Math. Ann. 188, 165—205 (1970)

Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Körper

REINHOLD BAER *

Emil Artin und Otto Schreier haben in ihren klassischen Arbeiten gezeigt, daß sich die algebraische Substanz der Theorie der reellen Zahlen in ihrer Theorie der formal reellen Körper wiederfindet, ja erst richtig zeigt. Doch gibt es auszeichnende Eigenschaften der Körper reeller Zahlen, die wir zunächst diskutieren wollen, da sie den Hintergrund für unsere Überlegungen liefern werden.

Dichte und Archimedizität. Der algebraisch angeordnete Körper K ist archimedisch über seinem Unterkörper U, wenn es zu jedem $k \in K$ ein $u \in U$ mit $k < u$ gibt; und U ist dicht in K, wenn es zu jedem Paar verschiedener Elemente aus K ein zwischen ihnen gelegenes Element aus U gibt. Dann und nur dann ist der angeordnete Körper K im Körper $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen enthalten, wenn K dicht ist in jeder die Ordnung von K fortsetzenden, über K archimedischen Erweiterung von K. [Satz 1.2.]

Dichte im reellen Abschluß. Der angeordnete Körper K ist dann und nur dann in $\boldsymbol{R}$ enthalten, wenn jeder Unterkörper von K in seinem reellen [algebraischen] Abschluß dicht ist [Satz 5.6].

Dedekindsche Schnitte. Ein dedekindscher Schnitt im angeordneten Körper K ist eine Partition von K in zwei nicht leere Teilmengen S, D mit $s < d$ für jedes $s \in S$ und $d \in D$. Dieser dedekindsche Schnitt S, D heiße eigentlich, wenn es zu jedem positiven k in K Elemente $s \in S$ und $d \in D$ mit $0 < d - s < k$ gibt. In Unterkörpern von $\boldsymbol{R}$ ist bekanntlich jeder dedekindsche Schnitt eigentlich. Umgekehrt gilt: dann und nur dann ist jeder dedekindsche Schnitt im angeordneten Körper K eigentlich, wenn $K \subseteq \boldsymbol{R}$ ist [Satz 1.2].

Starrheit. Der angeordnete Körper K heiße starr, wenn 1 der einzige ordnungerhaltende Automorphismus von K ist. Dann und nur dann ist der angeordnete Körper $K \subseteq \boldsymbol{R}$, wenn alle Unterkörper von K starr sind [Satz 1.2].

Wir wollen nun diese Überlegungen in einen allgemeineren Rahmen stellen, indem wir sie relativieren. Die Basis dafür bilden die verschiedenen möglichen Arten von Abschließungen angeordneter Körper.

Reeller Abschluß. Der Körper R ist der reelle Abschluß des angeordneten Körpers K, wenn R einmal ein reell abgeschlossener und als solcher ein angeordneter Körper ist, und wenn weiter R eine algebraische, die Ordnung von K

* Der Verf. ist dem Forschungsinstitut für Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und dem Department of Mathematics, Pennsylvania State University für die während der Niederschrift dieser Arbeit gewährte Gastfreundschaft dankbarst verpflichtet.

fortsetzende Erweiterung von K ist. Es ist ein klassischer Satz, daß jeder angeordnete Körper sich auf eine und im wesentlichen nur eine Weise reell abschließen läßt.

Stetiger Abschluß. Der angeordnete Körper S ist stetiger Abschluß seines Unterkörpers K, wenn einmal K in S dicht ist, und wenn es weiter keine echte, die Ordnung von S fortsetzende Erweiterung von S gibt, in der S bzw. K dicht ist. Der stetige Abschluß eines angeordneten Körpers K ist im wesentlichen der in üblicher Weise konstruierte Körper der eigentlichen dedekindschen Schnitte in K [Satz 2.5 und Lemma 2.9].

Aus einer oben gemachten Bemerkung läßt sich erschließen, daß der stetige Abschluß eines angeordneten Körpers K nicht notwendig reell abgeschlossen ist; vgl. Satz 5.1. Andererseits ist der stetige Abschluß eines reell abgeschlossenen Körpers stets reell abgeschlossen [Satz 3.3]. Dies führt zu der folgenden Begriffsbildung.

Dedekindscher Abschluß. Dies ist der stetige Abschluß des reellen Abschlusses. Er ist im wesentlichen eindeutig bestimmt; für Kennzeichnungen vgl. Satz 3.9. Wichtig für uns sind Kriterien dafür, daß ein angeordneter Körper K und sein Unterkörper U denselben dedekindschen Abschluß haben: dies ist z. B. dann und nur dann der Fall, wenn der reelle Abschluß R von K einen U enthaltenden Unterkörper besitzt, der über U algebraisch und in R dicht ist [Zusatz 3.11]. – Es sei darauf hingewiesen, daß der reelle Abschluß des stetigen Abschlusses im allgemeinen ein echter Unterkörper des dedekindschen Abschlusses ist [Satz 5.4].

Starrheitskriterium [Satz 4.3]. Die folgenden Eigenschaften des geordneten Körpers K und seines Unterkörpers U sind äquivalent:

(i) K und U haben denselben dedekindschen Abschluß.

(ii) Ist Z ein Unterkörper mit $U \subsetneqq Z \subsetneqq K$, so ist 1 der einzige alle Elemente aus U fixierende, ordnungserhaltende Isomorphismus von Z in K.

(iii) Ist k ein über U transcendentes Element aus K, so ist 1 der einzige alle Elemente aus U fixierende, ordnungerhaltende Automorphismus von $U(k)$.

Im Abschnitt 0 stellen wir für die Bequemlichkeit des Lesers die benötigten Tatsachen aus der Artin-Schreierschen Theorie in einer für uns zweckmäßigen Form zusammen. Da die eine oder andere dieser Bemerkungen sich nicht in der Literatur zu finden scheint, werden wir außer Hinweisen auf Standardwerke auch hie und da Beweisandeutungen machen müssen.

Bezeichnungen

$\boldsymbol{Q}$ = Körper der rationalen Zahlen.

$\boldsymbol{R}$ = Körper aller [im klassischen Sinne] reellen Zahlen.

$\mathrm{Aut}_U K$ = Gruppe aller die Elemente aus U fixierenden Automorphismen von K.

$\mathrm{Aut}_U^\circ K$ = Gruppe aller Automorphismen aus $\mathrm{Aut}_U K$, die die Anordnung des angeordneten Körpers K erhalten.

$A \subset B :=: A$ ist ein echter Unterkörper von B.

$U(M)$ = durch die Teilmenge M erzeugter Erweiterungskörper von U.

0. Zusammenstellung der benötigten Resultate aus der Artin-Schreierschen Theorie

Im folgenden werden wir die von uns benötigten Resultate aus der Artin-Schreierschen Theorie der [formal-] reellen Körper in einer für uns zweckmäßigen Form zusammenstellen. Im allgemeinen werden wir für die Beweise auf die geläufige Literatur verweisen können; und nur selten wird es nötig werden, eine Ableitung anzudeuten.

Die Grundbegriffe wie formal-reeller Körper, angeordneter Körper und reell-abgeschlossener Körper werden wir in der üblichen Form benutzen; man vergleiche etwa Jacobson [p. 270, Definition 1; p. 271, Definition 2; p. 273, Definition 3] oder van der Waerden [p. 235, 254]. Insbesondere werden wir unter einem Unterkörper des angeordneten Körpers K stets den in Übereinstimmung mit K angeordneten Körper verstehen.

Satz A. *Die folgenden Eigenschaften des Körpers K sind äquivalent:*

(i) *K ist reell abgeschlossen.*

(ii) *K ist ein angeordneter Körper; ist f ein Polynom über K, sind a, b Zahlen aus K mit $a<b$ und $f(a)f(b)<0$, so gibt es $c\in K$ mit $a<c<b$ und $f(c)=0$ [Weierstraß].*

(iii) *K ist ein angeordneter Körper; positive Zahlen aus K sind Quadrate in K; Polynome ungeraden Grades aus K haben Nullstellen in K.*

(iv) *K ist nicht algebraisch abgeschlossen; aber $K(\sqrt{-1})$ ist algebraisch abgeschlossen.*

(v) *K ist nicht algebraisch abgeschlossen und die Grade über K irreduzibler Polynome sind 1 und 2 [Euler].*

(vi) *K ist nicht algebraisch abgeschlossen und die Grade der über K irreduziblen Polynome sind beschränkt.*

(vii) *K ist nicht algebraisch abgeschlossen und der algebraische Abschluß von K ist endlich über K.*

(viii) *Jede endliche Teilmenge von K ist in einem reell abgeschlossenen Unterkörper von K enthalten.*

Beweis. Daß ein reell abgeschlossener Körper auf eine und nur eine Art geordnet werden kann, ist in van der Waerden [p. 254, Satz 1] enthalten. Daß in reell abgeschlossenen Körpern der Weierstraßsche Nullstellensatz [oder Zwischenwertsatz] gilt, findet sich bei van der Waerden [p. 257, Satz 5]. Also folgt (ii) aus (i).

Die einfache, in üblicher Art erfolgende Ableitung von (iii) aus (ii) sei dem Leser überlassen.

Daß (iv) aus (iii) folgt, ist etwa in van der Waerden [p. 256, Satz 3a] enthalten.

Die naheliegende Ableitung von (v) aus (iv) sei dem Leser überlassen; und (vi) ist nur eine abgeschwächte Form von (v), folgt also aus (v).

Gilt (vi), so gibt es eine positive ganze Zahl n derart, daß alle über K irreduziblen Polynome einen n nicht überschreitenden Grad haben.

Wir nehmen zunächst an, daß K nicht perfekt ist. Dann folgt – etwa aus Jacobson [p. 146, Theorem 3] – daß die Charakteristik von K eine Primzahl p und $K^p \neq K$ ist. Es gibt dann ein $k \in K$, das keine p-te Potenz in K ist; und hieraus folgert man die Irreduzibilität aller Polynome $x^{p^i} - a$. Dann wäre aber $p^i \leqq n$ für jedes positive ganze i, ein Widerspruch: K ist perfekt.

Ist E eine endliche Erweiterung von K, so ist $E = K(e)$ wegen der Perfektheit von K eine einfache algebraische Erweiterung von K; siehe etwa Jacobson [p. 54, Theorem 14]. Natürlich genügt e einer irreduziblen Gleichung über K, deren Grad [wegen (vi)] n nicht überschreitet. Also ist auch $[E:K] \leqq n$; und wir haben gezeigt, daß die endlichen Erweiterungen von K beschränkte [n nicht überschreitende] Grade über K haben.

Es gibt also insbesondere eine endliche algebraische Erweiterung M maximalen Grades $[M:K] = m$ über K. Sei A irgendeine algebraische, algebraisch abgeschlossene Erweiterung von M. Ist $a \in A$, so ist $M(a)$ eine endliche algebraische Erweiterung von K; und aus der Maximalität von M folgt $M = M(a)$. Also liegt a in M und es ist $M = A$ algebraisch abgeschlossen. Damit haben wir (vii) aus (vi) hergeleitet.

Daß schließlich (i) aus (vii) folgt, ergibt sich aus einem wunderschönen Satz von Artin-Schreier; siehe Jacobson [p. 316, Theorem 17]: Die Äquivalenz der Eigenschaften (i)–(vii) von K ist dargetan.

Natürlich ist (viii) nur eine abgeschwächte Form von (i). Gilt umgekehrt (viii), so bemerken wir zunächst, daß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in keinem reell abgeschlossenen Unterkörper von K und also auch in K selbst keine Lösung hat: K ist nicht algebraisch abgeschlossen. Ist zweitens $f(x)$ ein irreduzibles Polynom über K, so liegen seine [endlich vielen] Coeffizienten wegen (viii) in einem reell abgeschlossenen Unterkörper U. Da f in K irreduzibel ist, ist f auch über U irreduzibel. In U gilt (v), so daß der Grad von f höchstens 2 ist. Damit haben wir (v) aus (viii) hergeleitet und die Äquivalenz von (i)–(viii) dargetan.

Zusatz B. *In reell abgeschlossenen Körpern gelten der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Satz, daß Polynome in abgeschlossenen Intervallen größte und kleinste Werte haben und annehmen.*

Siehe Jacobson [p. 284, Exercises 1, 2, 3] oder van der Waerden [p. 251, Aufgaben 4, 5, 7].

Ist K ein angeordneter Körper, ist der reell abgeschlossene Körper R eine algebraische, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, so werde R *als reeller Abschluß von* K bezeichnet.

Satz C. *Jeder angeordnete Körper besitzt einen und im wesentlichen nur einen reellen Abschluß.*

Siehe Jacobson [p. 285, Theorem 8] oder van der Waerden [p. 259, Satz 8].

Satz D. *Ist R_i für $i = 1, 2$ der reelle Abschluß des angeordneten Körpers K_i, ist σ ein ordnungserhaltender Isomorphismus von K_1 auf K_2, so gibt es einen und nur einen mit σ auf K_1 übereinstimmenden Isomorphismus von R_1 auf R_2.*

Siehe Jacobson [p. 285, Theorem 8].

Lemma E. (I) *Ist R ein reell abgeschlossener Unterkörper des angeordneten Körpers K, so enthält R jedes über R algebraische Element aus K.*

(II) *Ist U ein Unterkörper des reell abgeschlossenen Körpers R, so ist die Menge der über U algebraischen Elemente aus R ein reell abgeschlossener Unterkörper von R.*

(III) *Der Durchschnitt einer nicht leeren Menge reell abgeschlossener Unterkörper des angeordneten Körpers K ist ein reell abgeschlossener Unterkörper von K.*

(I) folgt unmittelbar aus der Definition der reellen Abgeschlossenheit; für (II) vgl. Jacobson [p. 278, Corollary]; und (III) ergibt sich durch Combination von (I) und (II).

Der angeordnete Körper K heißt *archimedisch über seinem Unterkörper U*, wenn es zu jedem $k \in K$ ein $u \in U$ mit $k < u$ gibt. Diese Eigenschaft ist offenbar gleichwertig mit der Forderung: Zu jedem $k \in K$ mit $0 < k$ gibt es ein $u \in U$ mit $0 < u < k$.

Lemma F. *Ist der angeordnete Körper K algebraisch über seinem Unterkörper U, so ist K archimedisch über U.*

Einer der möglichen Beweise dieser einfachen Tatsache ist etwa in van der Waerden [p. 238, Aufgabe 2] enthalten.

Das Compositum des angeordneten Körpers K mit dem reellen Abschluß seines Unterkörpers U erhält man folgendermaßen: Sei R der nach Satz C im wesentlichen eindeutig bestimmte reelle Abschluß von K. Wegen Lemma E, (II) ist die Menge A aller über U algebraischen Elemente aus R ein reell abgeschlossener Unterkörper von R, also der reelle Abschluß von U. Das Erzeugnis C der Unterkörper A und K von R ist dann im wesentlichen eindeutig durch $U \subseteq K$ bestimmt und das gesuchte Compositum von K mit dem reellen Abschluß A von U.

1. Die Unterkörper des Körpers *R* aller reellen Zahlen

Wir erinnern zunächst an die Definition des *dedekindschen Schnitts* [im weiteren Sinne]. Dies ist ein Paar S, D von Teilmengen eines angeordneten Körpers K mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Weder S noch D ist leer und K ist die Vereinigungsmenge von S und D.

(b) $s < d$ für jedes Paar $s \in S$ und $d \in D$.

Insbesondere liegt also jedes Element aus K in einer und nur einer der Mengen S und D; weiter enthält S mit einem Element alle kleineren Elemente aus K und D enthält mit einem Element alle größeren Elemente aus K.

Dann gilt der folgende Erweiterungssatz

Lemma 1.1. *Ist S, D ein dedekindscher Schnitt in dem angeordneten Körper K, so gibt es eine die Ordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung E von K und ein Element $t \in E$ mit der Eigenschaft:*

$$\textit{Ist } k \in K \textit{ und } \begin{Bmatrix} k < t \\ t < k \end{Bmatrix}, \textit{ so ist } \begin{Bmatrix} k \in S \\ k \in D \end{Bmatrix}.$$

Kurz: $t \in E$ bestimmt den dedekindschen Schnitt S, D in K.

Beweis im Spezialfall eines reell abgeschlossenen Körpers K: Enthält zunächst S ein größtes oder D ein kleinstes Element, so können wir für t dieses extremale Element und $E=K$ wählen. Wir machen also im folgenden die Annahme:

(1) Es gibt kein größtes Element in S und kein kleinstes Element in D.

Sei E eine einfache transcendente Erweiterung von K. Dann ist $E=K(t)$ der Körper aller rationalen Funktionen in t mit Coefficienten aus K. Wir definieren: Das Polynom $f(t)$ aus E ist *positiv*, wenn f der folgenden Bedingung genügt:

(P) Es gibt $s\in S$ und $d\in D$ mit $0<f(z)$ für $s\leqq z\leqq d$.

Ist $f_i(t)$ für $i=1,2$ ein positives Polynom aus E, so gibt es wegen (P) Elemente $s_i\in S$, $d_i\in D$ mit $0<f_i(z)$ für $s_i\leqq z\leqq d_i$. Ist $s=\max[s_1,s_2]$ und $d=\min[d_1,d_2]$, so ist $s\in S$, $d\in D$ und $0<f_i(z)$ für $s\leqq z\leqq d$, so daß auch

$$0<f_1(z)+f_2(z) \quad \text{und} \quad 0<f_1(z)f_2(z) \quad \text{für} \quad s\leqq z\leqq d$$

gelten. Damit haben wir gezeigt:

(2) Summe und Produkt positiver Polynome sind positiv.

