \textit{falls} \quad p(n) \leqq x, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

und

$$R_2 = \max\left(y^2, \exp\left(l_1^{\frac{1}{4}}\right)\right), \qquad \chi = \chi \bmod k, \ k \in \left(\frac{y}{2}, y\right]:$$

Wir setzen

$$\mathfrak{A}_2 = \{p \in (R_3, x], g(p) \neq 0\}, \qquad R_3 = \exp\left(l_1^{\frac{1}{8}}\right). \tag{3.3.3}$$

Dann folgt für $z' \in (R_4, x]$ aus (1.1.2), (3.1.3) und (3.1.4)

$$\sum_{p \leqq z', p \in \mathfrak{A}_2} 1 \ll \frac{z'}{l_1^{B_9}}. \tag{3.3.4}$$

Für ein typisches y aus (3.2.13) schreiben wir

$$U = U(s, y) = \frac{1}{y} \sum_{\frac{y}{2} < k \leqq y} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{n > R_2} \frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s} \right|. \tag{3.3.5}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 3 erhalten wir für $\sigma = 1 + l_1^{-1}$ $(I_j = (R_2 e^j, R_2 e^{j+1}])$

$$\begin{aligned} U &\leqq \sum_{j \geqq 0} \left(\sum_{k \leqq y} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{n \in I_j} \frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \sum_{j \geqq 0} \left((R_2 e^j)^{-1} \sum_{n \in I_j} |g(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j \geqq 0} \left((R_2 e^j)^{-1} U_j \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{bzw.} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Im Fall $z = R_2 e^j \geqq x^{l_1^2}$ schätzen wir $g(n)$ trivial ab durch $\ll d^C(n)$ und bekommen mit Lemma 2

$$\begin{aligned} U_j &\ll \sum_{\substack{n \leqq ez \\ p(n) \leqq x}} d^C(n) \ll l_1^C z \exp(-\tfrac{1}{2} u \ln u) + z^{\frac{3}{4}} \\ &\ll l_1^{-2B_6} \exp\left(-2(\ln z)^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

da

$$u = \frac{\ln z}{\ln x} \geqq (\ln z)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies führt zu

$$\sum_{\substack{j \\ z = R_2 e^j \geqq x^{l_1^2}}} (z^{-1} U_j)^{\frac{1}{2}} \ll l_1^{-B_6} \sum_{j \geqq 1} \exp\left(-j^{\frac{1}{2}}\right) \ll l_1^{-B_6}. \tag{3.3.7}$$

Sei nun $R_2 \leqq z = R_2 e^j \leqq x^{l_1^2}$. Offenbar gilt

$$U_j \leqq (\Sigma_{j,A} + \cdots + \Sigma_{j,D}) |g(n)|^2$$

mit den Summationsbedingungen $n \in (z, ez]$ und

A) $\nu(n) > B_8 l_2$,

B) $p(n) \leqq R_3$,

C) $\nu(n) \leqq B_8 l_2$; $n \equiv 0(p)$, $p \in \mathfrak{A}_2$,

D) $n \equiv 0(p)$, $p \in (R_3, x] \setminus \mathfrak{A}_2$.

$\Sigma_{j,A}$ schätzen wir wie in 3.1, $\Sigma_{j,B}$ ähnlich wie oben mit Lemma 2 durch $\ll \frac{z}{l_1^{3B_6}}$ ab.

Bei $\Sigma_{j,C}$ verwenden wir (3.3.4):

$$\begin{aligned}\Sigma_{j,C} &\ll l_1^{CB_8} \sum_{\substack{n \leqq ez \\ n \equiv 0(p),\, p \in \mathfrak{A}_2}} 1 \\ &\ll z l_1^{CB_8} \sum_{\substack{\nu \\ R_2 < 2^\nu = z' \leqq 2ez}} z'^{-1} \sum_{\substack{p \in \mathfrak{A}_2 \\ p \leqq z'}} 1 \\ &\ll z l_1^{-3B_6}.\end{aligned}$$

$\Sigma_{j,D}$ verschwindet.

Durch Zusammenfassung der letzten Zeilen sieht man

$$\sum_{\substack{j \\ z = R_2 e^j \leqq x^{l_1^2}}} (z^{-1} U_j)^{\frac{1}{2}} \ll l_1^{-B_6}. \tag{3.3.8}$$

(3.3.6), (3.3.7) und (3.3.8) implizieren

$$U(s, y) \ll l_1^{-B_6}, \quad \text{falls} \quad \sigma = 1 + l_1^{-1}. \tag{3.3.9}$$

Die Behauptung dieses Abschnittes erhält man nun rasch aus (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) und (3.3.9).

