BENZ, W.
Math. Annalen, Bd. 134, S. 385—402 (1958)

Beziehungen zwischen Orthogonalitäts- und Anordnungseigenschaften in Kreisebenen

Von

WALTER BENZ in Mainz

Einleitung

Ist $\mathfrak{K}_2$ eine kommutative quadratische Erweiterung des kommutativen Körpers $\mathfrak{K}_1$, so läßt sich in bekannter Weise eine Kreisgeometrie — zitiert durch $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ — definieren[1] [2]. In der vorliegenden Arbeit werden nun Orthogonalitätseigenschaften in solchen Geometrien $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ untersucht. Die bemerkenswertesten Ergebnisse sind

1. *Dann und nur dann besitzt* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *eine Orthogonalitätsrelation zwischen Kreisen in der Stärke*

OI *Aus* $a \perp b$ *folgt* $b \perp a$.

OII *Aus* $a \perp b$ *folgt* $|a \cap b| = 2$ [3].

OIII *Zu* $P \in k$, $Q \neq P$ *gibt es genau einen Kreis* $k' \ni P, Q$ *mit* $k \perp k'$.

OIV *Sind* a, b *sich berührende Kreise, ist* k *ein weiterer Kreis mit* $k \perp a, b$ *so gilt* $k \supset a \cap b$.

OV *Sind zwei verschiedene Kreise gleichzeitig zu zwei fremden Kreisen orthogonal, dann schneiden sie sich,*

wenn $\mathfrak{K}_1$ *eine nichttriviale Halbordnung* (SPERNER [13], S. 7) *gestattet dergestalt, daß jedes nichtnegative Element von* $\mathfrak{K}_1$ *Quadrat in* $\mathfrak{K}_1$ *ist* [4].

2. *Dann und nur dann besitzt* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke* OI—OV *und*

OVI *Sind* P, Q, R *drei beliebige verschiedene Punkte, dann gibt es durch* R, *genau einen Kreis, der zu allen Kreisen durch* P, Q *orthogonal ist,*

---

[1]) Vgl. HOFFMAN [9], VAN DER WAERDEN, SMID [15] oder § 2 der vorliegenden Arbeit. Die in den genannten Arbeiten gegebenen Definitionen sind äquivalent, gehen aber jeweils von anderen Begriffen aus.

[2]) Die Punkte von $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ werden im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die Kreise mit den Buchstaben $a, a', \ldots, l$. Die Elemente von $\mathfrak{K}_1$ werden im allgemeinen mit $m, m', \ldots, z$ bezeichnet.

[3]) Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge, so wird mit $|\mathfrak{M}|$ ihre Mächtigkeit bezeichnet.

[4]) Letzteres bedeutet genau, daß die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{K}_1$ nach der Untergruppe der Quadrate in zwei Klassen zerfällt.

wenn $\mathfrak{K}_1$ eine Anordnung gestattet dergestalt, daß jedes nichtnegative Element von $\mathfrak{K}_1$ Quadrat in $\mathfrak{K}_1$ ist[5]).

Gemäß der Feststellung (Satz 5, § 2), daß $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ dann und nur dann (F)-Ebene[6]) ist, wenn $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist, hat man mit einem in [3] (Satz 2) abgeleiteten Ergebnis: Kreisgeometrien $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in denen $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist, gestatten höchstens eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke OI—OIII. — Bezeichnet $\chi(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ die Zahl der verschiedenen Orthogonalitätsrelationen in der Stärke OI—OIII der Kreisgeometrie $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, so hat man genauer (§ 2)

a) Ist $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ und ist Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, so gilt $\chi(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) = 1$.

b) Ist $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ und ist Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) = 2$, so gilt $\chi(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) = 0$.

c) Ist $\mathfrak{K}_2$ inseparable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$, so gilt $\chi(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) \geqq |\mathfrak{K}_1| \geqq \aleph_0$.

Besitzt $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke OI—OIII, so können immer noch die Fälle a), c) auftreten. Nach Satz 9, § 3 hat man dann und nur dann den Fall a), wenn in $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ zusätzlich OIV erfüllt ist. — Schließlich gilt Satz 13, § 3: Dann und nur dann besitzt $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, wo Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$ ist, eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI—OIV, OVI, wenn zu jedem Element aus $\mathfrak{K}_2$ die Norm Quadrat in $\mathfrak{K}_1$ ist.

Methodisch erwies sich in den §§ 2, 3 der Doppelverhältniskalkül als schlagkräftig; die Anregung, ihn zentral zu benutzen, verdanke ich Herrn Prof. R. FURCH.

In § 4 werden vermöge stereographischer Projektion die ebenen Schnitte einer konvexen Quadrik in eine Ebene auf ein System von Kreisen — beschrieben durch quadratische Formen mit festem quadratischem Anfangsstück (vgl. VAN DER WAERDEN, SMID [15]) — abgebildet. Mit Hilfe dieser Abbildung und einiger Sätze des Vorangehenden haben wir Satz 15, in dem unter anderem gezeigt wird 1., daß die von EWALD in [5] erhaltenen (nach einer Bemerkung von BARNER und LENZ — vgl. auch Fußnote [35]) — notwendig kommutativen) Koordinatenkörper genau die euklidischen Körper sind, d. h. genau die angeordneten Körper, in denen jedes nichtnegative Element Quadrat ist[7]), 2. daß in den von EWALD axiomatisch begründeten Kreisgeometrien der volle Satz von MIQUEL (Axiom VI in [15]) erfüllt ist.

Die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke ich einer Korrespondenz mit Herrn Prof. F. BACHMANN.

[5]) Eine axiomatische Begründung gewisser Kreisgeometrien, beruhend auf Inzidenz- (hier nimmt der Büschelsatz eine besondere Stellung ein) und Orthogonalitätseigenschaften, hat EWALD [5] gegeben. Die dort zugrunde gelegten Orthogonalitätseigenschaften sind die hier benutzten OI—OVI; ein Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen war nämlich die Frage, wie die Koordinatenkörper zu kennzeichnen sind, auf die EWALD im Verlauf seiner axiomatischen Untersuchungen [5] gekommen ist.

[6]) Vgl. § 1.

[7]) Diese Körper stellten sich auch als geeignetes Fundament der Kugelgeometrie heraus. Vgl. HOFFMAN [8].

