Math. Ann. 211, 47—62 (1974)

Über die Albanese-Abbildung einer fasthomogenen Kähler-Mannigfaltigkeit

W. Barth und E. Oeljeklaus

0. Einleitung

0.1. Für jede kompakte komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit X sind Albanese-Torus $A(X)$ und Albanese-Abbildung $\alpha: X \to A(X)$ definiert [1]. Für alle X mit $c_1(X) \geqq 0$ ist X ein holomorphes Faserbündel über $A(X)$, [8]. Ist X homogen, so ist X ein Produkt von $A(X)$ mit einer homogenen projektiven rationalen Mannigfaltigkeit Y und α die Projektion auf $A(X)$, vgl. [4]. Ist X *fasthomogen* (s. Definition 3.1), so ist X noch immer ein holomorphes Bündel über $A(X)$ mit Bündelprojektion α (Remmert u. Van de Ven), und die typische Faser ist projektiv-algebraisch und einfach-zusammenhängend [9]. In der vorliegenden Note zeigen wir, daß X „fast" ein Produkt ist. Es gilt der

Satz. *Ist $\alpha: X \to A(X)$ die Albanese-Abbildung einer kompakten komplexen fasthomogenen Kähler-Mannigfaltigkeit und Y die typische Faser dieses Bündels, so gibt es unverzweigte endliche Überlagerungen $X^* \to X$ und $A^* \to A(X)$ derart, daß die (fasthomogene) Mannigfaltigkeit X^* differenzierbar isomorph zu $Y \times A^*$ ist. Die Projektion $X^* \to A^*$ ist gerade die Albanese-Abbildung von X^* auf $A^* = A(X^*)$.*

Im Hinblick auf [4] liegt es nahe, eine derartige Aussage zu vermuten. Ihr Beweis ist auch relativ einfach für den Fall, daß X projektiv-algebraisch und die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}^0(X)$ eine algebraische Gruppe ist, die rational auf X operiert. Für den Allgemeinfall scheint der Beweis jedoch wesentlich schwieriger zu sein.

0.2. In 3.5. geben wir ein Beispiel dafür an, daß bei dem oben erwähnten Satz der Übergang zur Überlagerung X^* wesentlich ist. Außerdem erhalten wir noch die beiden folgenden Strukturaussagen (3.3 und 3.6) für eine fasthomogene kählersche Mannigfaltigkeit X:

i) *Für die Isotropiegruppe I_x (in $\mathrm{Aut}^0(X)$) eines Punktes $x \in X$ gilt: I_x/I_x^0 ist endlich und I_x^0 trägt die Struktur einer linearen algebraischen Gruppe.*

ii) *Das Komplement $X \setminus X^0$ des offenen Orbits besteht aus höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.*

0.3 Wir benutzen folgende Notationen: Wir nennen eine komplexe Liegruppe G (linear) algebraisch, falls es eine (lineare) algebraische Gruppe über $\mathbb{C}$ gibt, deren zugrundeliegende transzendente Gruppe G ist.

$e \in G$ ist stets das Einselement. Falls $g \in G$, so ist int g der innere Automorphismus

$$h \mapsto ghg^{-1}, \quad h \in G,$$

von G. $\mathrm{Int}(G)$ ist die Gruppe aller inneren Automorphismen, $\mathrm{Aut}(G)$ die aller Automorphismen von G. $\mathrm{Lie}(G)$ ist die Liealgebra von G und $\mathrm{Ad}(G)$ die durch $\mathrm{Int}(G)$ induzierte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G))$. $G^0 \subset G$ ist die Zusammenhangskomponente von e. Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, so ist $\mathrm{Aut}(X)$ die komplexe Liegruppe aller holomorphen Automorphismen von X. Die punktierten Mengen

$$H^1(X, G), H^1(X, \mathfrak{C}^\infty(G)), \quad \text{bzw.} \quad H^1(X, G)$$

sind die Mengen von Cohomologieklassen konstanter, differenzierbarer, bzw. holomorpher Cozyklen mit Werten in G.

Ist ξ ein holomorphes Faserbündel, so ist π_ξ die Bündelprojektion und ξ_z die Faser über einem Basispunkt z. Ist $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung der Basis, so sind $C^i(\mathfrak{U}, \xi)$ die Räume der Čech-Coketten mit Werten in ξ, $i \geqq 0$, und $Z^1(\mathfrak{U}, \xi)$ ist der Raum der 1-Cozyklen.

§ 1. Induzierte Bündel

1.1 Homogene Bündel. – Wir gehen aus von der

Situation 1: Es sei G eine zusammenhängende komplexe Liegruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene komplexe Untergruppe, $Q := G/H$, $q \in Q$ der Punkt $e \cdot H$. Ferner sei η das H-Prinzipalbündel über Q mit Bündelraum G und Projektion $\pi_\eta : G \ni g \mapsto g \cdot H \in Q$.

Notation: Es sei $\varrho : H \to \mathrm{Aut}\, Y$ eine holomorphe (Links-)Operation von H auf der komplexen Mannigfaltigkeit Y, $H \times Y \ni (h, y) \mapsto \varrho(h) \cdot y \in Y$. Wir bezeichnen das zu η vermöge ϱ assoziierte Bündel mit typischer Faser Y mit $\eta[Y]$ oder ausführlicher mit $\eta[Y, \varrho]$.

a) Das Bündel $\eta[Y]$ wird bekanntlich wie folgt beschrieben: H operiert auf $G \times Y$ durch $(g, y) \mapsto (g \cdot h^{-1}, \varrho(h)\, y)$, $h \in H$. Der Bündelraum von $\eta[Y]$ ist $G \times Y/H$, und $\pi_{\eta[Y]}$ wird induziert durch $G \times Y \xrightarrow{pr} G \xrightarrow{\pi_\eta} Q$.

b) Die Gruppe G operiert auf dem Bündelraum von $\eta[Y]$ als Gruppe von holomorphen Bündelautomorphismen vermöge der Operation $g_0 : (g, y) \mapsto (g_0 g, y)$, $g_0 \in G$, auf $G \times Y$.

c) Ist umgekehrt ξ ein holomorphes Bündel über Q mit typischer Faser Y und operiert G auf dem Totalraum dieses Bündels π_ξ-äquivariant, so ist ξ assoziiert zu η. Die Darstellung ϱ ist die Operation von H auf $\pi_\xi^{-1}(q)$.

d) Es sei $G' \subset G$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) komplexe Untergruppe, die durch π_η surjektiv auf Q abgebildet wird. Dann ist

$H' := G' \cap H$ in G' abgeschlossen, und $\pi_{\eta'}: G' \to Q$ definiert ein H'-Prinzipalbündel η'. Jedes zu η vermöge einer Darstellung $\varrho: H \to \mathrm{Aut}(Y)$ assoziierte Bündel ist dann auch zu η' assoziiert vermöge $\varrho': H' \hookrightarrow H \xrightarrow{\varrho} \mathrm{Aut}(Y)$.

