KANOLD, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 442—450 (1957)

Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen

Von

HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

In einer vorangehenden Arbeit [1] wurde ein Satz von L. E. DICKSON in verallgemeinerter Gestalt bewiesen und in den letzten beiden Paragraphen wurden Folgerungen aus diesem Satz hergeleitet. In der vorliegenden Arbeit sollen die Betrachtungen von [1], § 7 verschärft und ergänzt werden.

§ 1

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *die Primpotenzzerlegung der natürlichen Zahl* n; h *sei eine feste natürliche Zahl;* $A_h(x)$ *sei die Anzahl der* $n \leqq x$, *bei welchen* $\alpha_\varkappa \geqq h$ *für* $\varkappa = 1, \ldots, k$ *gilt. Dann ist* $A_h(x) = O(x^{1/h})$.

Beweis. Jedem solchen n (mit $\alpha_\varkappa \geqq h$) können wir eindeutig die Zahl

$$w = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\beta_\varkappa} \tag{1}$$

mit

$$\beta_\varkappa = \left[\frac{\alpha_\varkappa}{h}\right] \tag{2}$$

zuordnen. Wir beachten, daß w genau die gleichen Primteiler wie n besitzt und

$$w \leqq n^{1/h} \leqq x^{1/h} \tag{3}$$

gilt. Es seien jetzt

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_g < \cdots \tag{4}$$

die der Größe nach geordneten Primzahlen. Dann gilt: Für

$$\left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_g}\right)^{1/h} < w \leqq \left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_{g-1}}\right)^{1/h} \tag{5}$$

gehören zu jedem solchen w weniger als h^g verschiedene $n \leqq x$. Also erhalten wir

$$A_h(x) < x^{1/h} + \sum_{g=2}^{\infty} h^g \left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_{g-1}}\right)^{1/h} = x^{1/h}\left(1 + \sum_{g=2}^{\infty} h^g \, (q_1 q_2 \cdots q_{g-1})^{-1/h}\right). \tag{6}$$

Wie man nach dem Quotientenkriterium leicht sieht, ist diese rechts stehende unendliche Reihe konvergent. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2

Wir führen jetzt eine neue Bezeichnungsweise ein. Ist

(7) $$n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa},$$

so wollen wir unter

(8) $$n^{(\overline{h})} \text{ bzw. } n^{(\underline{h})}$$

die Teiler von n verstehen, die genau aus dem Produkt aller $p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ mit $\alpha_\varkappa \geqq h$ bzw. $\alpha_\varkappa < h$ bestehen. Es ist dann

(9) $$n = n^{(\overline{h})} \cdot n^{(\underline{h})} = \prod_{\substack{\varkappa \leqq k \\ \alpha_\varkappa \geqq h}} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \cdot \prod_{\substack{\varkappa \leqq k \\ \alpha_\varkappa < h}} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}; \quad (n^{(\overline{h})}, n^{(\underline{h})}) = 1\,.$$

Ist nun $f(n)$ eine (eindeutige) distributive zahlentheoretische Funktion (d. h. $f(ab) = f(a)\,f(b)$ für $(a, b) = 1$), so haben wir

(10) $$f(n) = f(n^{(\overline{h})}) \cdot f(n^{(\underline{h})})\,.$$

Wir fragen nach der Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, für welche bei vorgegebener Konstante c

(11) $$f(n) = c$$

gelten soll. Wir betrachten deshalb die Zuordnung

(12) $$n^{(\overline{h})} \rightarrow n.$$

Sei $n^{(\overline{h})}$ gegeben. Dann erhalten wir aus (10) und (11)

(13) $$f(n^{(\underline{h})}) = \frac{c}{f(n^{(\overline{h})})} = c_{n^{(\overline{h})}} = c^*\,.$$

Ist die Zuordnung (12) höchstens $(M-1)$-deutig, wobei $M > 1$ eine feste natürliche Zahl sein soll, so folgt nach dem Hilfssatz aus § 1

(14) $$A(x) = O(x^{1/h})\,.$$

Ist die Zuordnung (12) für $n \leqq x$ maximal $g(x)$-deutig, so gilt

(15) $$A(x) = O\big(g(x) \cdot x^{1/h}\big)\,.$$

Ist insbesondere die Zuordnung (12) mindestens einmal M-deutig, so gibt es mindestens ein M-Tupel verschiedener Zahlen $n_1^{(\underline{h})}, \ldots, n_M^{(\underline{h})}$, die