§ 1. Möbiusebenen

Unter einer *Kreisebene* verstehen wir eine abstrakte Menge $\mathfrak{P} = \{A, B, C, \ldots\}$ von *Punkten* A, B, C, ..., in der gewisse Teilmengen a, b, c, ... — genannt *Kreise* — ausgezeichnet sind. Zwei Kreise a, b heißen *gleich* bzw. *verschieden*, wenn die Teilmengen a, b mengentheoretisch gleich bzw. verschieden sind. Die Kreise a, b heißen zueinander *fremd*, wenn $a \cap b = \theta$ ist. Der Kreis a *schneidet* den Kreis b, wenn $a \cap b \neq \theta$ ist. Der Kreis a *berührt* den Kreis b in P, wenn a und b verschiedene Kreise sind und P der einzige gemeinsame Punkt von a, b ist. Wir schreiben dann auch $a \cap b = P$ statt $a \cap b = \{P\}$ und sprechen in diesem Falle geradezu von dem Punkt $a \cap b$.

Statt $P \in a$ sagen wir auch wahlweise *der Kreis a geht durch den Punkt P*, *der Kreis a enthält den Punkt P*, *der Punkt P liegt auf dem Kreis a* usw. — Die Punktmenge P, Q, R, ... heißt *konzyklisch*, wenn sie insgesamt einem Kreise k angehört.

Unter einer *Möbiusebene* (vgl. [3]) verstehen wir eine Kreisebene mit den Eigenschaften

(MI) *Durch drei verschiedene Punkte geht mindestens ein Kreis. Sind a, b, c verschiedene Kreise mit $|a \cap b \cap c| \geqq 2$, so gilt $a \cap b = b \cap c = c \cap a$.*

(MII) *Berührsatz: Zu $P \in k$, $Q \notin k$ gibt es genau einen Kreis $k' \ni P, Q$ mit $k \cap k' = P$.*

(MIII) *Jeder Kreis besitzt mindestens einen Punkt. Es gibt vier verschiedene Punkte, die nicht gemeinsam auf einem Kreise liegen.*

In einer Möbiusebene besitzt jeder Kreis mindestens drei verschiedene Punkte (vgl. [3], (1)). Die Möbiusebene mit der geringsten Punkteanzahl besteht aus genau fünf Punkten und zehn Kreisen (vgl. van der Waerden, Smid [15]). In ihr gilt außerdem die Eigenschaft (MI'): *Durch drei verschiedene Punkte geht ein und nur ein Kreis*[8]).

Vorgelegt sei eine Möbiusebene Σ. Wir wollen sagen (vgl. [3]), Σ *gestatte* eine Orthogonalitätsrelation, wenn den Kreisen von Σ eine Beziehung $a \perp b$ aufgeprägt werden kann mit den Eigenschaften OI, OIII und OII*: *Ist $a \perp b$, so schneiden sich a und b in einer Fährte*[9]).

Unter einer (F)-Ebene verstehen wir (vgl. [3]) eine Möbiusebene, in der zusätzlich gilt: *Berührt ein Kreis k einzeln drei verschiedene Kreise a, a', a'' eines Berührbüschels* (vgl. [3]), *so gehören die Punkte $k \cap a$, $k \cap a'$, $k \cap a''$ gemeinsam mindestens einer Fährte an*[10]).

---

[8]) Es gibt Möbiusebenen, in denen (MI') nicht erfüllt ist (vgl. [3]).

[9]) Vgl. [3]. Für den Fall, daß Σ zusätzlich der Eigenschaft (MI') genügt, gewinnt OII* die Form OII:

Ist $a \perp b$, so schneiden sich a und b in genau zwei verschiedenen Punkten.

(Was in [3] OII genannt wurde, nennen wir hier OII*. OII benutzen wir also für einen — häufig zu zitierenden — spezielleren Sachverhalt als OII*.)

[10]) Gilt in Σ auch (MI'), so gewinnt die angeschriebene Bedingung die Form: Berührt ein Kreis einzeln drei verschiedene Kreise eines Berührbüschels, so gehört er zu diesem Berührbüschel.

In [3] wurde der folgende Satz gezeigt[11]).

Satz 1. *Eine* (F)*-Ebene* Σ *gestattet höchstens eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI, OII*, OIII.

Als Korollar hierzu hat man[12])

Satz 1'. *Die Kreisverwandtschaften einer* (F)*-Ebene* Σ, *die eine Orthogonalitätsrelation gestattet, sind orthogonaltreu.*

Neben diesen beiden Sätzen benötigen wir im Vorliegenden noch den

Satz 2. *Es sei* Σ *eine Möbiusebene, die eine Orthogonalitätsrelation gestattet. Dann sind die Aussagen* OIV *und*

(*) Σ *ist* (F)*-Ebene*

äquivalent[13]).

Beweis: Sei Σ eine Möbiusebene, in der eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI, OII*, OIII, OIV vorhanden ist. Angenommen nun, es gäbe drei verschiedene Kreise a, b_1, b_2 eines Berührbüschels (Grundpunkt P) und einen weiteren Kreis k, der a, b_1, b_2 bzw. in A, B_1, B_2 berührte, obwohl A, B_1, B_2 nicht gemeinsam einer Fährte angehörten. Dann sind sicherlich die Punkte A, B_1, B_2, P paarweise verschieden und $A \notin (B_1 B_2)$[14]). Der durch $(P B_{i_0})$, $i_0 \in \{1, 2\}$, gehende[15]), zu a orthogonale Kreis d_{i_0} wäre dann auch zu b_{i_0} orthogonal[16]), da $d_{i_0} \perp a$ und $a \cap b_{i_0} = P \in d_{i_0}$. Genauso wäre $k \perp d_{i_0}$, da $d_{i_0} \perp b_{i_0}$ und $b_{i_0} \cap k = B_{i_0} \in d_{i_0}$. Aus $d_{i_0} \perp a$, k folgte dann nach OIV $A \in d_{i_0}$, was $d_1 = d_2 \equiv d$ nach OIII bedeutete. Damit wäre d der eindeutig bestimmte Kreis[17]) durch A, $(B_1 B_2)$; es wäre also $d = k$. Dann müßte aber $k = d \perp k$, d. h. $k \perp k$ sein; nach OII* wäre demnach k eine Fährte, was $A \in (B_1 B_2)$ ergäbe. Σ ist also (F)-Ebene.

Sei umgekehrt Σ eine (F)-Ebene, in der eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI, OII*, OIII vorhanden ist. Es seien a, b zwei sich in einem Punkt P berührende Kreise und es sei k ein Kreis mit $k \perp a, b$. Angenommen nun, es wäre $P \notin k$. Bezeichnen A einen Punkt der Fährte $a \cap k$ und B, B' zwei verschiedene Punkte der Fährte $b \cap k$, so berührt der Kreis d durch A, B, der a in A berührt, auch b in B: Es ist nämlich $d \perp k$; wäre also $d \cap b$ eine Fährte, so gingen durch sie zwei verschiedene zu k orthogonale Kreise, nämlich d, b, was Satz (7) in [3] widerspricht. Genauso berührt der durch A, B' gehende Kreis d', der a in A berührt, b in B'. Damit berührte b einzeln drei verschiedene Kreise (nämlich a, d, d') eines Berührbüschels, Grundpunkt A, und es wäre — da eine (F)-Ebene vorliegt — $P \in (B, B') \subset k$. Widerspruch zur Annahme $P \notin k$. Damit gilt in Σ OIV.