1.2 Bündel von Bündel-Automorphismen. – Es sei L eine komplexe Liegruppe, und $\mathrm{Aut}(L)$ sei die (topologische) Gruppe der holomorphen Gruppen-Automorphismen von L. Ist L zusammenhängend, so ist der Homomorphismus $\mathrm{Aut}(L) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(L))$ injektiv. (Ist zusätzlich $\pi_1(L)=0$, so ist dies ein Isomorphismus, und $\mathrm{Aut}(L)=\mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(L))$ ist eine komplexe Liegruppe.)

a) Es sei η wie in Situation 1. Ist $\varrho: H \to \mathrm{Aut}(L)$ holomorph (falls $\mathrm{Aut}(L)$ keine komplexe Liegruppe ist, so bedeutet dies, $H \times L \to L$, $(h, 1) \mapsto \varrho(h) \cdot 1$, sei holomorph), so ist $\eta[L, \varrho]$ ein holomorphes Gruppenbündel über Q mit typischer Faser L.

b) Es sei ξ ein holomorphes Bündel über Q. Die typische Faser Y sei *kompakt*. Wir definieren ein Bündel $\mathrm{Aut}(\xi)$ wie folgt: Die typische Faser sei die komplexe Liegruppe $\mathrm{Aut}(Y)$. Wird ξ gegeben durch einen Cozyklus $\xi_{ij}: U_j \times Y \supset U_{ij} \times Y \to U_{ij} \times Y \subset U_i \times Y$, so werde $\mathrm{Aut}(\xi)$ gegeben durch den Cozyklus

$$U_{ij} \ni z \mapsto \mathrm{int}\, \xi_{ij}(z), (\mathrm{int}\, f)\, g = f g f^{-1},\ f, g \in \mathrm{Aut}(Y).$$

Ist ξ ein Bündel über Q, $U \subset Q$ offen, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}_\xi(\pi_\xi^{-1} U)$ die topologische Gruppe der π_ξ-äquivarianten Automorphismen von $\pi_\xi^{-1} U$, die auf U die Identität induzieren. Dann gilt: Es gibt natürliche topologische Isomorphismen

$$\mathrm{Aut}_\xi(\pi_\xi^{-1} U) \to \Gamma(U, \mathrm{Aut}(\xi)).$$

Beweis: Es seien $U_i, U_j \subset Q$ zwei offene Mengen, über denen ξ trivial ist, und $\xi_{ij}: U_j \times Y \supset U_{ij} \times Y \to U_{ij} \times Y \subset U_i \times Y$ ein Verheftungsisomorphismus. Zwei holomorphe Abbildungen $g_i: U_i \to \mathrm{Aut}(Y)$, $g_j: U_j \to \mathrm{Aut}(Y)$, verheften sich genau dann zu einem holomorphen Automorphismus von $\pi_\xi^{-1}(U_i \cup U_j)$, wenn für alle $z \in U_i \cap U_j$ gilt:

$$\xi_{ij}(z) \cdot g_j(z) = g_i(z) \cdot \xi_{ij}(z), \quad \text{d. h.} \quad g_i(z) = [\mathrm{int}\, \xi_{ij}(z)]\, (g_j(z)).$$

c) Es sei η wie in Situation 1 und ξ ein Bündel über Q mit kompakter Faser Y, assoziiert zu η vermöge einer holomorphen Darstellung $\varrho: H \to \mathrm{Aut}(Y)$. Die Operation von G auf dem Bündelraum von ξ induziert folgendermaßen eine Operation von G auf $\mathrm{Aut}(\xi)$: Ist $g \in G$, $f \in \mathrm{Aut}_\xi(\pi_\xi^{-1} U)$, so ist $g \cdot f \cdot g^{-1} \in \mathrm{Aut}_\xi(\pi_\xi^{-1} gU)$. Deswegen ist auch Aut_ξ zu η assoziiert, und zwar vermöge folgender Darstellung int_ϱ von H in $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}\, Y)$:

$$\mathrm{int}\,\varrho(h): f \mapsto \varrho(h) \cdot f \cdot \varrho(h)^{-1}, h \in H, f \in \mathrm{Aut}(Y).$$

Das heißt also: $\mathrm{Aut}(\eta[Y,\varrho]) = \eta[\mathrm{Aut}\, Y, \mathrm{int}\,\varrho]$.

d) Ist H ein Normalteiler in G, so definiert jedes $h \in H$ einen π_η-äquivarianten Automorphismus von $\eta[Y,\varrho]$, der auf Q die Identität induziert. Man erhält somit einen Morphismus $\Phi: H \to \Gamma(Q, \mathrm{Aut}(\eta[Y,\varrho]))$. Dieser ist injektiv, falls G treu auf dem Bündelraum von $\eta[Y]$ operiert. Ist $z \in Q$, so sei $\Phi_z: H \to \Gamma(Q, \mathrm{Aut}(\eta[Y,\varrho])) \xrightarrow{w_z} \mathrm{Aut}(Y_z)$, wo w_z die Wert-Abbildung ist. Die Gruppe $\Phi_q(H) \subset \mathrm{Aut}(Y)$, $q = eH$, ist invariant unter allen Automorphismen $\mathrm{int}\,\Phi_q(h), h \in H$, von $\mathrm{Aut}(Y)$. Wir erhalten also ein Unterbündel $\eta[\Phi_q(H)] \subset \eta[\mathrm{Aut}(Y)]$.

Behauptung: $\Phi_z(H) \in \eta[\Phi_q(H)]_z$ für alle $z \in Q$.

Beweis: Die Operation von H auf $\eta[Y]$ wird induziert durch die folgende Operation auf $G \times Y$

$$h: (g, y) \mapsto (hg, y) = (gg^{-1}hg, y) \sim (g, \varrho(g^{-1}hg)\, y).$$

Die Zuordnung $g \mapsto \varrho(g^{-1}hg)$ definiert aber gerade einen Schnitt in $G \times \Phi_q(H)$, der einen Schnitt in $\eta[\Phi_q(H)]$ induziert.

§ 2. Ein Trivialitätskriterium

Wir verallgemeinern hier ein Trivialitätskriterium für Vektorbündel auf Gruppenbündel mit auflösbarer affiner Faser.

2.1 Auflösbare Gruppenbündel über einem kompakten Torus. – Wir beweisen zunächst für Vektorbündel das folgende

Kriterium 1: Es seien $1 \to H \to G \xrightarrow{\eta} T \to 0$ eine exakte Sequenz komplexer Liegruppen, T ein kompakter Torus, G zusammenhängend. Es sei V ein komplexer Vektorraum endlicher Dimension, $\varrho: H \to GL(V)$ eine holomorphe Darstellung und $\eta[V] = \eta[V, \varrho]$ das dadurch induzierte Vektorbündel über T. Das Bündel $\eta[V]$ werde durch seine globalen Schnitte erzeugt. Dann ist $\eta[V]$ trivial.