3.4. *Wir zeigen als nächstes, daß der Beitrag der* $k \leqq R_4 = \exp\left(l_1^{\frac{1}{4}}\right)$ *zu* (3.3.13) *sich durch* $\ll \frac{x}{l_1^{B_4}}$ *abschätzen läßt.*

Wir beginnen mit denjenigen $\chi(\chi^2 = \chi_0)$, die evtl. eine Siegel-Nullstelle besitzen. Nach dem Satz von Siegel (s. Prachar [9], IV) sind deren Moduln $\equiv 0(k_0)$, wobei $k_0 > l_1^{B_{10}}$ gewählt werden darf. Da (3.2.12) richtig bleibt, wenn wir $G(s, \chi)$ durch $G_1(s, \chi)$ (s. 3.3.1) ersetzen, erhalten wir mit (3.2.11) und (3.2.12), wenn Σ_s den Anteil dieser χ an (3.2.13) bezeichnet,

$$\begin{aligned}\Sigma_s &\ll \sum_{\substack{k \leqq R_4 \\ k \equiv 0(k_0)}} k^{-1} l_1^{CB_5 + C} x \int_{\sigma = 1 + l_1^{-1}} \frac{|ds|}{|s|^{R+1}} \\ &\ll \frac{x}{l_1^{B_4}}.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Sei nun $\chi = \chi^* \bmod k$, $k \leqq R_4$ für den Rest dieses Abschnittes ein nicht in Σ_s gezählter Charakter und gelte

$$\sigma \geqq \sigma_0 = 1 - l_1^{-\frac{1}{3}}, \quad |t| \leqq \exp\left(l_1^{\frac{1}{4}}\right). \tag{3.4.2}$$

Nach [9], IV, Satz 6.9 ist $L(s,\chi)$ im Bereich (3.4.2) von Null verschieden, $L^\tau(s,\chi)$ ist dort also eine eindeutige analytische Funktion. Im Falle $\operatorname{Re}\tau \geqq 0$ haben wir (s. [9], IV, Satz 5.4)

$$|L^\tau(s,\chi)| \ll \exp\left(l_1^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.4.3}$$

Für $\operatorname{Re}\tau < 0$ erhält man wie in [9], S. 71 mit

$$L^{-1}(1+l_1^{-1}+it,\chi) \ll l_1 \quad \text{und} \quad \frac{L'}{L}(s,\chi) \ll l_1^{\frac{1}{4}}$$

(s. [9], VI, Satz 7.1)

$$\log|L^{-1}(s,\chi)| \ll l_1^{\frac{1}{4}}$$

und daraus

$$|L^\tau(s,\chi)| \ll \exp\left(l_1^{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{falls} \quad \operatorname{Re}\tau < 0. \tag{3.4.4}$$

Schließlich schätzen wir für $\sigma \geqq \sigma_0$ $G_1(s,\chi)$ trivial ab durch $\ll \exp\, l_1^{\frac{1}{2}}$.

Aus (3.2.7), (3.2.11), (3.4.3), (3.4.4) und (3.4.1) folgt, daß der Beitrag der $k \leqq R_4$ zu (3.2.13)

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{k \leqq R_4} \sum_{\chi}{}^{*} \left(x R_4^{-R-1} l_1^{C+CB_5} + x^{\sigma_0} \exp\left(4 l_1^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \frac{x}{l_1^{C_4}} \\ &\ll \frac{x}{l_1^{B_4}} \end{aligned}$$

ist, was wir zeigen wollten.

3.5. *Der folgende Abschnitt bezieht sich nur auf den Fall* $\operatorname{Re}\tau < 0$. *Mit Hilfe einer Idee von Gallagher* [5] *führen wir diesen Fall – grob gesprochen – auf* $\operatorname{Re}\tau \geqq 0$ *zurück.*

Wir halten wieder ein $y \geqq \exp\left(l_1^{\frac{1}{4}}\right)$ fest. Für $\sigma > 1$ ist

$$(L(s,\chi))^\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)}{n^s} \chi(n) \tag{3.5.1}$$

mit

$$a_1(n) \ll d_C(n) \qquad (\text{das gleiche gilt für } a_2(n) \text{ und } a_3(n), \text{ s. u.}). \tag{3.5.2}$$

Es lassen sich komplexe Zahlen $a_2(n)$ angeben, so daß mit

$$M(s,\chi) = \sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{a_2(n)\,\chi(n)}{n^s} \tag{3.5.3}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} 1-(L(s,\chi))^{-\tau} M(s,\chi) &= \sum_{n > y l_1^{B_{11}}} \frac{a_3(n)\,\chi(n)}{n^s} \\ &= R(s,\chi) \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

erfüllt ist. Aus (3.5.4) folgt

$$L^{\tau} = L^{\tau} R^2 + \{2M - L^{-\tau} M^2\}. \tag{3.5.5}$$

Ähnlich wie in Gallagher [5] zeigt man mit (3.5.1), ..., (3.5.5), Lemma 3, (3.2.11) und (3.2.12), daß der Beitrag des Terms $L^{\tau} R^2$ zu (3.2.13) sich durch $\ll \frac{x}{l_1^{B_4}}$ abschätzen läßt.

Fassen wir die Ergebnisse der letzten vier Abschnitte zusammen, so erhalten wir als wichtiges Zwischenresultat

$$\begin{aligned} S \ll l_2 \sum_{\substack{\mu \\ \exp(l_1^{\frac14}) < 2^\mu = y \leqq 2Q}} y^{-1} \sum_{k \in \left(\frac{y}{2}, y\right)}' \sum_{\chi}^{*} \sum_{k_1 \leqq \frac{Q}{k}} \frac{1}{k_1} \\ \cdot \left| \int_{1 + l_1^{-1} - i y^{\frac14}}^{1 + l_1^{-1} + i y^{\frac14}} \frac{x^s}{s^{R+1}} F_1(s, \chi) H(s, \chi, k k_1) \, ds \right| + \frac{x}{l_1^{B_4}}. \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Dabei hat F_1 die Gestalt

$$\begin{aligned} F_1(s, \chi) = \sum_{n \leqq y^2} \frac{g(n) \chi(n)}{n^s} \\ \cdot \left\{ L^{\tau_1}(s, \chi) \left(\sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_1(n) \chi(n)}{n^s} \right)^2 + \sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_2(n) \chi(n)}{n^s} \right\} \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

mit

$$b_1, b_2(n) \ll d_C(n), \quad \tau_1 = \tau \quad \text{oder} \quad = -\tau, \quad \operatorname{Re} \tau_1 \geqq 0. \tag{3.5.8}$$