---

11) In [3] war dies Satz 2.

12) In [3] war dies Satz 3.

13) Vgl. betr. Satz 2 auch [6], S. 467, c) und S. 468, Axiom 2* c*).

14) Wie in [3] bezeichnen wir die Fährte durch die verschiedenen Punkte Q, Q' mit (Q, Q').

15) Vgl. [3], Satz (7).

16) Vgl. [3], Satz (8).

17) Vgl. [3], Satz (4a).

Es gilt weiter

Satz 3. *Es sei Σ eine Möbiusebene, die eine Orthogonalitätsrelation gestattet. Gilt dann in Σ zusätzlich die weitere Orthogonalitätseigenschaft*

OVI* *Sind P, Q, R drei beliebige verschiedene Punkte, dann gibt es durch R mindestens einen Kreis, der zu allen Kreisen durch P, Q orthogonal ist,*

so gilt in Σ (MI′).

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Fährte φ in Σ, die mindestens drei verschiedene Punkte P, Q, R enthielte. Dann sei w ein nach OVI* vorhandener Kreis durch R, der zu allen Kreisen durch P, Q orthogonal ist. Durch die Fährte φ gibt es mindestens zwei verschiedene Kreise a, b: Nach (MI) hat man durch P, Q, R mindestens einen Kreis. Nach (MIII) können nicht alle Punkte von Σ auf einem einzigen solchen Kreis a liegen; ist also $T \notin a$, so gibt es durch P, Q, T nach (MI) einen Kreis b. — Wegen $R \in \varphi$ ist $R \in a, b$. Nun gäbe es durch φ mindestens zwei verschiedene Kreise, nämlich a, b, die zu w orthogonal wären. Dies widerspricht Satz (7) in [3], da $\varphi \cap w \neq \emptyset$ ist.

Schließlich benötigen wir noch eine Feststellung von H. Terasaka[18]), die wir in Verbindung mit Satz 3 so abfassen können

Satz 3′. *Ist Σ eine Möbiusebene, in der eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI, OII*, OIII, OIV, OVI* *vorhanden ist, so gilt auch* OVI.

§ 2. Orthogonalitätsrelationen in Kreisebenen über quadratisch erweiterbaren Körpern

Im folgenden wenden wir uns einer speziellen Klasse von Kreisebenen zu. Es handelt sich genau um die Klasse der von van der Waerden, Smid in [15] axiomatisch begründeten Geometrien. In diesen Geometrien ist stets (MI′): *Durch drei verschiedene Punkte geht ein und nur ein Kreis* erfüllt.

Es sei $\mathfrak{K}_2$ eine kommutative quadratische Erweiterung des Körpers $\mathfrak{K}_1 = \{m, n, \ldots, r, s, \ldots\}$. Die Elemente von $\mathfrak{K}_2$ und ein weiteres ∞ bilden die Ausgangsmenge $\mathfrak{P}$ (vgl. § 1). Je vier verschiedenen Punkten A, B, C, D wird ein Doppelverhältnis zugeordnet:

(1) $\qquad \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \dfrac{A-C}{B-C}\,\dfrac{B-D}{A-D}$. Dabei sollen im Falle $\infty \in \{A, B, C, D\}$

die Differenzen, die nach (1) formal ∞ enthielten, durch 1 ersetzt werden, also z. B. geschrieben werden

$$\begin{bmatrix} \infty & B \\ D & C \end{bmatrix} = \frac{B-D}{B-C}.$$

Auch genau drei verschiedenen Punkten A, B, C, D wird ein Doppelverhältnis zugeordnet, und zwar sei genau dann

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \text{bzw. } 1, \infty, 0, \text{ wenn in der Matrix } \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$$

bzw. eine Zeile, Spalte, Diagonale gleiche Elemente enthält.

[18]) Vgl. Ewald [7].

Die Menge der Kreise über $\mathfrak{P}$ wird dann wie folgt erklärt: Unter dem Kreis $(A\,B\,C)$ durch die drei verschiedenen Punkte A, B, C werden alle Punkte X verstanden mit $\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1'$. $\mathfrak{K}_i'$ sei dabei $\mathfrak{K}_i \cup \{\infty\}$.

Diese Kreisebenen — wir bezeichnen sie abkürzend mit $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ — sind Möbiusebenen, in denen der volle Satz von MIQUEL (Axiom VI in [15]) gilt[19]).

Sind A, B, C verschiedene Punkte, ebenfalls A', B', C', so stellt $P \to P'$, wo $\begin{bmatrix} A & B \\ P & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ P' & C' \end{bmatrix}$ ist, eine doppelverhältnistreue Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf sich dar, die Kreise in Kreise überführt[20]). Die Gruppe der doppelverhältnistreuen Kreisverwandtschaften ist also dreifach transitiv über $\mathfrak{P}$. Mit Hilfe einer doppelverhältnistreuen Kreisverwandtschaft $P \to \infty$, $A \to 0$, $A' \to 1$ ergeben sich unmittelbar die Sätze 4, 4'.

Satz 4. *Es seien a, b verschiedene Kreise, und es sei P ein auf beiden Kreisen gelegener Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $a \cap b = P$

b) *Für je zwei verschiedene Punkte $A, A' \in a - \{P\}$[21]) und für je zwei verschiedene Punkte $B, B' \in b - \{P\}$ gilt*

$$\begin{bmatrix} P & A \\ B & A' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A \\ B' & A' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1$$

c) *Es gibt zwei verschiedene Punkte $A, A' \in a - \{P\}$ und zwei verschiedene Punkte $B, B' \in b - \{P\}$ mit $\begin{bmatrix} P & A \\ B & A' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A \\ B' & A' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1$.*

Satz 4'. *Ist $P \in a$, $Q \notin a$, so besteht der Berührkreis b durch P, Q an a neben P aus allen Punkten X mit $\begin{bmatrix} P & A \\ X & A' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A \\ Q & A' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1$, wo A, A' untereinander und von P verschiedene — hingegen sonst beliebige — Punkte auf a sind:*

$$b = \left\{ P; X \,\middle|\, \begin{bmatrix} P & A \\ X & A' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & A \\ Q & A' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \right\}^{22)}. \tag{2}$$

Damit kommen wir zu dem — bereits in der Einleitung angekündigten —

---

[19]) In [9] gibt HOFFMAN einen eleganten gruppentheoretischen Beweis des Miquelschen Satzes und auch des von Staudtschen Theorems. — Einen äußerst einfachen Beweis des Satzes von MIQUEL findet man bei PECZAR [12]. — Eine allgemeinere Klasse von Kreisebenen als die hier eingeführten begründet der Verfasser axiomatisch in seiner Dissertation [2]. Dort wird von Punktequadrupeln und einer Gleichheitsrelation zwischen diesen ausgegangen. Einfache Forderungen wie z. B. „Aus $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$ folgt $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$" gestatten die unmittelbare Einführung von Begriffen der Möbiusgeometrie und die Herleitung von Beziehungen zwischen diesen Begriffen. Insbesondere ergibt sich ein Winkelbegriff ohne Berührsatz.