Beweis: Die Operation von G auf dem Bündelraum von $\eta[V]$ definiert eine Operation von G auf $\Gamma(T, \eta[V])$, $(g, s) \mapsto g \circ s \circ \eta(g^{-1})$. Für die Wert-Abbildungen $w_t: \Gamma(T, \eta[V]) \to V_t$, $t \in T$, gilt insbesondere $g \ker w_t = \ker w_{\eta(g)t}$. Die holomorphe Abbildung $T \ni t \mapsto \ker w_t \in \mathrm{Graß}(\dim \Gamma(T, \eta[V]), \dim V)$ ist also G-äquivariant. Das Bild von T in der Graßmannschen ist dann ein Torus, dessen Translationen alle zu Automorphismen der Graßmannschen fortsetzbar sind. Nach [4, Hilfssatz 3] muß das Bild von T einpunktig sein; d. h., die Abbildung $t \mapsto \ker w_t$ ist konstant. Somit ist $\ker w_t = 0$ für alle t und $\eta[V]$ trivial.

2.2 Zwei Hilfssätze über auflösbare Gruppen. – Es sei L eine zusammenhängende affin-algebraische auflösbare Gruppe. Dann gibt es eine unipotente algebraische Untergruppe $U_L \subset L$ und eine multiplikative abelsche Untergruppe $C \subset L$ mit $L = U_L \cdot C$ (halbdirektes Produkt), vgl. [2, Theorem 10.6(4)]. U_L umfaßt die Kommutatorgruppe (L, L).

Aussage 1: Es sei $V \subset U_L$ ein Normalteiler in L. Dann besitzt der Morphismus $\varphi: L \to L' := L/V$ einen regulären Schnitt.

Beweis: Die Exponentialabbildung $\exp: \mathrm{Lie}(U_L) \to U_L$ ist biregulär. $W \subset \mathrm{Lie}(U_L)$ sei ein Untervektorraum, komplementär zu $\mathrm{Lie}(V)$. Unter der Abbildung $d\varphi: \mathrm{Lie}(L) \to \mathrm{Lie}(L')$ wird W isomorph auf $\mathrm{Lie}(U_{L'})$ abgebildet. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathrm{Lie}(U_L) & \xrightarrow{\sim} & U_L \\ {\scriptstyle d\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \exp\colon \mathrm{Lie}(U_{L'}) & \xrightarrow{\sim} & U_{L'} \end{array}$$

folgt, daß $\varphi: \exp(W) \to U_{L'}$ biregulär ist. Wegen $C \cap U_L = \{e\}$, ist auch $\varphi | C$ biregulär, und $\exp(W) \cdot C$ ist das Bild eines regulären Schnittes für φ.

Aussage 2: Sei $V \subset U_L$ eine Vektoruntergruppe. Dann gibt es eine reguläre Einbettung $\varphi: L \hookrightarrow W$ in einen Vektorraum, so daß $\varphi(L)$ eine abgeschlossene algebraische Menge und $\varphi | V: V \to W$ linear ist.

Beweis: Wir definieren $\varphi_1: U_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(U_L)$ als das Inverse der Exponentialabbildung, $\varphi_2: C \to W'$ als eine abgeschlossene Einbettung auf eine Gruppe von Diagonalmatritzen und setzen $W := \mathrm{Lie}(U_L) \times W'$, $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2$.

2.3. Nun sei L eine zusammenhängende affin-algebraische *auflösbare* Gruppe; die Gruppen G, H und T seien wie in Kriterium 1 gewählt. Es sei $\varrho: H \to \mathrm{Int}\, L \subset \mathrm{Aut}\, L$ eine holomorphe Darstellung und $\eta[L] = \eta[L, \varrho]$ das induzierte Bündel über T mit typischer Faser L. Wir setzen außerdem voraus:

1) Bezüglich einer geeigneten Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ von T kann $\eta[L]$ definiert werden durch einen Cozyklus $\{\mathrm{int}\, l_{ij}\}, l_{ij}: U_{ij} \to L$ holomorph.

2) Das Bild aller Wert-Homomorphismen $w_t: \Gamma(T, \eta[L]) \to L_t$, $t \in T$, ist Zariski-dicht in L_t.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Kriterium 2: Das Bündel $\eta[L]$ ist trivial über T.

Beweis (Induktion nach der Länge $l(L)$ einer Normalreihe von L):

Induktionsanfang: $l(L) = 1$, d. h., L ist abelsch. Dann ist $\mathrm{Int}\, L$ trivial und das Bündel wegen 1) trivial.

Induktionsschluß: $l = l(L) > 0$. Dann ist $V := L^{(l-1)}$ eine algebraische, normale Vektoruntergruppe von L. $L' := L/V$ ist eine auflösbare zusammenhängende affine Gruppe mit $l(L') = l - 1$. Die Darstellung $\varrho: H \to \mathrm{int}\, L$ induziert eine holomorphe Darstellung $\varrho': H \to \mathrm{int}\, L \to \mathrm{int}\, L'$.

(Die Existenz des holomorphen Morphismus $\operatorname{int} L \to \operatorname{int} L'$ folgt aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{int} L \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_{L'} \arrow[r] & L' \arrow[r] & \operatorname{int} L' \arrow[r] & 1 \text{ .)}
\end{tikzcd}$$

Wir haben eine exakte Sequenz von Gruppenbündeln

$$1 \to \eta[V] \to \eta[L] \to \eta[L'] \to 1$$

über T.

a) Das Bündel $\eta[L']$ ist trivial: Dies folgt nach Induktionsannahme, wenn wir 1) und 2) für $\eta[L']$ nachgewiesen haben. Da $\eta[L']$ ein Quotientenbündel von $\eta[L]$ ist, ist 1) offenbar erfüllt. Die Bedingung 2) folgt aus 2) für $\eta[L]$, da jeder Morphismus $L_t \to L'_t$, $t \in T$, regulär ist.

b) Das Bündel $\eta[V]$ ist trivial: Dies folgt aus Kriterium 1, wenn wir wissen, daß das Vektorbündel $\eta[V]$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird. Da die $(l-1)$-fache Kommutatorbildung vertauschbar ist mit allen Wert-Morphismen $w_t : \Gamma(T, \eta[L]) \to (L)_t$, haben alle Wert-Morphismen $w_t : \Gamma(T, \eta[V] \to V_t$, $t \in T$, Zariski-dichtes Bild. Weil diese Bilder $\mathbb{C}$-Untervektorräume sind, müssen sie mit V_t übereinstimmen.

c) Nach 2.2 besitzt der Morphismus $L \to L'$ einen regulären Schnitt. Wir erhalten für alle $t \in T$ ein kommutatives Diagramm exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(T, \eta[V]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(T, \eta[L]) \arrow[r] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "q"] & \Gamma(T, \eta(L')) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(T, \eta[V]) \\
0 \arrow[r] & V_t \arrow[r] & L_t \arrow[r] & L'_t \arrow[r] \arrow[ur, "\delta"] & 1 \, .
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß δ regulär ist (Lemma 3). Somit ist also $\operatorname{Im} q = \delta^{-1}(1) \subset L'_t$ eine algebraische Menge. Da sie (wegen 2) für $\eta[L']$) Zariski-dicht ist, folgt: q ist surjektiv. Aus dem Diagramm ergibt sich nun, daß p bijektiv ist, d. h. $\eta[L]$ ist trivial.