Klar ist:

(3) 0 ist kein positives Polynom.

Ist das Polynom f über K nicht das 0-Polynom, so hat f nur endlich viele Nullstellen in K. Da S kein maximales und D kein minimales Element besitzt [wegen (1)], erschließt man hieraus sofort die Existenz von $s\in S$ und $d\in D$ mit $f(z)\neq 0$ für $s\leqq z\leqq d$. Angenommen es gäbe a,b in K mit $s\leqq a<b\leqq d$ und $f(a)f(b)<0$. Aus der reellen Abgeschlossenheit von K folgt wegen des Weierstraßschen Nullstellensatzes – Satz A, (ii) – die Existenz von $k\in K$ mit $a<k<b$ und $f(k)=0$, ein Widerspruch. Damit haben wir gezeigt, daß entweder $0<f(z)$ oder $f(z)<0$ für alle $z\in K$ mit $s\leqq z\leqq d$ gilt; und hieraus folgt:

(4) Ist das Polynom f über K nicht das 0-Polynom, so ist genau eines der Polynome f und $-f$ positiv.

Aus (2), (3), (4) ergibt sich aber, daß unsere Definition (P) eine algebraische Anordnung im Ringe der Polynome $f(t)$ über K definiert. Da E der Quotientenkörper dieses Ringes ist, läßt sich die durch (P) im Ringe der Polynome aus E definierte Anordnung auf eine und nur eine Art auf E fortsetzen; siehe etwa van der Waerden [p. 237, Hilfssatz]. Wir werden diese Anordnung von E *die durch* (P) *definierte Anordnung von E* nennen. Es ist klar, daß sie die durch die reelle Abgeschlossenheit von K bestimmte Anordnung von K fortsetzt.

Ist $d \in D$, so ist d nicht das kleinste Element aus D und es folgt, daß $d-t$ ein positives Polynom aus E ist. Entsprechend ist $t-s$ für $s \in S$ ein positives Polynom aus E. Also wird

(5) $s<t<d$ für $s \in S$ und $d \in D$;

und dies ist gleichwertig damit, daß der dedekindsche Schnitt S, D durch t in K bestimmt wird.

Aus (5) folgert man mühelos:

(6) Ist $f(t)$ ein positives Polynom aus E, so gibt es $d \in D$ mit $f(t)<d$.

Ist $f(t)$ ein positives Polynom aus E, so folgt aus (P) die Existenz von $s \in S$ und $d \in D$ mit $0<f(z)$ für alle z aus K mit $s \leqq z \leqq d$. Da K ein reell abgeschlossener Körper ist, können wir Zusatz B anwenden: f nimmt im Intervall $[s, d]$ sein Minimum an. Hieraus ergibt sich die Existenz einer positiven Zahl $k \in K$ mit $k \leqq f(z)$ für $z \in K$ mit $s \leqq z \leqq d$. Dann ist aber $\frac{1}{2} k<f(z)$; und wir haben gezeigt:

(7) Ist $f(t)$ ein positives Polynom aus E, so gibt es ein $p \in K$ mit $0<p<f(t)$.

Ist e ein positives Element aus E, so gibt es positive Polynome $f(t)$, $g(t)$ aus E mit $e=f(t)\, g(t)^{-1}$. Aus (6) und (7) folgern wir die Existenz positiver Zahlen p, q aus K mit $f(t)<p$ und $q<g(t)$. Dann ist aber $e<pq^{-1}$, so daß E über K archimedisch ist: das Paar E, t leistet im vorliegenden Spezialfall das Verlangte.

Bemerkung. Robinson [p. 103, 4.2.18. Theorem] zeigt, daß die von uns angegebene Anordnung von E die einzige unsern Anforderungen genügende Anordnung von E ist.

Rückführung des allgemeinen Falles auf den Spezialfall. Nach dem fundamentalen Artin-Schreierschen Existenzsatz gibt es einen und im wesentlichen nur einen über K algebraischen, die Ordnung von K fortsetzenden, reellabgeschlossenen Körper R; vgl. Satz C. Aus Lemma F folgt:

(8) R ist archimedisch über K.

Gibt es ein Element $r \in R$ mit $s \leqq r \leqq d$ für jedes $s \in S$ und jedes $d \in D$, so haben wir bereits das gewünschte Paar $t=r$, $E=R$ gefunden. Wir nehmen also im folgenden an:

(9) Ist $r \in R$, so ist entweder $r<s$ für ein $s \in S$ oder $d<r$ für ein $d \in D$.

Unter S^* wollen wir die Menge aller $r \in R$ mit $r \leqq s$ für ein $s \in S$ verstehen; und entsprechend sei D^* die Menge aller $r \in R$ mit $d \leqq r$ für ein $d \in D$. Wegen (8) und (9) gilt:

(10) S^*, R^* ist ein dedekindscher Schnitt in R mit $S \subseteqq S^*$ und $D \subseteqq D^*$.

Auf den dedekindschen Schnitt S^*, R^* im reell abgeschlossenen Körper R können wir den bereits bewiesenen Spezialfall anwenden: Es gibt eine die Ordnung von R fortsetzende, über R archimedische Erweiterung E von R und ein Element $t \in E$ mit der Eigenschaft:

$$\text{Ist } r \in R \text{ und } \begin{Bmatrix} r < t \\ t < r \end{Bmatrix}, \text{ so ist } \begin{Bmatrix} r \in S^* \\ r \in D^* \end{Bmatrix}.$$

Da R die Anordnung von K fortsetzt und E die Anordnung von R fortsetzt, setzt E die Anordnung von K fort. Da E archimedisch über R und R archimedisch über K ist, ist E auch archimedisch über K. Aus $S \subsetneqq S^*$ und $D \subsetneqq D^*$ folgt schließlich, daß t den dedekindischen Schnitt S, D in K bestimmt, womit alles bewiesen ist.

Im folgenden sei unter *$\boldsymbol{Q}$ der Körper aller rationalen Zahlen* und unter *$\boldsymbol{R}$ der Körper aller reellen Zahlen* [im klassischen Sinne] verstanden. Weiter wollen wir unter *einem eigentlichen dedekindschen Schnitt* einen dedekindschen Schnitt S, D im angeordneten Körper K verstehen, der noch der folgenden Bedingung genügt:

Zu jedem positiven $e \in K$ gibt es $s \in S$ und $d \in D$ mit $0 < d - s < e$.

Satz 1.2. *Die folgenden Eigenschaften des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) $K \subsetneqq \boldsymbol{R}$.

(ii) *$\boldsymbol{Q}$ ist dicht in K.*

(iii) *K ist archimedisch über $\boldsymbol{Q}$.*

(iv) *K ist in jeder die Ordnung von K fortsetzenden, über K archimedischen Erweiterung von K dicht.*

(v) *Jeder dedekindsche Schnitt in K ist eigentlich.*

(vi) *Ist U ein Unterkörper von K, so ist* 1 *der einzige ordnungerhaltende Automorphismus von U.*

(vii) *Die Mächtigkeiten der die Anordnung von K fortsetzenden, über K archimedischen Erweiterungen von K sind beschränkt.*

(viii) *Es gibt maximale, die Anordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterungen von K.*

Bemerkungen. **A.** Bedingung (i) besagt genauer, daß es einen ordnungerhaltenden Isomorphismus von K in $\boldsymbol{R}$ gibt; aber schließlich ist auch $\boldsymbol{R}$ nur bis auf Isomorphie eindeutig gegeben.

B. Die wohlbekannte Äquivalenz der Bedingungen (i)–(iii) wird nur aus Gründen der Beweisbequemlichkeit angegeben.

C. Eine weitere Kennzeichnung der Unterkörper von $\boldsymbol{R}$ findet sich unten in Satz 5.6.

Dem Beweis dieses Satzes sei der Beweis eines einfachen, wohlbekannten, von uns mehrfach benutzten Hilfssatzes vorausgeschickt.

(1.2.+) *Ist der angeordnete Körper K über seinem Unterkörper U nicht archimedisch, so gibt es einen Zwischenkörper Z mit $U \subset Z \subsetneqq K$ und einen von* 1 *verschiedenen, die Elemente aus U fixierenden, ordnungerhaltenden Automorphismus von Z.*

Beweis. Da K über U nicht archimedisch ist, gibt es $w \in K$ mit $u < w$ für jedes $u \in U$. Aus Lemma F folgt, daß w transcendent über U ist. Also ist $U(w)$ der Körper aller rationalen Funktionen in w mit Coefficienten aus U. Natürlich ist auch $U \subset U(w) = Z \subsetneqq K$. Es gibt einen und nur einen Automorphismus σ von Z, der alle Elemente aus U fixiert und w auf $2w$ abbildet. Ist $p = \sum_{i=0}^{n} u_i w^i$ mit $u_n \neq 0$ und $u_i \in U$, so ist dann und nur dann $0 < p$, wenn $0 < u_n$ ist. Das Element $p^\sigma = \sum_{i=0} 2^i u_i w^i$ ist offenbar dann und nur dann positiv, wenn $0 < 2^n u_n$ ist: $0 < p$ dann und nur dann, wenn $0 < p^\sigma$. Hieraus folgert man mühelos, daß σ ein von 1 verschiedener, ordnungerhaltender, die Elemente aus U fixierender Automorphismus von Z ist.

Beweis von Satz 1.2. Alle Definitionen von $\boldsymbol{R}$ schließen ein, daß der Primkörper $\boldsymbol{Q}$ von $\boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{R}$ dicht ist. Also folgt aus (i) auch, daß $\boldsymbol{Q}$ in K dicht ist: (ii) folgt aus (i); und es ist klar, daß (iii) aus (ii) folgt. Daß schließlich (i) aus (iii) folgt, ist wohlbekannt; siehe etwa van der Waerden [p. 245, 1.].

Wir nehmen als nächstes die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (i)–(iii) an; und betrachten eine die Ordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung E von K. Da K wegen (iii) über $\boldsymbol{Q}$ archimedisch ist, ist auch E über $\boldsymbol{Q}$ archimedisch; und aus der Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich, daß $\boldsymbol{Q}$ in E dicht ist. Also ist auch der Zwischenkörper K in E dicht: (iv) folgt aus den äquivalenten Bedingungen (i)–(iii).

Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an und betrachten einen dedekindschen Schnitt S, D im angeordneten Körper K. Aus Lemma 1.1 folgt die Existenz einer die Anordnung von K fortsetzenden Erweiterung E von K, die über K archimedisch ist, und eines Elementes $t \in E$, das den dedekindschen Schnitt S, D in K bestimmt. Aus (iv) folgt, daß K in E dicht ist. Ist $0 < k \in K$, so ist $t - 4^{-1}k < t - 5^{-1}k < t$; und aus der Dichte von K in E folgt die Existenz eines Elements $s \in K$ mit $t - 4^{-1}k \leqq s \leqq t - 5^{-1}k < t$, so daß insbesondere $s \in S$ ist. Ebenso folgt die Existenz eines Elements $d \in D$ mit $t < t + 5^{-1}k \leqq d \leqq t + 4^{-1}k$. Dann ist aber auch

$$0 < d - s \leqq \tfrac{1}{2}k < k,$$

so daß S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K ist: (v) folgt aus (iv).

Wir nehmen die Gültigkeit von (v) an. Wäre K nicht archimedisch über $\boldsymbol{Q}$, so wäre die Menge D aller Elemente aus K, die größer als alle rationalen Zahlen sind, nicht leer. Das Complement S von D in K enthält alle rationalen Zahlen, ist also nicht leer, so daß S, D ein dedekindscher Schnitt in K ist. Dieser ist eigentlich wegen (v). Also gibt es $s \in S$ und $d \in D$ mit $0 < d - s < 1$. Da s im Complement von D in K liegt, gibt es eine rationale Zahl r mit $s \leqq r$. Hieraus folgt

$$d = (d - s) + s \leqq 1 + r.$$

Da $1+r$ rational ist und d zu D gehört, wird $1+r<d$, ein Widerspruch: K ist archimedisch über $\boldsymbol{Q}$. Damit haben wir (iii) aus (v) hergeleitet und die Äquivalenz von (i)–(v) dargetan.

Ist $\boldsymbol{Q}$ dicht in K, so ist $\boldsymbol{Q}$ auch dicht in jedem Unterkörper U von K. Ein ordnungerhaltender Automorphismus von U fixiert alle Elemente aus $\boldsymbol{Q}$, ist also 1. Ist umgekehrt K nicht archimedisch über $\boldsymbol{Q}$, so folgt aus Hilfssatz (1.2.+) die Ungültigkeit von (vi), so daß (iii) aus (vi) folgt, womit die Äquivalenz der Bedingungen (i)–(vi) dargetan ist.

Ist $K \subseteqq \boldsymbol{R}$ und E eine die Anordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung von K, so ist K wegen (iii) archimedisch über $\boldsymbol{Q}$, so daß auch E archimedisch über $\boldsymbol{Q}$ ist und $E \subseteqq \boldsymbol{R}$ aus der Äquivalenz von (i) und (iii) folgt. Dann ist aber die Mächtigkeit von E nicht größer als die von $\boldsymbol{R}$, womit (vii) aus den äquivalenten Bedingungen (i) und (iii) abgeleitet ist.

Dem Nachweis, daß (viii) aus (vii) folgt, sei eine einfache Vorbemerkung vorausgeschickt. Sei $\boldsymbol{M}$ eine Menge angeordneter Körper mit folgenden Eigenschaften:

(a) Sind X, Y Körper aus $\boldsymbol{M}$ mit $X \subset Y$, so ist X ein angeordneter Unterkörper von Y.

(b) Sind X, Y Körper aus $\boldsymbol{M}$, so ist $X \subseteqq Y$ oder $Y \subset X$.

Man sieht dann sofort ein, daß sich die Vereinigungsmenge V der Elemente aus Körpern aus $\boldsymbol{M}$ auf eine und nur eine Weise derart zu einem angeordneten Körper machen läßt, daß jeder Körper $X \in \boldsymbol{M}$ ein angeordneter Unterkörper von V ist.

Gilt Bedingung (viii) nicht, so betrachten wir eine beliebige Ordinalzahl Σ und definieren durch vollständige transfinite Induktion für jede Ordinalzahl $\sigma \leqq \Sigma$ einen angeordneten Körper K_σ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $K = K_0$.

(b) Ist $\sigma < \lambda$, so ist K_λ eine echte, die Ordnung von K_σ fortsetzende, über K_σ archimedische Erweiterung von K_σ.

Daß man solche Körper K_σ konstruieren kann, folgt beim Schritt von σ auf $\sigma+1$ aus der Ungültigkeit von (viii) und beim Limesschritt aus der Vorbemerkung.

Aus (a), (b) folgt sofort, daß die Mächtigkeit von K_σ und insbesondere die von K_Σ wenigstens so groß wie die der Ordinalzahl σ bzw. Σ ist. Also folgt aus der Ungültigkeit von (viii) auch die von (vii), so daß (viii) aus (vii) folgt.

Gilt (viii), so sei M eine maximale, die Anordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung von K. Ist S, D ein dedekindscher Schnitt in M, so folgt aus Lemma 1.1 die Existenz einer die Ordnung von M fortsetzenden, über M archimedischen Erweiterung E von M und eines Elements $e \in E$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Ist } m \in M \text{ und } \begin{Bmatrix} m < e \\ e < m \end{Bmatrix}, \text{ so ist } \begin{Bmatrix} m \in S \\ m \in D \end{Bmatrix}.$$

Da M über K und E über M archimedisch ist, ist auch E eine die Ordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung von K, so daß $M = E$

aus der Maximalität von M folgt. Insbesondere liegt e in M, so daß S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in M ist. Also genügt M der Bedingung (v); und aus der Äquivalenz von (i) und (v) folgt $K \subseteq M \subseteq \boldsymbol{R}$, so daß (i) aus (viii) folgt: Die Bedingungen (i)–(viii) sind äquivalent.

Satz 1.3. *Die folgenden Eigenschaften des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *$K = \boldsymbol{R}$ ist der Körper aller reellen Zahlen.*

(ii) *Jeder dedekindsche Schnitt in K wird durch ein Element in K bestimmt.*

(iii) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung von K.*

(iv) (a) *Jeder dedekindsche Schnitt in K ist eigentlich.*
(b) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, in der K dicht ist.*

(v) (a) *Ist U ein Unterkörper von K, so ist 1 der einzige ordnungerhaltende Automorphismus von U.*
(b) *Ist E eine die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, so gibt es einen Zwischenkörper Z mit $K \subset Z \subseteq E$ und einen von 1 verschiedenen, ordnungerhaltenden Automorphismus von Z.*

Beweis. Daß jeder dedekindsche Schnitt im Bereich der reellen Zahlen durch eine reelle Zahl bestimmt wird, ist eine der wohlbekannten, den Körper $\boldsymbol{R}$ definierenden Eigenschaften: (ii) folgt aus (i).

Wir nehmen die Gültigkeit von (ii) an und betrachten eine die Ordnung von K fortsetzende, über K archimedische Erweiterung E von K. Ist $e \in E$, so sei S die Menge aller $s \in K$ mit $s < e$; und es sei D die Menge aller $d \in K$ mit $e \leqq d$. Aus der Archimedizität von E über K folgt, daß S, D ein dedekindscher Schnitt in K ist; und aus (ii) folgt die Existenz eines Elements $k \in K$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $s \in K$ und $s < k$, so ist $s \in S$;
ist $d \in K$ und $k < d$, so ist $d \in D$.