[20]) Das kann z. B. leicht dem allgemeinen von Staudtschen Theorem entnommen werden.

[21]) Sind $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ Mengen, so bezeichnet $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ die Menge derjenigen Elemente aus $\mathfrak{M}$, die nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten sind. Es braucht dabei $\mathfrak{N}$ nicht notwendig Teilmenge von $\mathfrak{M}$ zu sein.

[22]) Die Menge aller x (einer vorgegebenen Grundmenge) mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ wird durch $\{x \mid \mathfrak{E}\}$ bezeichnet.

Satz 5. *Die Kreisebenen* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *sind genau dann* (F)*-Ebenen, wenn* $\mathfrak{K}_2$ *separable quadratische Erweiterung von* $\mathfrak{K}_1$ *ist.*

Beweis: Es sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$. Wir wollen annehmen, daß Σ drei verschiedene Kreise a', b', c' eines Berührbüschels (Grundpunkt G') besitzt, die von einem Kreis k' bzw. in den verschiedenen Punkten A', B', C' berührt werden. Wir überführen vermittels einer doppelverhältnistreuen Kreisverwandtschaft den Punkt G' nach $G \equiv \infty$, A' nach $A \equiv 0$, weiterhin einen von G', A' verschiedenen Punkt des Kreises a' nach 1. Die Bildkreise a, b, c der Kreise a', b', c' sind dann ebenfalls drei verschiedene Kreise eines Berührbüschels (Grundpunkt ∞), die von $(0\,B\,C)$ bzw. in 0, B, C berührt werden, wobei B, C die Bilder von B', C' bezeichnen und $\infty \notin (0\,B\,C)$ ist. Satz 4 entnimmt man

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B & \infty \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & \infty \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 ,$$

$$\begin{bmatrix} B & B+1 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B & B+1 \\ C & \infty \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 ,$$

$$\begin{bmatrix} C & C+1 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C & C+1 \\ B & \infty \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 ,$$

wenn man $B + 1 \in b$, $C + 1 \in c$ beachtet und $B + 1 \neq B, \infty$; $C + 1 \neq C, \infty$. Man hat damit

$$-\frac{1}{B} + \frac{1}{C} \in \mathfrak{K}_1 , \tag{3}$$

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{B-C} \in \mathfrak{K}_1 , \tag{4}$$

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{C-B} \in \mathfrak{K}_1 \tag{5}$$

und vermittels Addition: $\frac{2}{C} \in \mathfrak{K}_1$, was wegen $C \notin a$ Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) = 2$ bedeutet. (3) und (5) in der Form

$$\frac{B+C}{BC} \in \mathfrak{K}_1 , \qquad \frac{B}{C(B+C)} \in \mathfrak{K}_1$$

angeschrieben, ergeben bei Multiplikation: $C^2 \in \mathfrak{K}_1$. Damit muß also $\mathfrak{K}_2$ notwendig inseparable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ sein. In diesem Falle liegen aber wirklich keine (F)-Ebenen vor: Das beweist mit Hilfe von Satz 4 das Beispiel (Es sei $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$[23])

$$a = (A \equiv 0,\ 1,\ G \equiv \infty), \quad b = (B \equiv \vartheta\ ,\ B + 1,\ G)\ ,$$
$$c = \left(C \equiv \frac{n + n\vartheta}{1+n},\ \ C + 1,\ \ G\right), \quad k = (A\ B\ C)\ .$$

Definition (O). Σ *sei eine Kreisebene* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *mit Charakteristik* $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$. *Zwei sich in genau zwei verschiedenen Punkten* S, S' *schneidende Kreise* a, b *heißen orthogonal,* $a \perp b$, *wenn es Punkte* $A \in a - b$, $B \in b - a$ *gibt mit* $\begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix}^2 \in \mathfrak{K}_1$.

[23]) Diese Schreibweise bedeutet: $\mathfrak{K}_2$ entsteht durch Adjunktion einer Wurzel ϑ von $x^2 = n$ aus $\mathfrak{K}_1$. Es sei n dabei ein Nichtquadrat aus $\mathfrak{K}_1$.

Die Identität $\begin{bmatrix} S & S' \\ B^* & A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & S' \\ B^* & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S' \\ A & A^* \end{bmatrix}$ zeigt, daß aus $a \perp b$ und $A^* \in a - b$, $B^* \in b - a$ stets $\begin{bmatrix} S & S' \\ B^* & A^* \end{bmatrix}^2 \in \mathfrak{K}_1$ folgt. Vorgelegt sei jetzt eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ mit Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$. Wir schreiben $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$. Ist dann $a \perp b$ und $a \cap b = \{S, S'\}$, sind A, B Punkte mit $A \in a - b$, $B \in b - a$, so hat man $\begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix} = r + s\,\vartheta$, $\quad r, s \in \mathfrak{K}_1$, $\quad s \neq 0$ und hiermit $\begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix}^2 = (r^2 + s^2 n) + 2 r\, s\, \vartheta$, d. h. $r = 0$. Der Kreis b ist demnach durch $b = \left\{S; X \,\middle|\, \begin{bmatrix} S & S' \\ X & A \end{bmatrix} \in \vartheta\, \mathfrak{K}_1 \right\}$[24] bzw. ausnahmslos durch $b = \left\{X \,\middle|\, \begin{bmatrix} S & S' \\ X & A \end{bmatrix} \in \vartheta\, \mathfrak{K}_1' \right\}$ gegeben: Alle diese Punkte X gehören tatsächlich auf Grund von $\begin{bmatrix} S & S' \\ X & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & S' \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S' \\ X & A \end{bmatrix} = \frac{1}{s\,\vartheta}\, s_1 \vartheta \in \mathfrak{K}_1', 0 \neq s_1 \in \mathfrak{K}_1'$, zum Kreise $(S\,S'\,B)$. Weitere Punkte besitzt $(S\,S'\,B)$ nicht, wie $\begin{bmatrix} S & S' \\ X & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S' \\ X & B \end{bmatrix}$ zeigt.