2.4 *Regularität der δ-Abbildung.* – In diesem Abschnitt betrachten wir die folgende Situation:

Es sei

$$0 \to V \to G \to P \to 1$$

eine exakte Sequenz zusammenhängender affin-algebraischer Gruppen, V eine Vektorgruppe, $s: P \to G$ ein regulärer Schnitt, X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ eine endliche holomorph-vollständige Überdeckung von X, η ein holomorphes $(\operatorname{Int} G)$-Prinzipalbündel über X, definiert durch $c_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \operatorname{Int} G)$. $\eta[P]$ sei trivial als $(\operatorname{Aut} P)$-Bündel. Dann haben $H^1(X, \eta[V])$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und $H^0(X, \eta[P]) \simeq P$ natürliche Strukturen als affin-algebraische Gruppen über $\mathbb{C}$.

Lemma 3. *Die durch die exakte Bündelsequenz*

$$0 \to \eta[V] \to \eta[G] \to \eta[P] \to 0$$

definierte Abbildung $\delta : H^0(X, \eta[P]) \to H^1(X, \eta[V])$ ist regulär.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es seien V, W endlichdimensionale komplexe Vektorräume und $U \subset \mathbb{C}^n$ zusammenhängend und offen. Ferner sei $\Delta : U \times V \to W$ holomorph, und für jedes $z \in U$ sei $\Delta(z) : V \to W$ eine Polynomabbildung. Dann ist Δ eine Polynomabbildung $V \to W$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}(U)$.*

Beweis: Es sei $U_d := \{z \in U;\ \operatorname{grad} \Delta(z) \leq d\}$. Aus einer (in U lokalen) Potenzreihenentwicklung für Δ folgt, daß die Mengen $U_d \subset U$ analytisch sind. Nach Voraussetzung liegt jedes $z \in U$ in mindestens einem U_d, und U ist damit Vereinigung abzählbar vieler analytischer Teilmengen. Es folgt $U = U_d$ für ein d und damit die Behauptung.

Beweis von Lemma 3:

1) Auch als Int P-Bündel ist $\eta[P]$ trivial:

Die kanonischen Homomorphismen $\operatorname{Int} P \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ad} P \hookrightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))$ liefern die folgende Sequenz von punktierten Cohomologiemengen:

$$H^1(X, \operatorname{Int} P) \xrightarrow{\lambda} H^1(X, \operatorname{Ad} P) \xrightarrow{\tau}$$
$$\longrightarrow H^1(X, \operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))).$$

Weil die adjungierte Darstellung von P rational ist, ist Ad P ein algebraischer Normalteiler der affin-algebraischen Gruppe $\operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))$. Daher ist $\operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))/\operatorname{Ad} P$ ebenfalls eine affin-algebraische Gruppe und insbesondere holomorph separabel. Jede holomorphe Abbildung $X \to \operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))/\operatorname{Ad} P$ ist also konstant und kann somit zu einer holomorphen Abbildung $X \to \operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P))$ geliftet werden. Daraus folgt $\tau^{-1}(1) = 1 \in H^1(X, \operatorname{Ad} P)$.

Für jedes Element $\alpha \in H^1(X, \operatorname{Int} P)$, welches bezüglich Aut P trivial ist, gilt $\tau\lambda(\alpha) = 1 \in H^1(X, \operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(P)))$. Nach dem obigen folgt, daß $\alpha = 1 \in H^1(X, \operatorname{Int} P)$ ist.

2) Beschreibung der δ-Abbildung (vgl. [6, p. 153]):

Wegen 1) können wir o.B.d.A. annehmen, daß der Cozyklus $\{c_{ij} \bmod V\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \operatorname{Int} P)$ zerfällt; d.h. es gibt holomorphe Abbildungen $b_i : U_i \to \operatorname{Int} P$ mit $c_{ij} \bmod V = b_i b_j^{-1}$. Das Bild eines Elementes $h \in P$ unter δ berechnet sich wie folgt:

Dem Element h entspricht ein Schnitt in $H^0(X, \eta[P])$, der lokal gegeben wird durch $U_i \ni z \mapsto b_i(z) \cdot h \in P$. Durch $U_i \ni z \mapsto s(b_i(z) \cdot h)$ wird eine Cokette in $C^0(\mathfrak{U}, \eta[G])$ definiert, die auf diesen Schnitt abgebildet wird. Deren Corand in $Z^1(\mathfrak{U}, \eta[V])$, nämlich $\delta_{ij}(h) : U_{ij} \to V$, gegeben durch $U_{ij} \ni z \mapsto c_{ij}(z)\,[s(b_j(z) \cdot h)] \cdot s(b_i(z) \cdot h)^{-1}$, repräsentiert die Klasse $\delta(h) \in H^1(X, \eta[V])$.

3) Fortsetzung der Abbildungen $\delta_{ij}: U_{ij} \times H \to V$:

Wir wählen affine Einbettungen $G \hookrightarrow V_G$ und $P \hookrightarrow V_P$ in Vektorräume, (so daß $V \hookrightarrow G \hookrightarrow V_G$ linear ist) wie in 2.2. Da $(\operatorname{Int} P) \times P \to P$ zu einer regulären Abbildung $(\operatorname{Int} P) \times V_P \to V_P$ fortsetzbar ist, kann die durch $b_j: U_j \to \operatorname{Int} P$ definierte holomorphe Abbildung $U_j \times P \to P$ fortgesetzt werden zu einer holomorphen Abbildung $B_j: U_j \times V_P \to V_P$, so daß $B_j(z): V_P \to V_P$ regulär ist für alle $z \in U_j$.
Da $s: P \to G$ zu einer regulären Abbildung $S: V_P \to V_G$ fortsetzbar ist, definiert $S \cdot B_j$ eine holomorphe Abbildung $U_j \times V_P \to V_G$, die für festes $z \in U_j$ regulär ist.

Da $(\operatorname{Int} G) \times G \to G$ zu einer regulären Abbildung $\operatorname{Int} G \times V_G \to V_G$ fortsetzbar ist, kann die durch $c_{ij}: U_{ij} \to \operatorname{Int} G$ definierte holomorphe Abbildung fortgesetzt werden zu $C_{ij}: U_{ij} \times V_G \to V_G$, die für festes $z \in U_{ij}$ regulär ist. Damit ist die holomorphe Abbildung $C_{ij} \cdot S \circ B_j: U_{ij} \times V_P \to V_G$, $(z,h) \mapsto C_{ij}(z, S \circ B_j(z,h))$, regulär für festes $z \in U_{ij}$.

Da die Subtraktion $G \times G \to G$ zu einer regulären Abbildung $V_G \times V_G \to V_G$ fortsetzbar ist, kann eine holomorphe Abbildung

$$\Delta_{ij} = (C_{ij} \cdot S \circ B_j)(S \circ B_i)^{-1}: U_{ij} \times V_P \to V_G$$

definiert werden, die für festes z regulär ist und für $h \in H$ mit δ_{ij} übereinstimmt.