Wäre $e < k$, so gäbe es wegen der Archimedizität von K in E ein Element $h \in K$ mit $0 < h < k - e$. Aus $k - h < k$ folgt $k - h \in S$, da k und h und also auch $k - h$ zu K gehören; und hieraus folgt $k - h < e < k - h$, ein Widerspruch. Ebenso sieht man die Unmöglichkeit von $k < e$ ein, so daß $e = k \in K$ ist und also $E = K$ wird. Damit haben wir (iii) aus (ii) abgeleitet.

Gilt (iii), so gilt Bedingung (viii) des Satzes 1.2, woraus $K \subseteq \boldsymbol{R}$ folgt. Da aber jeder Unterkörper von $\boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{R}$ dicht ist [Satz 1.2, (i) + (ii)], so folgt $K = \boldsymbol{R}$ aus (iii): Die Bedingungen (i)–(iii) sind äquivalent.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i)–(iii), so folgt (iv. a) aus (ii) und (iv. b) aus (iii), da ja Dichte Archimedizität nach sich zieht. – Gilt umgekehrt (iv), so ergibt sich $K \subseteq \boldsymbol{R}$ aus (iv. a) und Satz 1.2, (v). Mit $\boldsymbol{Q}$ ist also auch K in $\boldsymbol{R}$ dicht; und wir folgern $K = \boldsymbol{R}$ aus (iv. b): Die Bedingungen (i)–(iv) sind äquivalent.

Die Äquivalenz der untereinander äquivalenten Bedingungen (i)–(iv) mit (v) ergibt sich mühelos aus Satz 1.2 und Hilfssatz (1.2. +).

Bemerkung 1.4. A. Es gibt eine Fülle echter Unterkörper von $\boldsymbol{R}$; und diese genügen alle der Bedingung (iv.a), woraus die Unentbehrlichkeit von (iv.b) folgt.

B. Die Unentbehrlichkeit von (iv.a) wird in Bemerkung 2.8 bewiesen werden.

C. Unter Benutzung der üblichen transfiniten Schlüsse leitet man mühelos aus Lemma 1.1 die folgende Existenzaussage ab:

(1.4.**C**) Zu jedem angeordneten Körper K gibt es einen die Ordnung von K fortsetzenden, über K archimedischen Körper E derart, daß jeder dedekindsche Schnitt in K durch Elemente aus E bestimmt wird.

Daß man durch transfinite Iteration dieser Existenzaussage nur in Ausnahmefällen einen angeordneten Körper A erhalten wird, dessen sämtliche dedekindsche Schnitte durch Elemente aus A bestimmt werden, sieht man aus der Äquivalenz der Eigenschaften (i) und (ii) des Satzes 1.3.

(1.4.**C**) zeigt auch die Unmöglichkeit, die Unterkörper U von $\boldsymbol{R}$ durch ihre Einbettbarkeit in einen Körper zu charakterisieren, dessen Elemente die dedekindschen Schnitte in U bestimmen.

2. Dichte und stetiger Abschluß

Ist U ein Unterkörper des angeordneten Körpers K und S, D ein dedekindscher Schnitt in K, so setzen wir

$$\omega_{K/U}(S, D) = \omega_U(S, D) = \omega(S, D) = S \cap U, D \cap U;$$

hierbei werden wir von den möglichen Indices nur soviel benutzen, wie zur Vermeidung von Mißverständnissen nötig scheint. Ist insbesondere $k \in K$, so bestimmt k zwei im allgemeinen verschiedene dedekindsche Schnitte in K. Von diesen wählen wir

$$S(k) = \text{Menge aller } s \in K \text{ mit } s < k;$$

$$D(k) = \text{Menge aller } d \in K \text{ mit } k \leqq d.$$

Anstelle von $\omega_{K/U}(S(k), D(k))$ werden wir kürzer $\omega_{K/U}(k)$ schreiben.

Lemma 2.1. *Die folgenden Eigenschaften des Unterkörpers U des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *K ist archimedisch über U.*

(ii) *$\omega_{K/U}(S, D)$ ist für jeden dedekindschen Schnitt S, D in K ein dedekindscher Schnitt in U.*

(iii) *$\omega_{K/U}(k)$ ist für jedes $k \in K$ ein dedekindscher Schnitt in U.*

(iv) *Ist S, D ein dedekindscher Schnitt in K und $\omega_{K/U}(S, D)$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U, so ist S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K.*

Beweis. Ist K archimedisch über U, so gibt es zu jedem $k \in K$ Elemente u, v in U mit $u \leqq k \leqq v$. Aus dieser Bemerkung folgt, daß für jeden dedekindschen

Schnitt S, D in K die Durchschnitte $S \cap U$, $D \cap U$ nicht leer sind, dieses Paar also ein dedekindscher Schnitt in U ist; (ii) folgt aus (i).

Es ist klar, daß der Spezialfall (iii) von (ii) aus (ii) folgt. Gilt (iii), so ist $D(k) \cap U$ für jedes $k \in K$ eine nicht leere Menge. Es gibt also zu jedem $k \in K$ ein $u \in U$ mit $k \leqq u$, so daß K archimedisch über U ist: (i)–(iii) sind äquivalent.

Sei K archimedisch über U und S, D ein dedekindscher Schnitt in K mit der Eigenschaft: $S \cap U$, $D \cap U$ ist ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U. Ist dann $0 < e \in K$, so folgt aus der Archimedizität von K über U die Existenz eines Elements $u \in U$ mit $0 < u < e$. Aus der Eigentlichkeit von $S \cap U$, $D \cap U$ ergibt sich die Existenz von Elementen $s \in S \cap U$ und $d \in D \cap U$ mit $0 < d - s < u < e$, woraus die Eigentlichkeit von S, D folgt. Also folgt (iv) aus (i).

Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an. Sei D die Menge aller $k \in K$ mit der Eigenschaft:

$$\text{Es gibt } u \in U \text{ mit } 0 < u \leqq k .$$

Weiter sei S das Komplement von D in K. Man überzeugt sich sofort davon, daß $D \cap U$ die Menge aller positiven Zahlen aus U und $S \cap U$ die Menge aller nicht positiven Zahlen aus U ist. Hieraus folgt sofort, daß S, D ein dedekindscher Schnitt in K und $\omega(S, D)$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U ist. Aus (iv) folgt dann, daß S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K ist. Ist $0 < k \in K$, so gibt es folglich Elemente $d \in D$ und $s \in S$ mit $0 < d - s < k$. Aus der Definition des Paares S, D ergibt sich die Existenz eines Elementes $u \in U$ mit $0 < u \leqq d$. Da s im Komplement S von D liegt, ist $s < \frac{1}{2} u \in U$, so daß

$$0 < \tfrac{1}{2} u = u - \tfrac{1}{2} u < d - s < k$$

wird. Also ist K archimedisch über U; die Bedingungen (i) und (iv) und also auch die Bedingungen (i)–(iv) sind äquivalent.

Lemma 2.2. *Ist U ein Unterkörper des angeordneten Körpers K und S^*, D^* ein dedekindscher Schnitt in U, so gibt es einen dedekindschen Schnitt S, D in K mit $\omega_{K/U}(S, D) = S^*, D^*$.*

Beweis. Man wähle für D die Menge aller $k \in K$, zu denen es ein $t \in D^*$ mit $t \leqq k$ gibt; und S sei das Komplement von D in K. Dann ist offenbar S, D ein dedekindscher Schnitt in K mit

$$S^* = S \cap U, D^* = D \cap U \quad \text{und also} \quad \omega(S, D) = S^*, D^* .$$

Lemma 2.3. *Die folgenden Eigenschaften des Unterkörpers U des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *U ist dicht in K.*

(ii) *Für jedes $k \in K$ ist U dicht in $U(k)$.*

(iii) *Ist $k \in K$ und $0 < e \in K$, so gibt es Elemente u', u'' in U mit $u' < k < u''$ und $0 < u'' - u' < e$.*

(iv) *Ist S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K, so ist $\omega_{K/U}(S, D)$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U.*

(v) *$\omega_{K/U}(k)$ ist für jedes $k \in K$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U.*

Beweis. Ist U dicht in K, so ist a fortiori U dicht in jedem Körper zwischen U und K, so daß (ii) aus (i) folgt. – Gilt (ii), ist $k \in K$ und $0 < e \in K$, so ist erstens U dicht in $U(e)$, so daß insbesondere $U(e)$ archimedisch über U ist. Also gibt es $u \in U$ mit $0 < u < \frac{1}{2}e$. Zweitens ist U dicht in $U(k)$. Also gibt es Elemente u', u'' in U mit

$$k - u \leqq u' \leqq k - \tfrac{1}{2}u < k < k + \tfrac{1}{2}u \leqq u'' \leqq k + u\,;$$

und es wird

$$0 < u'' - u' \leqq (k+u) - (k-u) = 2u < e\,.$$

Also folgt (iii) aus (ii).

Gilt (iii), ist S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K und $0 < e \in U$, so gibt es Elemente $s \in S$ und $d \in D$ mit $0 < d - s < 4^{-1}e$. Aus (iii) folgern wir die Existenz von Elementen d', d'', s', s'' in U mit $s' < s < s''$, $d' < d < d''$ und

$$0 < s'' - s' < 4^{-1}e, \quad 0 < d'' - d' < 4^{-1}e\,.$$

Aus $s \in S$ und $d \in D$ folgen dann $s' \in S \cap U$ und $d'' \in D \cap U$; und es wird

$$\begin{aligned} 0 < d'' - s' &= (d'' - d) + (d - s) + (s - s') \\ &< (d'' - d') + (d - s) + (s'' - s') < e\,. \end{aligned}$$

Also ist $S \cap U$, $D \cap U$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U; und wir haben (iv) aus (iii) abgeleitet.

Da $S(k)$, $D(k)$ offenbar ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K ist, folgt (v) aus (iv).

Gilt (v), so gilt auch Bedingung (iii) des Lemma 2.1, so daß K archimedisch über U ist. Sei weiter k', k'' ein Elementepaar aus K mit $k' < k''$. Aus $0 < k'' - k'$ und der Archimedizität von K über U folgt die Existenz von $u \in U$ mit $0 < u < 4^{-1}(k'' - k')$. Ist $k = \frac{1}{2}(k' + k'')$, so folgt aus (v) die Existenz von Elementen s, d in U mit

$$s < k \leqq d \quad \text{und} \quad 0 < d - s < u < 4^{-1}(k'' - k')\,.$$

Hieraus ergibt sich aber

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}d &= \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}(d-s) < \tfrac{1}{2}s + d - s < \tfrac{1}{2}k + 4^{-1}(k'' - k') = \tfrac{1}{2}k''\,, \\ \tfrac{1}{2}k' &= \tfrac{1}{2}k - 4^{-1}(k'' - k') < \tfrac{1}{2}d - (d-s) < \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}(d-s) = \tfrac{1}{2}s\,, \end{aligned}$$

so daß $k' < s < d < k''$ wird: U ist dicht in K; und wir haben die Äquivalenz der Bedingungen (i)–(v) dargetan.

Bemerkung 2.4. Ist U ein Unterkörper des angeordneten Körpers K, ist K archimedisch über U, so bewirkt $\omega_{K/U}$ wegen Lemma 2.1 und 2.2 eine eindeutige Abbildung des Bereichs aller dedekindschen Schnitte in K auf die Menge aller dedekindschen Schnitte in U. Ist U dicht in K, so folgern wir aus Lemma 2.1 und 2.3, daß $\omega_{K/U}$ sogar eine eineindeutige Abbildung zwischen der Menge der eigentlichen dedekindschen Schnitte in K und der Menge der eigentlichen dedekindschen Schnitte in U induziert.

Satz 2.5. *Zu jedem angeordneten Körper K gibt es einen und im wesentlichen nur einen die Ordnung von K fortsetzenden, angeordneten Oberkörper $\tilde{K}$ von K mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *K ist dicht in $\tilde{K}$.*

(b) *Ist Z ein die Anordnung von K fortsetzender, angeordneter Oberkörper von K, ist K dicht in Z, so gibt es einen und nur einen die Elemente aus K fixierenden, ordnungserhaltenden Isomorphismus von Z in K.*

(c) *Es gibt keine echte, die Ordnung von $\tilde{K}$ fortsetzende Erweiterung von $\tilde{K}$, in der $\tilde{K}$ dicht ist.*

(d) *Die Abbildung $t \to \omega_{\tilde{K}/K}(t)$ ist eine eineindeutige Abbildung von $\tilde{K}$ auf die Menge aller eigentlichen dedekindschen Schnitte in K.*

Wir werden $\tilde{K}$ *den stetigen Abschluß von* K nennen.

Beweis. Aus der Menge der eigentlichen dedekindschen Schnitte in K kann man in der üblichen Weise einen die Ordnung von K fortsetzenden, angeordneten Oberkörper $\tilde{K}$ von K machen; vgl. hierzu Baer [p. 217]. Dann ist $\omega_{\tilde{K}/K}(t)$ für jedes $t \in \tilde{K}$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K; und es folgt aus Lemma 2.3, daß K in $\tilde{K}$ dicht ist. – Ist Z ein die Anordnung von K fortsetzender, angeordneter Oberkörper von K, ist K dicht in Z, so ist $\omega_{Z/K}(z)$ für jedes $z \in Z$ wegen Lemma 2.3 ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K; und die Abbildung $z \to \omega_{Z/K}(z)$ induziert den gesuchten und offenbar eindeutig bestimmten, die Elemente aus K fixierenden, ordnungserhaltenden Isomorphismus von Z in $\tilde{K}$. – Ist E ein die Ordnung von $\tilde{K}$ fortsetzender, angeordneter Oberkörper von $\tilde{K}$, ist $\tilde{K}$ dicht in E, so folgt aus der Dichtheit von K in $\tilde{K}$, daß K in E dicht ist; und Anwendung der Eigenschaft (b) zeigt $E = \tilde{K}$. Also genügt $\tilde{K}$ den Bedingungen (a)–(d); und daß $\tilde{K}$ hierdurch wesentlich eindeutig bestimmt ist, erschließt man etwa aus (a), (b).

Zusatz 2.6. *Die folgenden Eigenschaften des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *$K = \tilde{K}$.*

(ii) *$K = \tilde{U}$ für wenigstens einen Unterkörper U von K.*

(iii) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, in der K dicht ist.*

(iv) *Ist der Unterkörper U von K dicht in K, so ist $K = \tilde{U}$.*

(v) *Jeder eigentliche dedekindsche Schnitt in K wird durch ein Element aus K bestimmt.*

Wir werden Körper K mit den äquivalenten Eigenschaften (i)–(v) *stetig abgeschlossene Körper* nennen.

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt. Daß (iii) aus (ii) folgt, ergibt sich aus Satz 2.5, (c). Gilt (iii), ist der Unterkörper U von K dicht in K, so folgt aus Satz 2.5, (b) die Existenz eines ordnungerhaltenden, die Elemente aus U fixierenden Isomorphismus von K in $\tilde{U}$. Wir können also o. B. d. A. annehmen, daß $K \subseteqq \tilde{U}$ ist. Aus $U \subseteqq K \subseteqq \tilde{U}$ folgt wegen Satz 2.5, (a), daß K in $\tilde{U}$ dicht ist, so daß aus (iii) sich $K = \tilde{U}$ ergibt: (iv) folgt aus (iii). Da K in K dicht ist, folgt (i) aus (iv): Die Eigenschaften (i)–(iv) sind äquivalent.

Anwendung von Satz 2.5, (d) zeigt, daß (v) aus (i) folgt. Gilt umgekehrt (v), so ergibt Anwendung von Satz 2.5, (d) die Identität $K = \tilde{K}$: Die Bedingungen (i)–(v) sind äquivalent.

Folgerung 2.7. *Der Unterkörper U des angeordneten Körpers K ist dann und nur dann dicht in K, wenn $U \subseteq K \subseteq \tilde{U}$ gilt [wenn es also einen die Elemente in U fixierenden, ordnungerhaltenden Isomorphismus von K in $\tilde{U}$ gibt].*

Dies folgt mühelos aus Satz 2.5.

Bemerkung 2.8. Es gibt bekanntlich viele angeordnete Körper K, die über ihrem Primkörper $\boldsymbol{Q}$ nicht archimedisch sind. Die wegen Satz 2.5 existierende Erweiterung $\tilde{K}$ von K ist dann ebenfalls nicht über $\boldsymbol{Q}$ archimedisch und ist also kein Unterkörper von $\boldsymbol{R}$ [Satz 1.2]. Andererseits gibt es keine echte Erweiterung von $\tilde{K}$, in der $\tilde{K}$ dicht ist [Satz 2.5, (c)]. Hieraus folgt die Unentbehrlichkeit der Bedingung (iv. a) des Satzes 1.3.

Lemma 2.9. *Ist der angeordnete Körper K archimedisch über seinem Unterkörper U, so hat die Menge $E = E_{K/U}$ aller $k \in K$ mit eigentlichem $\omega_{K/U}(k)$ die folgenden Eigenschaften:*

(a) *E ist ein U enthaltender Unterkörper von K, in dem U dicht ist.*

(b) *Der Unterkörper V mit $U \subseteq V \subseteq K$ ist dann und nur dann in E enthalten, wenn U in V dicht ist.*

(c) *E ist das Compositum aller U enthaltenden Unterkörper von K, in denen U dicht ist.*

Beweis. Es ist klar, daß $\omega_{K/U}(u)$ für jedes $u \in U$ eigentlich ist, daß also U in E enthalten ist.

