Laugwitz, D.
Math. Annalen, Bd. 130, S. 337—350 (1955)

Über unendliche kontinuierliche Gruppen

I. Grundlagen der Theorie; Untergruppen

Von

Detlef Laugwitz in Göttingen

In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundlagen für eine Theorie einer gewissen Klasse von unendlichen kontinuierlichen Gruppen gelegt werden. Es handelt sich dabei um solche topologischen Gruppenkeime, in welche Koordinaten aus einem Banach-Raum so eingeführt werden können, daß der Koordinatenvektor des Produktes differenzierbar im Sinne von Fréchet von den Koordinaten der Faktoren abhängt. Als Haupthilfsmittel werden die Fréchetsche Differentialrechnung und die in [8] entwickelte Tensorrechnung für unendlichdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten verwendet. Die wichtigsten Hilfssätze sind in zwei Anhängen zusammengestellt.

Alle Betrachtungen beziehen sich auf lokale Fragen, d. h. auf Gruppenkeime.

Mehrere verschiedene Fragestellungen führen auf diese Gruppen. Einmal kann man die Aufgabe stellen, *möglichst umfangreiche Klassen von topologischen Gruppen einer analytischen Behandlung zugänglich zu machen* und die Strukturuntersuchung dieser Gruppen auf rein algebraische Probleme (für eine Lie-Algebra) zurückzuführen; dies letztere wird in Analogie zur klassischen Lieschen Theorie in einer späteren Arbeit ausgeführt werden. Eine weitere Frage, die den hier entwickelten Methoden zugänglich ist, ist die nach der Struktur der Untergruppen von bekannten und wichtigen unendlichen Gruppen, z. B. den Gruppen von linearen Transformationen in Hilbert- und Banach-Räumen. Wir werden hier zeigen, daß lokalkompakte Untergruppen der von uns betrachteten Gruppen endliche Lie-Gruppen im klassischen Sinne sind, ein Ergebnis, das speziell das von Yosida [19] auf anderem Wege (nämlich durch Verallgemeinerung einer Methode von J. v. Neumann [15]) gewonnene Resultat enthält, daß jede lokalkompakte Gruppe in einer Banach-Algebra und also speziell jede lokalkompakte Gruppe von linearen beschränkten Transformationen eines Banach-Raumes eine endliche Liesche Gruppe ist. Die allgemeinere Frage, ob alle (nicht notwendig lokalkompakten) abgeschlossenen lokalzusammenhängenden Untergruppen der hier betrachteten Gruppen wieder lokal-Banachsche differenzierbare Gruppen sind, konnte hier nur in speziellen Fällen (so für das Zentrum sowie für solche Untergruppen, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden) bejahend beantwortet werden. Ihre allgemeine Beantwortung wird aber vermutlich mit den hier entwickelten Methoden möglich sein.

Einen weiteren Zugang zu den lokal-BANACHschen differenzierbaren Gruppen bilden die klassischen Arbeiten von LIE, CARTAN u. a. über unendliche *Transformations*gruppen [2, 10, 11]. Allerdings ist diese klassische Auffassung der unendlichen LIEschen Gruppen, wie schon G. BIRKHOFF [1] und A. D. MICHAL [12] bemerkt haben, insofern unbefriedigend, als nicht festgelegt wird, welche Topologie die Gruppe trägt; die Voraussetzung, daß die Gruppen durch Differentialgleichungen bzw. PFAFFsche Formen definiert werden, scheint von unserem Standpunkt überflüssig zu sein. In einer späteren Arbeit soll gezeigt werden, daß sich viele unendliche Transformationsgruppen unserer Theorie unterordnen.

Andererseits gibt es unendliche Transformationsgruppen, die sich so mit einer natürlichen Topologie ausstatten lassen, daß sie lokal homöomorph nicht zu Banach-Räumen, sondern zu allgemeineren lokalkonvexen topologischen Vektorräumen sind. Die Untersuchung dieser allgemeineren Klasse von unendlichen kontinuierlichen Gruppen erscheint u. a. auch deshalb wünschenswert, weil jede topologische Gruppe eine treue stetige Darstellung durch beschränkte lineare Transformationen mit der stetigen Operator-Topologie besitzt, also mit einer Topologie, welche im allgemeinen zwar lokalkonvex, aber nicht normierbar ist. Dem Aufbau einer Theorie in diesem größeren Rahmen steht jedoch z. Z. das Fehlen einer Differentialrechnung für lokalkonvexe Vektorräume entgegen.

Zum Vergleich mit den Arbeiten von BIRKHOFF [1] und MICHAL [12, 13] ist zu bemerken: G. BIRKHOFF hat bereits kanonische Koordinaten eingeführt. Bei uns werden diese in § 4 auf einem anderen Wege erhalten. BIRKHOFFs Haupthilfsmittel ist die Kurventheorie in allgemein-metrischen Räumen; die Differentialrechnung wird von ihm kaum ausgenutzt. Unsere Hauptergebnisse über Untergruppen (§ 5) fehlen daher bei ihm[1]). Die Arbeiten von MICHAL beschäftigen sich mit Spezialfällen. Die Arbeit [12] enthält die wichtigsten Definitionen und einige grundlegende einfache Sätze (über invariante Vektorfelder; ohne Beweise) für den Fall, daß die Gruppe zugleich Teilraum eines Banach-Raumes ist. Wichtig ist die Bemerkung von MICHAL, daß in dem von ihm betrachteten Spezialfall die Einführung von Koordinatentransformationen überflüssig ist; allerdings müßte man zur Gewinnung von tieferliegenden Resultaten sicher auch wieder kanonische Koordinaten einführen. — Schließlich sei noch auf die Arbeit [17] von RITT hingewiesen, in der mit formalen Potenzreihen gearbeitet wird und die daher von unseren Betrachtungen über topologische Gruppen grundsätzlich verschieden ist.

In den §§ 1, 3, 4 lehnen wir uns möglichst eng an die Darstellung des endlichen Falls bei PONTRJAGIN [16] an, und wir verweisen für solche Beweise, die sich ohne weiteres aus dem Endlichen übernehmen lassen, auf dieses Lehrbuch.

---

[1]) E. B. DYNKIN hat die Resultate von BIRKHOFF [1] nach einer anderen Richtung verallgemeinert; er läßt allgemeinere normierte Grundkörper zu. [Amer. math. Soc. Translat. Nr. 97 (1953) = Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1, 135—186 (1950)].