(16) $$f(n_1^{(\underline{h})}) = f(n_2^{(\underline{h})}) = \cdots = f(n_M^{(\underline{h})})$$

erfüllen. Diese Bedingung ist gleichwertig mit

(17) $$f(n_i^{(\underline{h})}) = f(n_j^{(\underline{h})}); \qquad 1 \leqq i < j \leqq M\,.$$

Wir haben also $\binom{M}{2}$ Gleichungen vom Typ (17) vorliegen. Es seien jetzt q_1, $q_2, \ldots, q_s$ irgendwelche vorgegebene verschiedene Primzahlen. Wir setzen

(18) $$m = (q_1 q_2 \cdots q_s)^{h-1}.$$

Es sei ferner

(19) $$(m, n_\mu^{(\underline{h})}) = t_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, M).$$

Die Zahlen t_μ können höchstens h^s verschiedene Werte annehmen. Setzen wir nun

$$M > h^s(H-1) \tag{20}$$

voraus, wobei $H > 1$ eine natürliche Zahl bedeuten soll, so gibt es mindestens H Zahlen $n_1^{(h)}, \ldots, n_H^{(h)}$ derart, daß

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_H = t \tag{21}$$

gilt, d. h.

$$f\left(\frac{n_1^{(h)}}{t}\right) = \cdots = f\left(\frac{n_H^{(h)}}{t}\right). \tag{22}$$

Dabei sind $\frac{n_1^{(h)}}{t}, \ldots, \frac{n_H^{(h)}}{t}$ natürliche, zu m teilerfremde Zahlen. Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen in dem folgenden Satz zusammen, wobei wir die Bezeichnungen noch etwas vereinfachen.

Satz 1. *Ist $f(n)$ eine distributive zahlentheoretische Funktion und gilt für die Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, die $f(n) = c$ mit vorgegebenem c erfüllen: $A(x) \neq O(x^{1/h})$, so gibt es bei beliebig vorgegebenen natürlichen Zahlen H und K mindestens H natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_H$, die nur Primteiler $> K$, jeden höchstens in der $(h-1)$-ten Potenz, besitzen und die $f(n_1) = \cdots = f(n_H)$ erfüllen. Wir können ferner annehmen, daß $n_1, \ldots, n_H$ nicht alle zugleich ein und denselben Primteiler in der gleichen Potenz enthalten.*

§ 3

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Satz 2. *Die zahlentheoretische Funktion $\Phi(n)$ erfülle die Bedingungen:*

a) Aus $(n_1, n_2) = 1$ folgt $\Phi(n_1 n_2) = \Phi(n_1)\,\Phi(n_2)$.

b) $\Phi(n)$ sei eine natürliche Zahl; es existiere eine feste natürliche Zahl $a > 1$ so, daß $a \mid \Phi(p)$ für alle Primzahlen p gilt, die eine gegebene Konstante K übertreffen.

c) Es sei $f(p) = \frac{\Phi(p)}{p^r}$ für alle Primzahlen $p > K$, wobei r eine natürliche Zahl bedeuten soll, die im allgemeinen aber noch von p abhängen kann. Es gelte $f(p) < a$, wobei a die unter b) angegebene Bedeutung hat.

Bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leqq x$, die $f(n) = c$ mit festem c genügen, so ist $A(x) = O(\sqrt{x})$.

Beweis. Wäre $A(x) \neq O(\sqrt{x})$, so gäbe es nach Satz 1 mindestens H natürliche, *quadratfreie* Zahlen $n_1, \ldots, n_H$, die nur Primteiler $> K$ besitzen und

$$f(n_1) = \cdots = f(n_H) \tag{23}$$

erfüllen. Sei nun

$$n_1 = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa; \quad n_2 = \prod_{\lambda=1}^{l} q_\lambda, \tag{24}$$

wobei $p_\varkappa$, q_λ Primzahlen bedeuten. Wir betrachten

$$\prod_1^k f(p_\varkappa) = \prod_1^l f(q_\lambda); \text{ d. h. } \prod_1^k \frac{\Phi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^{r_\varkappa}} = \prod_1^l \frac{\Phi(q_\lambda)}{q_\lambda^{r'_\lambda}} \tag{25}$$

und können alle auftretenden Primzahlen als paarweise teilerfremd ansehen.