Sind a, b Elemente aus E, ist $0 < e \in K$, so folgt aus der Eigentlichkeit der dedekindschen Schnitte $\omega_{K/U}(a)$ und $\omega_{K/U}(b)$ die Existenz von Elementen a', a'', b', b'' in U mit

$$a' < a < a'' \quad \text{und} \quad 0 < a'' - a' < \tfrac{1}{2} e,$$
$$b' < b < b'' \quad \text{und} \quad 0 < b'' - b' < \tfrac{1}{2} e.$$

Dann ist auch

$$a' + b' < a + b < a'' + b'',$$
$$0 < (a'' + b'') - (a' + b') = (a'' - a') + (b'' - b') < e,$$
$$a' - b'' < a - b < a'' - b',$$
$$0 < (a'' - b') - (a' - b'') = (a'' - a') + (b'' - b') < e.$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\omega_{K/U}(a + b)$ und $\omega_{K/U}(a - b)$ eigentliche dedekindsche Schnitte in U sind; und es folgt:

(1) Mit a und b gehören auch $a + b$ und $a - b$ zu E.

Wir betrachten positive Elemente a, b aus E und $0 < e \in K$. Aus der Archimedizität von K über U folgt die Existenz von $u \in U$ mit $a < u$ und $b < u$.

Insbesondere ist $0<u$, so daß auch $f=\frac{1}{2}u^{-1}e$ ein positives Element aus K ist. Aus der Eigentlichkeit von $\omega_{K/U}(a)$ und $\omega_{K/U}(b)$ ergibt sich die Existenz von Elementen a^*, a^{**}, b^*, b^{**} in U mit

$$a^*<a<a^{**} \quad \text{und} \quad 0<a^{**}-a^*<f,$$
$$b^*<b<b^{**} \quad \text{und} \quad 0<b^{**}-b^*<f.$$

Da a und b positiv sind und $a<u$, $b<u$ ist, können wir o. B. d. A. annehmen, daß

$$0\leqq a^*<a^{**}\leqq u, \quad 0\leqq b^*<b^{**}\leqq u$$

ist. Dann wird auch

$$a^*b^*<ab<a^{**}b^{**},$$
$$0<a^{**}b^{**}-a^*b^*=a^{**}(b^{**}-b^*)+b^*(a^{**}-a^*)<$$
$$<(a^{**}+b^*)f\leqq 2uf=e.$$

Also ist $\omega_{K/U}(ab)$ eigentlich und $ab\in E$. Wir haben gezeigt:

(2) Sind a, b positive Elemente aus E, so ist auch $ab\in E$.

Sind a, b irgendwelche Elemente aus E, so gehört ab sicher dann zu E, wenn a oder b Null ist. Sei also $ab\neq 0$. Haben a und b gleiches Vorzeichen, so folgt aus $ab=(-a)(-b)$ und (2) die Zugehörigkeit von ab zu E. Haben a und b entgegengesetztes Vorzeichen, so folgt aus $a(-b)=-ab=(-a)b$ und (2) die Zugehörigkeit von $-ab$ zu E; und es folgt aus (1) die Zugehörigkeit von ab zu E. Damit haben wir gezeigt:

(3) E ist ein U umfassender Unterring von K.

Wir betrachten ein Element c mit $0<c\in E$ und ein Element e mit $0<e\in K$. Aus der Archimedizität von K über U folgt die Existenz eines Elements $u\in U$ mit $0<u<c$. Dann ist auch $f=eu^2$ ein positives Element aus K. Aus der Eigentlichkeit von $\omega_{K/U}(c)$ folgt die Existenz von Elementen c', c'' in U mit

$$c'<c<c'' \quad \text{und} \quad 0<c''-c'<f.$$

Wegen $0<u<c$ können wir o. B. d. A. annehmen, daß

$$0<u\leqq c'$$

ist. Dann wird

$$0<c''^{-1}<c^{-1}<c'^{-1}\leqq u^{-1};$$

und es wird

$$0<c'^{-1}-c''^{-1}=(c''-c')c'^{-1}c''^{-1}<fu^{-2}=e.$$

Also ist $\omega_{K/U}(c^{-1})$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U; und wir haben gezeigt:

(4) Ist $0<c\in E$, so ist auch $c^{-1}\in E$.

Aus (3) und (4) folgt ohne weiteres, daß E ein U umfassender Unterkörper von K ist. Aus der Definition von E ergibt sich sofort, daß Bedingung (v) des Lemma 2.3 von dem angeordneten Körper E und seinem Unterkörper U erfüllt wird. Also ist U dicht in E.

Ist V ein Unterkörper von K mit $U \subseteqq V \subseteqq E$, so ist U dicht in V, da ja U dicht in E ist. – Ist umgekehrt V ein U enthaltender Unterkörper von K, in dem U dicht ist, so ist $\omega_{V/U}(v)$ für jedes $v \in V$ wegen Lemma 2.3, (v) eigentlich, so daß aus $\omega_{K/U}(v) = \omega_{V/U}(v)$ die Zugehörigkeit von v zu E und $V \subseteqq E$ folgen. Damit haben wir (a) und (b) bewiesen; und (c) ergibt sich durch Combination von (a) und (b).

Bemerkung 2.10. A. Wäre K nicht archimedisch über U, so gäbe es Elemente $j \in K$ mit $0 < j < u$ für jedes positive $u \in U$. Dann würde aber $\omega_{K/U}(j)$ aus der Klasse der nicht positiven und der Klasse der positiven Elemente aus U bestehen, wäre also ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U. Damit hätten wir die Zugehörigkeit von j zu E dargetan. Daraus würde aber folgen, daß U gewiß nicht dicht in E ist: Die Voraussetzung der Archimedizität von K über U ist unentbehrlich für die Gültigkeit von Lemma 2.9.

B. Den im Beweis des Satzes 2.5 enthaltenen, durch einen Hinweis auf die Literatur erledigten Beweis für die Existenz des Erweiterungskörpers $\tilde{K}$ von K könnte man auch folgendermaßen führen: Man bildet zunächst gemäß Bemerkung 1.4, **C** einen die Anordnung von K fortsetzenden, über K archimedischen Körper H mit der Eigenschaft, daß alle dedekindschen Schnitte aus K durch Elemente aus H definiert werden, bildet dann gemäß Satz 2.9 den Unterkörper $E_{H/K}$ und zeigt seine Identität mit $\tilde{K}$.

Folgerung 2.11. *Ist der angeordnete Körper $K = \tilde{K}$ archimedisch über seinem Unterkörper U, so ist das Compositum $E_{K/U}$ aller U enthaltenden Unterkörper von K, in denen U dicht ist, im wesentlichen mit $\tilde{U}$ identisch.*

Beweis. Es folgt aus Lemma 2.9, daß die Menge E aller $k \in K$ mit eigentlichem $\omega_{K/U}(k)$ ein U enthaltender Unterkörper von K ist, in dem U dicht ist, und der alle U enthaltenden Unterkörper von K, in denen U dicht ist, enthält.

Ist S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in U, so folgt aus Lemma 2.2 die Existenz eines dedekindschen Schnitts S^*, D^* in K mit $S = U \cap S^*$ und $D = U \cap D^*$. Anwendung von Lemma 2.1, (iv) zeigt, daß S^*, D^* ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K ist, da ja K archimedisch über U und S, D eigentlich ist. Aus $K = \tilde{K}$ folgt die Existenz eines S^*, D^* definierenden Elements k in K. Dann ist $\omega_{K/U}(k)$ eigentlich, so daß $k \in E$ ist. Damit haben wir $\tilde{U} \subseteqq E$ gezeigt. Da aber U in E dicht ist, folgt $E = \tilde{U}$ aus Satz 2.5, (c).

Bemerkung 2.12. Für die Unmöglichkeit $\tilde{U} = K$ zu beweisen vgl. etwa Satz 5.4. Es gibt auch einfachere Beispiele.

Folgerung 2.13. *Ist der angeordnete Körper K über seinem Unterkörper U archimedisch, ist $\mathbf{M}$ eine Menge von Unterkörpern von K, über denen K archimedisch ist, ist $U \cap X$ dicht in jedem $X \in \mathbf{M}$, so ist U dicht im Compositum von U und den Unterkörpern aus $\mathbf{M}$.*

Beweis. Da K archimedisch über U ist, ist die Menge $E = E_{K/U}$ aller $k \in K$ mit eigentlichem $\omega_{K/U}(k)$ wegen Lemma 2.9 ein U enthaltender Unterkörper von K, in dem U dicht ist. Sei $t \in X \in M$ und $0 < u \in U$. Da K archimedisch über X ist, gibt es $x \in X$ mit $0 < x < u$. Da $X \cap U$ dicht in X ist, folgt aus Lemma 2.3, (iii) die Existenz von Elementen t', t'' in $X \cap U$ mit $t' < t < t''$ und $0 < t'' - t' < x < u$. Hieraus folgt aber die Eigentlichkeit des dedekindschen Schnittes $\omega_{K/U}(t)$, so daß $t \in E$ ist. Damit haben wir aber $X \subseteqq E$ für jedes $X \in M$ dargetan. Da $U \subseteqq E$ ist, folgt, daß das Compositum C von U und den Unterkörpern $X \in M$ in E enthalten ist. Aus $U \subseteqq C \subseteqq E$ und der Dichte von U in E folgt, daß U in C dicht ist.

3. Dedekindscher Abschluß

Das folgende Resultat wird zwar im Verlauf unserer Überlegungen nicht benötigt werden, wird aber im Zusammenhang mit den Beispielen des Abschnitts 5 die hier behandelten Probleme ins rechte Licht setzen.

Satz 3.1. *Ist n eine positive ganze Zahl und jedes positive Element in dem angeordneten Körper K eine n-te Potenz eines positiven Elements aus K, so ist auch jedes positive Element aus $\tilde{K}$ eine n-te Potenz eines positiven Elements aus $\tilde{K}$.*

Beweis. Ist $0 < p \in \tilde{K}$, so ist $\omega_{\tilde{K}/K}(p) = S, D$ der p definierende eigentliche dedekindsche Schnitt in K. Aus $0 < p$ folgt, daß S positive Elemente enthält und D nur aus positiven Elementen besteht. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß es für jedes k mit $0 < k \in K$ ein und nur ein k' mit $0 < k' \in K$ und $k'^n = k$ gibt. Da D nur aus positiven Elementen besteht, ist die Menge D' aller d' mit $d \in D$ wohlbestimmt; und das Complement S' von D' in K ist genau die Menge aller nicht positiven Elemente aus K zusammen mit allen s' mit $0 < s \in S$. Man sieht sofort ein, daß S', D' ein dedekindscher Schnitt in K ist.

Aus $0 < p$ folgt die Existenz eines r mit $0 < r \in S$. Ist weiter e mit $0 < e \in K$ gegeben, so setzen wir $e^* = nr'^{n-1}e$, so daß auch $0 < e^* \in K$ ist. Da S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K ist, gibt es $s \in S$ und $d \in D$ mit $0 < d - s < e^*$; und wir können o. B. d. A. annehmen, daß $r \leqq s$ ist. Dann wird auch $0 < r' \leqq s' < d'$; und hieraus folgt

$$nr'^{n-1} \leqq \sum_{i=0}^{n-1} d'^i s'^{n-1-i}.$$

Weiter ist

$$d - s = d'^n - s'^n = (d' - s') \sum_{i=0}^{n-1} d'^i s'^{n-1-i}$$

und also

$$d' - s' = (d - s) \left[\sum_{i=0}^{n-1} d'^i s'^{n-i-1} \right]^{-1} < e^* n^{-1} r'^{1-n} = e.$$

Damit haben wir die Eigentlichkeit des dedekindschen Schnitts S', D' in K dargetan. Das durch S', D' definierte Element p' in $\tilde{K}$ ist offenbar positiv und genügt der Gleichung $p'^n = p$.

Bemerkung 3.2. A. Die Unentbehrlichkeit der in Satz 3.1 gemachten Voraussetzung wird durch Satz 5.1 in Evidenz gesetzt.

B. Ist die multiplikative Gruppe der positiven Zahlen aus dem angeordneten Körper K radizierbar, so ist die Voraussetzung von Satz 3.1 für jedes ganze positive n erfüllt; und hieraus folgt, daß auch die multiplikative Gruppe der positiven Elemente aus $\tilde{K}$ radizierbar ist.

C. Ist der Körper R reell abgeschlossen, so folgt aus Satz A, (iii), daß jede positive Zahl aus R für jedes positive ganze n eine n-te Potenz ist; und hieraus folgt die Radizierbarkeit der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen aus R. Dies gestattet die Anwendung der Bemerkung **B** auf R. Das so erhaltene Resultat ist aber auch im folgenden Resultat enthalten.

Satz 3.3. *Mit R ist auch $\tilde{R}$ reell abgeschlossen.*

Beweis. Es gibt eine und im wesentlichen nur eine reell abgeschlossene, über $\tilde{R}$ algebraische, die Ordnung von $\tilde{R}$ fortsetzende Erweiterung E von $\tilde{R}$ [Satz C]. Da R wegen Satz 2.5, (a) in $\tilde{R}$ dicht ist, ist $\tilde{R}$ über R archimedisch. Da E über $\tilde{R}$ algebraisch ist, ist E wegen Lemma F über $\tilde{R}$ archimedisch. Also folgt:

(1) E ist über R archimedisch.

Ist $s \in \tilde{R}$ und $e \in E$ mit $s < e$, so folgt aus der Archimedizität von E über R die Existenz von $r \in R$ mit $0 < r < e - s$, so daß $s < r + s < e$ ist. Da R wegen Satz 2.5, (a) in $\tilde{R}$ dicht ist, gibt es ein $r' \in R$ mit $s < r' < r + s < e$. Damit haben wir [aus Symmetriegründen] gezeigt:

(2) Ist $a \in \tilde{R}$ und $a \neq b \in E$, so gibt es $c \in R$ [zwischen a und b, also] mit $0 < (b-c)(c-a)$.

Wäre unser Satz falsch, so wäre $\tilde{R} \subset E$. Dann gäbe es also Elemente in E, die nicht in $\tilde{R}$ liegen. Da E nach Konstruktion algebraisch über $\tilde{R}$ ist, genügt jedes dieser Elemente einer algebraischen Gleichung über $\tilde{R}$. Es gibt also unter diesen Elementen eines w, das Nullstelle eines Polynoms $f(x)$ minimalen Grades n über $\tilde{R}$ ist. Wir notieren die folgenden Eigenschaften von w, f, n:

(3) $w \in E$, $w \notin \tilde{R}$, $f(x)$ ist ein Polynom des Grades n über $\tilde{R}$ und $f(w) = 0$.

(4) Ist der Grad des Polynoms h über $\tilde{R}$ kleiner als n, ist $v \in E$ und $h(v) = 0$, so ist $v \in \tilde{R}$.

Wäre f reduzibel über $\tilde{R}$, so genügte w einer Gleichung über $\tilde{R}$, deren Grad kleiner als n wäre. Wegen (4) läge dann w in $\tilde{R}$, was (3) widerspricht. Also gilt:

(5) f ist irreduzibel über $\tilde{R}$.

Der Grad des g. g. T. (f, f') ist höchstens $n-1$. Also folgt aus (5), daß der Grad von (f, f') Null ist:

(6) f und f' sind teilerfremd.

Hieraus folgt insbesondere:

(7) f und f' haben keine gemeinsamen Nullstellen [in E] und f hat keine „mehrfachen" Nullstellen.

Die in E liegenden Nullstellen von f wollen wir der Größe nach anordnen:

$$r_1 < \cdots < r_m \quad \text{und} \quad m \leqq n .$$

Läge eines der r_i in $\tilde{R}$, so folgte aus der Irreduzibilität von f, daß $n=1$ ist und also $w=r_1$ in $\tilde{R}$ läge. Dies widerspricht (3); und es gilt:

(8) $1<n$ und kein r_i liegt in $\tilde{R}$,

so daß wir o. B. d. A. annehmen können:

(9) $w=r_1$.

Wegen Zusatz B gilt in E der Satz von Rolle. Es folgt, daß f' in E zwischen r_i und r_{i+1} [mit Ausschluß der Gleichheit] eine Nullstelle besitzt; und diese gehört wegen (4) zu $\tilde{R}$. Wir notieren dies:

(10) Zu jedem i mit $0<i<m$ gibt es wenigstens ein $s \in \tilde{R}$ mit $r_i < s < r_{i+1}$ und $f'(s)=0$.

Da f' nur endlich viele Nullstellen in E besitzt, die wegen (7) sämtlich von den r_i verschieden sind, können wir aus (9), (10), (1) und (2) folgendes erschließen:

(11) Es gibt Elemente a, b in R mit folgenden Eigenschaften: $a<w<b$; aus $a \leqq r \leqq b$ und $r \in E$ folgt $f'(r) \neq 0$; aus $r \in E$, $a \leqq r \leqq b$ und $r \neq w$ folgt $f(r) \neq 0$.

Da f' im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ aller $c \in E$ mit $a \leqq c \leqq b$ keine Nullstellen besitzt, ergibt Zusatz B die Existenz eines positiven $e \in E$, so daß entweder $e \leqq f'(r)$ für alle $r \in [a, b]$ oder $f'(r) \leqq -e$ für alle $r \in [a, b]$ gilt. Wegen $(-f)' = -f'$ können wir o. B. d. A. die Gültigkeit der ersten dieser Alternativen annehmen. Aus der Archimedizität von E über R folgt weiter die Existenz eines $k \in R$ mit $0<k<e$. Folglich gilt:

(12) Es gibt ein $s \in R$ mit $0<s<f'(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

Wegen Zusatz B gilt in E der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Folglich gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$0<s<f'(c)=[f(b)-f(w)]\,[b-w]^{-1}=f(b)\,[b-w]^{-1},$$

woraus insbesondere $0<f(b)$ folgt. Entsprechend gilt $f(a)<0$. Wir notieren dieses Ergebnis:

(13) $f(a)<0<f(b)$.