§ 1. Differenzierbare und analytische Koordinatensysteme für topologische Gruppen und Gruppenkeime

Vorgelegt sei ein *Gruppenkeim*[1a]) K mit den Elementen $\{x, y, z, \ldots\}$, dem neutralen Element e und der Multiplikation $x \cdot y = xy$. Ein solcher Gruppenkeim heißt *B-lokale Gruppe*, wenn eine Umgebung U von $e \in K$ homöomorph einer Umgebung des Nullpunktes O des Banach-Raumes B ist, so daß e und O einander zugeordnet werden. Diese Abbildung von K in B heiße ein *Koordinatensystem*. Die Elemente von B sollen kleine lateinische obere Indizes tragen, und der Kernbuchstabe des Koordinatenvektors von $x \in K$ soll ebenfalls x sein, so daß also z. B. $z \in K$ den Koordinatenvektor $z^i \in B$ hat.

Im übrigen benutzen wir für B durchweg die in [8] eingeführte Tensorrechnung, die im Anhang I kurz erläutert wird, ebenso wie die verwendeten Hilfssätze über die FRÉCHETsche Differentialrechnung.

W sei eine solche Umgebung von $e \in K$, daß für $x \in W$, $y \in W$ das Produkt xy erklärt ist und $xy \in U$. (Die Existenz einer solchen Umgebung folgt aus den Eigenschaften des Gruppenkeims.) Dann ist f mit

$$xy = z = f(x; y)$$

eine stetige Funktion in $W \times W$, deren Werte in U liegen; also ist

$$z^i = f^i(x^k; y^k)$$

stetig, und es gilt

$$f^i(x; 0) = x^i = f^i(0; x). \tag{1}$$

K heißt *B-lokale differenzierbare Gruppe*, wenn f^i nach beiden Argumenten ϱ-mal stetig differenzierbar ist ($\varrho \geqq 2$), und *B-lokale analytische Gruppe*, wenn f^i analytisch ist.

Aus (1) folgt für

$$L^{*i}_k(x) = \frac{\delta f^i(x; 0)}{\delta y^k}\ ; \ L^i_k(y) = \frac{\delta f^i(0; y)}{\delta x^k}\ ;$$

$$L^i_k(0) = L^{*i}_k(0) = \delta^i_k\,. \tag{2}$$

Dabei ist $\delta^i_k \in B^1_1$ definiert durch $\delta^i_j x^j = x^i$ für alle $x^i \in B$. Nach dem Umkehrungssatz von HILDEBRANDT-GRAVES-NEVANLINNA [5, 14] existieren in einer Umgebung des Nullpunktes stetige Funktionen Λ^{*i}_k, $\Lambda^i_k \in B^1_1$ mit

$$\Lambda^i_j(x)\, L^j_k(x) = L^i_j(x)\, \Lambda^j_k(x) = \Lambda^{*i}_j(x)\, L^{*j}_k(x) = L^{*i}_j(x) \Lambda^{*j}_k(x) = \delta^i_k\,.$$

Wir nehmen von nun an an, daß W bereits so klein gewählt sei, daß alle diese Funktionen existieren.

U ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ein B-lokal-linearer Raum im Sinne von [8]). $\mathfrak{T}^1(0) = \mathfrak{T}^1$ bezeichne den Tangentialraum dieser differenzierbaren Mannigfaltigkeit im Nullpunkt. Dieser Tangentialraum ist linear homöomorph zu B [8].

Eine topologische Gruppe heißt *differenzierbare (analytische) B-Gruppe*, wenn sie zugleich differenzierbare (analytische) B-lokale Gruppe ist.

[1a]) Für die Definition verweisen wir auf [16].

1.1. *Wenn G_i eine differenzierbare (analytische) B_i-Gruppe ist* ($i = 1, 2$), *dann ist das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ eine differenzierbare (analytische) $(B_1 \times B_2)$-Gruppe.*

Beweis. $B_1 = \{x^i; \|x\|_1\}$; $B_2 = \{\xi^\alpha; \|\xi\|_2\} \cdot B_1 \times B_2 = \{(x^i, \xi^\alpha); (\|x\|_1^2 + \|\xi\|_2^2)^{1/2}\}$. Die Multiplikation in G_i werde im Koordinatensystem gegeben durch die Funktion $f_{(i)}$. Dann ist die Multiplikation in $G_1 \times G_2$ definiert durch

$$(f^i_{(1)}(x;y),\ f^\alpha_{(2)}(\zeta;\eta)),$$

und diese Funktion ist nach bekannten Sätzen ([8], Hilfssatz 4.1) differenzierbar (analytisch).

$x^i_{(j)}(t)$ $(j = 1, 2)$ seien zwei differenzierbare Kurven in K mit $x^i_{(j)}(0) = 0$ und den Tangentenvektoren $\frac{\delta x^i_{(j)}(0)}{dt} = \xi^i_{(j)}$. Dann ist $y^i(t) = f^i(x^k_{(1)}(t); x^k_{(2)}(t))$ wiederum eine differenzierbare Kurve mit $y^i(0) = 0$, und es gilt

$$\frac{\delta y^i(0)}{dt} = \delta^i_k\, \xi^k_{(1)} + \delta^i_k\, \xi^k_{(2)} = \xi^i_{(1)} + \xi^i_{(2)}$$

[nach der Kettenregel und Gl. (2)]. Der Multiplikation von Kurven entspricht also die Addition von Tangentenvektoren in $\mathfrak{T}^1$.

§ 2. Die beiden integrablen linearen Übertragungen

Bekanntlich lassen sich in jeder Gruppe (ohne Rücksicht auf eine etwa vorhandene Topologie) zwei Parallelismen erklären, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn die Gruppe abelsch ist. Ein endlicher Vektor ist ein geordnetes Paar von Gruppenelementen (x, y); zwei endliche Vektoren (x, y) und (x', y') heißen rechtsäquipollent, wenn es ein z gibt, so daß $xz = x'$, $yz = y'$, und linksäquipollent, wenn es ein u gibt mit $ux = x'$, $uy = y'$ [2]).

In B-lokalen differenzierbaren Gruppen können diesen Parallelismen für die endlichen Vektoren lineare Übertragungsgesetze für die kontravarianten Tangentialvektoren zugeordnet werden; diese Übertragungen, die dann ihrer Herkunft nach integrabel sind, sollen jetzt explizit konstruiert werden.