Nach der Voraussetzung *b)* ist

$$a^k \,\Big|\, \prod_{1}^{k} \Phi(p_\varkappa)\,. \tag{26}$$

Nach Voraussetzung *c)* ist

$$0 < \prod_{1}^{k} \frac{\Phi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^{r_\varkappa}} < a^k. \tag{27}$$

Aus (25) bis (27) ergibt sich der Widerspruch

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \Phi(p_\varkappa) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} a^k \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{r_\varkappa}\right), \tag{28}$$

da wir o. B. d. A. auch $p_\varkappa > K > a$ annehmen dürfen.
Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkungen zu Satz 2. Die Funktionen

$$f(n) = \frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{1}{n^r} \sum_{d/n} d^r \tag{29}$$

und

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa^r - 1}{p_\varkappa^r} \tag{30}$$

erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2. Für die letzte Funktion ist aber das Ergebnis zu schwach. Denn wir sehen leicht, daß für sie gilt:

$$f(n_1) = f(n_2) \tag{31}$$

ist dann und nur dann erfüllt, wenn n_1 und n_2 genau die gleichen Primteiler besitzen. Mit festem c hat also

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = c \tag{32}$$

als Lösungen entweder gar keine Zahl n oder die Zahlen

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \tag{33}$$

mit *festen* Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$. Sei noch o. B. d. A.

$$p_1 < \cdots < p_k \tag{34}$$

angenommen. Für die Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, die (32) genügen, ergibt sich eine Abschätzung aus

$$p_1^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \leqq n \leqq x; \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leqq \frac{\log x}{\log p_1}\,. \tag{35}$$

Das liefert

$$A(x) \leqq \left(\frac{\log x}{\log p_1}\right)^k = O\big((\log x)^k\big). \tag{36}$$

§ 4

Wir setzen die in Satz 2 auftretende Konstante

$$c = \frac{Z}{N}\,, \tag{37}$$

wobei $(Z, N) = 1$ gelten soll; jetzt soll c auch von n abhängen können. Es sei weiterhin vorausgesetzt

$$0 < f(p^\alpha) = \frac{\Phi(p^\alpha)}{p^{\alpha r}} \leqq \frac{p^r}{p^r - 1} \tag{38}$$

für jede Primzahlpotenz p^α; r soll wieder eine natürliche Zahl sein, die aber im allgemeinen noch von p^α abhängen darf. Dann wird

$$0 < f(n) \leqq \prod_{p|n} \frac{p^r}{p^r - 1} \leqq \prod_{p|n} \frac{p}{p-1} = \frac{n}{\varphi(n)}. \tag{39}$$

Wenn immer $r > 1$ gilt, folgt aus (39)

$$f(n) < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{40}$$

Wir nehmen nun an, in (37) sei immer

$$N \leqq g(n) \tag{41}$$

mit einer passend zu wählenden, monoton nicht abnehmenden Funktion $g(n)$. Wir definieren jetzt die Menge $\mathfrak{N}(g(n))$ als die Menge der natürlichen Zahlen $n \leqq x$, welche

$$f(n) = \frac{Z}{N}; \quad (Z, N) = 1; \; N \leqq g(n) \tag{42}$$

erfüllen. $A(g(x))$ sei die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}(g(n))$.

Da bekanntlich

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n) \log\log n}{n} = e^{-C} \; (C = \text{Eulersche Konstante}) \tag{43}$$

ist, existiert eine Konstante C_1 so, daß

$$\frac{n}{\varphi(n)} < C_1 \log\log n \tag{44}$$

gilt. Aus (39) erhalten wir somit

$$\frac{1}{g(x)} \leqq f(n) < C_1 \log\log \prod_{p|n} p \leqq C_1 \log\log n \leqq C_1 \log\log x. \tag{45}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten für $\frac{Z}{N}$ wird nach oben begrenzt durch

$$C_1 (g(x))^2 \log\log x. \tag{46}$$

Nach Satz 2 erhalten wir

$$A(g(x)) < C_1 x^{1/2} (g(x))^2 \log\log x. \tag{47}$$

Ist speziell

$$g(x) \leqq \frac{x^{1/4}}{h(x) (\log\log x)^{1/2}}, \tag{48}$$

wobei $h(x)$ irgendeine monoton mit x gegen ∞ strebende Funktion sein soll, so folgt

$$\frac{A(g(x))}{x} < \frac{C_1}{(h(x))^2} = o(1). \tag{49}$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen in