Satz 6. *Die in $\Sigma = (\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, Charakteristik $(\mathfrak{K}_2) \neq 2$, angegebene Relation $\perp$ ist eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke* OI, OII, OIII, *also nach Satz* 1 *und Satz* 5 *die einzige in Σ mögliche.*

Beweis: Betreffs OI beachte man $\begin{bmatrix} S & S' \\ A & B \end{bmatrix} = 1 / \begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix}$ für vier verschiedene Punkte S, S', A, B. Die Eigenschaft OII ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Orthogonalität. OIII: Es sei k ein Kreis und es seien P, Q Punkte mit $P \in k$, $Q \neq P$. Im Falle $Q \in k$ gibt es genau einen Orthogonalkreis zu k durch P, Q, wie unmittelbar vor Satz 6 gezeigt wurde. Sei also $Q \notin k$. Zwei verschiedene Orthogonalkreise l_1, l_2 zu k durch P, Q gibt es nicht; denn man hätte sonst (sei $l_i \cap k = \{P, A_i\}$) $\begin{bmatrix} P & A_1 \\ Q & A_2 \end{bmatrix} = s_1 \vartheta$, $\quad 0 \neq s_1 \in \mathfrak{K}_1$, $\begin{bmatrix} P & A_2 \\ Q & A_1 \end{bmatrix} = s_2 \vartheta$, $0 \neq s_2 \in \mathfrak{K}_1$, was $1 = s_1 \vartheta + s_2 \vartheta$ bedeutete, also $s_1 + s_2 \neq 0$, also $\vartheta = 1/(s_1 + s_2) \in \mathfrak{K}_1$. — Daß es einen gesuchten Orthogonalkreis l gibt, zeigt eine doppelverhältnistreue Kreisverwandtschaft $P \to \infty$, $K_1 \to 0$, $K_2 \to 1$ (K_1, K_2 untereinander und von P verschiedene Punkte auf k): Geht nämlich Q in $Q' = u + v\,\vartheta$ über, $u, v \in \mathfrak{K}_1$, so hat man wegen $\begin{bmatrix} \infty & u \\ Q' & u+1 \end{bmatrix} = \eta\, \vartheta$ und $u + 1 \in (\infty\, 0\, 1) - (Q'\, \infty\, u)$, $Q' \in (Q'\, \infty\, u) - (\infty\, 0\, 1)$ die Aussage $(Q' \infty\, u) \perp (\infty\, 0\, 1)$. Damit ist also das Urbild l von $(Q' \infty\, u)$ ein zu k orthogonaler Kreis. Wegen $l \ni P, Q$ ist OIII ganz bewiesen.

Satz 7. *Es sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, bei der Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) = 2$ und $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = m\,\vartheta + n)$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$*[25]) *ist. Dann gestattet Σ keine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI, OII, OIII.

Beweis: Angenommen, Σ besäße doch eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke OI, OII, OIII. Dann sei l der Orthogonalkreis zu $(\infty\, 0\, 1)$ durch 0, ∞.

[24]) Ist $u \in \mathfrak{K}_1$, so wird unter $u\,\mathfrak{K}_1$ die Menge $\{x \mid x = uv,\ v \in \mathfrak{K}_1\}$ verstanden.

[25]) Es ist also $m \neq 0$.

Es sei $P = u + v\vartheta$ ein von $0, \infty$ verschiedener weiterer Punkt auf l[26]). Dann ist der Berührkreis b durch $\infty, 1$ an l nach Satz 4′ durch $b = \{X \mid X \in 1 + P\mathfrak{K}_1\}$ gegeben. b ist ebenfalls zu $(\infty\, 0\, 1)$ orthogonal[27]) und auch der Berührkreis b' durch $0, 1$ an l. Nach OIII müssen sich b und b' in 1 berühren. Das ist aber nicht der Fall, denn es ist $b' = \left\{Y \,\middle|\, \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ Y & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ 1 & P \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1'\right\}$, d. h. $b' = \left\{Y \,\middle|\, Y \in \dfrac{P}{\mathfrak{K}_1' + P}\right\}$ und hiermit $1 \in b \cap b'$, $1 \neq \dfrac{P}{vm + P} \in b \cap b'$.

Schließlich hat man noch

Satz 8. *Es sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, wobei $\mathfrak{K}_2$ inseparable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist*[28]). *Dann gestattet Σ mindestens $|\mathfrak{K}_1| \geqq \aleph_0$ viele verschiedene Orthogonalitätsrelationen in der Stärke* OI, OII, OIII.

Beweis: Es sei t ein von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{K}_1$. Dann werde $\perp\, = \,\perp(t)$ definiert. Sind a, b zwei sich in genau zwei verschiedenen Punkten S, S' schneidende Kreise und gibt es Punkte A, B mit $A \in a - b$, $B \in b - a$ und $\begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1(1 + t\vartheta)$, so werde $a \perp b$ gesetzt. Analog zum Beweis von Satz 6 sieht man, daß eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke OI—OIII vorliegt. Ist $t_1 \neq t_2$ und $t_1 t_2 \neq 0$, so vermitteln t_1, t_2 verschiedene Orthogonalitätsrelationen $\perp(t_i)$. Im anderen Falle müßte nämlich wegen $(\infty\, 0\, 1) \perp(t_1) (\infty, 0, 1 + t_1\vartheta)$ auch $(\infty\, 0\, 1) \perp (t_2) (\infty, 0, 1 + t_1\vartheta)$ sein, was $\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 1 + t_1\vartheta & 1 \end{bmatrix} = r(1 + t_2\vartheta)$, $r \in \mathfrak{K}_1$, und also doch $t_1 = t_2$ ergäbe[29]). Bedenkt man jetzt noch, daß $|\mathfrak{K}_1| \geqq \aleph_0$ gilt, da $\mathfrak{K}_2$ inseparable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist, so ist man fertig.

§ 3. Halbordnung, Anordnung, Orthogonalität

Satz 9. *Die Kreisebenen $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in denen eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI—OIV *(s. Einleitung) vorhanden ist, liegen genau dann vor, wenn Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$ ist. Die dabei einzig mögliche Orthogonalitätsrelation kann nach Definition* (O) *eingeführt werden.*

Beweis: Gibt es nämlich in $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI—OIV, so liegt nach Satz 2 eine (F)-Ebene vor. Mit Hilfe von Satz 5 ist also $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Nach Satz 7 ist Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$. — Ist $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ umgekehrt eine Kreisebene mit Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, so ist $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Nach Satz 5 ist $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ also (F)-Ebene. Mit Hilfe der Sätze 6, 2 ist dann alles bewiesen.

---

[26]) Es ist also $v \neq 0$.

[27]) Vgl. [3], Satz (8).

[28]) Es ist dann Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) = 2$ und $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$, n ein Nichtquadrat aus $\mathfrak{K}_1$.