Zwei differenzierbare Kurven $x_1(t)$, $x_{(2)}(t)$ werden rechtsäquipollent genannt, wenn es ein z gibt, so daß $x_{(1)}(t) \cdot z = x_{(2)}(t)$ für alle t. Ist speziell $x_{(1)}(0) = 0$, so lautet diese Bedingung in Koordinatenform

$$x^i_{(2)}(t) = f^i(x^k_{(1)}(t);\ x^k_{(2)}(0)).$$

Differentiation nach t ergibt für $t = 0$:

$$\xi^i_{(2)} = L^i_k(z)\, \xi^k_{(1)};\ \xi^k_{(j)} = \frac{\delta x^k_{(j)}(0)}{dt}\ (j = 1, 2). \tag{1}$$

Diese Beziehung ist nun unabhängig von der speziellen Wahl der Kurven mit den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen für $t = 0$: Zwei Vektoren $\xi^i_{(1)}$, $\xi^i_{(2)}$ in e, z heißen rechtsäquipollent, wenn (1) gilt; zwei kontravariante Vektoren in beliebigen Punkten des Gruppenraumes heißen rechtsäquipollent, wenn sie zu demselben Vektor im Punkte e rechtsäquipollent sind. Ein Feld von

---

[2]) Für die wichtigsten Eigenschaften verweisen wir auf [18].

rechtsäquipollenten Vektoren ist also definiert durch

(2) $$\xi^i(x) = L^i_k(x)\,\xi^k(0),$$

und auf diese Weise erhält man auch alle möglichen rechtsäquipollenten Vektorfelder. — Ähnlich ergibt sich für linksäquipollente Felder:

(3) $$\eta^i(x) = L^{*i}_k(x)\,\eta^k(0).$$

Als infinitesimale Beziehung erhält man durch Differentiation von (2):

(4) $$d\,\xi^i = -\overset{(r)}{\Gamma}{}^i_{kj}\,\xi^k\,d x^j,\quad \overset{(r)}{\Gamma}{}^i_{kj} = -\frac{\delta L^i_r(x)}{d x^j}\,\Lambda^r_k(x);$$

und ebenso aus (3)

(5) $$d\,\eta^i = -\overset{(e)}{\Gamma}{}^i_{kj}\,\eta^k\,d x^j,\quad \overset{(e)}{\Gamma}{}^i_{kj} = -\frac{\delta L^{*i}_r(x)}{\delta x^j}\,\Lambda^{*r}_k(x).$$

Die Größen $\overset{(r)}{\Gamma}$ und $\overset{(e)}{\Gamma}$ sind die Übertragungsoperatoren der Rechts- bzw. Linksäquipollenz von kontravarianten Vektoren. (Alle Betrachtungen beziehen sich auf die in § 1 definierte Umgebung W, so daß alle auftretenden Größen einen Sinn haben.)

§ 3. Eingliedrige Untergruppen

Eine in $t = 0$ differenzierbare Kurve $g(t) \in K$ ($|t| \leqq r$, $r > 0$) mit $g(t_1 + t_2) = g(t_1)\,g(t_2)$ heißt eingliedrige Untergruppe, und

$$\xi^j = \frac{\delta g^j(0)}{d t}$$

heißt ihr Richtungsvektor. Offenbar ist $g(0) = e$. Zwei eingliedrige Untergruppen $g(t)$, $h(t)$ heißen gleich, wenn $g(t) = h(t)$ in einem 0 im Inneren enthaltenden t-Intervall.

3.1. *Es gibt genau eine eingliedrige Untergruppe $g(t)$ von K mit dem Richtungsvektor ξ^i; diese genügt den Differentialgleichungen*

(1) $$\frac{\delta g^j(t)}{d t} = L^{*i}_k(g(t))\,\xi^k = L^j_k(g(t))\,\xi^k;\quad g(0) = 0$$

und ist geodätische Linie jedes der beiden linearen integrablen Zusammenhänge aus § 2.

Beweis. Die eingliedrige Untergruppe $g(t)$ habe den Richtungsvektor ξ^i. Wir zeigen zunächst, daß sie geodätische Linie der beiden Zusammenhänge $\overset{(r)}{\Gamma}$ und $\overset{(e)}{\Gamma}$ ist. Dies folgt daraus, daß die Kurven $g(t)$ und $g_s(t) = g(s + t) = g(s)\,g(t) = g(t)\,g(s)$ für beliebiges festes s ($|s + t| \leqq r$) sowohl rechts- als auch linksäquipollent sind. Aus § 2, (2), (3) folgen die beiden Differentialgleichungen (1) und aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, daß es höchstens eine eingliedrige Untergruppe mit dem Richtungsvektor ξ^i geben kann.

Es bleibt also noch die Existenz einer eingliedrigen Untergruppe zu vorgegebenem Richtungsvektor ξ^i zu zeigen. Der Beweis dafür kann mit Hilfe des Existenzsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen analog zum entsprechenden Beweis für endliche Gruppen geführt werden, wie er z. B. in [16] durchgeführt ist.

Korollar 1. *Jede differenzierbare eingliedrige Untergruppe ist mindestens ebenso oft differenzierbar wie das Koordinatensystem und analytisch, wenn das Koordinatensystem analytisch ist.* Dies folgt aus (1).

Korollar 2. *Diejenigen geodätischen Linien, die durch den Nullpunkt gehen, sind für die beiden integrablen Zusammenhänge dieselben, und zwar sind sie eingliedrige Untergruppen. Die affinen Parameter der Geodätischen sind zugleich „kanonische" Parameter der Untergruppen* (d. h. es gilt $g(s+t) = g(s)g(t)$).

§ 4. Kanonische Koordinaten

Ein Koordinatensystem für eine B-lokale differenzierbare Gruppe, in dem die eingliedrigen Untergruppen durch lineare Beziehungen $g^i(t) = t \cdot \xi^i$ (ξ^i Richtungsvektor) gegeben sind, heißt *kanonisch.* Nach 3.1 entspricht umgekehrt in kanonischen Koordinaten jeder Kurve $t \cdot \xi^i (\xi \neq 0)$ eine eingliedrige Untergruppe.