4) Ende des Beweises:

δ ist regulär, wenn für jede Linearform $\lambda: H^1(X, \eta[V]) \to \mathbb{C}$ die Funktion $\lambda \circ \delta$ auf P regulär ist. Wir liften λ nach $Z^1(\mathfrak{U}, \eta[V])$ und setzen es (unter Benutzung des Zornschen Lemmas) nach $C^1(\mathfrak{U}, \eta[V])$ fort.

$$\begin{tikzcd}
Z^1(\mathfrak{U}, \eta[V]) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathfrak{U}, \eta[V]) \arrow[d, "\lambda"] \\
C^1(\mathfrak{U}, \eta[V]) \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathbb{C} \\
\bigoplus \operatorname{Hol}(U_{ij}, V) \arrow[ur, "\Sigma\lambda_{ij}"'] &
\end{tikzcd}$$

Die linearen Abbildungen $\lambda_{ij}: \operatorname{Hol}(U_{ij}, V) \to \mathbb{C}$ lassen sich weiter fortsetzen zu $\Lambda_{ij}: \operatorname{Hol}(U_{ij}, V_G) \to \mathbb{C}$. Für $h \in P$ ist $\lambda \circ \delta(h) = \Sigma_{ij} \Lambda_{ij}(\Delta_{ij}(h))$.

Nach dem Hilfssatz ist Δ_{ij} eine Polynomabbildung $V_P \to V_G$ mit auf U_{ij} holomorphen Funktionen als Koeffizienten. Man erhält $\Lambda_{ij}(\Delta_{ij}(h))$, indem man Λ_{ij} auf diese Koeffizienten anwendet. Also ist $h \mapsto \Lambda_{ij}(\Delta_{ij}(h))$ eine Polynomabbildung $V_P \to \mathbb{C}$, und $h \mapsto \Sigma_{ij} \Lambda_{ij}(\Delta_{ij}(h))$ setzt $\lambda \circ \delta: P \to \mathbb{C}$ fort. Damit ist δ regulär.

§ 3. Das Albanesebündel einer fasthomogenen Kählermannigfaltigkeit

3.1 Fasthomogene Kählermannigfaltigkeiten. – Wir beginnen mit *Definition 1.* Eine (zusammenhängende kompakte) komplexe Mannigfaltigkeit heißt *fasthomogen*, falls es einen Punkt $x \in X$ gibt, dessen Bahn unter $\mathrm{Aut}^0(X)$ innere Punkte enthält. Ist X fasthomogen und $x \in X$ ein solcher Punkt, so ist das Komplement $X \setminus \mathrm{Aut}^0(X) \cdot x$ dieser Bahn analytisch in X. Wir nennen es die *Ausnahmemenge* von X.

In diesem § sei X stets kählersch und fasthomogen, $G := \mathrm{Aut}^0(X)$. Nach Remmert und Van de Ven ist die Albanese-Abbildung $\alpha: X \to A := \mathrm{Alb}(X)$ ein holomorphes Faserbündel mit fasthomogener, zusammenhängender Faser Y. Weiter ist α G-äquivariant und $b_1(Y)=0$. Wir wählen einen Nullpunkt $0 \in A$. Es sei $H \subset G$ die abgeschlossene Untergruppe, die $0 \in A$ invariant läßt. Dann ist $G/H \to A$ ein Isomorphismus. Weiter ist α ein H-induziertes Bündel vermöge der Operation von H auf $\alpha^{-1}(0)$.

Aus [9] folgt: Y ist projektiv-algebraisch und $H^i(Y, \mathcal{O})=0, i \geqq 1$. Nach [1, Théorème Principal I] besitzt dann $\mathrm{Aut}^0(Y)$ eine affin-algebraische Struktur und operiert als algebraische Transformationsgruppe auf Y. Die Operation von H auf $Y_0 = \alpha^{-1}(0)$ definiert einen holomorphen Morphismus Φ von H in die lokal-algebraische Gruppe $\mathrm{Aut}(Y_0)$.

Lemma 2. *Es gibt eine affin-algebraische Untergruppe* $F \subset \mathrm{Aut}(Y_0)$, *so daß* $\Phi(H) \subset F$.

Bemerkung: Als komplexe Gruppe mag H unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen, während F als algebraische Gruppe nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat.

Beweis: Es sei $w \in H^2(X, \mathbb{R})$ die Fundamentalklasse einer Kählerschen Metrik auf X. Da G zusammenhängend ist, operiert G trivial auf $H^2(X, \mathbb{R})$, und es gilt insbesondere $Gw=w$. Ist $w_Y \in H^2(Y, \mathbb{R})$ die Einschränkung von w, so folgt $\Phi(H)\, w_Y = w_Y$. Mit w_Y läßt $\Phi(H)$ auch die Gerade $\mathbb{R}w_Y \subset H^2(Y, \mathbb{R})$ punktweise fest.

Außerdem bildet $\Phi(H)$ den Kegel $P \subset H^2(Y, \mathbb{R})$ der positiven Klassen und das Gitter $\Gamma \subset H^2(Y, \mathbb{R})$ der ganzzahligen Klassen auf sich ab. Nach dem Dirichletschen Approximationssatz [7, Satz 201] gibt es Klassen $0 \neq \gamma \in \Gamma$, die beliebig nahe an der Geraden $\mathbb{R}w_Y$ liegen. Weil P *offen ist* ($H^2(Y, \mathcal{O})=0$), können wir $\gamma \in P$ annehmen. Jedes $h \in \Phi(H)$ operiert linear und daher gleichmäßig stetig auf $H^2(Y, \mathbb{R})$. Folglich gibt es zu jedem $h \in \Phi(H)$ ein $\gamma_h \in \Gamma \cap P$ beliebig nahe bei $\mathbb{R}w_Y$ mit $\Phi(h) \cdot \gamma_h = \gamma_h$. Je endlich viele Elemente $h_1, \ldots, h_r \in H$ besitzen überdies einen gemeinsamen Fixpunkt $\gamma_0 \in \Gamma \cap P$.

Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Gamma)$ ist isomorph zu einem Modul von ganzzahligen Matrizen. Der von $\Phi(H)$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul $L \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Gamma)$

ist endlich erzeugt, insbesondere gibt es $h_1, \ldots, h_r \in H$ mit $L = \mathbb{Z}\Phi(h_1) + \cdots + \mathbb{Z}\Phi(h_r)$. Sei $\gamma_0 \in \Gamma \cap P$ ein gemeinsamer Fixpunkt von $h_1, \ldots, h_r$. Für alle $h \in H$ gilt dann $\Phi(h)\gamma_0 = r(h) \cdot \gamma_0$, $r(h) \in \mathbb{Z}$. Wegen $r(h^{-1}) = r(h)^{-1}$ und $\Phi(H)(P) = P$ folgt $r(h) = 1$ für alle $h \in H$. Die positive ganzzahlige Klasse $\gamma_0 \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ ist also invariant unter der Operation von H auf Y.