[29]) Man kann über $\begin{bmatrix} S & S' \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1\vartheta$ noch eine weitere Orthogonalitätsrelation einführen, die von allen anderen genannten verschieden ist. — Übrigens hat man in diesen Orthogonalitätsrelationen dann alle von 0 verschiedenen Winkel (vgl. [2]) der Kreisgeometrie $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ vor sich. Sie können mitsamt der 0 zu einer Gruppe $\mathfrak{O}$ zusammengefaßt werden, die isomorph ist zur Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{K}_2$ nach der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{K}_1$.

Satz 10. *Dann und nur dann gilt in der Kreisebene* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *mit Charakteristik* $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$ *und* $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$ *die weitere Orthogonalitätseigenschaft* OV, *wenn aus* $x \in \mathfrak{K}_1$ *und* $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$ *stets* $x \in \mathfrak{K}_1^2$ *folgt*[30]).

Beweis: Sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$, in der zusätzlich OV gilt. Dann sei $x \in \mathfrak{K}_1$ und $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$. Wir wollen $x \in \mathfrak{K}_1^2$ zeigen. O.B.d.A. kann $x \neq 1$ vorausgesetzt werden. Dann ist der zu $(\infty\ 0\ \vartheta)$ durch ϑ, $x\vartheta$ gehende orthogonale Kreis a fremd zu $b \equiv (\infty\ 0\ 1)$: Wegen $\infty \notin a$ hätte man sonst $\begin{bmatrix} \vartheta & x\vartheta \\ r & \infty \end{bmatrix} \in \vartheta\, \mathfrak{K}_1$, $r \in \mathfrak{K}_1$, was $xn = r^2 \in \mathfrak{K}_1^2$ ergäbe. Der Kreis $c \equiv (\infty\ 0\ \vartheta)$ ist ebenfalls zu b orthogonal. Wegen $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$ ist $xn \neq 1$. Der durch 1, xn gehende, zu b orthogonale Kreis d — er lautet

$$\left\{1;\, Y \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 & xn \\ Y & \infty \end{bmatrix} \in \vartheta\, \mathfrak{K}_1 \right\} \text{ bzw. } \left\{1;\ Y(r) \,\middle|\, Y(r) = \frac{r\vartheta - xn}{r\vartheta - 1},\ r \in \mathfrak{K}_1 \right\}$$

— ist ebenfalls zu a orthogonal: Dies folgt aus

$$a \cap d = \Big\{ Y(-x)\,,\ \ Y(-1) \Big\},\ \ Y(-x) \neq Y(-1) \ \text{ und } \begin{bmatrix} Y(-x) & Y(-1) \\ \vartheta & 1 \end{bmatrix} = \vartheta\,.$$

Nach OV müssen sich also c, d schneiden. Nennen wir einen solchen Schnittpunkt $s\vartheta$, $s \in \mathfrak{K}_1$, so ist also $\begin{bmatrix} 1 & xn \\ s\vartheta & \infty \end{bmatrix} \in \vartheta\, \mathfrak{K}_1$, d. h. $x = s^2 \in \mathfrak{K}_1^2$, was zu zeigen war. — Sei umgekehrt Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$, in der aus $x \in \mathfrak{K}_1$ und $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$ stets $x \in \mathfrak{K}_1^2$ folgt. Dann gilt OV: Es seien c, d zwei verschiedene Kreise, die beide zu den fremden Kreisen a, b orthogonal sind. Die auftretenden acht Schnittpunkte bezeichnen wir mit $S_1(a, c)$, $S_2(a, c)$, $S_1(a, d)$, ... usw. Wir können annehmen, daß sie paarweise verschieden sind, da sonst nichts mehr zu beweisen ist[31]). Wir überführen vermittels einer Kreisverwandtschaft $X \to X'$, $k \to k'$ den Punkt $S_1(b, c)$ nach ∞, $S_2(b, c)$ nach 0 und $S_1(a, c)$ nach ϑ. Es geht also c in $(\infty\ 0\ \vartheta)$ über; b geht in $(\infty\ 0\ 1)$ über, da einmal $b' \ni \infty, 0$ und zum anderen $b' \perp c'$ (vgl. Satz 1') ist. Wir führen noch die Bezeichnungen ein: $M = S_2'(a, c)$, $P = S_1'(b, d)$, $Q = S_2'(b, d)$, $U_1 = S_1'(a, d)$, $U_2 = S_2'(a, d)$. Der gemachten Bemerkung zufolge setzen wir also ∞, 0, ϑ, M, P, Q, U_1, U_2 als paarweise verschieden voraus. Schreiben wir $M = r\vartheta$ — es ist also $r \neq 0, 1$ —, so ist $rn \notin \mathfrak{K}_1^2$. Gäbe es nämlich ein $s \in \mathfrak{K}_1$ mit $rn = s^2$, so würden sich a, b in s schneiden wegen $\begin{bmatrix} \vartheta & r\vartheta \\ s & \infty \end{bmatrix} = -\frac{s}{n}\vartheta \in \mathfrak{K}_1\vartheta$. Es ist also $r \in \mathfrak{K}_1$, $rn \notin \mathfrak{K}_1^2$ und damit nach Voraussetzung $r \in \mathfrak{K}_1^2$. Nehmen wir für einen Augenblick an, wir hätten schon $rn = PQ$ bewiesen, so sind wir fertig. Denn dann schneiden sich c, d in $\pm\sqrt{r}\,\vartheta$ wegen

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ \pm\sqrt{r}\,\vartheta & \infty \end{bmatrix} = \frac{\mp\sqrt{r}}{P}\vartheta \in \mathfrak{K}_1\vartheta\,.$$

Zum Beweise von $rn = PQ$: Wegen $U_1, U_2 \in a$ und $|\{\infty, 0, U_1, U_2, \vartheta, M, P, Q\}| = 8$

---

[30]) $\mathfrak{K}_1^2$ bezeichne die Menge aller Quadrate der Elemente von $\mathfrak{K}_1$.