Die B-lokale differenzierbare Gruppe sei in einem Koordinatensystem (x^i) vorgelegt. Die eingliedrige Untergruppe mit dem Richtungsvektor ξ^i und dem kanonischen Parameter t sei $g^i(\xi;t)$; diese Funktion von t ist für festes ξ^i Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\delta g^i(\xi;t)}{dt} = L_k^i(g^i(\xi;t))\,\xi^k, \tag{1}$$

und es gibt also nach einem Ergebnis von KERNER [7] positive Zahlen a, b, so daß für $\|\xi\| < a$ die Lösung für $|t| < b$ definiert und ebenso oft differenzierbar ist wie das Koordinatensystem bzw. mit diesem analytisch ist. Wegen der aus 3.1 folgenden Gleichung

$$g^i(\xi; st) = g^i(s\xi; t) \tag{2}$$

ist also für $\|\xi\| < ab$ die folgende Funktion definiert:

$$h^i(\xi) = g^i(\xi; 1), \tag{3}$$

für welche wegen (2) offenbar gilt $h(0) = 0$. Daß $h^i(\xi)$ in einer Umgebung von $\xi = 0$ stetig differenzierbar ist, folgt aus den Ergebnissen von KERNER [7]; denn die Lösung $g(\xi; t)$ der Differentialgleichung (1) ist nach dem Parameter ξ differenzierbar, weil die Differentialgleichung selbst es ist. Den Wert der Ableitung im Punkte 0 finden wir mit Hilfe der GÂTEAUX-Berechnungsweise:

$$\frac{\delta h^i(0)}{\delta \xi^k}\,\xi^k = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h^i(\varepsilon\xi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g^i(\xi;\varepsilon)}{\varepsilon} = L_k^i(0)\,\xi^k = \xi^i, \text{ also } \frac{\delta h^i(0)}{\delta \xi^k} = \delta_k^i.$$

Daher ist nach dem Umkehrungssatz (Anhang I) die Gleichung

$$x^i = h^i(\bar{x}^k)$$

stetig umkehrbar, mit $h(0) = 0$, und die Umkehrung ist in einer Umgebung von 0 eindeutig erklärt. In den Koordinaten $\bar{x}$, von denen man durch ebenso oft wie das Koordinatensystem x differenzierbare Koordinatentransformation zum System x kommt, stellt jede Kurve $t \cdot \bar{\xi}^i$ eine eingliedrige Untergruppe dar. Wir haben also den Satz:

4.1. *Es gibt eine Koordinatentransformation $\bar{x}(x)$, so daß $\bar{x}$ ein kanonisches Koordinatensystem ist, und so daß $x(\bar{x})$ in einer Umgebung von 0 ebenso oft differenzierbar ist wie das Koordinatensystem (x) bzw. mit diesem analytisch ist; ferner gilt*

$$\frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k} = \delta^i_k.$$

Als eine Folge dieses Satzes kann man leicht beweisen: *In einem differenzierbaren Koordinatensystem ist jede eingliedrige Untergruppe differenzierbar.*

Der Beweis kann durch Übergang zu einem kanonischen Koordinatensystem genau so geführt wie im endlichdimensionalen Fall bei Pontrjagin [16] (Theorem 48, p. 190—192) und daher hier übergangen werden. (Im Beweis von Pontrjagin ist zu diesem Zweck natürlich $|x^i|$ durch $\|x^i\|$ zu ersetzen.)

§ 5. Differenzierbarkeitseigenschaften von Untergruppen

Im folgenden bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird, H eine abgeschlossene Untergruppe der B-lokalen differenzierbaren Gruppe K, d. h. genauer einen Untergruppenkeim, zu dem es eine Umgebung V der 0 in K gibt, so daß $H \cap \bar{V}$ in K abgeschlossen ist.

5.1. *Wenn es eine für $t = 0$ differenzierbare Kurve $x^i(t) \in H \cap \bar{V}$ gibt, so daß $x^i(0) = 0$, $\dfrac{\delta x^i(0)}{dt} = \xi^i$, dann enthält H auch die eingliedrige Untergruppe von K mit dem Tangentialvektor ξ^i.*

Beweis. Das Koordinatensystem in K sei als ein kanonisches gewählt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann V als durch die Koordinatenmenge $\{x^i; \|x^i\| < 1\}$ beschrieben angenommen werden, was nötigenfalls durch eine Koordinatentransformation $r \cdot \delta^i_k$ und Einschränkung von V auf eine Untermenge erreichbar ist. Mit $x^i(t)$ sind auch die $n \cdot x^i(t)$ für $n \leqq \dfrac{1}{\|x(t)\|}$ Koordinaten von Elementen aus $H \cap \bar{V}$. Da $x^i(t)$ für $t = 0$ differenzierbar ist, $\dfrac{\delta x^i(0)}{dt} = \xi^i$, treten alle $s \cdot \xi^i$ mit $0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{\|\xi\|}$ als Häufungspunkte der Menge $\left\{n \cdot x^i(t);\ 0 < t < \varepsilon,\ n \leqq \dfrac{1}{\|x(t)\|}\right\}$ auf, liegen also ebenfalls in $H \cap \bar{V}$, w.z.b.w.

Korollar. *Wenn es in $H \cap \bar{V}$ eine Folge $x_{(n)}$ gibt mit $x_{(n)} \to e$, und (in kanonischen Koordinaten von K) $\dfrac{x^i_{(n)}}{\|x_{(n)}\|} \to \xi^i$, dann enthält $H \cap \bar{V}$ die eingliedrige Untergruppe mit dem Tangentialvektor ξ^i.* (Der Beweis dafür verläuft wie der zu 5.1.)

5.2. *Die Gesamtheit der Tangentialvektoren im Punkte e von in e differenzierbaren Kurven aus $H \cap \bar{V}$ bilden einen linearen Raum $L(H)$, wenn H eine beliebige (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe von K ist; $L(H)$ ist zu einem Unterraum von B linear homöomorph. — Wenn H abgeschlossen ist, dann ist auch $L(H)$ abgeschlossen, und in kanonischen Koordinaten von K gilt:*

Notwendig und hinreichend dafür, daß die eingliedrige Untergruppe von K mit dem Richtungsvektor ξ^i zu H gehört, ist $\xi^i \in L(H)$.