Satz 3. *Die zahlentheoretische Funktion $\Phi(n)$ erfülle die Bedingungen a), b) und c) von Satz 2. Ferner sei noch* (38) *erfüllt. Es sei $A(g(x))$ die Anzahl* *der natürlichen Zahlen* $n \leqq x$, *die* (42) *genügen. Dann gilt* (47). *Ist auch* (48) *erfüllt, so folgt die Gültigkeit von* (49). *Ist insbesondere* $g(n) = N_0$ *(fest), so ist*

$$A(N_0) < C_1 N_0^2\, x^{1/2} \log\log x = O(x^{1/2} \log\log x).$$

§ 5

Wir bemerken, daß

(50) $$f(n) = \frac{\sigma_r(n)}{n^r}$$

und

(51) $$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r}$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots$ die Bedingung (38) erfüllen. Für die erste Funktion bekommen wir für $r > 1$

(52) $$1 + \frac{1}{g(x)} \leqq f(n) = \frac{Z}{N} < \zeta(r) < 1 + \frac{1}{2^{r-2}} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Daraus folgt

(53) $$r < 2 + \frac{\log g(x)}{\log 2} < C_2 \log g(x).$$

Für

(54) $$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_\varkappa^r}\right)$$

gewinnen wir die gleiche Abschätzung für r aus

(55) $$1 - \frac{1}{g(x)} \geqq \frac{\varphi_r(n)}{n^r} > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) > 1 - \frac{1}{2^{r-2}} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Damit gewinnen wir den

Satz 4. *Es sei* $g(x)$ *eine monoton nicht abnehmende Funktion und* $A(g(x))$ *die Anzahl der natürlichen Zahlen* $n \leqq x$, *die für irgendeine natürliche Zahl* r *die Bedingung* $\frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{Z}{N}$; $(Z, N) = 1$; $N \leqq g(n)$ *erfüllen. Dann ist* $A(g(x)) = O(x^{1/2}(g(x))^2 \log g(x) \log\log x)$. *Dasselbe ist auch erfüllt, wenn wir statt* $\sigma_r(n)$ *die Funktion* $\varphi_r(n)$ *betrachten. Ist* $g(n) = N_0$ *(fest), so ist*

$$A(N_0) = O(x^{1/2} \log\log x).$$

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung und Verschärfung von [1], Satz 3 dar. Nehmen wir noch an, daß

(56) $$g(x) \leqq \frac{x^{1/4}}{h(x)\,(\log x)^{1/2}\,(\log\log x)^{1/2}}$$

gilt, wobei $h(x)$ die gleiche Bedeutung wie in (48) haben soll, so liefert Satz 4

(57) $$A(g(x)) = O\left(\frac{x}{(h(x))^2}\right) = o(x).$$

Dieses Resultat können wir so aussprechen:

Satz 5. n, r, N, Z *bedeuten natürliche Zahlen. Die Dichte der Menge aller* n, *die, für irgendein* r, *der Bedingung*

$$\frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{Z}{N} \text{ mit } (Z, N) = 1;\ N \leqq \left(\frac{n^{1/2}}{h(n) \log n \log\log n}\right)^{1/2}$$

genügen, ist Null. $h(x)$ bedeutet irgendeine monoton mit x gegen ∞ strebende Funktion. Der Satz bleibt richtig, wenn wir $\sigma_r(n)$ durch $\varphi_r(n)$ ersetzen.

§ 6

Wir wollen unsere Methoden auf die Menge der vollkommenen Zahlen anwenden. Das Ziel ist

Satz 6. *Es sei $A(x)$ die Anzahl aller vollkommenen Zahlen $\leqq x$. Dann gilt* $A(x) = O\left(x^{1/4}\frac{\log x}{\log\log x}\right)$.