Mit a, b gehört auch das Maximum d der Zahlen $|a^i|$, $|b^i|$ für $0 \leqq i \leqq n$ zu R; und es ist gewiß $1 \leqq d \in R$. Aus (13) folgt, daß das Minimum der Zahlen $-f(a)$,

$f(b)$ eine positive Zahl aus E ist; und aus der Archimedizität von E über R folgt also die Existenz einer Zahl $r \in R$ mit $0 < r < -f(a), f(b)$. Mit $n+1, d, r$ gehört auch $\frac{1}{2}(n+1)^{-1} d^{-1} r = j$ zu R; und es gilt

(14′) $0 < 2(n+1)\, dj = r < -f(a), f(b)$.

Ist p irgendeine positive Zahl aus E, so folgt aus der Archimedizität von E über R [wegen (1)] die Existenz eines $q \in R$ mit $0 < q < p$. Dann ist $(n+1)^{-1} d^{-1} sq$ [wegen (12)] eine positive Zahl aus R, so daß auch das Minimum e der Zahlen j und $(n+1)^{-1} d^{-1} sq$ zu R gehört. Damit haben wir gezeigt:

(14) Zu jeder positiven Zahl $p \in E$ gibt es eine positive Zahl $e = e(p) \in R$ mit $0 < 2(n+1) de < -f(a), f(b)$ und $(n+1) ds^{-1} e < p$. Hierbei ist $0 < s < f'(t)$ für $b \in [a, b]$ und d das Maximum der $|a^i|, |b^i|$ mit $0 \leqq i \leqq n$.

Wir betrachten im folgenden zu vorgegebenem positivem $p \in E$ eine den Bedingungen von (14) genügende positive Zahl $e \in R$. Wir erinnern daran, daß

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \quad \text{mit} \quad f_i \in \tilde{R}$$

ist. Da R wegen Satz 2.5, (a) in $\tilde{R}$ dicht ist, gibt es Elemente $g_i \in R$ mit $|f_i - g_i| < e$ für $0 \leqq i \leqq n$. Setzen wir

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i ,$$

so wird also für $y \in [a, b]$

$$|f(y) - g(y)| = \left| \sum_{i=0}^{n} (f_i - g_i) y^i \right| \leqq \sum_{i=0}^{n} |f_i - g_i|\, |y|^i < (n+1) ed .$$

Wir notieren dieses Resultat:

(15) $|f(y) - g(y)| < (n+1) ed$ für $y \in [a, b]$.

Ist $w \neq y \in [a, b]$, so folgt aus dem wegen Zusatz B in E geltenden Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Existenz eines Elementes $y^* \in [a, b]$ mit

$$f(y) = f(y) - f(w) = (y - w) f'(y^*) ;$$

und hieraus ergibt sich wegen (12)

$$0 < f'(y^*)^{-1} = (y - w) f(y)^{-1} < s^{-1} .$$

Damit haben wir gezeigt:

(16) Ist $w \neq y \in [a, b]$, so ist $0 < (y - w) f(y)^{-1} < s^{-1}$.

Wäre $0 \leqq g(a)$, so würde aus (14), (15) folgen, daß

$$0 < 2(n+1) de < -f(a) \leqq -f(a) + g(a) = |f(a) - g(a)| < (n+1) ed$$

ist, ein Widerspruch. Also ist $g(a) < 0$; und ebenso sieht man $0 < g(b)$ ein. Da der Körper R reell abgeschlossen ist, gilt in R der Weierstraßsche Nullstellensatz [Satz A, (ii)]. Also gibt es ein $t \in R$ mit $a < t < b$ und $g(t) = 0$. Aus (15) folgt dann

$$|f(t)| = |f(t) - g(t)| < (n+1)ed . \qquad (+)$$

Da $t \in R$ und $w \notin \tilde{R}$ [wegen (3)] ist, ist $w \neq t \in [a, b]$; und Anwendung von (16) ergibt

$$0 < (t-w)\, f(t)^{-1} < s^{-1} .$$

Hieraus folgt wegen $(+)$ und (14)

$$|t-w| < |f(t)|\, s^{-1} < (n+1)eds^{-1} < p .$$

Damit haben wir gezeigt:

(17) Ist $0 < p \in E$, so gibt es ein $t \in R$ mit $[a < t < b$ und$]$ $|t-w| < p$.

Ist $0 < p \in E$, so gibt es wegen der Archimedizität von E über R [siehe (1)] ein $q \in R$ mit $0 < q < \frac{1}{2} p$. Wenden wir (17) auf q an, so folgt die Existenz eines Elements $t \in R$ mit $|t-w| < q$. Ist erstens $t < w$, so wird $0 < w - t < q$ und $w - q < t < w < t + q$ mit t und $t+q$ in R und $|t-(t+q)| < \frac{1}{2} p$. Ist aber $w \leqq t$, so wird sogar $w < t$, da w nicht in $\tilde{R}$ liegt; und es folgt $0 < t - w < q$ und $t - q < w < t$ mit $t-q$ und t in R und $|t-(t-q)| < \frac{1}{2} p$. Also gilt:

(18) Ist $0 < p \in E$, so gibt es Elemente t', t'' in R mit $t' < w < t''$ und $|t' - t''| < p$.

Hieraus folgt aber, daß der von w in R induzierte dedekindsche Schnitt $\omega_{E/R}(w)$ eigentlich ist. Dieser wird also durch ein Element $r \in \tilde{R}$ definiert. Aus (18) folgt aber

$$|w-r| < p \quad \text{für jedes positive} \quad p \in E ,$$

so daß $w = r \in \tilde{R}$ ist im Widerspruch zu (3). Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit unseres Satzes.

Bemerkung 3.4. Ohne die Voraussetzung der reellen Abgeschlossenheit von R kann man im allgemeinen nicht die reelle Abgeschlossenheit von $\tilde{R}$ beweisen; siehe Satz 5.1, (b). Ist andererseits R der Körper der rationalen Zahlen, so ist $\tilde{R}$ der reell abgeschlossene Körper $\mathbf{R}$. Damit haben wir gezeigt, daß die Voraussetzung der reellen Abgeschlossenheit von R für die reelle Abgeschlossenheit von $\tilde{R}$ zwar unentbehrlich, aber nicht notwendig ist.

Zusatz 3.5. (A) *Ist der reell abgeschlossene Körper R archimedisch über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper U, so ist die Menge $E = E_{R/U}$ aller $r \in R$ mit eigentlichem $\omega_{R/U}(r)$ ein reell abgeschlossener [U enthaltender] Unterkörper von R.*

(B) *Ist der reell abgeschlossene Körper $R = \tilde{R}$ archimedisch über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper U, so ist $E_{R/U} = \tilde{E}_{R/U}$ reell abgeschlossen [und stetig abgeschlossen].*

(C) *Ist der angeordnete Körper $K = \tilde{K}$ archimedisch über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper R, so gibt es einen reell abgeschlossenen, R ent-*

haltenden Unterkörper $M = \tilde{M}$ von K derart, daß M der einzige M enthaltende, reell abgeschlossene Unterkörper von K ist.

Beweis. Ist der reell abgeschlossene Körper R archimedisch über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper U, so folgt aus Lemma 2.9, daß $E = E_{R/U}$ ein U enthaltender Unterkörper von R ist, daß U in E dicht ist, und daß E das Compositum aller U enthaltenden Unterkörper von R ist, in denen U dicht ist. Wir bilden den stetigen Abschluß $\tilde{E}$ von E; und bemerken, daß E wegen Lemma 2.5, (a) in $\tilde{E}$ dicht ist. Da U in E und E in $\tilde{E}$ dicht ist, ist U in $\tilde{E}$ dicht. Aus Folgerung 2.7 folgern wir $U \subseteqq \tilde{E} \subseteqq \tilde{U}$; und dies ergibt $\tilde{E} = \tilde{U}$ wegen Lemma 2,5, (a), (c). Aus der reellen Abgeschlossenheit von U folgt wegen Satz 3.3 die reelle Abgeschlossenheit von $\tilde{U} = \tilde{E}$. Sei A die Menge der über E algebraischen Elemente aus R und B die Menge der über E algebraischen Elemente aus $\tilde{E}$. Aus der reellen Abgeschlossenheit von R und $\tilde{E}$ folgt wegen Lemma E, (II), daß A und B reell abgeschlossene Körper sind. Also ist sowohl A wie B ein reeller Abschluß von E; und es folgt aus Satz C, daß A und B äquivalente Erweiterungen von E sind. Wegen Lemma 2.5, (a) ist E in $\tilde{E}$ dicht. Hieraus folgt, daß E in B und also auch in A dicht ist. Da aber U in E dicht ist, ist U auch in A dicht; und da E das Compositum aller U enthaltenden Unterkörper von R ist, in denen U dicht ist, folgt $A \subseteqq E \subseteqq A$, so daß $E = A$ reell abgeschlossen ist. Damit haben wir (A) bewiesen.

(B) ergibt sich sofort aus Folgerung 2.11 und (A).

Ist der angeordnete Körper $K = \tilde{K}$ archimedisch über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper R, so ist die Menge $\mathbf{M}$ der R enthaltenden, reell abgeschlossenen Unterkörper von K nicht leer $[R \in \mathbf{M}]$. Da die Eigenschaft der reellen Abgeschlossenheit wegen Satz A, (viii) eine lokale Eigenschaft ist, können wir das Maximumprinzip der Mengenlehre auf $\mathbf{M}$ anwenden: Es gibt ein maximales Element $M \in \mathbf{M}$. Dann ist M ein R enthaltender, reell abgeschlossener Unterkörper von K; und M ist der einzige M enthaltende, reell abgeschlossene Unterkörper von K. Da K über R archimedisch ist, ist K auch über M archimedisch. Wegen Lemma 2.9, (c) ist $E_{K/M}$ das Compositum aller M enthaltenden Unterkörper von K, in denen M dicht ist; und aus $K = \tilde{K}$ folgt $E_{K/M} = \tilde{E}_{K/M}$ wegen Folgerung 2.11. Da M in $E_{K/M}$ dicht ist [Lemma 2.9, (a)], können wir aus $E_{K/M} = \tilde{E}_{K/M}$, Lemma 2.5 und Folgerung 2.7 erschließen, daß $\tilde{M} = E_{K/M}$ ist. Mit M ist wegen Satz 3.3 auch $\tilde{M}$ reell abgeschlossen; und aus $M \subseteqq \tilde{M} \subseteqq K$ und der Maximalität von M ergibt sich $M = \tilde{M}$.

Satz 3.6. *Die folgenden Eigenschaften des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *K ist reell abgeschlossen und $K = \tilde{K}$.*

(ii) *Ist E eine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, so gibt es keinen über K algebraischen und in E dichten Körper zwischen K und E.*

(iii) (a) *Es gibt einen reell abgeschlossenen, in K dichten Unterkörper von K.*
(b) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, in der K dicht ist.*

(iv) $\left\{\right.$ (a) *Es gibt einen reell abgeschlossenen Unterkörper von K, über dem K archimedisch ist.*
(b) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, in der K dicht ist.*
(c) *Ist K über seinem reell abgeschlossenen Unterkörper $U = \tilde{U} \neq K$ archimedisch, so gibt es einen reell abgeschlossenen Unterkörper V mit $U \subset V \subseteqq K$.*

Körper K mit den äquivalenten Eigenschaften (i)–(iv) wollen wir *dedekind-abgeschlossen* nennen.

Beweis. Gilt (i), ist E eine die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K und Z ein Körper zwischen K und E, der über K algebraisch und in E dicht ist, so ist $Z = K$, da K reell abgeschlossen ist: und aus Lemma 2.5, (c) folgt $K = E$, da $K = \tilde{K}$ und K in E dicht ist. Also ist (ii) eine Folge von (i). – Genügt weiter K der Bedingung (ii), so betrachten wir zunächst den wegen Satz C existierenden reellen Abschluß von K, der wegen (ii) gleich K sein muß: K ist reell abgeschlossen. Aus Satz 2.5, (a) folgt, daß K in $\tilde{K}$ dicht ist; und es folgt aus (ii), daß $K = \tilde{K}$ ist. Also gilt (i) und wir haben die Äquivalenz von (i) und (ii) gezeigt.

Es ist klar, daß die Bedingungen (iii.a) und (iv.a, c) aus (i) und die identischen Bedingungen (iii.b) = (iv.b) aus (ii) folgen; die Bedingungen (iii) und (iv) folgen aus den äquivalenten Bedingungen (i) und (ii).

Gilt schließlich eine der Bedingungen (iii) oder (iv), so folgt $K = \tilde{K}$ aus den identischen Bedingungen (iii.b) = (iv.b), da ja K wegen Satz 2.5, (a) in $\tilde{K}$ dicht ist. Aus (iii.a) folgt natürlich (iv.a), so daß Anwendung von Zusatz 3.5, (C) die Existenz eines reell abgeschlossenen Unterkörpers $M = \tilde{M} \subseteqq K$ ergibt, über dem K archimedisch ist, und der unter den reell abgeschlossenen Unterkörpern von K maximal ist. Natürlich ist M im Falle der Gültigkeit von (iii.a) sogar in K dicht. Gilt (iv.c), so folgt sofort $K = M$. Gilt (iii.a), so ist $M = \tilde{M}$ in K dicht; und $K = M$ folgt aus Satz 2.5, (c). Also ist in beiden Fällen $\tilde{K} = K = M$ reell abgeschlossen: (i) folgt aus (iii) und auch aus (iv), so daß die Bedingungen (i)–(iv) äquivalent sind.

Folgerung 3.7. *Ist ein reell abgeschlossener Unterkörper des angeordneten Körpers K dicht in K, so ist K dicht in seinem reellen Abschluß.*

Beweis. Wir bilden den stetigen Abschluß $\tilde{K}$. Dann folgt aus Satz 2.5, (c), daß $\tilde{K}$ der Bedingung (iii.b) des Satzes 3.6 genügt. Wegen Satz 2.5, (a) ist K dicht in $\tilde{K}$, so daß der nach Voraussetzung existierende reell abgeschlossene Unterkörper von K auch in $\tilde{K}$ dicht ist: $\tilde{K}$ genügt also der Bedingung (iii) des Satzes 3.6, so daß $\tilde{K}$ reell abgeschlossen ist. Die Menge R der über K algebraischen Elemente aus $\tilde{K}$ ist also wegen Lemma E, (II) ein reell abgeschlossener Unterkörper von $\tilde{K}$. Da R algebraisch über K ist und natürlich die Anordnung von K fortsetzt, ist R der reelle Abschluß von K. Da K dicht in $\tilde{K}$ ist [Satz 2.5, (a)], ist K auch dicht in dem Zwischenkörper R.

Bemerkung 3.8. A. Ist K reell abgeschlossen und algebraisch über seinem Unterkörper $U=\tilde{U}$, so braucht $K=\check{K}$ nicht zu gelten, wie aus Satz 5.4 hervorgeht. Die Voraussetzung von Folgerung 3.7 ist wegen Satz 5.1, (b) unentbehrlich.

B. Es ist wohlbekannt, daß der Körper $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen dedekind-abgeschlossen ist. Ein Überblick über die Constructionsmöglichkeiten dedekind-abgeschlossener Körper findet sich im folgenden Kriterium, zu dessen bequemer Formulierung wir den folgenden Begriff benötigen:

Der Unterkörper U des angeordneten Körpers K ist *dedekindsch in* K [und K ist dedekindsch über U], wenn es einen Körper zwischen U und K gibt, der algebraisch über U und dicht in K ist.

Naturgemäß kann man die Wahl des in dieser Definition auftretenden Zwischenkörpers dadurch eindeutig machen, daß man für ihn die Menge aller über U algebraischen Elemente aus K wählt; siehe Lemma E, (II).

Satz 3.9. *Die folgenden Eigenschaften des Unterkörpers U des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *U ist dedekindsch in K und K ist dedekind-abgeschlossen.*

(ii) *Der Körper A der über U algebraischen Elemente aus K ist reell abgeschlossen mit $K=\tilde{A}$.*

(iii) (a) *K ist dedekind-abgeschlossen.*
(b) *K ist archimedisch über U.*
(c) *Zwischenkörper Z mit $U\subsetneqq Z\subset K$ sind nicht dedekind-abgeschlossen.*

(iv) (a) *U ist dedekindsch in K.*
(b) *Es gibt keine echte, die Ordnung von K fortsetzende, über K dedekindsche Erweiterung von K.*

Genügen U und K den äquivalenten Bedingungen (i)–(iv), so wollen wir K *den dedekindschen Abschluß von* U nennen. Die eindeutige Bestimmtheit des dedekindschen Abschlusses wird in Folgerung 3.10 erwiesen. – Für weitere Charakterisierungen des dedekindschen Abschlusses siehe unten Satz 4.2.

Beweis. Gilt (i), so ist K reell abgeschlossen; und es folgt aus Lemma E, (II), daß die Menge A der über U algebraischen Elemente aus K ein reell abgeschlossener Zwischenkörper ist. Da U dedekindsch in K ist, ist ein Unterkörper von A und also auch A selbst dicht in K. Da $K=\check{K}$ wegen (i) gilt, folgt nun $K=\tilde{A}$ aus Zusatz 2.6, (iv). Damit haben wir (ii) aus (i) hergeleitet. Gilt umgekehrt (ii), so ist A wegen Satz 2.5, (a) dicht in $K=\tilde{A}$, so daß U dedekindsch in K ist. Mit A ist wegen Satz 3.3 auch $\tilde{A}=K$ reell abgeschlossen; und aus $\tilde{A}=K$ folgt $K=\check{K}$ wegen Zusatz 2.6, (iv). Damit ist die Äquivalenz von (i) und (ii) dargetan.