Beweis. Wenn $x(t)$ den Tangentialvektor ξ^i in $t = 0$ hat $(x(0) = e)$, und $y(t)$ $(y(0) = e)$ in $t = 0$ den Tangentialvektor η^i, so hat $x(t) \cdot y(t)$ den Tangentialvektor $\xi^i + \eta^i$ in 0 und $x(a \cdot t)$ den Tangentialvektor $a \cdot \xi^i$. Daraus folgt wegen der Gruppeneigenschaft von H die Linearität von $L(H)$. Da die Tangentialvektoren einen linearen Unterraum von $\mathfrak{T}^1$ bilden und $\mathfrak{T}^1$ linear homöomorph zu B ist, folgt die lineare Homöomorphie von $L(H)$ mit einem linearen Unterraum von B. Die notwendige und hinreichende Bedingung im Falle der Abgeschlossenheit von H ergibt sich mit Hilfe von 5.1. Es gehören also (da wir kanonische Koordinaten von K haben) alle $t\,\xi^i$ für $\xi^i \in L$ und genügend kleine t wirklich zu K, woraus wegen der Abgeschlossenheit von H diejenige von $L(H)$ folgt.

5.3. *Wenn H abgeschlossen ist, dann ist $L(H)$ invariant unter den inneren Automorphismen von H.*

Beweis. Wenn $g^i \in L(H)$, dann gibt es nach 5.2. in H eine eingliedrige Untergruppe $g^i(t)$ mit $g(1) = g$, und für kleine t gilt $g(t) \in L(H)$. Da $ag(t)a^{-1}$ ebenfalls eine eingliedrige Untergruppe von H ist, wenn $a \in H$, folgt $aga^{-1} \in L(H)$ für alle $a \in H$, $g \in L$, was behauptet wurde[3]).

5.4. *Es sei H eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von K. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß H eine B'-lokale differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe von K ist, daß für $x \in H \cap \overline{V}$ gilt $x^i \in L(H)$. H ist in diesem Falle ebenso oft differenzierbar wie K bzw. mit K analytisch.*

Beweis. Wenn H eine differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe von K (in kanon. Koordinaten) ist, dann ist die Bedingung jedenfalls erfüllt.

Es bleibt zu beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist. Wir wissen: In den kanonischen Koordinaten von K gilt, daß die Koordinaten x^i von Elementen aus H mit $\|x^i\| \leqq 1$ genau den Durchschnitt des linearen abgeschlossenen Unterraums $L(H)$ von $\mathfrak{T}^1$ mit der Einheitskugel $\overline{V}$ bilden. B' sei der zu $L(H)$ linear homöomorphe abstrakte Banach-Raum, Elemente $u^\alpha \cdot k^i_\alpha$ sei die definierende Abbildung von B' auf $L(H)$ (isometrisch, linear), K^α_i ihre Umkehrung. Dann ist nach den einfachsten Sätzen über die FRÉCHETsche Ableitung die Produktfunktion der Untergruppe H:

$$f^\beta(u^\alpha, v^\alpha) = K^\beta_i\, f^i(k^j_\alpha\, u^\alpha;\, k^j_\alpha\, v^\alpha)$$

ebenso oft differenzierbar wie $f^i(x; y)$ bzw. mit dieser Funktion analytisch[4]).

5.5. *Es sei H eine lokalkompakte Untergruppe von K. Dann ist die mit der Identität e zusammenhängende Komponente von H eine B'-lokale differenzierbare Gruppe bzw. mit K eine analytische B'-lokale Gruppe. Die Einbettung ist differenzierbar bzw. analytisch.*

---

[3]) In einer nachfolgenden Arbeit wird gezeigt werden, daß $L(H)$ Koordinaten eines Normalteilers von H sind. Daraus folgt sofort: Jede einfache abgeschlossene Untergruppe, welche eine in 0 differenzierbare Kurve enthält, ist eine differenzierbare Gruppe.

[4]) In der Terminologie von LIE besagt dieser Satz: Eine Untergruppe ist genau dann differenzierbar, wenn sie von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird.

Beweis[5]). Es sei $L(H)$ wie bisher definiert, wobei K wieder in kanonischen Koordinaten angenommen sei. Wegen **5.4** genügt es zu zeigen, daß $L(H)$ eine volle Koordinatenumgebung der 0 in H enthält. Wir werden zeigen: Wenn $L(H)$ nicht eine volle Koordinatenumgebung der 0 in H enthielte, dann gäbe es eine Folge $x_{(n)} \in H$ mit

$$\textbf{(A)} \qquad e \neq x_{(n)} \to e; \frac{x^i_{(n)}}{\|x_{(n)}\|} \to x^i \text{ für ein } x \in K, \ x^i_{(n)} \in L',$$

L' ein abgeschlossener linearer Unterraum von B mit $L' \cap L(H) = 0$, $L(H) \oplus L' = B$.

Wenn wir **(A)** als bewiesen annehmen, dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von H $x \in H$ und wegen der Limesbedingung und dem **Korollar** zu **5.1**: $t \cdot x^i \in H$ für $t \leq 1$. Also ist ein Widerspruch zur Annahme erhalten, daß $L(H)$ alle eingliedrigen Untergruppen von H enthielte, denn $\|x^i\| = 1$, $t \cdot x^i \in L'$. Damit wäre der Beweis von **5.5** beendet.

Es bleibt also die Existenz einer Folge $x_{(n)}$ mit **(A)** zu beweisen, unter der Annahme, daß $L(H)$ nicht eine volle Umgebung der 0 in H enthielte. Dann gibt es eine Nullfolge $y_{(n)} \notin H$, $y_{(n)} \in L(H)$. $L(H)$ ist wegen der Lokalkompaktheit jedenfalls endlichdimensional (Anhang II, 2), die Dimensionszahl sei n. Dann gibt es nach Anhang II, 1 Vektoren $b^i_{(k)} \in L(H)$ $(k = 1, \ldots, n)$ von der Norm 1 und n in B definierte stetige lineare Funktionale $c^{(k)}_i$, ebenfalls von der Norm 1, mit

$$c^{(k)}_i b^i_{(j)} = \delta_{(k,j)} \text{ für } j \geqq k.$$

Der Raum

$$L' = \{x^i \in B;\ c^{(k)}_i x^i = 0,\ k = 1, \ldots, n\}$$

hat mit $L(H)$ nur den Nullvektor gemeinsam, und $L(H)$, L' spannen zusammen den ganzen Raum B auf; die Abgeschlossenheit von L' folgt aus der Stetigkeit der Funktionale c. Das Gleichungssystem

$$\textbf{(B)} \qquad c^{(k)}_i f^i(y^{-1}; b) = 0 \text{ mit } b^k = t_{(1)} b^k_{(1)} + \cdots + t_{(n)} b^k_{(n)}$$