Die geschweifte Klammer reduziert sich im Fall $\operatorname{Re} \tau \geqq 0$ auf $L^{\tau}(s, \chi)$. Zur Def. von S, H und Σ' s. 3.2, zu $g(n)$ s. (3.3.1).

3.6. Es ist unser Ziel, die Integrale in (3.5.6) möglichst weit nach links zu verschieben. Wir werden die Integrationswege so wählen, daß auf ihnen und links davon $L(s, \chi)$ von Null verschieden und dem Betrage nach klein ist, und die Summen in (3.5.7) von kleiner Größenordnung sind. Wie Lemma 4 zeigt, ist es von Bedeutung, ob die Summen bis $y l_1^{B_{11}}$ oder bis y^2 laufen.

Wir beginnen mit dem Fall $f = f_1$ (s. (3.1.3)) (f_2 wird wegen $\tau(f_2) = 1$ leichter zu behandeln sein) und schreiben

$$\begin{aligned} F_1(s, \chi) &= \left(\sum_{n \leqq y} + \sum_{y < n \leqq y^2} \frac{g(n) \chi(n)}{n^s} \right) L^{\tau_1}(s, \chi) \left(\sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_1(n) \chi(n)}{n^s} \right)^2 \\ &\quad + \left(\sum_{n \leqq y} + \sum_{y < n \leqq y^2} \frac{g(n) \chi(n)}{n^s} \right) \sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_2(n) \chi(n)}{n^s} \qquad (3.6.1) \\ &= (F_{1,1} + F_{1,2})(s, \chi) + (F_{1,3} + F_{1,4})(s, \chi), \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

In diesem Abschnitt soll $F_{1,1}$ ausführlich diskutiert werden; $F_{1,3}$ behandelt man analog.

Wir halten wieder ein y aus (3.5.6) fest und setzen noch

$$b_3(n) = g(n), \qquad b_4(n) \equiv 1 . \tag{3.6.2}$$

χ bezeichne stets ein χ^* mod k, $k \in \left(\frac{y}{2}, y\right]$.

Die Anzahl der χ mit

$$\left.\begin{array}{ll} & L(s,\chi) = 0 \\ \text{oder} & \\ & \left|\displaystyle\sum_{y^{\beta_1} < n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}\right| > 1 \qquad (j = 1, 2) \\ \text{oder} & \\ & \left|\displaystyle\sum_{y^{\beta_1} < n \leqq y} \frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}\right| > 1 \qquad (j = 3, 4) \\ \multicolumn{2}{l}{\text{für ein } s \text{ mit } \sigma \geqq \frac{15}{16},\ |t| \leqq y^{\frac{1}{4}}} \end{array}\right\} \tag{3.6.3}$$

ist nach Lemma 4, (2.2.6) und Lemma 7

$$\ll y^{\frac{1}{4}}\, y^{\frac{6(1-\alpha)}{2-\alpha}}\, l_1^{2B_{11}+C} + y^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{6(1-\alpha)}{2-\alpha}}\, l_1^{13} \ll y^{\frac{8}{9}} \qquad \left(\alpha = \frac{15}{16}\right).$$

Wenn wir wie schon früher die zu diesen χ gehörenden Integrale in (3.5.6) trivial abschätzen, erhalten wir nach Summation über y einen Beitrag $\ll x l_1^{-B_4}$.

Erfülle also χ im folgenden das Gegenteil von (3.6.3), d. h.

$$L(s,\chi) \neq 0, \left|\sum_{y^{\beta_1} < n \leqq y \text{ bzw. } \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}\right| \leqq 1 \qquad (j = 1, \ldots, 4) \tag{3.6.4}$$

$$\text{für} \quad \sigma \geqq \frac{15}{16},\ |t| \leqq y^{\frac{1}{4}} .$$

Sei

$$\alpha_\nu = \tfrac{1}{2} + \nu l_1^{-1}\,; \qquad \nu = 1, \ldots, \nu_0\,; \tag{3.6.5}$$

$\left(\nu_0 \text{ ist der kleinste Index mit } \alpha_{\nu_0} > \frac{15}{16}\right)$ und

$$T_0 = y^{\frac{1}{4}},\ T_1 = \left[y^{\frac{1}{4}}\right],\ T_2 = T_1 - 1, \ldots, T_{\varrho-1} = -\left[y^{\frac{1}{4}}\right],\ T_\varrho = -y^{\frac{1}{4}} \tag{3.6.6}$$
$$\left(\varrho \ll y^{\frac{1}{4}}\right).$$

Für $1 \leqq \nu \leqq \nu_0$, $1 \leqq \mu \leqq \varrho$ bezeichne $\mathfrak{K}_{\nu,\mu}$ die Menge der χ mit der Eigenschaft:

A) $\nu = 1$. (3.6.4) gelte für alle s mit $\sigma \geqq \alpha_1$, $T_\mu \leqq t \leqq T_{\mu-1}$.