Da (iv.b) wegen Satz 3.6 mit der Dedekind-Abgeschlossenheit von K äquivalent ist, sind auch die Bedingungen (i) und (iv) äquivalent.

Wir nehmen die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iv) an. Dann ist K wegen (i) dedekind-abgeschlossen. Weiter gibt es wegen (i) einen Zwischenkörper Z, der über U algebraisch und in K dicht ist. Es folgt aus Lemma F, daß Z über U archimedisch ist; und K ist selbstverständlich auch archimedisch über Z. Also ist K archimedisch über U. Sei weiter D ein dedekind-abgeschlossener Körper mit $U \subsetneqq D \subsetneqq K$. Da D reell abgeschlossen ist, ist auch $A \subsetneqq D$, so daß A und also auch D wegen (i) in K dicht ist. Dann können wir aber auf den dedekind-abgeschlossenen Körper D Satz 3.6, (iii.b) anwenden, so daß $D = K$ aus der Dichte von D in K folgt. Damit haben wir (iii) aus (i) abgeleitet. – Gilt umgekehrt (iii), so ist die Menge A der über U algebraischen Elemente aus K wegen der reellen Abgeschlossenheit von K und Lemma E, (II) ein reell abgeschlossener Zwischenkörper. Da K archimedisch über U ist, ist $K = \tilde{K}$ auch archimedisch über A; und wir folgern $\tilde{A} \subsetneqq K$ aus Folgerung 2.11. Anwendung von (iii.c) auf den dedekind-abgeschlossenen Zwischenkörper $\tilde{A}$ ergibt $K = \tilde{A}$. Wir haben (ii) aus (iii) hergeleitet und die Äquivalenz von (i)–(iv) bewiesen.

Folgerung 3.10. *Jeder angeordnete Körper besitzt einen und im wesentlichen nur einen dedekindschen Abschluß.*

Beweis. Ist K ein angeordneter Körper, so besitzt K wegen Satz C einen und im wesentlichen nur einen reellen Abschluß R; und es folgt aus Satz 3.9, (ii), daß $\tilde{R}$ ein dedekindscher Abschluß von K ist. – Ist D irgendein dedekindscher Abschluß von K, so folgt aus Satz 3.9, (ii), daß die Menge A der über K algebraischen Elemente aus D ein reell abgeschlossener Zwischenkörper mit $D = \tilde{A}$ ist. Da R und A beide reelle Abschlüsse von K sind, sind R und A im wesentlichen identisch [Satz C]. Also sind auch $\tilde{R}$ und $\tilde{A} = D$ im wesentlichen identisch.

Folgerung 3.11. *Ist D der dedekindsche Abschluß des angeordneten Körpers K, so ist der reelle Abschluß von $\tilde{K}$ in D enthalten.*

Beweis. Da D wegen Satz 3.9, (iii.b) archimedisch über K ist, ist die Menge $E = E_{D/K}$ aller Elemente $d \in D$ mit eigentlichem $\omega_{D/K}(d)$ ein K enthaltender Unterkörper von D, in dem K dicht ist [Lemma 2.9, (a)]. Da D wegen Satz 3.9, (i) dedekind-abgeschlossen ist, ist D wegen Satz 3.6, (i) reell abgeschlossen mit $D = \tilde{D}$. Anwendung von Lemma 2.9, (c) und Folgerung 2.11 zeigt nun, daß $E = \tilde{K}$ ist. Da D reell abgeschlossen ist, folgt aus Lemma E, (II), daß die Menge R aller über E algebraischen Elemente aus D ein reell abgeschlossener Zwischenkörper ist: R ist der reelle Abschluß von $E = \tilde{K}$.

Bemerkung 3.12. Daß der dedekindsche Abschluß D des angeordneten Körpers K im allgemeinen vom reellen Abschluß von $\tilde{K}$ verschieden ist, werden wir in Satz 5.4 zeigen.

Satz 3.13. *Die folgenden Eigenschaften des angeordneten Körpers K und seines Unterkörpers U sind äquivalent:*

(i) *K und U haben denselben dedekindschen Abschluß.*

(ii) *Es gibt eine die Ordnung von K fortsetzende, dedekind-abgeschlossene Erweiterung von K, in der U dedekindsch ist.*

(iii) *Der reelle Abschluß von K ist dedekindsch über U.*

(iv) *Es gibt eine Teilmenge M von K mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *K ist algebraisch über $U(M)$ und archimedisch über U.*

(b) *Ist* $0 \neq u \in U$ *und* $t \in M$, *so existiert ein Element* a *in dem [im reellen Abschluß von* K *gebildeten] reellen Abschluß von* U *mit* $0<(t+u-a)(a-t)$.

(v) *Der reelle Abschluß von* U *ist dicht in seinem [im reellen Abschluß von* K *gebildeten] Compositum mit* K.

(vi) *Es gibt eine die Ordnung von* K *fortsetzende, über* U *dedekindsche Erweiterung von* K.

(vii) *Ist* Z *ein Zwischenkörper mit* $U \subseteqq Z \subseteqq K$, *so haben* Z *und* K *den gleichen dedekindschen Abschluß.*

Beweis. Aussage (i) besagt, daß der dedekindsche Abschluß D von K gleichzeitig dedekindscher Abschluß von U ist. Aus Satz 3.9, (i) folgt dann, daß D dedekind-abgeschlossen und U dedekindsch in D ist: (ii) folgt aus (i).

Gilt (ii), so gibt es eine die Ordnung von K fortsetzende, dedekind-abgeschlossene Erweiterung E von K, in der U dedekindsch ist. Da E insbesondere reell abgeschlossen ist, folgt aus Lemma E, (II), daß die Menge R der über K algebraischen Elemente aus E ein reell abgeschlossener Zwischenkörper ist: R ist der reelle Abschluß von K. Aus $U \subseteqq K \subseteqq R \subseteqq E$ folgt, daß U dedekindsch in R ist. Denn es gibt ja einen Zwischenkörper Z, der über U algebraisch und in E dicht ist; und da die Elemente aus Z über U algebraisch sind, sind sie erst recht über K algebraisch, so daß $Z \subseteqq R$ und also Z in R dicht ist: (iii) folgt aus (ii).

Ist der reelle Abschluß R von K dedekindsch über U, so ist R archimedisch über U und es ist wegen Lemma E, (II) die Menge A der über U algebraischen Elemente aus R ein reell abgeschlossener Unterkörper von R. Natürlich ist dann A der reelle Abschluß von U. Da es einen über U algebraischen Zwischenkörper gibt, der in R dicht ist, ist auch A in R dicht. Ist also $t \in K$ und $0<p \in U$, so gibt es a', a'' in A mit $t-p<a'<t<a''<t+p$. Hieraus folgt:

Ist $t \in K$ und $0 \neq u \in U$, so gibt es $a \in A$ mit $0<(t+u-a)(a-t)$.

Aus dieser Eigenschaft folgt aber (iv) [mit $M=K$].

Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an und bilden wie oben in dem reellen Abschluß R von K das Compositum C des reellen Abschlusses A von U mit K. Da K archimedisch über U und R wegen Lemma F archimedisch über K ist, ist R archimedisch über U, also auch über A. Wir können folglich Zusatz 3.5, (A) anwenden: Die Menge $E=E_{R/A}$ der $r \in R$ mit eigentlichem $\omega_{R/A}(r)$ ist ein reell abgeschlossener, A enthaltender Unterkörper von R, in dem A wegen Lemma 2.9, (a) dicht ist. Ist $t \in M$ und $0<r \in R$, so folgt aus der Archimedizität von R über U die Existenz eines Elements $u \in U$ mit $0<u<r$; und wir folgern aus Bedingung (iv.b) die Existenz von Elementen a', a'' in A mit

$$t-u<a'<t<a''<t+u\,.$$

Also ist $\omega_{R/A}(t)$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in A, so daß $t \in E$ gilt. Damit haben wir $U(M) \subseteqq A(M) \subseteqq E$ gezeigt. Da E reell abgeschlossen ist, enthält E alle über E, und besonders die über $U(M)$ algebraischen Elemente, so daß $K \subseteqq E$ aus (iv.a) folgt. Also ist sogar $A \subseteqq C \subseteqq E$; und da A in E dicht ist, ist A auch in C dicht: Wir haben (v) aus (iv) hergeleitet.

Es ist klar, daß (vi) aus (v) folgt.

Sei E gemäß (vi) eine die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung von K, in der U dedekindsch ist. Es gibt also einen Zwischenkörper Z, der über U algebraisch und in E dicht ist. Insbesondere ist E über U archimedisch [Lemma F]. Wegen Folgerung 3.10 gibt es einen dedekindschen Abschluß D von E. Wegen Satz 3.9, (iii. b) ist D über E archimedisch. Also gilt:

D ist über U archimedisch; und D ist dedekind-abgeschlossen.

Also ist D reell abgeschlossen [Satz 3.6]. Anwendung von Lemma E, (II) ergibt, daß die Menge A der über U algebraischen Elemente aus D ein reell abgeschlossener Unterkörper ist. Natürlich ist $Z \subseteqq A$. Da D über U archimedisch und Z in E dicht ist, ergibt Folgerung 2.13, daß A dicht ist in dem [in D gebildeten] Compositum C von A und E. Da D dedekind-abgeschlossen ist, ist $D = \tilde{D}$; und da D über U archimedisch ist, folgt $A \subseteqq C \subseteqq \tilde{A}$ aus Folgerung 2.7 und $\tilde{A} \subseteqq D$ aus Folgerung 2.11. Aus Satz 3.3 und der reellen Abgeschlossenheit von A ergibt sich die Dedekind-Abgeschlossenheit von $\tilde{A}$. Aus $E \subseteqq C \subseteqq \tilde{A} \subseteqq D$ ergibt sich wegen Satz 3.9, (iii. c), daß der Dedekind-Abschluß D von E nicht von $\tilde{A}$ verschieden sein kann. Also ist $D = \tilde{A}$ dedekindsch über U, so daß D gleichzeitig der Dedekind-Abschluß von U ist: (i) folgt aus (vi) und (i)–(vi) sind äquivalent.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i)–(vi), so ist wegen (iii) der reelle Abschluß R von K dedekindsch über U. Wegen Lemma E, (II) ist die Menge A aller über U algebraischen Elemente aus R ein reell abgeschlossener Zwischenkörper. Es gibt einen über U algebraischen und in R dichten Zwischenkörper. Da dieser in A enthalten ist, ist A dicht in R. Ist nun Z ein Zwischenkörper mit $U \subseteqq Z \subseteqq K$, so ist das Compositum B von Z und A über Z algebraisch und in R dicht: also ist Z dedekindsch in R, so daß Z der Bedingung (iii) genügt und also den gleichen dedekindschen Abschluß wie K hat: (vii) folgt aus (iii). – Umgekehrt ist (i) eine Abschwächung von (vii): Wir haben die Äquivalenz von (i)–(vii) dargetan.

Folgerung 3.14. (A) *Ist der angeordnete Körper K dedekindsch über seinem Unterkörper U, so haben K und U den gleichen dedekindschen Abschluß.*

(B) *Der reell abgeschlossene Körper R und sein Unterkörper U haben dann und nur dann den gleichen dedekindschen Abschluß, wenn R über U dedekindsch ist.*

(C) *Der angeordnete Körper K und sein reell abgeschlossener Unterkörper A haben dann und nur dann den gleichen dedekindschen Abschluß, wenn A in K dicht ist.*

Beweis. (A) wie auch das Hinreichen der ad (B) angegebenen Bedingung sind in Satz 3.13, (vi) enthalten. – Haben der reell abgeschlossene Körper R und sein Unterkörper U den gleichen dedekindschen Abschluß, so folgt aus Satz 3.13, (iii), daß R dedekindsch über U ist. – (C) schließlich folgt unmittelbar aus Satz 3.13, (v).

Folgerung 3.15. *Ist $\aleph$ die Mächtigkeit des angeordneten Körpers K, so ist die Mächtigkeit des dedekindschen Abschlusses von K höchstens $2^{\aleph}$.*

Beweis. Aus Satz 3.9, (ii) folgt, daß man den dedekindschen Abschluß von K folgendermaßen erhält: Sei R der wegen Satz C existierende reelle Abschluß von K; dann ist $\tilde{R}$ der dedekindsche Abschluß von K. Nun haben K und R die gleiche Mächtigkeit $\aleph$; und die Mächtigkeit von $\tilde{R}$ ist wegen Satz 2.5, (d) nicht größer als die Mächtigkeit $2^{\aleph}$ der Menge aller Teilmengen von R.

Bemerkung 3.16. Der Körper $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen ist der dedekindsche Abschluß des Körpers $\boldsymbol{Q}$ aller rationalen Zahlen. Dies zeigt, daß die in Folgerung 3.15 angegebene obere Schranke wirklich erreicht werden kann. Eine Familie weiterer Beispiele für dieses Phänomen werden wir weiter unten angeben; vgl. Folgerung 5.3.

4. Starre Erweiterungen

Ist A ein Unterkörper des Körpers B, so verstehen wir wie üblich unter $\mathrm{Aut}_A B$ *die Gruppe aller die Elemente aus A fixierenden Automorphismen von B.* Ist B überdies ein angeordneter Körper, so sei $\mathrm{Aut}_A^\circ B$ *die Gruppe aller ordnungerhaltenden Automorphismen aus* $\mathrm{Aut}_A B$. Diese beiden Gruppen sind häufig identisch, vornehmlich wenn die Anordnung von B natürlich ist, etwa wenn die positiven Elemente aus B genau die von 0 verschiedenen Quadratsummen sind. *Starrheit* der Erweiterung B von A ist Trivialität von $\mathrm{Aut}_A B$ bzw. $\mathrm{Aut}_A^\circ B$.

Lemma 4.1. *Haben der angeordnete Körper K und sein Unterkörper U den gleichen dedekindschen Abschluß, ist der dedekind-abgeschlossene Körper A archimedisch über seinem Unterkörper B, so wird jeder ordnungerhaltende Isomorphismus von U auf B durch einen und nur einen ordnungerhaltenden Isomorphismus von K in A induziert.*

Dem Beweise dieses fundamentalen Lemmas schicken wir die Beweise einiger Hilfssätze voraus, die allerdings sämtlich als Spezialfälle in diesem Lemma enthalten sind.

(4.1.1) *Ist D der dedekindsche Abschluß seines Unterkörpers U, so ist* $\mathrm{Aut}_U D = 1$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Menge A der über U algebraischen Elemente aus D ein reell abgeschlossener Zwischenkörper mit $D = \tilde{A}$ [Satz 3.9, (ii)]. Ist $\sigma \in \mathrm{Aut}_U D$, so induziert σ in A einen Automorphismus aus $\mathrm{Aut}_U A = 1$; vgl. Satz D. Da D wegen Satz 3.9, (i) dedekind-abgeschlossen und also wegen Satz 3.6, (i) reell abgeschlossen ist, ist σ ein ordnungerhaltender Automorphismus von D. Da aber A in $D = \tilde{A}$ wegen Satz 2.5, (a) dicht ist, und da σ alle Elemente aus A fixiert, ist $\sigma = 1$.

(4.1.2) *Ist D_i der dedekindsche Abschluß seines Unterkörpers U_i für $i = 1, 2$, so wird jeder ordnungerhaltende Isomorphismus vom U_1 auf U_2 durch einen und nur einen [ordnungerhaltenden] Isomorphismus von D_1 auf D_2 induziert.*

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage ist in (4.1.1) enthalten. – Nach Voraussetzung ist die Menge A_i der über U_i algebraischen Elemente aus D_i ein reell abgeschlossener Zwischenkörper mit $\tilde{A}_i = D_i$ [Satz 3.9, (ii)]. Ist σ ein ordnungerhaltender Isomorphismus von U_1 auf U_2, so folgt aus Satz D die Existenz von einem [und nur einem] σ in U_1 induzierenden Isomorphismus λ von A_1

auf A_2. Aus der reellen Abgeschlossenheit von A_i folgt, daß auch λ die Ordnung erhält; und hieraus ergibt sich natürlich, daß λ von einem [und nur einem] Isomorphismus ω von $\tilde{A}_1 = D_1$ auf $\tilde{A}_2 = D_2$ induziert wird [Satz 2.5, (d)]. Natürlich wird σ von ω in U_1 induziert.

Beweis von Lemma 4.1. Sei D der wegen Folgerung 3.10 existierende [und im wesentlichen eindeutig bestimmte] dedekindsche Abschluß von K, so daß D nach Voraussetzung auch der dedekindsche Abschluß von U ist.

Da A dedekind-abgeschlossen ist, ist A auch reell abgeschlossen [Satz 3.6, (i)]. Aus Lemma E, (II) folgt also, daß die Menge R der über B algebraischen Elemente aus A ein reell abgeschlossener Zwischenkörper ist. Da A über B archimedisch ist, ist A auch über R archimedisch. Aus der dedekindschen Abgeschlossenheit von A folgt $A = \tilde{A}$ [Satz 3.6, (i)]. Anwendung von Folgerung 2.11 ergibt $\tilde{R} \subseteqq A$. Da R der reelle Abschluß von B ist, ist $\tilde{R}$ wegen Satz 3.9, (ii) der dedekindsche Abschluß von B.