hat für $y = e$ die eindeutig bestimmte Lösung $t_{(1)} = \cdots = t_{(n)} = 0$. Für $y = e$, $t_{(k)} = 0$ für alle k ist die Funktionalmatrix der linken Seite von **(B)** gleich $a_{(k,j)} = c^{(k)}_i b^i_{(j)}$, die Funktionaldeterminante also gleich 1. Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen [5] existiert also in einer Umgebung von $y^i = 0$ sicher eine stetige Funktion $b^i(y)$ mit $b^i(0) = 0$, welche **(B)** löst; wegen **(B)** ist daher für solche y $y^{-1}b(y) \in H$, und der Koordinatenvektor $f^i(y^{-1}; b(y))$ von $y^{-1}b(y)$ liegt in L'. Von einem gewissen Index N ab liegen die $y_{(n)}$ in der Umgebung, in der $b(y)$ definiert ist; wir setzen

$$x^i_{(n)} = f^i(y^{-1}_{(n)}); b(y_{(n)}).$$

Es gilt $x_{(n)} \in H$, $x^i_{(n)} \in L'$, $\lim x_{(n)} = e$, außerdem $x_{(n)} \neq e$; wäre nämlich $x_{(n)} = e$, so hätte man $e = y^{-1}_{(n)} b(y_{(n)})$, also $y_{(n)} \in L$ entgegen der Annahme. Wegen der

[5]) Die Spezialisierung des Beweises auf endliche Keime K dürfte etwas kürzer ausfallen als der Beweis in [16]; dabei kann das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren angewandt werden.

Lokalkompaktheit gibt es eine Teilfolge, deren zugehörige Einheitsvektoren konvergieren, und diese Teilfolge erfüllt die Bedingung (A). Damit ist der Beweis von 5.5 beendet.

Die Frage, ob auch alle nicht lokalkompakten abgeschlossenen (zusammenhängenden) Untergruppen wieder B'-lokale differenzierbare Gruppen sind, kann hier in dieser Allgemeinheit nicht beantwortet werden [vgl. aber Fußnote [3])]. — Es gilt aber

5.6. *Das Zentrum Z einer B-lokalen differenzierbaren (analytischen) Gruppe K ist eine B'-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe*; die *Einbettung ist differenzierbar (analytisch). (B' ist linearer Unterraum von B.)*

Beweis. Wenn $g \in Z$, dann enthält Z auch die ganze eingliedrige Untergruppe $g(t)$ mit $g(1) = g$; denn für jedes $a \in K$ ist $a^{-1} g(t)\, a = h(t)$ wiederum eine eingliedrige Untergruppe, für die wegen $g(1) \in Z$ gilt $h(1) = g(1)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz 3.1 folgt dann $h(t) = g(t)$, also $g(t) \in Z$. Aus 5.4 folgt dann die Behauptung, da Z abgeschlossen ist, wie man leicht verifiziert.

§ 6. Anwendungen auf Banach-Algebren und Gruppen linearer Transformationen in Banach-Räumen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich die bisherigen Betrachtungen auf die Gruppe einer Banach-Algebra mit Einselement anwenden lassen. Diese Gruppe ist definiert als die Menge derjenigen Elemente einer Banach-Algebra, welche ein Inverses bei der Multiplikation besitzen; zu dieser Gruppe gehört stets eine volle Umgebung des Einselementes I der Banach-Algebra (vgl. dazu etwa [6]; wir betrachten hier reelle Banach-Algebren, für die die entsprechenden Sätze gelten).

6.1. *Die Gruppe einer reellen Banach-Algebra mit Einselement ist eine analytische B-Gruppe (B ist der Banach-Raum der Algebra).*

Beweis. Als Koordinatenvektor x^i des Elementes x der Gruppe wählen wir $x^i = I - x$ (I bezeichnet das Einselement). Die Produktfunktion $f^i(x; y) = (xy)^i = I - xy = x^i + y^i - x^i y^i$ ist eine analytische Funktion der Koordinatenvektoren x^i, y^i, das Einselement hat den Koordinatenvektor 0, und da eine Umgebung von I in B zur Gruppe gehört, ist die Gruppe eine B-lokale analytische Gruppe.

Aus den Ergebnissen von § 5 und 6.1 folgt nun sofort:

6.2. *Die Untergruppe H der Gruppe einer Banach-Algebra ist eine B'-lokale analytische Gruppe jedenfalls dann, wenn*

a) *H lokalkompakt ist (dann ist H eine endliche* LIE*-Gruppe), oder*

b) *H das Zentrum der Gruppe der Banach-Algebra ist, oder wenn*

c) *es eine Umgebung U von e gibt, so daß mit $u \in H \cap U$ auch eine eingliedrige Untergruppe $u(t)$ mit $u(1) = u$ zu H gehört.*

Korollar: 6.2 *gilt für die Gruppe der linearen Transformationen eines Banach-Raumes.*

6.2. a) ist (für komplexe Banach-Algebren) von K. YOSIDA [19] auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Übertragung der Methode von J. v. NEUMANN [15], bewiesen worden.

Anhang I. Hilfsmittel aus der Differentialrechnung in Banachschen Räumen und der Tensorrechnung

Es sei B ein BANACHscher Raum. Seine Elemente bezeichnen wir im allgemeinen durch kleine lateinische obere Indizes, welche nicht zur Unterscheidung der Elemente (als „Nummern") aufzufassen sind; x^i bezeichnet nur die Zugehörigkeit von x zum Raume B (Abkürzung für $x \in B$). Wenn in einem Beweisgang mehrere verschiedene Räume auftreten, werden zur Indizierung verschiedene Alphabete benützt.

Die Elemente des *adjungierten Raumes* B_1 tragen untere Indizes aus dem gleichen Alphabet: u_i bezeichnet also ein stetiges lineares Funktional über B, $u_i x^i$ die Anwendung dieses Funktionals auf x^i (bezeichnet also eine Zahl), $u_i x^k = x^k u_i$ dagegen eine lineare Abbildung von B auf sich. Als *höhere adjungierte Räume* B_n^m ($m \geqq 0$, $n \geqq 0$, ganz) bezeichnen wir die Banach-Räume aus den stetigen Multilinearformen in n Argumenten aus B und m Argumenten aus B_1, welche noch der zusätzlichen Bedingung genügen, daß jeder Ausdruck mit nur einem freien oberen Index ein Element von B ist. (So ist $c_{kj}^i x^k y^j \in B$.)[6]) Wir schreiben für B_n^0 auch B_n ($n \geqq 1$), für B_0^m auch B^m ($m \geqq 1$); B_0^0 ist der zugrunde liegende Körper, in unserem Falle also der der reellen Zahlen. — Allgemeiner steht für eine lineare stetige Abbildung eines Banach-Raumes B (Elemente x^i) in einen anderen C (Elemente y^α) das Symbol t_i^α, usw. Zahlen tragen keine freien Indizes; Nummern werden eingeklammert. Die Konvention geht im endlichdimensionalen Spezialfall in die EINSTEINsche Summationskonvention über.