B) $\nu > 1$. (3.6.3) gelte für mindestens ein s mit $\alpha_{\nu-1} \leqq \sigma < \alpha_\nu$, $T_\mu \leqq t \leqq T_{\mu-1}$, aber (3.6.4) sei richtig für alle s mit $\sigma \geqq \alpha_\nu$, $T_\mu \leqq t \leqq T_{\mu-1}$.

Für jedes μ wird hierdurch eine Klasseneinteilung der betrachteten χ vorgenommen.

Zu jedem χ aus (3.6.4) erklären wir einen Integrationsweg $\mathfrak{C}(\chi)$ in folgender Weise: Zu jedem μ mit $1 \leqq \mu \leqq \varrho$ gibt es eindeutig ein $\nu = \nu(\chi, \mu)$, so daß $\chi \in \mathfrak{K}_{\mu,\nu}$. Wir setzen

$$s_{\mu,1}(\chi) = \alpha_\nu + i T_{\mu-1}, \qquad s_{\mu,2} = \alpha_\nu + i T_\mu .$$

$\mathfrak{C}(\chi)$ bezeichne den Polygonzug, welcher die Punkte

$$1 + l_1^{-1} + i y^{\frac{1}{4}},\ s_{1,1}(\chi),\ s_{1,2}(\chi),\ s_{2,1}(\chi), \ldots, s_{\varrho,1}(\chi),\ s_{\varrho,2}(\chi),\ 1 + l_1^{-1} - i y^{\frac{1}{4}}$$

miteinander verbindet.

Jedes $\mathfrak{C}(\chi)$ teilen wir in $\varrho + 2$ Teile auf.

$\mathfrak{C}_0(\chi)$ bzw. $\mathfrak{C}_{\varrho+1}(\chi)$ seien die Strecken $\left[s_{1,1}(\chi), 1 + l_1^{-1} + i y^{\frac{1}{4}}\right]$ bzw. $\left[s_{\varrho,2}(\chi), 1 + l_1^{-1} - i y^{\frac{1}{4}}\right]$. Für $1 \leqq \mu \leqq \varrho$ bestehe $\mathfrak{C}_\mu(\chi)$ aus der Strecke $[s_{\mu,1}(\chi), s_{\mu,2}(\chi)]$ sowie der Strecke $[s_{\mu-1,2}(\chi), s_{\mu,1}(\chi)]$, falls $\nu(\chi, \mu-1) < \nu(\chi, \mu)$, sowie der Strecke

$$[s_{\mu+1,1}(\chi), s_{\mu,2}(\chi)], \quad \text{falls} \quad \nu(\chi, \mu+1) < \nu(\chi, \mu) .$$

Aus der Konstruktion der Wege $\mathfrak{C}(\chi)$ folgt, daß auf dem Rande und im Innern des von $\mathfrak{C}(\chi)$ und der Strecke $\left[1 + l_1^{-1} + i y^{\frac{1}{4}}, 1 + l_1^{-1} - i y^{\frac{1}{4}}\right]$ begrenzten Gebietes (3.6.4) erfüllt ist. Insbesondere erhält man daraus, daß auf $\mathfrak{C}(\chi)$

$$\arg L(s, \chi) \ll 1 \tag{3.6.7}$$

gilt. Aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes dürfen wir in (3.5.6) die von $F_{1,1}$ herrührenden Integrale ersetzen durch diejenigen über $\mathfrak{C}(\chi)$, und wir erhalten mit (3.2.11), wenn $S_{1,1} = S_{1,1}(y)$ den Beitrag eines y bezeichnet,

$$S_{1,1} \ll l_1^{CB_5} \frac{1}{y} \sum_{k \in \left(\frac{y}{2}, y\right]} \sum_{\chi}{}^{*1} \left| \int_{\mathfrak{C}(\chi)} \frac{x^s}{s^{R+1}} F_{1,1}(s, \chi)\, ds \right| \tag{3.6.8}$$

(Σ^1 bedeutet Summation über die χ, wofür $\mathfrak{C}(\chi)$ erklärt ist.)

Auf $\mathfrak{C}(\chi)$ ist wegen (3.6.4) und der Polya-Vinogradovschen Ungleichung

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqq y^{\beta_1}}\frac{\chi(n)}{n^s}+\sum_{y^{\beta_1}<n\leqq y}\frac{\chi(n)}{n^s}+O\left((|t|+1)\,y^{\frac{1}{2}}\ln y\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\sum_{n\leqq y^{\beta_1}}\frac{\chi(n)}{n^s}+O(|t|+1)\,.$$

Mit (3.6.7), $\operatorname{Re}\tau_1\geqq 0$ und (3.2.1) folgt hieraus

$$\begin{aligned}|L^{\tau_1}(s,\chi)|&=|\exp((\ln|L(s,\chi)|+i\arg L(s,\chi))\,\tau_1|\\&=|L(s,\chi)|^{\operatorname{Re}\tau_1}\exp(-\operatorname{Im}\tau_1\cdot\arg L(s,\chi))\\&\ll\left(\left|\sum_{n\leqq y^{\beta_1}}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|+C(|t|+1)\right)^{[\operatorname{Re}\tau_1]+1}\\&\ll\left|\sum_{n\leqq y^{\beta_1}}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|^{[\operatorname{Re}\tau_1]+1}+(|t|+1)^{\mathrm{R}-8}\,.\end{aligned}\tag{3.6.9}$$