Sei L das (wegen $b_1(Y) = 0$ eindeutig bestimmte) Geradenbündel auf Y mit Chernklasse γ_0. Nach Kodaira gibt es eine Potenz $L^{\otimes k}$, so daß das Linearsystem $\Gamma(Y, L^{\otimes k})$ eine Einbettung $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ definiert, $N := \dim \Gamma(Y, L^{\otimes k}) - 1$. Wegen $h \cdot \gamma_0 = \gamma_0$ und $b_1(Y) = 0$ ist $\Phi(h)_* L^{\otimes k}$ isomorph zu $L^{\otimes k}$ für alle $h \in H$. Die Operation von $\Phi(H)$ auf Y ist daher (eindeutig) fortsetzbar zu einer Operation auf $\mathbb{P}(\Gamma(Y, L^{\otimes k})) = \mathbb{P}_N$. Damit ist $\Phi(H)$ eine Untergruppe der algebraischen Gruppe $F \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N)$ aller Kollineationen, die Y invariant lassen.

3.2 Reduktion der Strukturgruppe und Basiswechsel. – Da $A = G/H$ abelsch und $H \subset G$ normal ist, umfaßt H jede zusammenhängende halbeinfache Untergruppe von G. Ist $R_G \subset G$ das Radikal von G, so muß der durch $G \to A$ induzierte Morphismus $R_G \to A$ surjektiv sein. Wir haben also eine exakte Sequenz

$$1 \to H \cap R_G \to R_G \to A \to 0\,.$$

Nach 1.1 ist das Bündel α also assoziiert zum $(H \cap R_G)$-Prinzipalbündel $R_G \to A$ vermöge der Darstellung $H \cap R_G \hookrightarrow H \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(Y)$. Wir wenden dies folgendermaßen an: $\Phi(R_G \cap H) \subset \mathrm{Aut}(Y)$ ist eine auflösbare Untergruppe der affin-algebraischen Gruppe F. Dann ist auch die Zariski-Hülle $L \subset F$ von $\Phi(R_G \cap H)$ auflösbar. Sei $H^* \subset R_G \cap H$ die Untergruppe $\Phi^{-1}(L^0)$. Die Gruppe H^* ist ein Normalteiler in $R_G \cap H$ von endlichem Index. Da R_G zusammenhängt, folgt: H^* ist auch normal in R_G. Wir können faktorisieren

$$\begin{tikzcd} R_G \arrow[r] \arrow[dr] & R_G/H^* =: A^* \arrow[d] \\ & R_G/R_G \cap H = A \end{tikzcd}$$

und erhalten einen Torus A^* und eine unverzweigte Überlagerung $A^* \to A$. Wir definieren X^* als Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d] & A^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & A\,. \end{tikzcd}$$

Dann sieht man leicht ein: $X^* \to X$ ist eine unverzweigte Überlagerung. $\alpha^* : X^* \to A^*$ ist ein holomorphes Faserbündel mit typischer Faser Y, assoziiert zum H^*-Prinzipalbündel $R_G \to A^*$ vermöge der Operation

$H^* \hookrightarrow H \to \mathrm{Aut}(Y)$ von H^* auf Y. Insbesondere ist $\alpha^* R_G$-äquivariant und X^* fasthomogen.

Korollar zu Lemma 2: *Nach Basiswechsel kann man o.B.d.A. annehmen:* $\Phi(H) \subset \mathrm{Aut}^0(Y)$, *und die Zariski-Hülle* L *von* $\Phi(R_G \cap H)$ *in* $\mathrm{Aut}^0(Y)$ *ist zusammenhängend.*

3.3 Das induzierte Bündel mit Faser L. – Wir nehmen hier an, der Basiswechsel aus 3.2 sei durchgeführt. Sei η das $R_G \cap H$-Prinzipalbündel $R_G \to A$ und $\Phi: R_G \cap H \to \mathrm{Aut}(Y)$. Sei $\mathrm{int}\,\Phi: R_G \cap H \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(Y))$ wie in 1.2. Wegen $\Phi(R_G \cap H) \subset L$ ist L invariant unter allen $\mathrm{int}\,\Phi(h)$, $h \in R_G \cap H$. Wir betrachten die Bündel-Inklusion $\eta[L, \mathrm{int}\,\Phi] \subset \eta[\mathrm{Aut}(Y), \mathrm{int}\,\Phi]$.

Lemma 3. *Es bestehen die Inklusionen*

$$\begin{tikzcd} R_G \cap H \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{Aut}_\alpha(X) \arrow[d, equal] \\ \Gamma(A, \eta[L]) \arrow[r, hook] & \Gamma(A, \eta[\mathrm{Aut}(Y)]) . \end{tikzcd}$$

Beweis: $\eta[\mathrm{Aut}(Y)]$ ist wegen 1.2 c) gerade das Bündel $\mathrm{Aut}(\alpha)$. Der rechte senkrechte Isomorphismus ergibt sich dann aus 1.2 b). Nach 1.2 d) erhält man den linken senkrechten Morphismus

$$R_G \cap H \to \Gamma(A, \eta[\Phi(R_G \cap H)]) \subset \Gamma(A, \eta[L]) .$$

Da G effektiv auf X operiert, sind alle Morphismen injektiv.

Das Bündel $\eta[L, \mathrm{int}\,\Phi]$ besitzt folgende Eigenschaften:

0) L ist zusammenhängend, auflösbar, und affin-algebraisch. Das Bündel wird induziert durch eine Darstellung $R_G \cap H \to \mathrm{Int}(L) \subset \mathrm{Aut}(L)$.

1) Bezüglich einer geeigneten Überdeckung kann das Bündel definiert werden durch einen Cozyklus $\{\mathrm{int}\, l_{ij}\}$, $l_{ij}: U_{ij} \to L$ holomorph.

2) Das Bild aller Wert-Morphismen $w_z: \Gamma(A, \eta[L]) \to L_z$ ist Zariski-dicht in L.

ad 1) Ist h_{ij} ein Cozyklus für η, so setze man $l_{ij} := \Phi(h_{ij})$.

ad 2) Nach Konstruktion ist $\Phi(R_G \cap H)$ Zariski-dicht in $L = L_0$. Wegen $R_G \cap H \subset \Gamma(A, \eta[L])$ ist also das Bild von w_0 Zariski-dicht. Die Operation von R_G auf dem Totalraum von $\eta[L]$ respektiert die algebraische Struktur der Fasern. Daraus folgt 2).

Aus dem Trivialitätskriterium in § 2 folgt: Das Bündel $\eta[L]$ ist trivial. Wir wenden dies an auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R_G \cap H \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H \arrow[d, "\Phi"] \\ L = \Gamma(A, \eta[L]) \arrow[r, "w_0"] & F \end{tikzcd}$$

F ist affin-algebraisch. L ist der Zariski-Abschluß in F von $\Phi(R_G \cap H)$. Ist $S \subset G$ eine zusammenhängende halbeinfache Gruppe mit $G = S \cdot R_G$, so muß $S \subset H$ gelten, und dann natürlich $H = S \cdot (R_G \cap H)$. Es folgt $\Phi(H) = \Phi(S) \cdot L$. Da $\Phi(S)$ eine algebraische Untergruppe von F ist [5, Théorème 15], ist auch $\Phi(H)$ in F algebraisch. Dann muß L das Radikal von $\Phi(H)$ sein. Da andererseits $\Phi(H) = \Phi(R_G \cap H) \cdot \Phi(S)$, muß L mit $\Phi(R_G \cap H)$ übereinstimmen, und die Inklusion $R_G \cap H \to L$ ist auch surjektiv.