Eine Abbildung $y^\alpha = t^\alpha(x^k)$ von B in C heißt *differenzierbar* (im Sinne von FRÉCHET [3]) in x^k, wenn

$$F^\alpha(x^k + d\,x^k) - F^\alpha(x^k) = L_i^\alpha(x^k)\,d\,x^i + o^\alpha(d\,x^k)$$

für alle $x^k + d\,x^k$ aus einer Umgebung von x^k; $o^\alpha(d\,x^k)$ bezeichnet eine Funktion mit

$$\lim_{0 \neq \|dx\| \to 0} \frac{\|o^\alpha(d\,x^k)\|}{\|dx\|} = 0\,.$$

Der dann eindeutig bestimmte Operator $L_i^\alpha(x)$ wird als FRÉCHETsche Ableitung von F^α an der Stelle x^k bezeichnet; wir schreiben

$$L_i^\alpha(x^k) = \frac{\delta F^\alpha(x)}{\delta x^i}\,.$$

Für zusammengesetzte Funktionen $\psi^a(x) = \Phi^a(F^\alpha(x^k))$ gilt die *Kettenregel von* FRÉCHET [3]:

$$\frac{\delta \psi^a(x)}{\delta x^k} = \frac{\delta \Phi^a(F(x))}{\delta F^\alpha} \frac{\delta F^\alpha(x)}{\delta x^k}\,.$$

Der TAYLORsche Satz gilt in der folgenden Form [9]. (Ein ähnlicher Satz, hergeleitet mit Hilfe des Integralbegriffs, findet sich in [4]:)

---

[6]) Für die genauere Ausführung muß auf [8] verwiesen werden.

Die Funktion $F^\alpha(x^i)$ besitze in einer Umgebung U von x^i stetige Ableitungen bis zur $(n+1)$ ten Ordnung. Dann gilt

$$F^\alpha(x^i + dx^i) = F^\alpha(x^i) + \frac{\delta F^\alpha(x^i)}{\delta x^j}\, dx^j + \\ + \frac{1}{2!}\frac{\delta^2 F^\alpha(x^i)}{\delta x^{j_1}\,\delta x^{j_2}}\, dx^{j_1} dx^{j_2} + \dots \frac{1}{n!}\frac{\delta^n F^\alpha(x^i)}{\delta x^{j_1}\dots\delta x^{j_n}}\, dx^{j_1}\dots dx^{j_n} + o^\alpha(dx)\,\|dx\|^{n-1}$$

für alle dx mit $(x + t\cdot dx) \in U$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Es sind mehrere Definitionen für die Analyzität einer Funktion möglich, welche sämtlich so beschaffen sind, daß Polynome und endlichdimensionale analytische Funktionen analytisch sind. Wir verwenden hier die folgende Definition:

Wenn $F^\alpha(x^i)$ in der offenen Menge U unendlich oft differenzierbar ist, so heißt F^α analytisch in U, wenn die TAYLORsche *Reihe für jedes x, dx mit $x \in U$, $x + dx \in U$ in der Normtopologie gegen $F^\alpha(x + dx)$ konvergiert.*

Für *gewöhnliche Differentialgleichungen*

$$\frac{\delta x^i}{dt} = f^i(x^k; t)$$

gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von KERNER [7] (dazu auch HILLE [6], S. 95): *Wenn f nach beiden Argumenten stetig differenzierbar ist (*LIPSCHITZ-*Bedingungen würden ausreichen), dann gibt es eine und in einer Umgebung der Anfangsbedingungen genau eine Lösung $x^i(t)$ mit $x^i(0) = x^i_0$.*

Wegen weiterer hier benötigter Eigenschaften des FRÉCHETschen Differentials sei auf [8] verwiesen[6a]).

Anhang II. Ein Orthogonalisierungsverfahren für Banach-Räume

Das folgende Verfahren, welches auch unabhängig von der vorliegenden Arbeit verwendbar ist, gibt die Begründung für eine im Beweis zu Satz 5.5 benötigte Hilfsbetrachtung:

II. 1. *Es sei $x^i_{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ eine höchstens abzählbare Folge von linear unabhängigen Einheitsvektoren aus einem Banach-Raum B; dann gibt es eine Folge $y^i_{(n)} \in B$ von gleicher Mächtigkeit und eine Folge $y^{(n)}_i \in B_1$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\|y^i_{(n)}\| = \|y^{(n)}_i\| = 1$,

b) *$y^i_{(n)}$ ist linear abhängig von den $x^i_{(k)}$ $(k \leqq n)$, aber nicht von den $x^i_{(k)}$ $(k < n)$,*

c) *$y^{(n)}_i y^i_{(m)} = 1$ für $n = m$; $y^{(n)}_i y^i_{(m)} = 0$ für $m > n$,*

d) *Es ist $\|y^i_{(m)} - L_{(m)}\| \geqq 1$, wobei $L_{(m)}$ die Abschließung des von den $y^i_{(n)}$ $(n > m)$ aufgespannten linearen Unterraumes von B ist; also gilt speziell $\|y^i_{(m)} - y^i_{(n)}\| \geqq 1$ für $m \neq n$.*

Beweis. Wenn die Folge $x_{(n)}$ leer ist, dann ist nichts zu beweisen. Es sei also $x_{(1)}$ vorhanden; dann setze man $y^i_{(1)} = x^i_{(1)}$ und wähle $y^{(1)}_i$ als ein nach dem Satze von HAHN-BANACH[7]) zu $y^i_{(1)}$ bestimmtes Funktional. — Wir schließen nun weiter durch vollständige Induktion. Für $m \leqq n$ sei bewiesen:

$$y^{(k)}_i y^i_{(m)} = 0 \text{ für } k < m \leqq n \text{ mit } \|y^{(k)}_i\| = 1\ (k < n),\ \|y^i_{(m)}\| = 1\ (m \leqq n),$$

[6a]) Die Grundtatsachen der Differentialrechnung in normierten Räumen sind jetzt in Lehrbuchform zugänglich: L. A. LJUSTERNIK u. W. I. SOBOLEW: Elemente der Funktionalanalysis, Berlin 1955, Kap. VI.