Ebenso gilt auf $\mathfrak{C}(\chi)$ wegen (3.6.4) für $j=1,2,3$

$$\sum_{n\leqq y\text{ bzw. }\leqq y l_1^{\beta_{11}}}\frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}=\sum_{n\leqq y^{\beta_1}}\frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}+O(1)\,.\tag{3.6.10}$$

Aus (3.6.1), (3.6.9) und (3.6.10) erhält man durch Zusammenfassen und Ausmultiplizieren

$$F_{1,1}(s,\chi)\ll(|t|+1)^{\mathrm{R}-8}\sum_{l=5}^{12}\left|\sum_{n\leqq y}\frac{b_j(n)\,\chi(n)}{n^s}\right|\qquad(s\in\mathfrak{C}(\chi))\tag{3.6.11}$$

mit

$$b_j(n)\ll(d(n))^C\qquad(j\leqq 12)\,.\tag{3.6.12}$$

Aus (3.6.8) und (3.6.11) ersieht man, daß es ausreicht, den Ausdruck

$$\begin{aligned}D_y=\frac{l_1^{CB_5}}{y}\sum_{\frac{y}{2}<k\leqq y}\ \sideset{}{^{*1}}\sum_{\chi}\ \int_{\mathfrak{C}(\chi)}\frac{x^\sigma(|t|+1)^{\mathrm{R}-8}}{|s|^{\mathrm{R}+1}}\,.\\\cdot\left|\sum_{n\leqq y}\frac{a(n)\,\chi(n)}{n^s}\right|\,|ds|\end{aligned}\tag{3.6.13}$$

(die $a(n)$ genügen (3.6.12)) abzuschätzen.

Zuerst behandeln wir die Integrale über die horizontalen Strecken $\mathfrak{C}_0(\chi)$ und $\mathfrak{C}_{\varrho+1}(\chi)$. Dort gilt

$$\sum_{n\leqq y}\frac{a(n)\,\chi(n)}{n^s}\ll y\,,$$

und daher ist ihr Beitrag zu D_y

$$\ll \frac{l_1^{CB_5}}{y} y^2 x y y^{-\frac{1}{4}(R+1)} y^{\frac{1}{4}(R-8)} \ll x y^{-\frac{1}{5}}. \tag{3.6.14}$$

Sei $\mathfrak{C}_{\nu,\mu}$ der offene rechteckige Weg, der die Punkte $\alpha_1 + iT_{\mu+1}$, $\alpha_\nu + iT_{\mu+1} = \alpha_\nu + iT_\mu$, $\alpha_1 + iT_\mu$ miteinander verbindet. Dann ist offenbar für $1 \leqq \mu \leqq \varrho$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y} \sum_{\frac{y}{2} < k \leqq y} \sum_\chi{}^{*1} \int_{\mathfrak{C}_\mu(\chi)} \frac{x^\sigma(|t|+1)^{R-8}}{|s|^{R+1}} \left| \sum_{n \leqq y} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s} \right| |ds| \qquad (3.6.15)\\ &\ll \frac{1}{y}(|T_\mu|+1)^{-4} \sum_{1 \leqq \nu \leqq \nu_0} x^{\alpha_\nu} \int_{\mathfrak{C}_{\nu,\mu}} \sum_{\chi \in \mathfrak{K}_{\nu,\mu}} \left| \sum_{n \leqq y} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s} \right| |ds|. \end{aligned}$$

Sei $m_1 = 4, m_2 = \frac{4}{3}$, also $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$. Mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 3 folgt für $s \in \mathfrak{C}_{\nu,\mu}$

$$\begin{aligned} U_{\nu,\mu}(s) &= \sum_{\chi \in \mathfrak{K}_{\nu,\mu}} \left| \sum_{n \leqq y} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s} \right| \\ &\leqq |\mathfrak{K}_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{m_2}} \left(\sum_{k \leqq y} \sum_\chi{}^{*} \left| \sum_{n \leqq y^2} \frac{a'(n)\chi(n)}{n^s} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m_1}} \qquad (3.6.16)\\ &\ll |\mathfrak{K}_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{m_2}} (y^2 l_1^C)^{\frac{1}{m_1}}. \end{aligned}$$

Lemma 4, (2.2.7) und Lemma 7 implizieren

$$|\mathfrak{K}_{\nu,\mu}| \ll l_1^{2B_{11}+C} y^{6\frac{1-\alpha_{\nu-1}}{2-\alpha_{\nu-1}}} + (|T_\mu|+1)^2 l_1^{13} y^{6\frac{1-\alpha_{\nu-1}}{2-\alpha_{\nu-1}}}.$$

Für $1 > \alpha \geqq \frac{1}{2}$ haben wir $6\frac{1-\alpha}{2-\alpha} = 2 + \frac{2(1-2\alpha)}{2-\alpha} \leqq 2 + \frac{4}{3}(1-2\alpha)$ und daher, wegen $|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| \leqq l_1^{-1}$,

$$|\mathfrak{K}_{\nu,\mu}| \ll (|T_\mu|+1)^2 l_1^{2B_{11}+C} y^{2+\frac{4}{3}(1-2\alpha_\nu)}.$$