Insbesondere ist also $R_G \cap H$ eine zusammenhängende auflösbare affin-algebraische Gruppe, und $H = (R_G \cap H) \cdot S$ ist steinsch. Daraus folgt wieder, daß Φ injektiv ist: Sei $K \subset H$ der Kern von Φ. Da K normal in H ist, läßt sich die Abbildung

$$g \mapsto adg(\mathrm{Lie}(K)) \in \mathrm{Graß}(\dim H, \dim K)$$

über $G/H = A$ faktorisieren. Wie in 2.1 folgt: diese Abbildung ist konstant, d. h., K^0 ist auch normal in G. Da G effektiv auf X operiert, muß also K diskret sein. Jedes $k \in K$ ist daher zentral in H. Da H holomorph separabel und G/H kompakt ist, muß k auch zentral in G sein; insbesondere ist K normal in G und somit trivial.

Φ identifiziert H mit der algebraischen Untergruppe

$$\Phi(H) = L \cdot \Phi(S) \subset F\,.$$

Wir erhalten das

Korollar. *H ist eine zusammenhängende affin-algebraische Gruppe.*

Bemerkung 1: Wir haben dieses Korollar bewiesen unter der Annahme, daß ein Basiswechsel wie in 3.2. ausgeführt ist. Macht man diese Einschränkung nicht, so gilt noch immer: H^0 ist algebraisch, und H/H^0 ist endlich. Ist nämlich $H^* \subset R_G \cap H \subset H$ wie in 3.2., so sieht man nach Übergang von A zu $A^* = R_G/H^*$, daß H^* zusammenhängend und algebraisch ist. Dann ist auch $H^0 = H^* \cdot S$ algebraisch. H/H^0 ist endlich, da $R_G \cap H/H^*$ endlich war.

Bemerkung 2: Die bisherigen Ausführungen der §§ 1, 2, 3 dienten nur zum Beweis dieses Korollars. Falls X projektiv-algebraisch und $G := \mathrm{Aut}^0(X)$ eine algebraische Gruppe ist, die rational auf X operiert, ist H als Isotropiegruppe einer algebraischen Untermannigfaltigkeit sogar eine algebraische Untergruppe von G.

3.4. C^∞-Trivialität des Albanesebündels. – Wir beweisen hier den

Satz 4. *Die Strukturgruppe des Albanesebündels $\alpha: X \to A$ der fast-homogenen Kählermannigfaltigkeit X läßt sich analytisch auf eine diskrete abelsche Gruppe reduzieren; d. h. α wird induziert durch eine Darstellung $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}\, Y$, $Y := \alpha^{-1}(0)$.*

Beweis: Sei $m := \dim A(X)$. Wir zeigen, daß es eine m-dimensionale abelsche komplexe Untergruppe $G' \subset G$ gibt, die noch surjektiv auf A abgebildet wird. Die Strukturgruppe von α läßt sich dann auf die diskrete abelsche Gruppe $\Gamma := \Phi(G' \cap H) \subset \operatorname{Aut} Y$ reduzieren. Sei $Z_H(H^0)$ bzw. $Z_G(H^0)$ der Zentralisator von H^0 in H bzw. in G, sei ferner $\operatorname{Ad}_H G$ die Einschränkung von $\operatorname{Ad} G$ auf die Liealgebra von H. Man erhält die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & Z_H(H^0) \arrow[r] \arrow[d] & Z_G(H^0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Z_G(H^0)/Z_H(H^0) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Ad} H \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ad}_H G \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ad}_H G/\operatorname{Ad} H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 1 & 1 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nach 3.3 ist H^0 affin-algebraisch und H/H^0 endlich; die adjungierte Darstellung von H^0 ist also regulär und $\operatorname{Ad} H$ ein [in $\operatorname{Aut}(\operatorname{Lie}(H))$] algebraischer Normalteiler von $\operatorname{Ad} G$. Für die algebraische Hülle $\overline{\operatorname{Ad}_H G}$ von $\operatorname{Ad}_H G$ in $\operatorname{Aut} H$ gilt also nach [2, Theorem 6.8]: $\overline{\operatorname{Ad}_H G}/\operatorname{Ad} H$ ist affin-algebraisch, insbesondere also holomorph separabel. Daher ist $\operatorname{Ad}_H G/\operatorname{Ad} H$ holomorph separabel und kompakt (A ist kompakt), also trivial. Somit ist schon die Sequenz

$$1 \to Z^0 \cap H \to Z^0 \to A \to 0$$

exakt, $Z^0 :=$ Einskomponente von $Z_G(H^0)$. Die Gruppe $H' := Z^0 \cap H$ ist Vereinigung von gewissen Zusammenhangskomponenten der Gruppe $Z_H(H^0)$. Weil mit H^0 auch Z_{H^0} affin-algebraisch ist, ist $H'/(Z_{H^0})^0$ endlich. Somit ist $(Z_{H^0})^0$ ebenfalls ein uniformer Normalteiler von Z^0. Weil er außerdem im Zentrum von Z^0 liegt, ist Z^0 abelsch. Übergang zur universellen Überlagerung liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathbb{C}^m \arrow[d] & \\
Z^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei λ linear ist. Daher gibt es eine m-dimensionale Untergruppe von Z^0, die noch surjektiv auf A abgebildet wird.

Die Strukturgruppe des Albanesebündels von X läßt sich also auf eine diskrete (nicht notwendig abgeschlossene) abelsche Gruppe $\Gamma \subset H'$ reduzieren. Der Torus $A' := Z^0/(Z_{H^0})^0$ ist eine endlichblättrige Überlagerung von A. Vollziehen wir einen Basiswechsel von A nach A'

(vgl. 3.2), so erhalten wir eine fasthomogene Mannigfaltigkeit X', die X endlichblättrig und unverzweigt überlagert ist. Das Albanesebündel von A' kann auf eine diskrete Untergruppe der *zusammenhängenden* affin-algebraischen abelschen Gruppe $(Z_{H^0})^0$ reduziert werden.

Aus dem untenstehenden Satz 5 folgt, daß das Albanesebündel von X' C^∞-trivial ist. Damit ist gezeigt:

Korollar zu Satz 4. *Es gibt eine endlichblättrige unverzweigte Überlagerung von X, deren Albanesebündel C^∞-trivial ist.*

Dies erhält man aus dem folgenden allgemeinen

Satz 5. *Ist T ein kompakter komplexer Torus und P eine zusammenhängende auflösbare affin-algebraische Gruppe, so ist die kanonische Abbildung der Cohomologiemengen*

$$H^1(T, P) \to H^1(T, C^\infty(P))$$

trivial.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß P abelsch ist. Sei $\gamma: \mathbb{C}^n \to P$ die universelle Überlagerung von P. Die Gruppe $\Gamma := \ker \gamma$ ist diskret in $\mathbb{C}^n$, und wir erhalten eine exakte Gruppen-Sequenz

$$0 \to \Gamma \to \mathbb{C}^n \xrightarrow{\gamma} P \to 1 .$$

Daraus ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(T, P) & \longrightarrow & H^2(T, \Gamma) \to H^2(T, \mathbb{C}^n) \\ & & \downarrow & & \| \\ H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{C}^n)) & \to & H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(P)) & \to & H^2(T, \Gamma) \end{array}$$

exakter Cohomologie-Sequenzen. Weil $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ eine weiche Garbe ist, verschwindet $H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{C}^n))$. Wegen des universellen Koeffiziententheorems ist ferner der rechte obere Homomorphismus injektiv. Daraus folgt die Behauptung.