Ist σ ein ordnungerhaltender Isomorphismus von U auf B, so folgt aus (4.1.2) die Existenz von einem und nur einem Isomorphismus λ von D auf $\tilde{R}$, der σ in U induziert; und es ist klar, daß σ in K einen ordnungerhaltenden Isomorphismus ω von K in $\tilde{R} \subseteqq A$ induziert. Damit ist die Existenzaussage des Lemma 4.1 voll bewiesen.

Sei nun ω' ein weiterer ordnungerhaltender Isomorphismus von K in A, der ebenfalls σ in U induziert. Aus der bereits bewiesenen Existenzaussage des Lemma 4.1 ergibt sich dann die Existenz eines ω' in K induzierenden [ordnungerhaltenden] Isomorphismus λ' von D in A. Da D der dedekindsche Abschluß von K ist, ist $D^{\lambda'}$ ein dedekindscher Abschluß von $K^{\omega'}$ in A. Aus $B = U^{\sigma} = U^{\lambda'} \subseteqq D^{\lambda'} \subseteqq A$ folgern wir zunächst, daß der reelle Abschluß R von B in A auch in $D^{\lambda'}$ enthalten ist; und aus der Archimedizität von A über B ergibt sich dann $\tilde{R} = D^{\lambda'}$ [Satz 3.9, (ii)]. Also sind λ und λ' Isomorphismen von D auf $\tilde{R}$, die σ in U induzieren. Da aber D und $\tilde{R}$ dedekindsche Abschlüsse von U sind, folgt $\lambda = \lambda'$ aus (4.1.2); und hieraus folgt natürlich $\omega = \omega'$, womit auch die Eindeutigkeitsaussage unseres Lemma 4.1 bewiesen ist.

Satz 4.2. *Die folgenden Eigenschaften des Unterkörpers U des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *K ist der dedekindsche Abschluß von U.*

(ii) (a) *K ist dedekind-abgeschlossen und archimedisch über U.*
(b) *Ist E eine die Ordnung von U fortsetzende, dedekind-abgeschlossene, über U archimedische Erweiterung von U, so gibt es einen und nur einen die Elemente von U fixierenden [ordnungerhaltenden] Isomorphismus von K in E.*

(iii) (a) *U ist dedekindsch in K.*
(b) *Ist E eine die Ordnung von U fortsetzende, über U dedekindsche Erweiterung von U, so gibt es einen die Elemente von U fixierenden, ordnungerhaltenden Isomorphismus von E in K.*

Beweis. Ist K der dedekindsche Abschluß von U, so ist K wegen Satz 3.9 dedekind-abgeschlossen und archimedisch über U; und K und U haben den gleichen dedekindschen Abschluß [nämlich K]. Ist weiter E eine die Ordnung von U fortsetzende, dedekind-abgeschlossene, über U archimedische Erweiterung von U, so können wir Lemma 4.1 anwenden: Der 1-Automorphismus von U wird durch einen und nur einen ordnungerhaltenden Isomorphismus von K in E induziert, so daß (ii) aus (i) folgt.

Gilt (ii), so gilt sicher Bedingung (iii.a und b) des Satzes 3.9. Ist weiter Z ein dedekind-abgeschlossener Zwischenkörper: $U \subseteqq Z \subseteqq K$, so ist Z mit K über U archimedisch; und Anwendung von (ii.b) zeigt die Existenz eines die Elemente aus U fixierenden [ordnungerhaltenden] Isomorphismus σ von K in $Z \subseteqq K$. Eine zweite Anwendung von (ii.b) zeigt, daß 1 der einzige, die Elemente von U fixierende [ordnungerhaltende] Isomorphismus von K in K ist. Also ist $\sigma = 1$, woraus

$$K = K^\sigma \subseteqq Z \subseteqq K \quad \text{und} \quad K = Z$$

folgt. Damit haben wir auch Bedingung (iii.c) des Satzes 3.9 aus (ii) abgeleitet. Also ist K der dedekindsche Abschluß von U: Die Bedingungen (i) und (ii) sind äquivalent.

Ist wieder K der dedekindsche Abschluß von U, so folgern wir aus Satz 3.9, (iv.a), daß U dedekindsch in K ist. Ist weiter E eine die Ordnung von U fortsetzende, über U dedekindsche Erweiterung von U, so bilden wir den dedekindschen Abschluß D von E, der wegen Folgerung 3.10 existiert. Aus Folgerung 3.14, (A) ergibt sich, daß U und E den gleichen dedekindschen Abschluß D haben. Da der dedekindsche Abschluß von U wegen Folgerung 3.10 im wesentlichen eindeutig bestimmt ist, gibt es einen die Elemente von U fixierenden, ordnungerhaltenden Isomorphismus von D auf K; und dieser induziert einen die Elemente von U fixierenden, ordnungerhaltenden Isomorphismus von E in K, so daß (iii) aus (i) folgt.

Gilt (iii), so gilt auch Bedingung (iv.a) des Satzes 3.9. Ist E eine die Ordnung von K fortsetzende, über K dedekindsche Erweiterung von K, so ergibt sich aus Folgerung 3.14, (A), daß K und E denselben dedekindschen Abschluß haben; und aus (iii.a) folgt, daß auch U und K denselben dedekindschen Abschluß haben. Insbesondere ist U dedekindsch in dem dedekindschen Abschluß D von E; siehe Satz 3.9, (i). Anwendung von (iii.b) zeigt die Existenz eines die Elemente von U fixierenden, ordnungerhaltenden Isomorphismus σ von D in K. Also ist

$$U \subseteqq E^\sigma \subseteqq D^\sigma \subseteqq K \subseteqq E \subseteqq D .$$

Da D der dedekindsche Abschluß von U ist, ist wegen Lemma 4.1 der 1-Automorphismus der einzige die Elemente aus U fixierende, ordnungerhaltende Isomorphismus von D in sich. Es folgt, daß $\sigma = 1$ und also

$$E = E^\sigma \subseteqq K \subseteqq E$$

ist; es wird $K = E$ und wir haben auch Bedingung (iv.b) des Satzes 3.9 aus unserer Bedingung (iii) hergeleitet, womit die Äquivalenz der Bedingungen (i)–(iii) dargetan ist.

Satz 4.3. *Die folgenden Eigenschaften des Unterkörpers U des angeordneten Körpers K sind äquivalent:*

(i) *K und U haben denselben dedekindschen Abschluß.*

(ii) *Ist Z ein Zwischenkörper mit $U \subseteq Z \subseteq K$, so ist 1 der einzige, die Elemente aus U fixierende, ordnungerhaltende Isomorphismus von Z in K.*

(iii) *Ist k ein über U transcendentes Element aus K, so ist $\mathrm{Aut}_U^\circ U(k) = 1$.*

(iv) *Es gibt eine Teilmenge M von K mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *K ist algebraisch über $U(M)$ und archimedisch über U.*

(b) *$\mathrm{Aut}_U^\circ U(t) = 1$ für jedes $t \in M$.*

(v) $\begin{cases} \text{(a) } \mathrm{Aut}_U^\circ K = 1. \\ \text{(b) } \textit{Ist } Z \textit{ ein Zwischenkörper mit } U \subseteq Z \subseteq K, \textit{ so wird jeder Automorphismus aus } \mathrm{Aut}_U^\circ Z \textit{ durch einen Automorphismus aus } \mathrm{Aut}_U^\circ K \textit{ induziert.} \end{cases}$

Beweis. Gilt (i), so ist der [wegen Folgerung 3.10 existierende] dedekindsche Abschluß D von K gleichzeitig der dedekindsche Abschluß von U. Ist Z ein Zwischenkörper mit $U \subseteq Z \subseteq K$ und σ eine die Elemente aus U fixierender, ordnungerhaltender Isomorphismus von Z in K, so gilt auch $U \subseteq Z^\sigma \subseteq K$; und wir erschließen aus Satz 3.13, (vii), daß D der dedekindsche Abschluß von Z wie auch von Z^σ ist. Aus Satz 3.9 ergibt sich die Anwendbarkeit von Lemma 4.1. Also gibt es einen und nur einen ordnungerhaltenden Automorphismus λ von D, der σ in Z induziert. Da D der dedekindsche Abschluß von U ist, folgt $\mathrm{Aut}_U D = 1$ aus (4.1.1) [oder Lemma 4.1]. Also ist $\lambda = 1$, woraus $\sigma = 1$ folgt. Damit haben wir gezeigt, daß (ii) aus (i) folgt; und es ist klar, daß (iii) ein Spezialfall von (ii) ist.

Gilt (iii), so folgt aus Hilfssatz (1.2.+), daß K über U archimedisch ist, und daß also (iv) aus (iii) [mit $M = K$] folgt.

Wir nehmen weiter die Existenz einer den Bedingungen (iv.a + b) genügenden Teilmenge M von K an. Im reellen Abschluß R von K bilden wir den reellen Abschluß A von U; siehe Satz C und Lemma E, (II). Wir können o. B. d. A. annehmen, daß alle Elemente aus M über U transcendent sind, da ja die Teilmenge der über U transcendenten Elemente aus M immer noch den Bedingungen (iv.a + b) genügt. Wir bemerken, daß unsere Bedingung (iv.a) mit der Bedingung (iv.a) des Satz 3.13 übereinstimmt. Wir betrachten ein Element u mit $0 \neq u \in U$ und ein Element $t \in M$. Da t über U transcendent ist, gibt es genau einen die Elemente aus U fixierenden und t auf $t+u$ abbildenden Automorphismus von $U(t)$. Da $\sigma \neq 1$ und $\mathrm{Aut}_U^\circ U(t) = 1$ wegen (iv.b) ist, wird die Anordnung in $U(t)$ von σ nicht erhalten. Da $U(t)$ wegen der Transcendenz von t über U der Körper der rationalen Funktionen in t mit Coefficienten aus U ist, folgt hieraus die Existenz eines Polynoms $f(x)$ über U mit $f(t)\,f(t+u) < 0$. Wir wenden den Weierstraßschen Nullstellensatz [Satz A, (ii)] auf das Polynom f über $U \subseteq A$ an: Es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = 0$ und $0 < (t+u-a)(a-t)$. Damit haben wir auch Bedingung (iv.b) des Satz 3.13 hergeleitet: K und U haben den gleichen dedekindschen Abschluß. Damit haben wir (i) aus (iv) hergeleitet und die Äquivalenz der Bedingungen (i)–(iv) bewiesen.

Schließlich sieht man mühelos ein, daß die Eigenschaften (ii) und (v) äquivalent sind.

Folgerung 4.4. *Dann und nur dann ist der reell abgeschlossene Körper R dedekindsch über seinem Unterkörper U, wenn* $\mathrm{Aut}_U Z = 1$ *für jeden reell abgeschlossene Zwischenkörper Z mit $U \subset Z \subseteqq R$ und Transcendenzgrad* 1 *von Z über U.*

Beweis. Ist R dedekindsch über U, so haben R und U denselben dedekindschen Abschluß [Folgerung 3.14, (A)]. Anwendung von Satz 4.3, (ii) zeigt dann die Notwendigkeit unserer Bedingung, da ja alle Automorphismen reell abgeschlossener Körper die [natürliche] Anordnung erhalten.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit unserer Bedingung an und betrachten ein über U transcendentes Element $t \in R$. Anwendung von Lemma E, (II) zeigt, daß die Menge Z aller über $U(t)$ algebraischen Elemente aus dem reell abgeschlossenen Körper R ein reell abgeschlossener Zwischenkörper: $U \subset U(t) \subseteqq Z \subseteqq R$ mit Transcendenzgrad 1 von Z über U ist. Ist $\sigma \in \mathrm{Aut}_U^\circ U(t)$, so folgt aus Satz D die Existenz eines eindeutig bestimmten Automorphismus λ von Z, der σ in $U(t)$ induziert.

Es folgt $\lambda \in \mathrm{Aut}_U Z = 1$ aus unserer Bedingung, so daß $\lambda = 1$ und also auch $\sigma = 1$ wird. Damit haben wir die Gültigkeit der Bedingung (iii) des Satzes 4.3 bewiesen: R und U haben denselben dedekindschen Abschluß. Anwendung von Folgerung 3.14, (B), zeigt, daß U dedekindsch in dem reell abgeschlossenen Körper R ist.

Folgerung 4.5. *Der reell abgeschlossene Unterkörper A des angeordneten Körpers K ist dann und nur dann dicht in K, wenn* $\mathrm{Aut}_A^\circ A(k) = 1$ *für jedes [nicht in A enthaltene] Element $k \in K$.*

Beweis. Aus Folgerung 3.14, (C) folgt, daß A dann und nur dann dicht in K ist, wenn K und A den gleichen dedekindschen Abschluß haben. Nicht in A enthaltene Elemente aus K sind transcendent über A. Anwendung der Äquivalenz der Bedingungen (i) und (iii) des Satzes 4.3 zeigt jetzt die Gültigkeit unserer Behauptung.

Bemerkung 4.6. Ist R ein reell abgeschlossener Unterkörper des reell abgeschlossenen Körpers F, ist weiter der Transcendenzgrad von F über R genau 1, so ist R wegen Folgerung 4.4 dann und nur dann dicht in F, wenn $\mathrm{Aut}_R F = 1$. Dr. Geyer [Heidelberg] hat mir ein Beispiel mitgeteilt, aus dem hervorgeht, daß die Transcendenzgradvoraussetzung unentbehrlich ist: In diesem Beispiel ist der Transcendenzgrad von F über R gleich 2; es ist $\mathrm{Aut}_R F = 1$; aber R ist nicht dicht in F.

Satz 4.7. *Der angeordnete Körper K ist dann und nur dann dedekind-abgeschlossen, wenn* $\mathrm{Aut}_K^\circ E \neq 1$ *für jede echte, die Ordnung von K fortsetzende, einfache Erweiterung E von K gilt.*

Beweis. Ist erstens K dedekind-abgeschlossen und E eine echte, die Ordnung von K fortsetzende, einfache Erweiterung von K, so ist K reell abgeschlossen

[Satz 3.6, (i)] und also E nicht algebraisch über K. Aus Satz 3.6, (iv. b) folgt, daß K nicht dicht in E ist; und Anwendung von Folgerung 4.5 ergibt $\mathrm{Aut}^\circ_K E \neq 1$.

Ist zweitens K nicht dedekind-abgeschlossen, so gibt es eine echte, die Ordnung von K fortsetzende Erweiterung E von K und einen Zwischenkörper Z, der über K algebraisch und in E dicht ist [Satz 3.6, (ii)]. Da E eine dedekindsche Erweiterung von K ist, ergibt Satz 3.13, daß K und E denselben dedekindschen Abschluß haben. Es gibt ein Element $e \in E$ mit $e \notin K$; und aus Satz 4.3, (ii) folgt $\mathrm{Aut}^\circ_K K(e) = 1$: unsere Bedingung ist notwendig und hinreichend für Dedekind-Abgeschlossenheit von K.

Bemerkung 4.8. Kennzeichnungen des dedekindschen Abschlusses eines angeordneten Körpers ergeben sich durch naheliegende Kombination der Sätze 4.3 und 4.7.

5. Einfache nicht archimedische Erweiterungen

Ist der angeordnete Körper L einfach über seinem Unterkörper K, ist weiter L nicht archimedisch über K, so ergibt sich aus Lemma E, (II), daß L eine reine transcendente Erweiterung von K ist. Wir werden deshalb im folgenden einen angeordneten Körper K und eine einfache transcendente Erweiterung $L = K(j)$ von K betrachten. Dann ist L der Körper der rationalen Funktionen in j mit Coefficienten aus K; und jedes von 0 verschiedene Element aus L kann auf die folgende „Normalform" (N) gebracht werden:

$$\text{(N)} \qquad kj^n[1 + jf(j)]\,[1 + jg(j)]^{-1};$$

hierbei ist $0 \neq k \in K$ und n eine ganze Zahl [positiv, 0 oder negativ], während $f(j)$, $g(j)$ Polynome in j mit Coefficienten aus K sind. Man bemerke, daß zwar k und n, aber nicht f und g Invarianten des gegebenen Elements sind.

Wir werden das gemäß (N) normalisierte Element

$$kj^n[1 + jf(j)]\,[1 + jg(j)]^{-1}$$

dann und nur dann positiv nennen, wenn $0 < k$ in der vorgegebenen Anordnung von K gilt. Man erhält hierdurch eine [algebraische] Anordnung von L, die offenbar durch die beiden folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

(a) Die Anordnung von $L = K(j)$ setzt die vorgegebene Anordnung von K fort.

(b) $0 < j < k$ für jedes $0 < k \in K$.

Aus (b) folgt natürlich, daß L über K nicht archimedisch ist; und wegen (b) können wir L *als Erweiterung von K durch das [positive] infinitesimale Element j* bezeichnen, besonders da ja, wie oben vermerkt, die Erweiterung wesentlich durch die Eigenschaften (a) und (b) bestimmt ist.

Satz 5.1. *Ist K ein angeordneter Körper und $L = K(j)$ Erweiterung von K durch das [positive] infinitesimale Element j, so gilt:*

(a) *Ist i eine ganze Zahl mit $1 < i$, so hat die Gleichung $x^i = j$ keine Lösung in $\tilde{L}$.*

(b) *L ist nicht dicht in seinem reellen Abschluß.*

(c) *$\tilde{L}$ ist nicht reell abgeschlossen.*

Dem eigentlichen Beweis schicken wir den Beweis zweier Hilfssätze voraus.