[31]) Zum Teil sind natürlich Punkte notwendig voneinander verschieden wie etwa $S_1(b, c)$, $S_2(b, c)$, da ja $b \perp c$ ist.

ist für $i = 1, 2$

$$\begin{bmatrix} r\vartheta & \vartheta \\ U_i & \infty \end{bmatrix} = x_i \vartheta, \quad \underset{x_1 \neq x_2}{0 \neq x_i \in \mathfrak{K}_1}; \quad \begin{bmatrix} P & Q \\ U_i & \infty \end{bmatrix} = y_i \vartheta, \quad \underset{y_1 \neq y_2}{0 \neq y_i \in \mathfrak{K}_1},$$

d. h.

$$\frac{\vartheta - x_i r n}{1 - x_i \vartheta} = U_i = \frac{Q - y_i P \vartheta}{1 - y_i \vartheta}.$$

Damit kommt man auf

$$\begin{aligned} 1 + x_i y_i r n &= -Q x_i - y_i P \\ -y_i n - x_i r n &= Q + x_i y_i P n \end{aligned}$$

für $i = 1, 2$; aus der hieraus folgenden Gleichung

$$(P^2 - rn)\, y_i^2 + (1 + r)(P - Q) y_i + \left(r - \frac{Q^2}{n}\right) = 0$$

(wegen $rn \notin \mathfrak{K}_1^2$ ist $P^2 - rn \neq 0$) nimmt man:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -\frac{(1+r)(P-Q)}{P^2 - rn}, \\ y_1 y_2 &= -\frac{1}{n}\, \frac{Q^2 - rn}{P^2 - rn}. \end{aligned}$$

Aus $a \perp d$ folgt $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ P & \vartheta \end{bmatrix} = t\vartheta$, $0 \neq t \in \mathfrak{K}_1$. Setzt man U_i, $i = 1, 2$, in der Form $\frac{Q - y_i P \vartheta}{1 - y_i \vartheta}$ ein, so folgt

$$t\vartheta = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ P & \vartheta \end{bmatrix} = \frac{(Q + y_1 n) - (1 + y_1 P)\vartheta}{(Q + y_2 n) - (1 + y_2 P)\vartheta},$$

was

$$(P^2 - n)\, y_1 y_2 n + (P - Q)\, n\, (y_1 + y_2) = Q^2 - n$$

zur Folge hat. Einsetzen von $y_1 + y_2$, $y_1 y_2$ liefert die Behauptung $rn = PQ$, wenn man $n \neq PQ$ beachtet. (Im Falle $n = PQ$ wäre $\vartheta \in d$ wegen $\begin{bmatrix} P & Q \\ \vartheta & \infty \end{bmatrix} = -\frac{1}{P}\vartheta \in \mathfrak{K}_1\vartheta$, d. h. es wäre $\vartheta \in d \cap a = \{U_1, U_2\}$, wo aber doch die Punkte ∞, 0, U_1, U_2, ϑ, M, P, Q paarweise verschieden sind.)

Satz 11. *Dann und nur dann gibt es in der Kreisebene* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI—OV, *wenn* $\mathfrak{K}_1$ *eine nichttriviale Halbordnung* (Sperner [13], S. 7) *gestattet dergestalt, daß jedes nichtnegative Element Quadrat ist.*

Beweis: Sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in der eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI—OV vorhanden ist. Dann folgt aus Satz 9: Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$ und aus Satz 10 — wenn wir $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$ schreiben: Ist $x \in \mathfrak{K}_1$ und ist $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$, so gilt $x \in \mathfrak{K}_1^2$. Wir nennen die von Null verschiedenen Quadrate aus $\mathfrak{K}_1$ positiv, die Nichtquadrate negativ. Ist u Nichtquadrat, so ist $\frac{u}{n} \in \mathfrak{K}_1^2$ wegen $\frac{u}{n} \in \mathfrak{K}_1$, $\frac{u}{n}\, n \notin \mathfrak{K}_1^2$. Jedes Nichtquadrat u läßt sich also in der Form $n\, u'$, $u' = \frac{u}{n}$ schreiben, wo u' Quadrat ist. Daraus folgt: Das Produkt $u\, v$ irgend zweier nichtverschwindender Körperelemente ist dann und nur dann positiv, wenn die Faktoren u, v entweder beide positiv oder beide negativ sind. Da n negativ ist, ist die genannte Halbordnung nichttrivial. — Sei umgekehrt Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in der $\mathfrak{K}_1$ eine nichttriviale Halbordnung besitzt, dergestalt, daß jedes nichtnegative Element Quadrat ist. Es ist dann Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$. Im anderen Falle bildeten nämlich die positiven Elemente von $\mathfrak{K}_1$ mit der Null zusammengenommen bereits einen Körper, da mit $u = s^2$, $v = t^2$ auch $u - v = (s + t)^2$ wäre. Da aber die Halbordnung von $\mathfrak{K}_1$ nach Voraussetzung nichttrivial ist, d. h. da $\mathfrak{K}_1$ negative Elemente besitzt, hat man in folgender Weise einen Widerspruch: Sei $u \in \mathfrak{K}_1$ negativ. Dann ist $1 + u \neq 0$. Ferner kann $1 + u$ nicht positiv sein, da sonst $u = 1 + (1 + u)$ positiv wäre. $1 + u$ kann aber auch nicht negativ sein, da sonst $u = u(1 + u) + u^2$ positiv wäre. — Wir schreiben damit wieder $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$. Ist dann $x \in \mathfrak{K}_1$, $xn \notin \mathfrak{K}_1^2$, so muß x Quadrat sein; denn sonst wäre xn Quadrat, da n Nichtquadrat, also negativ ist.

Wir wenden uns jetzt den — bereits früher zitierten — Orthogonalitätseigenschaften OVI*, OVI zu.

Zunächst der leicht zu beweisende

Satz 12. *Σ sei eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ mit Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$. Ist dann P ein Punkt auf einem Kreis k, Q ein von P verschiedener Punkt, sind weiterhin A, B zwei untereinander und von P, Q verschiedene Punkte auf k, so ist $\left\{P; X \,\middle|\, \begin{bmatrix} P & Q \\ X & A \end{bmatrix} \in \vartheta \begin{bmatrix} P & A \\ B & Q \end{bmatrix} \mathfrak{K}_1 \right\}$ der durch P, Q gehende, zu k orthogonale Kreis.*

Damit beweisen wir

Satz 13. *Es sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *In Σ gilt zusätzlich die Orthogonalitätseigenschaft* OVI*,

b) *In Σ gilt zusätzlich die Orthogonalitätseigenschaft* OVI,

c) *Zu jedem Element $P \in \mathfrak{K}_2$ ist die Norm $P\overline{P}$ — sie liegt sicherlich in $\mathfrak{K}_1$ — Quadrat in $\mathfrak{K}_1$*[32]).