Eingesetzt in (3.6.16), ergibt dies

$$\begin{aligned} U_{\nu,\mu}(s) &\ll (|T_\mu|+1)^2 l_1^{2B_{11}+C} y^{\frac{2}{m_2}+\frac{4}{3m_2}(1-2\alpha_\nu)+\frac{2}{m_1}} \\ &= (|T_\mu|+1)^2 l_1^{2B_{11}} y^{3-2\alpha_\nu}. \end{aligned}$$

(Hier sieht man, weshalb die Ungleichung (2.2.6) nicht ausreicht. Statt $-2\alpha_\nu$ im Exponenten erhielten wir $-(2-\varepsilon)\alpha_\nu$, was jedoch zu schwach ist.) Hieraus, aus (9.6.13), (9.6.14) und (9.6.15) folgt nun rasch die gewünschte Abschätzung.

$$D_y \ll x y^{-\frac{1}{5}} + \sum_{\mu} (|T_\mu| + 1)^{-2} \sum_{\nu} x^{\alpha_\nu} \frac{1}{y} y^{3-2\alpha_\nu} l_1^{2B_{11}}$$
$$\ll x y^{-\frac{1}{5}} + l_1^{2B_{11}} \sum_{\nu} x^{\alpha_\nu} y^{2(1-\alpha_\nu)}.$$

Wegen $y \leqq x^{1/2}$ ist in der letzten Summe der Term mit $\nu = 1$ am größten. Dank $\frac{x}{y^2} \geqq l_1^{2A_2}$ ist
$$x^{\alpha_1} y^{2(1-\alpha_1)} = x \left(\frac{x}{y^2}\right)^{1-\alpha_1} \leqq x l_1^{-A_2}$$
und damit
$$D_y \ll x l_1^{-B_{12}}. \tag{3.6.17}$$

Summieren wir dies über die $\ll l_1$ möglichen y-Werte, so erhalten wir mit der zu Beginn gemachten Bemerkung über die in (3.6.3) gezählten χ, daß die $F_{1,1}(s, \chi)$ zu (3.5.6) den Beitrag $\ll x l_1^{-B_4}$ liefern.

3.7. *In ähnlicher Weise wie in 3.6. behandeln wir $F_{1,2}(s,\chi)$ (s. (3.6.1)).*

Aufgrund der Definitionen für $f_1(n)$ und $g(n)$ (s. (3.1.3) und (3.3.2)) sieht man, daß die Voraussetzungen zu Lemma 5 erfüllt sind. Ähnlich wie in 3.6 definieren wir $\mathfrak{K}_{\nu,\mu}$ durch die Ungleichungen

$$\sum_{y<n\leqq y^2} \frac{g(n)\chi(n)}{n^s} \ll \exp\left(-(\ln y)^{\frac{24}{25}}\right), \quad L(s,\chi) \neq 0$$
und
$$\left|\sum_{n \leqq y l_1^{B_{11}}} \frac{b_j(n)\chi(n)}{n^s}\right| + |L(s,\chi)| \ll \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right) \quad (j = 1, 2) \tag{3.7.1}$$

an Stelle von (3.6.4). Ebenso $\mathfrak{C}(\chi)$, usw. Lemma 5, 6 und 7 implizieren

$$|\mathfrak{K}_{\nu,\mu}| \ll y^{\frac{8(1-\alpha_\nu)}{3-2\alpha_\nu}} \left(1 + \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right)\right) + y^{\frac{6(1-\alpha_\nu)}{2-\alpha_\nu}} (|T_\mu| + 1)^2 (\ln y)^{13}$$
$$\ll y^{3-2\alpha_\nu} \exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right) (|T_\mu| + 1)^2, \tag{3.7.2}$$

da für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$
$$\frac{6(1-\alpha)}{2-\alpha} \leqq \frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha} = 2 + \frac{2(1-2\alpha)}{3-2\alpha} \leqq 3 - 2\alpha$$
ist.

Aus (3.7.1) folgt für $s \in \mathfrak{C}(\chi)$

$$F_{1,2}(s,\chi) \ll \exp\left(-(\ln y)^{\frac{9}{10}}\right). \tag{3.7.3}$$

(3.7.2) und (3.7.3) bedingen, wenn $S_{1,2}(y)$ den Beitrag der $F_{1,2}$ für ein y bezeichnet,

$$\begin{aligned}
S_{1,2}(y) &\ll l_1^{CB_5}\cdot\frac{1}{y}\cdot\sum_{\frac{y}{2}<k\leqq y}\ \sum_{\chi}{}^{*1}\int_{\mathfrak{C}(\chi)}\frac{x^{\sigma}}{|s|^{R+1}}|F_{1,2}(s,\chi)|\,|ds| \\
&\ll l_1^{CB_5}\cdot\frac{1}{y}\cdot\exp\left(-(\ln y)^{\frac{9}{10}}\right)\sum_{\mu}(|T_\mu|+1)^{-4}\sum_{\nu}x^{\alpha_\nu}|\mathfrak{R}_{\nu,\mu}|+x\,l_1^{-B_4-1} \\
&\ll \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\ln y)^{\frac{9}{10}}\right)\exp\left((\ln y)^{\frac{4}{5}}\right)\sum_{\mu}(|T_\mu|+1)^{-2}\sum_{\nu}x^{\alpha_\nu}y^{2(1-\alpha_\nu)}+x\,l_1^{-B_4-1} \\
&\ll \exp\left(-(\ln y)^{\frac{4}{5}}\right)x^{\alpha_1}y^{2-2\alpha_1}+x\,l_1^{-B_4-1}\ll x\,l_1^{-B_4-1}\,.
\end{aligned}$$

Durch Summation über y sieht man, daß auch der Anteil der $F_{1,2}$ und ebenso der $F_{1,4}$ sich geeignet abschätzen läßt.