[7]) Dieser Satz besagt: Zu x^i mit $\|x^i\| = 1$ existiert x_i mit $\|x_i\| = 1$, so daß $x_i x^i = 1$.

$y_i^{(k)}\, y^i_{(k)} = 1$ $(k < n)$. Dies ist die Induktionsvoraussetzung. Dann wählen wir zu $y^i_{(n)}$ ein nach dem Satze von HAHN-BANACH bestimmtes Funktional $y_i^{(n)}$. Zur Bestimmung von $y^i_{(n+1)}$ suchen wir zunächst einen Vektor x^i mit

$$x^i = a_{(1)}\, y^i_{(1)} + \cdots + a_{(n)}\, y^i_{(n)} + a_{(n+1)}\, x^i_{(n+1)}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= y_i^{(1)} x^i = a_{(1)} && + a_{(n+1)}\, y_i^{(1)} x^i_{(n+1)}\\
0 &= y_i^{(2)} x^i = a_{(1)}\, y_i^{(2)} x^i + a_{(2)} && + a_{(n+1)}\, y_i^{(2)} x^i_{(n+1)}\\
&\cdots \quad \cdots\\
0 &= y_i^{(n)} x^i = a_{(1)}\, y_i^{(n)} x^i + \cdots + a_{(n)} + a_{(n+1)}\, y_i^{(n)} x^i_{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt eine nicht-triviale Lösung $(a_{(k)})$, da die Determinante der Koeffizienten von $(a_{(1)}, \ldots, a_{(n)})$ gleich 1 ist. Offenbar kann für eine nichttriviale Lösung nicht gelten $a_{(n+1)} = 0$, weil daraus folgen würde $0 = a_{(1)} = \cdots = a_{(n)}$. Ein nichtverschwindender Lösungsvektor x^i ist also von $y^i_{(1)}, \ldots, y^i_{(n)}$ linear unabhängig, aber linear abhängig von $y^i_{(1)}, \ldots, y^i_{(n)}, x^i_{(n+1)}$. Das gleiche gilt dann auch für

$$y^i_{(n+1)} = \frac{x^i}{\|x^i\|}\,.$$

Damit sind a), b), c) bewiesen.

Es bleibt d) zu zeigen; dies folgt aber aus

$$\|y^i_{(m)} - y^i\| \geqq |y_i^{(m)}\,(y^i_{(m)} - y^i)| = 1$$

für $y^i \in L_{(m)}$ [8]).

Als einfache Anwendung folgt der Satz von F. RIESZ, den wir in der vorliegenden Arbeit mehrfach verwendet haben:

II. 2. *Ein normierter Raum ist dann und nur dann lokalkompakt* [9]), *wenn der Raum endlichdimensional ist.*

Beweis. Wäre B nämlich unendlichdimensional, so gäbe es eine unendliche linear unabhängige Teilfolge, deren zugehörige orthogonalisierte Folge $y^i_{(m)}$ wegen $\|y^i_{(m)} - y^i_{(n)}\| \geqq 1$ $(m \neq n)$ keine konvergente Teilfolge enthält.

Literatur

[1] G. BIRKHOFF: Analytical groups. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 61—101 (1938). — [2] E. CARTAN: Sur la structure des groupes infinis des transformations. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **21**, 153—206 (1904); **22**, 219—308 (1905). — [3] M. FRÉCHET: La notion de différentielle dans l'analyse générale. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **42**, 293—323 (1925). — [4] L. M. GRAVES: Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163—177 (1927). — [5] T. H. HILDEBRANDT u. L. M. GRAVES: Implicit functions in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927). — [6] E. HILLE: Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — [7] M. KERNER:

[8]) Das Orthogonalisierungsverfahren ist übrigens nicht auf normierte Räume beschränkt, sondern läßt sich sinngemäß auch in jedem reellen Vektorraum durchführen, da es zu jedem von Null verschiedenen Vektor ein lineares Funktional gibt, welches für diesen Vektor den Wert 1 annimmt. Die Aussagen, in denen Normen auftreten, sind in II, 1 dafür zu streichen. (Der Beweis dieser Erweiterung ergibt sich aus dem zu II, 1, da dort von der Extremaleigenschaft der HAHN-BANACHschen Funktionale für die hier zu beweisenden Eigenschaften kein Gebrauch gemacht wurde.)

[9]) Das heißt: Die Menge $\|x\| \leqq 1$ ist kompakt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat.-fiz. **40**, 47—67 (1932). — [8] D. LAUGWITZ: Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen. Math. Z. **61**, 100—118 (1954). — [9] D. LAUGWITZ: Grundlagen für die Geometrie der unendlichdimensionalen Finslerräume. Ann. Mat. pura appl., **41** (1955) — [10] S. LIE: Theorie der unendlichen Gruppen. Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-nat. Kl. **43**, 316—393 (1891). — [11] S. LIE: Über Differentialinvarianten. Math. Ann. **24**, 537—578 (1884). — [12] A. D. MICHAL: Differentiable infinite continuous groups in abstract spaces. Revista Ci. Lima **50**, 131—140 (1948). — [13] A. D. MICHAL u. V. ELCONIN: Differential properties of abstract transformation groups with abstract parameters. Amer. J. Math. **29**, 129—143 (1937). — [14] R. NEVANLINNA: Bemerkung zur Funktionalanalysis. Math. Scand. **1**, 104—112 (1953). — [15] J. v. NEUMANN: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen. Math. Z. **30**, 1—42 (1929). — [16] L. PONTRJAGIN: Topological groups. Princeton 1946. — [17] J. F. RITT: Differentiable groups and formal LIE theory for an infinite number of parameters. Ann. of Math. (2) **52**, 708—726 (1950). — [18] J. A. SCHOUTEN: Ricci calculus, 2nd ed. Berlin etc. 1954. — [19] K. YOSIDA: On the group embedded in the metrical complete ring. Japanese J. Math. **13**, 7—26 u. 459—472 (1936).

(Eingegangen am 13. Juni 1955)