Beweis. Wie früher gezeigt wurde [2], gilt für die Anzahl $A_g(x)$ aller geraden vollkommenen Zahlen $\leqq x$ die Abschätzung

$$A_g(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{58}$$

Wir können uns deshalb im weiteren Beweisgang auf die ungeraden vollkommenen Zahlen beschränken, die die folgende Gestalt besitzen:

$$n = p^\alpha q_1^{2\beta_1}\ldots q_r^{2\beta_r}\,;\quad p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4. \tag{59}$$

Zunächst betrachten wir diejenigen n, bei welchen $\alpha > 1$ ist. Für diese ist

$$n^{(4)} = \Pi\, q_\varrho^2, \tag{60}$$

wobei das Produkt über gewisse ϱ (evtl. über keins) erstreckt wird. Wäre die Anzahl dieser $n \leqq x$ nicht gleich $O(x^{1/4})$, so gäbe es nach Satz 1 zwei natürliche Zahlen

$$n_1 = p_1^2\ldots p_i^2;\quad n_2 = q_1^2\ldots q_j^2;\quad (n_1, n_2) = 1 \tag{61}$$

derart, daß

$$\begin{aligned}&(1+p_1+p_1^2)\cdots(1+p_i+p_i^2)\,q_1^2\cdots q_j^2\\ &=(1+q_1+q_1^2)\cdots(1+q_j+q_j^2)\,p_1^2\cdots p_i^2\end{aligned} \tag{62}$$

wäre. Dann wäre aber

$$1 < \frac{1+p_1+p_1^2}{p_1^2}\cdots\frac{1+p_i+p_i^2}{p_i^2} = \lambda < 2 \tag{63}$$

und λ eine ganze Zahl, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Wir können uns von nun an auf solche n beschränken, bei welchen in der Gestalt (59) noch $\alpha = 1$ erfüllt ist. Für diese ist

$$n^{(4)} = p\,\Pi\, q_\varrho^2 \text{ mit } p \equiv 1 \pmod 4,\quad f(n^{(4)}) = \frac{\sigma(n^{(4)})}{n^{(4)}} = \frac{p+1}{p}\,\Pi\,\frac{1+q_\varrho+q_\varrho^2}{q_\varrho^2}, \tag{64}$$

wobei wieder wie in (60) das Produkt über gewisse ϱ erstreckt wird. Nach einem Ergebnis von R. STEUERWALD [3] gilt

$$\frac{p+1}{p}\,\Pi\,\frac{1+q_\varrho+q_\varrho^2}{q_\varrho^2} < 2. \tag{65}$$

Wir betrachten jetzt zwei verschiedene $n_1^{(4)}$, $n_2^{(4)}$, die

$$\frac{\sigma(n_1^{(4)})}{n_1^{(4)}} = \frac{\sigma(n_2^{(4)})}{n_2^{(4)}} \tag{66}$$

erfüllen. Sei also

(67) $$n_i^{(4)} = p_i q_{i1}^2 \dots q_{is_i}^2; \; p_i \equiv 1 \pmod 4; \qquad (i = 1, 2)$$

und

(68) $$\begin{aligned} &\frac{p_1+1}{2}(1 + q_{11} + q_{11}^2) \cdots (1 + q_{1s_1} + q_{1s_1}^2)\, p_2 q_{21}^2 \cdots q_{2s_2}^2 \\ &= \frac{p_2+1}{2}(1 + q_{21} + q_{21}^2) \cdots (1 + q_{2s_2} + q_{2s_2}^2)\, p_1 q_{11}^2 \cdots q_{1s_1}^2 . \end{aligned}$$

Wir dürfen o. B. d. A. in (68) annehmen, daß

(69) $$(q_{11} \cdots q_{1s_1}, q_{21} \cdots q_{2s_2}) = 1$$

gilt, da wir uns sonst in (68) die entsprechenden Faktoren auf beiden Seiten weggekürzt denken können. Wäre

(70) $$p_1 = p_2 ,$$

so folgte aus (65) und (68) der Widerspruch

(71) $$q_{11}^2 \cdots q_{1s_1}^2 \mid (1 + q_{11} + q_{11}^2) \cdots (1 + q_{1s_1} + q_{1s_1}^2) < 2\, q_{11}^2 \cdots q_{1s_1}^2 .$$

Wir dürfen also

(72) $$p_1 < p_2$$

annehmen. Es sei jetzt vorausgesetzt

(73) $$(p_1, q_{21} \cdots q_{2s_2}) = (p_2, q_{11} \cdots q_{1s_1}) = 1 .$$

Dann folgte aus (68), (69) und (72)

(74) $$p_1 q_{11}^2 \dots q_{1s_1}^2 \,\Big|\, \frac{p_1+1}{2}(1 + q_{11} + q_{11}^2) \dots (1 + q_{1s_1} + q_{1s_1}^2).$$