3.8. Schließlich betrachten wir (3.5.6) *im Fall* $f(n)=f_2(n)$ *(s.* (3.1.4)*).* Da hier $\tau=1$ ist, hat $F_1(s,\chi)$ die einfache Gestalt

$$F_1(s,\chi)=L(s,\chi)\sum_{n\leqq y^2}\frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s},\qquad |g(n)|\leqq 1\,.$$

Für jedes χ verschieben wir den Integrationsweg nach links bis $\sigma=\frac{1}{2}$. Auf den Horizontalen schätzen wir wieder trivial ab und erhalten

$$\begin{aligned}
S \ll x\,l_1^{-B_4}+x^{\frac{1}{2}}\,l_1^{CB_5}\sum_{y}y^{-1}\int_{\frac{1}{2}-iy^4}^{\frac{1}{2}+iy^4}\frac{|ds|}{|s|^{R+1}} \\
\cdot\sum_{k\leqq y}\ \sum_{\chi}{}^{*}|L(s,\chi)|\left|\sum_{n\leqq y^2}\frac{g(n)\,\chi(n)}{n^s}\right|.
\end{aligned}$$

Die Doppelsumme ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 3

$$\ll(|s|^2\,l_1^C\,y^2)^{\frac{1}{2}}(y^2\,l_1^C)^{\frac{1}{2}}\ll y^2|s|\,l_1^C$$

und daher

$$S\ll l_1^{CB_5+C}x^{\frac{1}{2}}\,y+\frac{x}{l_1^{B_4}}\ll\frac{x}{l_1^{B_4}}\,.$$

3.9. Fassen wir die Ergebnisse von 3.5, …, 3.8 zusammen, so folgt für $f=f_1$ oder $f=f_2$

$$S(f)\ll\frac{x}{l_1^{B_4}}\,.$$

Der Schluß von $f(n)\ln^R\left(\frac{x}{n}\right)$ auf $f(n)$ erfolgt in gleicher Weise wie in [12] oder [15]. Damit ist (3.1.6) und somit Satz 1, (1.1.3) bewiesen.

4. Beweis zu Satz 1, (1.1.4) und Satz 2

4.1. Sei $f(n)$ von nun an wieder eine der in Satz 1 betrachteten Funktionen. Wir geben einige Hinweise zum Beweis der Formel

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,k)=1}} f(n)=D(f)\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\prod_{p\nmid k}(1+G(p))\cdot x l_1^{\tau-1} + O(x l_1^{\operatorname{Re}\tau-2} l_2^{C}) \tag{4.1.1}$$

mit

$$D(f)=0, \quad \text{falls} \quad \tau=0,-1,-2,\ldots$$

($k\leq Q$, $G(p)$ wird in (4.1.5) definiert.)

Wir benutzen als Erzeugende die durch die Dirichlet-Reihe

$$F_k(s)=\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)\prod_{p>x}(1-p^{-s})^{-\tau} \quad (\sigma>1) \tag{4.1.2}$$

gegebene Funktion. Man erhält

$$F_k(s)=\zeta^{\tau}(s)\prod_{p|k}(1-p^{-s})^{\tau}\prod_{p\leq x,\,p\nmid k}(1+G(p,s)) \tag{4.1.3}$$

mit

$$G(p,s)=\frac{f(p)-\tau}{p^s}+\frac{h(p^2)}{p^{2s}}+\frac{h(p^3)}{p^{3s}}+\cdots, \qquad h(p^{\nu})\ll \nu^{C}, \tag{4.1.4}$$

$$G(p)=G(p,1)\,. \tag{4.1.5}$$

Mit (1.1.2) sieht man

$$G_k(s)=\prod_{p\leq x,\,p\nmid k}(1+G(p,s))\ll 1, \quad \text{falls} \quad \sigma\geq\sigma_0=1-\frac{B_{13}l_2}{l_1}, \tag{4.1.6}$$

und

$$\prod_{p>x}(1+G(p,1))^{-1}=\prod_{p>x}\left(1-\frac{f(p)-\tau}{p}+O(p^{-2})\right)=1+O(l_1^{-2})\,. \tag{4.1.7}$$

Der mittlere Faktor in (4.1.3) läßt sich für $\sigma\geq\sigma_0$ abschätzen durch

$$\prod_{p|k}\left(1+\frac{C}{p^{\sigma_0}}\right)\ll\exp\left(C\sum_{p\leq l_1}p^{-\sigma_0}\right)\ll l_2^{C}\,. \tag{4.1.8}$$

Der Beweis zu (4.1.1), auf den wir nicht weiter eingehen möchten, wird nun mit Hilfe der letzten Zeilen nach der Methode von Selberg [11] (s. hierzu auch Kubilius [6], Lemma 9.2) geführt.

4.2. Wir schließen mit einigen Bemerkungen zu Satz 1, (1.1.4) und Satz 2.

A) (1.1.4) ergibt sich wie in Siebert-Wolke [2] aus (1.1.3) und (4.1.1).