(5.1.1) *Der alle Elemente aus K fixierende und j auf j^i mit $1<i$ abbildende Isomorphismus von $K(j)$ auf $K(j^i)$ erhält die Anordnung.*

Beweis. Das gemäß (N) normierte Element

$$kj^n[1+jf(j)]\,[1+jg(j)]^{-1}$$

wird durch unsern Isomorphismus auf das ebenfalls gemäß (N) normierte Element

$$kj^{in}[1+j\{j^{i-1}f(j^i)\}]\,[1+j\{j^{i-1}g(j^i)\}]^{-1}$$

abgebildet; und hieraus folgt sofort, daß unser Isomorphismus die Anordnung erhält.

(5.1.2) *Ist $1<i$, so liegt zwischen den Elementen kj mit $0<k\in K$ kein Element aus $K(j^i)$.*

Beweis. Sei $0<k\in K$ und $0\neq r\in K(j^i)$. Dieses Element r hat dann die Normalform (N) in $K(j^i)$:

$$r=sj^{in}[1+j^i f(j^i)]\,[1+j^i g(j^i)]^{-1}.$$

Wir betrachten das Element $t=kj-r$.

Fall 1. $0<n$.

Dann wird $0\leqq in-2$, so daß

$$h(j)=j^{i-1}g(j^i)-sk^{-1}j^{in-2}[1+f(j^i)]$$

ein Polynom in j mit Coefficienten aus K wird. Die Normalform (N) in $K(j)$ von t wird dann:

$$t=kj[1+jh(j)]\,[1+j\{j^{i-1}g(j^i)\}]^{-1}.$$

Aus $0<k$ folgt also $0<t$; und dies ist gleichwertig mit

$$r<kj.$$

Fall 2. $n\leqq 0$.

Es wird $0<i-1$ und $0\leqq -in$, so daß

$$H(j)=j^{i-1}f(j^i)-ks^{-1}j^{-in}[1+j^i g(j^i)]$$

ein Polynom in j mit Coefficienten aus K wird. Die Normalform (N) von t in $K(j)$ wird dann

$$t=(-s)j^{in}[1+jH(j)]\,[1+j\{j^{i-1}g(j^i)\}]^{-1}.$$

Also ist dann und nur dann $0<t$, wenn $s<0$ ist; und es ist dann und nur dann $t<0$, wenn $0<s$ ist. Dies ist aber gleichwertig mit

$$r<kj \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad s<0;$$

$$kj<r \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad 0<s.$$

Zusammenfassend ergibt sich, daß ein Element aus $K(j^i)$ entweder links von allen kj mit $0<k$ liegt – dies ist der Fall, wenn entweder $0<n$ oder $n\leqq 0$ und $s<0$ ist – oder rechts von allen kj liegt – dies ist der Fall, wenn $n\leqq 0$ und $0<s$ ist. Die Null liegt natürlich links von allen kj mit $0<k\in K$, da ja $0<j$. Damit ist alles bewiesen.

Beweis des Satzes 5.1. Wäre die Aussage (a) falsch, so gäbe es eine ganze Zahl i mit $1<i$ und ein Element $w\in\tilde{L}$ mit $w^i=j$. Natürlich ist

$$K(j^i)\subsetneqq K(j)=L=K(w^i)\subsetneqq K(w)=L(w)\subsetneqq\tilde{L}\,.$$

Ist σ der alle Elemente aus K fixierende und j auf j^i abbildende Isomorphismus von L auf $K(j^i)$, so folgt aus (5.1.1), daß σ ein ordnungerhaltender Isomorphismus ist. Dieser wird in L durch einen ebenfalls ordnungerhaltenden, die Elemente aus K fixierenden und w auf $w^i=j$ abbildenden Isomorphismus λ von $K(w)$ auf L induziert. Da L wegen Lemma 2.5, (a) in $\tilde{L}$ dicht ist, ist L auch in $K(w)$ dicht. Also ist $L^\lambda=K(j^i)$ in $K(w)^\lambda=K(w^i)=K(j)$ dicht; und dies widerspricht (5.1.2), womit (a) bewiesen ist.

Wäre L dicht in seinem reellen Abschluß R, so folgte $R\subsetneqq\tilde{L}$ aus Folgerung 2.7. Wegen Satz A, (iii) ist aber für jede ganze Zahl i mit $1<i$ die Gleichung $x^i=j$ [wegen $0<j$] in R lösbar. Dies widerspricht $R\subseteqq\tilde{L}$ und (a), womit (b) bewiesen ist.

(c) folgt sofort aus (a) und Satz A, (iii).

Ist K ein angeordneter Körper, so sei $K((j))$ *der Körper aller formalen Potenzreihen in j mit Coefficienten aus K.* Die von 0 verschiedenen Elemente aus $K(j)$ können wir folgendermaßen normieren:

$$kj^n\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}k_ij^i\right]; \tag{N*}$$

hierbei sind k und die k_i Elemente aus K und n ist eine ganze Zahl [positiv, 0 oder negativ]. Daß dies ein Körper ist, entnimmt man etwa Fuchs [p. 137, Theorem 10]. Es sei darauf hingewiesen, daß dieses Mal nicht nur n und k, sondern auch alle andern k_i Invarianten des betrachteten Elements sind, und daß $K(j)$ ein Unterkörper von $K((j))$ ist. Wir werden das gemäß (N*) normalisierte Element

$$kj^n\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}k_ij^i\right]$$

dann und nur dann positiv nennen, wenn $0<k$ [in K] gilt. Man erhält hierdurch eine [algebraische] Anordnung von $K((j))$, die offenbar die von uns am Anfang dieses Abschnitts eingeführte Anordnung von $K(j)$ – gemäß (a) und (b) – fortsetzt; siehe Fuchs [p. 137, Corollary 11].

Satz 5.2. *Ist $L=K(j)$ die Erweiterung des angeordneten Körpers K durch das [positive] infinitesimale Element j, so ist $\tilde{L}$ im wesentlichen mit dem formalen Potenzreihenkörper $K((j))$ identisch.*

Beweis. Sei zunächst $p \in K((j))$. Wir wollen p einen eigentlichen dedekindschen Schnitt in L zuordnen. Hierbei wollen wir zunächst annehmen, daß $p \notin L$ und also insbesondere p kein Polynom in j mit Coefficienten aus K ist; und wir werden später sehen, daß wir diese Annahme o. B. d. A. machen können. Dann hat also p wegen (N*) die Form:

$$p = kj^n\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i j^i\right];$$

Hierbei ist n eine ganze Zahl [positiv, 0 oder negativ]; k und die k_i sind Elemente aus K; und es ist $k \neq 0$ und unendlich viele k_i sind von 0 verschieden.

Wir setzen

$$p_m = kj^n\left[1 + \sum_{i=1}^{m} k_i j^i\right] \quad \text{für} \quad 0 < m.$$

Dann sei

Dp die Menge aller $y \in L$ mit $p_m \leqq y$ für unendlich viele m,

Sp die Menge aller $y \in L$ mit $y \leqq p_m$ für unendlich viele m,

Angenommen nun, es gäbe $d \in Dp$ und $s \in Sp$ mit $d \leqq s$. Ist dann u eine beliebige positive ganze Zahl, so gibt es ganze Zahlen u', u'' mit $u < u'$, $u < u''$ und $p_{u'} \leqq d$ und $s \leqq p_{u''}$. Also wird

$$\begin{aligned} 0 \leqq s - d \leqq p_{u''} - p_{u'} &= kj^n\left[\sum_{i=u+1}^{u''} k_i j^i - \sum_{i=u+1}^{u'} k_i j^i\right] \\ &= kj^{n+u+1} f(j), \end{aligned}$$

wobei $f(j)$ ein Polynom in j mit Coefficienten aus K ist. Da diese Abschätzung für alle positiven ganzen Zahlen u gilt, ergibt die Definition der Anordnung in $L = K(j)$, daß $s = d$ ist; und hieraus folgt dann insbesondere, daß $p = s = d \in L$ ist. Dies haben wir aber ausgeschlossen; und nun sieht man mühelos ein, daß Sp, Dp ein dedekindscher Schnitt ist. Daß Sp, Dp ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in L ist, folgt aus $p_m - kj^{n+m} \in Sp$ und $p_m + kj^{n+m} \in Dp$. Es ist nun leicht, diese Abbildung $p \to Sp, Dp$ auf ganz $K((j))$ auszudehnen, indem man jedem $p \in L$ irgendwie einen der beiden durch p in L bestimmten dedekindschen Schnitte zuordnet; und man überzeugt sich leicht davon, daß man auf diese Weise einen ordnungerhaltenden Isomorphismus λ von $K((j))$ in $\tilde{L}$ erhält, der [im wesentlichen] die Elemente aus L fixiert.

Ist

$$p = kj^n\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i j^i\right]$$

ein normalisiertes, von 0 verschiedenes Element aus $K((j))$, so ist

$$p = kj^n\left[1 + \sum_{i=1}^{m} k_i j^i\right] + kj^{n+m+1} \sum_{i=m+1}^{\infty} k_i j^{i-m-1};$$

und wir können durch hinreichend große Wahl von m erreichen, daß das zweite Glied absolut genommen kleiner wird als eine beliebig vorgegebene positive Potenz von j. Hieraus folgt weiter:

Ist S, D ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in $K((j))$, so gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl n Polynome $s(j)$, $d(j)$ in j mit Coefficienten aus K derart, daß $s(j) \in S$, $d(j) \in D$ und $0 < d(j) - s(j) < j^n$.

Überlegt man sich weiter, daß zwei Polynome, deren Differenz absolut genommen j^n für positives ganzes n nicht überschreitet, in ihren ersten n Gliedern übereinstimmen müssen, so ist es nicht schwer einzusehen, daß jeder eigentliche dedekindsche Schnitt in $K((j))$ durch ein Element aus $K((j))$ definiert wird, so daß also insbesondere $\tilde{L} \subseteq K((j))$ wird, woraus die gewünschte wesentliche Identität von $\tilde{L}$ und $K((j))$ folgt.

Folgerung 5.3. *Ist $\aleph$ die Mächtigkeit des angeordneten Körpers K, ist $L = K(j)$ die Erweiterung von K durch das [positive] infinitesimale Element j, so ist $2^{\aleph}$ die Mächtigkeit von $\tilde{L}$ und von dem dedekindschen Abschluß von L.*

Beweis. Es ist klar, daß K und $K(j) = L$ die gleiche Mächtigkeit $\aleph$ haben; und hieraus folgt, daß der Körper $K((j))$ der formalen Potenzreihen die Mächtigkeit $2^{\aleph}$ hat. Aus Satz 5.2 folgt dann, daß auch $\tilde{L}$ die Mächtigkeit $2^{\aleph}$ hat.

Ist D der dedekindsche Abschluß von L, so ergibt sich aus Folgerung 3.15, daß D höchstens die Mächtigkeit $2^{\aleph}$ hat. Aus Folgerung 3.14, (a) und Satz 2.5, (a) ergibt sich, daß D im wesentlichen der dedekindsche Abschluß von $\tilde{L}$ ist, so daß die Mächtigkeit von D mindestens $2^{\aleph}$ und also gleich $2^{\aleph}$ ist.

Satz 5.4. *Ist $L = K(j)$ die Erweiterung des angeordneten Körpers K durch das [positive] infinitesimale Element j, so ist der reelle Abschluß von $\tilde{L}$ nicht der dedekindsche Abschluß von L.*

Beweis. Wegen Satz 5.2, ist $\tilde{L}$ im wesentlichen mit dem formalen Potenzreihenkörper $K((j))$ identisch. Sei R der reelle Abschluß von $\tilde{L} = K((j))$. Man folgert aus Satz A, (iii), daß jedes positive Element aus R für jede positive ganze Zahl die n-te Potenz eines und nur eines positiven Elements aus R ist. Dies gilt insbesondere für j, so daß wir für jede positive ganze Zahl n unter $j^{n^{-1}}$ die eindeutig bestimmte, in R enthaltene, positive Lösung der Gleichung $x^n = j$ verstehen können.

Sei D der dedekindsche Abschluß von L. Wegen Folgerung 3.11 ist $R \subseteq D$. Da D reell abgeschlossen ist, ist die Menge A aller über L algebraischen Elemente aus D ein reell abgeschlossener Zwischenkörper [Lemma E, (II)]; und natürlich ist $A \subseteq R$. Aus Satz 3.9, (ii) folgern wir $D = \tilde{A}$. Insbesondere ist A dicht in D [Satz 2.5, (a)], so daß auch R dicht in D ist und $D = \tilde{D} = \tilde{R}$ aus Folgerung 2.11 sich ergibt.

Sei $r(n)$ irgendeine mit n gegen unendlich strebende Folge rationaler Zahlen. Wir setzen

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} j^{r(i)}.$$

Da die $j^{n^{-1}}$ wohlbestimmte Elemente aus R sind, sind auch die $j^{r(i)}$ wohlbestimmte Elemente aus R, so daß auch jedes $f(n) \in R$ ist. Sei

T die Menge aller $t \in R$ mit $f(n) < t$ für alle n;

$S =$ Complement von T in R.

Man sieht sofort, daß $1 \in T$ und $0 \in S$ und daß also S, T ein dedekindscher Schnitt in R ist. Für jede positive ganze Zahl h gilt $h \leqq r(i)$ für fast alle i und also $j^{r(i)} \leqq j^h$ für fast alle i; und hieraus folgt leicht, daß S, T ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in R ist, der also durch ein Element $d \in D = \tilde{R}$ definiert wird.

Wir wollen jetzt die Folge $r(n)$ rationaler Zahlen spezialisieren. Sei $r(n) = N(n) Z(n)^{-1}$ mit teilerfremden ganzen $N(n)$ und $Z(n)$. Wir fordern nun, daß die Menge der verschiedenen Primteiler aller $Z(n)$ unendlich ist. Wäre dann $d \in R$, so wäre d algebraisch über $K((j))$; und wir wollen mit g den Grad von d über $K((j))$ bezeichnen. Anwendung von Schilling [p. 56, Corollary 2] zeigt dann, daß die Primteiler der $Z(n)$ sämtlich Teiler von g sind – im Widerspruch zur Unendlichkeit der Menge der Primteiler der $Z(n)$. Also liegt d zwar in D, aber nicht in R; und damit haben wir $R \subset D$ dargetan.

Bemerkung 5.5. Man kann zeigen, daß der dedekindsche Abschluß D von L [in der Bezeichnung von Satz 5.4] im wesentlichen mit dem Körper aller formalen Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n j^{r(n)}$$

identisch ist; hierbei sind die $k_n \in K$ und die $r(n)$ bilden eine mit n gegen unendlich strebende Folge rationaler Zahlen.

Wir geben eine Anwendung der vorhergehenden Resultate.

Satz 5.6. *Der angeordnete Körper K ist dann und nur dann ein Unterkörper des Körpers $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen, wenn gilt: Jeder Unterkörper von K ist in seinem reellen Abschluß dicht.*

Beweis. Ist $K \subsetneqq \boldsymbol{R}$ und $U \subsetneqq K$, so ist auch $U \subsetneqq \boldsymbol{R}$. Sei A der nach Satz C existierende reelle Abschluß von U. Dann ist A wegen Lemma E, (II) über U archimedisch; und es folgt aus Satz 1.2, (iv), daß U in A dicht ist: Unsere Bedingung ist notwendig.

Ist umgekehrt K nicht in $\boldsymbol{R}$ enthalten, so folgt aus Satz 1.2, (iii), daß K nicht archimedisch über seinem Primkörper $\boldsymbol{Q}$ ist. Also gibt es ein Element $j \in K$ mit $0 < j < r$ für jede positive rationale Zahl $r \in \boldsymbol{Q}$. Es ist $U = \boldsymbol{Q}(j) \subsetneqq K$; und Anwendung von Satz 5.1, (b) zeigt, daß U in seinem reellen Abschluß nicht dicht ist: Unsere Bedingung ist hinreichend.

Zusatz bei der Korrektur [28. Mai 1970]: Vor kurzem wurde ich auf die folgenden beiden Arbeiten aufmerksam gemacht, die mit unseren Untersuchungen verwandt sind:

Kurt Hauschild: Cauchyfolgen höheren Typus in angeordneten Körpern. Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math. **13**, 55—66 (1967).

Dana Scott: On completing ordered fields. Applications of Model Theory. Proc. International Symposium Cal. Tech. (1967), 274—278. Holt, Rinehart & Winston; New York 1969.

Insbesondere ist unser Satz 3.3 als Spezialfall in Hauschilds Satz 14 [p. 62] enthalten; und Scott's Theorem 2 [p. 275] hängt mit unserer Folgerung 3.11 zusammen.

Auch finden einige der von uns behandelten bzw. benutzten Beispiele bei diesen beiden Autoren wie natürlich auch bei Artin-Schreier Erwähnung.

Literatur

Artin, E., Schreier, O.: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Hamburger Abhdlg. **5**, 85—99 (1926).

— — Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Hamburger Abhdlg. **5**, 225—231 (1927).

Baer, R.: Zur Topologie der Gruppen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **160**, 208—226 (1929).

Fuchs, L.: Partially ordered algebraic systems. Oxford: Pergamon Press 1963.

Jacobson, N.: Lectures in abstract algebra III: Theory of fields and galois theory. Princeton, N.J.: van Nostrand & Co, Inc. 1964.

Robinson, A.: Introduction to Model Theory and to the Mathematics of Algebra. Amsterdam: North Holland Publishing Company 1963.

Schilling, O. F. G.: The theory of Valuations. Math. Surveys IV; AMS New York 1950.

Waerden, B. L. van der: Algebra I. Heidelberger Taschenbücher 12. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.

Prof. Reinhold Baer
Forschungsinstitut für Mathematik
Eidgenössische Technische Hochschule
Zürich

(Eingegangen am 17. Dezember 1969)