Nun betrachten wir den Allgemeinfall. Die Kommutatorgruppe $P' \subset P$ ist zusammenhängend, einfachzusammenhängend und nilpotent, also biholomorph zu einer Zelle. Deswegen verschwindet $H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(P'))$. Aus der exakten Gruppensequenz

$$1 \to P' \to P \to Q \to 0$$

erhalten wir deswegen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(T, P) & \longrightarrow & H^1(T, Q) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \to & H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(P)) & \to & H^1(T, \mathfrak{C}^\infty(Q)) . \end{array}$$

Die untere Zeile ist eine exakte Sequenz punktierter Mengen. Da Q zusammenhängend, abelsch und affin-algebraisch ist, ist der rechte senkrechte Pfeil trivial. Damit ist auch der linke senkrechte Pfeil trivial.

3.5. Im allgemeinen ist das Bündel $X \to \mathrm{Alb}(X)$ einer fasthomogenen Kählermannigfaltigkeit selbst nicht $\mathfrak{C}^\infty$-trivial. Man muß also tatsächlich zu einer echten Überlagerung übergehen, um das Bündel topologisch zu trivialisieren. Dazu das folgende

Beispiel: Sei $Y := \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ und $\sigma: Y \to Y$ der Automorphismus $(x, y) \mapsto (y, x)$. Die Automorphismengruppe F von Y besteht aus den beiden Zusammenhangskomponenten

$$F^0: \{(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y); \alpha, \beta \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}_1\} \simeq PGL(1, \mathbb{C}) \times PGL(1, \mathbb{C}) \text{ und } F^0 \cdot \sigma.$$

Der Zentralisator von σ in F besitzt die Einskomponente

$$H := \{(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y); \alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}_1\} \simeq PGL(1, \mathbb{C}).$$

Da $PGL(1, \mathbb{C})$ dreifach-transitiv auf $\mathbb{P}_1$ operiert, besitzt H einen offenen Orbit auf Y.

Es sei T ein beliebiger komplexer Torus und $\varrho_2: \pi_1(T) \to \mathbb{Z}_2$ eine nichttriviale Darstellung. Wir betten $\mathbb{Z}_2$ in $\mathrm{Aut}(Y)$ ein vermöge $0 \mapsto \mathrm{id}$, $1 \mapsto \sigma$, und erhalten eine Darstellung $\varrho: \pi_1(T) \to \mathrm{Aut}\, Y$. Sei $\alpha: X \to T$ das entsprechende π_1-induzierte Bündel mit typischer Faser Y. Dann gilt:

i) X ist kählersch (Blanchard [1, Théorème Principal II]).

ii) X ist fasthomogen.

Das Bündel α kann nämlich durch einen Cozyklus mit Werten in $\mathbb{Z}_2 \subset \mathrm{Aut}(Y)$ definiert werden. Da H mit allen Werten dieses Cozyklus vertauschbar ist, operiert H auf X, und zwar fasttransitiv auf jeder α-Faser. Ebenso sieht man, daß sich die Translationen von T zu Automorphismen von X liften lassen.

iii) Das Bündel α ist nicht $\mathfrak{C}^\infty$-trivial: Es genügt einzusehen, daß die Bildgarbe $R^2\alpha_* \mathbb{Z}_X$ nicht konstant ist. Die ist aber gerade die lokalkonstante Garbe mit Halm $H^2(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, assoziiert zur Darstellung $\varrho: \pi_1(T) \to \mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch Umklappen operiert.

Wählt man für T eine elliptische Kurve, so wird X dreidimensional. Ein solches X ist die einfachste fasthomogene Kählermannigfaltigkeit mit $\mathfrak{C}^\infty$-nicht-trivialem Albanesebündel.

3.6 Zusammenhangskomponenten der Ausnahmemenge. Die Ausnahmemenge der fasthomogenen Mannigfaltigkeit X im obigen Beispiel war zusammenhängend. Es gibt zweidimensionale fasthomogene kompakte Kählermannigfaltigkeiten, bei welchen die Ausnahmemenge nicht zusammenhängend ist (spezielle $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve), (vgl. Potters [11, p. 251]).

Es gilt jedoch:

Satz 6. *Ist $S \subset X$ eine niederdimensionale analytische Menge und operiert die Isotropiegruppe $I(S) := \{g \in \mathrm{Aut}^0 X; g(S) = S\}$ transitiv auf $X \setminus S$, so besitzt S höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Weil X unter den obigen Voraussetzungen ein holomorphes Faserbündel über $A(X)$ ist, genügt es, die Aussage unter der Zusatzannahme $b_1(X) = 0$ zu beweisen. Dann ist X nach [9, Satz 1] projektiv, und die Gruppe $G := (I(S))^0$ ist algebraisch. Es sei $\mathring{X} := X \setminus S$ der offene Orbit. Die Isotropiegruppe $I_x \subset G$ eines Punktes $x \in X \setminus S$ ist eine algebraische Untergruppe von G. Deswegen ist I_x / I_x^0 endlich. Nach Borel [3, Theorem 2] besitzt die Mannigfaltigkeit G/I_x^0 höchstens zwei Enden. Dann kann die endliche Unterlagerung $X \setminus S$ dieser Mannigfaltigkeit auch nur höchstens zwei Enden besitzen.

Literatur

1. Blanchard, A.: Sur les variétés analytiques complexes. Ann. Sci. école norm. sup. **73**, 157—202 (1956)
2. Borel, A.: Linear algebraic groups. New York: Benjamin 1969
3. Borel, A.: Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie. Ann. of Math. **58**, 443—457 (1953)
4. Borel, A., Remmert, R.: Über kompakte homogene kählersche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **145**, 429—439 (1962)
5. Chevalley, C.: Théorie des groupes de Lie. Groupes algébriques. Paris: Hermann 1968
6. Frenkel, J.: Cohomologie non abélienne et éspaces fibrés. Bull. Soc. Math. Fr. **85**, 135—220 (1957)
7. Hardy, G. H., Wright, E. M.: Einführung in die Zahlentheorie. München: R. Oldenbourg 1958
8. Lichnerowicz, A.: Variétés kählériennes à première classe de Chern positive ou nulle. C. R. Acad. Sc. Paris **268**, 876—880 (1969)
9. Oeljeklaus, E.: Fasthomogene Kählermannigfaltigkeiten mit verschwindender erster Bettizahl. manuscripta math. **7**, 175—183 (1972)
10. Potters, J.: On almost homogeneous compact complex analytic surfaces. Inventiones math. **8**, 244—266 (1969)

W. Barth
Rijksuniversiteit
Leiden
Wassenaarseweg 80
Niederlande

E. Oeljeklaus
Math. Inst. d. Univ.
D-4400 Münster
Roxeler Straße 64
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 4. April 1974)