B) Bei Satz 2 beschränken wir uns auf den Fall $a=-1$. Wie in Wolke [15] sieht man mit (1.1.3) und (4.1.1)

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n\leqq x} f(n)\, d(n-1) \\ &= 2\sum_{k\leqq Q} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n\leqq x\\ (n,k)=1}} f(n) + O(x\, l_1^{\operatorname{Re}\tau-1} l_2^C) \\ &= 2D(f)\, x\, l_1^{\tau-1} \sum_{k\leqq Q} \frac{1}{\varphi(k)} \prod_{p\mid k} (1-p^{-1})^\tau \prod_{p\nmid k} (1+G(p)) \\ &\quad + O(x\, l_1^{\operatorname{Re}\tau-1} l_2^C). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Sei

$$N = \prod_{p,\, 1+G(p)=0} p. \tag{4.2.2}$$

(Dank (4.1.4) und (1.1.2) kann es nur endlich viele p mit $1+G(p)=0$ geben.) Für k mit $N\nmid k$ haben wir $\prod\limits_{p\nmid k} (1+G(p))=0$, für $N\mid k$ ist wegen (4.1.7)

$$\prod_{p\nmid k} (1+G(p)) = \prod_{p\mid k,\, p\nmid N} (1+G(p))^{-1} \prod_{p\nmid N} (1+G(p)) = \vartheta_1(f) \prod_{\substack{p\mid k\\ p\nmid N}} (1+G(p))^{-1}.$$

Zusammen mit (4.2.1) ergibt dies

$$\begin{aligned} H(x) &= \vartheta_2(f)\, x\, l_1^{\tau-1} \sum_{\substack{k\leqq Q\\ k\equiv 0(N)}} \frac{1}{\varphi(k)} \prod_{p\mid k} (1-p^{-1})^\tau \prod_{p\mid k,\, p\nmid N} (1+G(p))^{-1} \\ &\quad + O(x\, l_1^{\operatorname{Re}\tau-1} l_2^C). \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Von der Bedingung $k\equiv 0(N)$ befreien wir uns folgendermaßen:

$$\mu(N) \sum_{k,\, k\equiv 0(N)} = \sum_{k,\,(k,N)=1} - \sum_{d\mid N,\, d<N} \mu(d) \sum_{k,\, k\equiv 0(d)}.$$

Wenden wir diesen Schluß erneut auf die innerste Summe an, so erhalten wir $\sum\limits_{\substack{k\\ k\equiv 0(N)}}$ als Linearkombination von Summen der Gestalt $\sum\limits_{k,\,(k,d)=1}$ mit $d\mid N$. Die Gewichte in den Summen haben die Form $k^{-1}\prod\limits_{p\mid k}(1+g_1(p))$ mit $g_1(p)\ll p^{-1}$. In bekannter analytischer Weise gelangen wir daher mit (4.2.3) zu

$$\begin{aligned} H(x) &= \vartheta_3(f)\, x\, l_1^{\tau-1} \ln Q(1+O(l_1^{-1} l_2^C)) + O(x\, l_1^{\operatorname{Re}\tau-1} l_2^C) \\ &= \tfrac{1}{2}\vartheta_3(f)\, x\, l_1^\tau + O(x\, l_1^{\operatorname{Re}\tau-1} l_2^C), \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten.

Literatur

1. Bombieri, E.: On the large sieve. Mathematika (London) **12**, 201—225 (1965).
2. de Bruijn, N. G.: On the number of positive integers $\leqq x$ and free of prime factors $> y$. Indag. Math. **13**, 50—59 (1951).
3. Elliott, P. D. T. A.: On the mean value of $f(p)$. Proc. London Math. Soc. **21** (3), 28—96 (1970).
4. Gallagher, P. X.: The large sieve. Mathematika (London) **14**, 14—20 (1967).
5. Gallagher, P. X.: Bombieri's mean value theorem. Mathematika (London) **15**, 1—6 (1968).
6. Kubilius, J.: Probabilistic methods in the theory of numbers. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. 1964.
7. Montgomery, H. L.: Zeros of L-Functions. Inventiones math. **8**, 346—354 (1969).
8. Motohashi, Y.: An asymptotic formula in the theory of numbers. Acta Arithmetica **16**, 255—264 (1970).
9. Prachar, K.: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957.
10. Rankin, R. A.: The difference between consecutive prime numbers. J. London Math. Soc. **13**, 21—29 (1938).
11. Selberg, A.: Note on a paper by L. G. Sathe. J. Indian Math. Soc. **18**, 83—87 (1954).
12. Siebert, H., Wolke, D.: Über einige Analoga zum Bombierischen Primzahlsatz. Math. Z. **122**, 327—341 (1971).
13. Ufimceva, L. I.: A generalization of the additive problem of divisors. Mat. Zametki **7**, 477—482 (1970) = Math. Notes **7**, 289—292 (1970).
14. Wolke, D.: Polynomial values with small prime divisors. Acta Arithmetica **19**, 327 to 333 (1971).
15. Wolke, D.: Über das summatorische Verhalten zahlentheoretischer Funktionen. Math. Ann. **194**, 147—166 (1971).

Prof. Dr. Dieter Wolke
Mathematisches Institut der TU
D-3392 Clausthal-Zellerfeld
Erzstraße 1
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 10. Dezember 1971)