Das ist nach (65) ein Widerspruch. Also muß mindestens eine der beiden Bedingungen

(75) $$p_1^2 \mid n_2^{(4)}; \; p_2^2 \mid n_1^{(4)}$$

erfüllt sein. Aus (67), (68) und (72) können wir unter Beachtung, daß $1 + q + q^2$ außer evtl. 3 nur Primteiler $\equiv 1 \pmod 3$ besitzt, schließen, daß

(76) $$p_2 \equiv 1 \pmod 3$$

sein muß. Wir nehmen nun an, die (12) entsprechende Zuordnung

(77) $$n^{(\bar{4})} \to n$$

sei für alle $n \leqq x$ maximal $g(x)$-deutig. Dann besitzt die (13) entsprechende Gleichung

(78) $$\frac{1}{2}\,\frac{\sigma(n_i^{(4)})}{n_i^{(4)}} = \frac{p_i+1}{2}(1 + q_{i1} + q_{i1}^2) \dots (1 + q_{is_i} + q_{is_i}^2) = c^*$$

für von i unabhängiges c^* mindestens einmal $g(x)$ Lösungen $n_i^{(4)}$ $(i = 1, \dots, g(x))$, die zu einem bestimmten $n^{(\bar{4})} = n_0^{(\bar{4})}$ gehören. Wir können nun annehmen:

(79) $$\begin{aligned} &p_1 < p_2 < \cdots < p_{g(x)} && [\text{nach } (72)]; \\ &p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_{g(x)} \equiv 1 \pmod{12} && [\text{nach } (67) \text{ und } (76)]. \end{aligned}$$

Wegen (75) müssen von den $g(x)\,(g(x)-1)$ Bedingungen

$$p_i^2 \mid n_j^{(4)} \qquad (i, j = 1, \ldots, g(x);\ i \neq j) \tag{80}$$

mindestens $\binom{g(x)}{2}$ erfüllt sein. Also muß für mindestens einen festen Index k nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gelten, daß (evtl. mit entsprechender Umnumerierung)

$$p_1^2 p_2^2 \ldots p_{k-1}^2 \mid n_k^{(4)}; \quad k-1 \geqq \frac{g(x)-1}{2} \tag{81}$$

erfüllt ist. Wir beachten, daß wir [vgl. (78)]

$$2 = \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = \frac{\sigma(n_0^{(4)})}{n_0^{(4)}} \cdot \frac{\sigma(n_i^{(4)})}{n_i^{(4)}}; \quad \frac{1}{2}\,\sigma(n_i^{(4)}) \,\Big|\, n_i \quad (i = 1, \ldots, g(x)) \tag{82}$$

annehmen dürfen. Insbesondere folgt nach (79) und (81) für $i = k$

$$3^{\left[\frac{g(x)-3}{2}\right]} \mid 3^{k-2} \mid n_k. \tag{83}$$

Ist aber $\left[\frac{g(x)-3}{2}\right] > 2$, so bedeutet das auch

$$3^{\left[\frac{g(x)-3}{2}\right]} \mid n_0^{(4)} \mid n_i \leqq x \qquad (i = 1, \ldots, g(x)). \tag{84}$$

Aus (81) bekommen wir $p_1 \cdots p_{k-1} \leqq x^{1/2}$ und

$$g(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{85}$$

Nach (15) erhalten wir damit

$$A(x) = O\left(x^{1/4}\,\frac{\log x}{\log\log x}\right) \tag{86}$$

und den Beweis von Satz 6. Aus (84) können wir noch das folgende Resultat entnehmen:

Satz 7. *Es sei G eine beliebig große, fest vorgegebene natürliche Zahl. Dann gilt für die Anzahl $A_G(x)$ aller nicht durch 3^G teilbaren vollkommenen Zahlen $\leqq x$: $A_G(x) = O(x^{1/4})$.*

Literatur

[1] KANOLD, H.-J.: Über einen Satz von L. E. DICKSON II. Math. Ann. **132**, 246—255 (1956). — [2] KANOLD, H.-J.: Eine Bemerkung über die Menge der vollkommenen Zahlen. Math. Ann. **131**, 390—392 (1956). — [3] STEUERWALD, R.: Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl. **1937**, 69—72.

(Eingegangen am 23. Juli 1956)