Beweis: Es sei Σ eine angegebene Kreisebene, in der zusätzlich die Orthogonalitätseigenschaft OVI* gilt. Offenbar brauchen wir nur nachzuweisen, daß aus $P \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ folgt $P\overline{P} \in \mathfrak{K}_1^2$. In diesem Falle ist also $P \neq \overline{P}$. Sei k ein durch P gehender Kreis, der zu allen Kreisen durch $0, \infty$ orthogonal ist. Es ist dann $k \not\ni 0, \infty$ nach OIII. Schneidet k den Kreis $(\infty\, 0\, 1)$ in Q_1, Q_2, so entnimmt man der Gleichung $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ P & \infty \end{bmatrix} = t\vartheta$, $t \in \mathfrak{K}_1$, die weitere Gleichung $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ \overline{P} & \infty \end{bmatrix} = -t\vartheta$; damit ist $\overline{P} \in k$. Aus Satz 12 und $(0\, P\, \infty) \perp k$ folgt $\begin{bmatrix} P & \overline{P} \\ Q_1 & \infty \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} P & \infty \\ O & \overline{P} \end{bmatrix} \vartheta$, $r \in \mathfrak{K}_1$, und hieraus $\begin{bmatrix} \overline{P} & P \\ Q_1 & \infty \end{bmatrix} = -r \begin{bmatrix} \overline{P} & \infty \\ O & P \end{bmatrix} \vartheta$, was multipliziert $1 = r^2 \vartheta^2 \frac{(P - \overline{P})^2}{P\overline{P}}$, d. h. $P\overline{P} = (2\, r\, n\, v)^2 \in \mathfrak{K}_1^2$ ergibt, wenn $P = u + v\vartheta$ gesetzt wird. — Sei umgekehrt Σ eine angegebene Kreisebene, in der zu jedem Element $P \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ die Norm $P\overline{P}$ in $\mathfrak{K}_1^2$ liegt. Gemäß der drei-

[32]) Unter $P \to \overline{P}$ ist dabei der involutorische Automorphismus $P = x + y\vartheta \to \overline{P} = x - y\vartheta$, $x, y \in \mathfrak{K}_1$, zu verstehen, dessen Fixkörper also genau $\mathfrak{K}_1$ ist.

fachen Transitivität der Gruppe der Kreisverwandtschaften ist O VI* bewiesen, wenn wir zeigen, daß durch ϑ ein Kreis geht, der zu allen Kreisen durch $0, \infty$ orthogonal ist. Dies tut der Orthogonalkreis k zu $(\infty\, 0\, \vartheta)$ durch $\vartheta, -\vartheta$. k schneidet nämlich den Kreis $(\infty\, 0\, G)$, $0, \infty \neq G = s + t\vartheta$, $s, t \in \mathfrak{K}_1$, in $G_1 = \alpha G$ und $G_2 = -G_1$, wobei $\alpha^2 = \frac{\vartheta\,\overline{\vartheta}}{G\,\overline{G}}$ gesetzt ist; wegen $k \perp (\infty\, 0\, \vartheta)$ und $\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \vartheta & \infty \end{bmatrix} = \frac{\alpha s}{n\,(1 - \alpha t)}\,\vartheta$ für $s \neq 0$ ist außerdem k orthogonal zu allen Kreisen durch $0, \infty$. Man beachte dabei $1 - \alpha\, t \neq 0$: Im Falle $1 - \alpha\, t = 0$ hätte man, da $-n = \vartheta\,\overline{\vartheta} = \alpha^2 G\,\overline{G} = \alpha^2 s^2 - \alpha^2 t^2 n$ ist, $\alpha\, s = 0$; es war aber $s \neq 0$ vorausgesetzt, und außerdem ist $\alpha \neq 0$. — Mit Satz 3′ ist dann der Satz 13 vollends bewiesen.

Wir wollen einige Beispiele von Kreisebenen $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ angeben, in denen genau eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften O I—O V vorhanden ist, in der aber nicht zusätzlich O VI gilt. Dazu sei $\mathfrak{K}_1$ irgendein Galoisfeld $GF(p^n)$ mit von 2 verschiedener Charakteristik und $\mathfrak{K}_2$ die quadratische Erweiterung $GF(p^{2n})$ von $\mathfrak{K}_1$. Gemäß Satz 11 ist dann eine Orthogonalitätsrelation in der Stärke O I—O V vorhanden. O VI gilt nicht nach dem folgenden Satz 14, da $\mathfrak{K}_1$ keine Anordnung gestattet.

Es gibt auch Kreisebenen $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in denen die Eigenschaften O I—O IV, O VI realisierbar sind, hingegen nicht zusätzlich O V: Ist $\mathfrak{K}_1$ der Hilbertsche Zahlkörper Ω, ist $\vartheta^2 = n = -1$, so hat man wegen $\sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 1} \in \Omega$ — es sei $P = u + v\,\vartheta$ mit $u, v \in \Omega$ und $v \neq 0$ — sicherlich $P\,\overline{P} \in \Omega^2$. Damit gilt O VI nach Satz 13. — Für das Folgende beachte man $\sqrt{2\left|\sqrt{2}\right| - 2} \notin \Omega$ (vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 6. Aufl., S. 104). Dann ist für $x = 2\left|\sqrt{2}\right| - 2 \in \Omega$, $xn = \left(2\left|\sqrt{2}\right| - 2\right)(-1) \notin \Omega^2$ (Ω enthält nur reelle Zahlen), hingegen nicht $x = 2\left|\sqrt{2}\right| - 2 \in \Omega^2$. Damit gilt nicht allgemein O V (vgl. Satz 10).

Im folgenden Satz stellen wir die Eigenschaften O V, O VI nebeneinander.

Satz 14. *Dann und nur dann gibt es in der Kreisebene* $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ *eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* O I—O VI, *wenn* $\mathfrak{K}_1$ *eine Anordnung besitzt dergestalt, daß jedes nichtnegative Element Quadrat ist*[33]).

Beweis: Sei Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1\ \mathfrak{K}_2)$, in der O I—O VI erfüllt ist. Nach Satz 9 ist Charakteristik $(\mathfrak{K}_1) \neq 2$ und wir können somit $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$ schreiben. Wir nennen wieder $t \in \mathfrak{K}_1$ positiv bzw. negativ, wenn $0 \neq t \in \mathfrak{K}_1^2$ bzw. wenn $t \notin \mathfrak{K}_1^2$ ist. Dann brauchen wir auf Grund von Satz 11 nur noch zu zeigen, daß mit $u, v \neq 0$ und $u, v \in \mathfrak{K}_1^2$ auch $0 \neq u + v \in \mathfrak{K}_1^2$ ist. Nach Satz 13 ist $\vartheta\,\overline{\vartheta} \in \mathfrak{K}_1^2$. Es bezeichne α ein Element von $\mathfrak{K}_1$ mit $\alpha^2 = \vartheta\,\overline{\vartheta}$. Ist $u = u'^2$, $0 \neq u' \in \mathfrak{K}_1$, $v = v'^2$, $0 \neq v' \in \mathfrak{K}_1$, so ist mit Satz 13:

$$0 \neq \left(u' + \frac{v'}{\alpha}\,\vartheta\right)\left(u' + \frac{v'}{\alpha}\,\overline{\vartheta}\right) = u'^2 + v'^2 \in \mathfrak{K}_1^2 .$$

Sei umgekehrt Σ eine Kreisebene $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, in der $\mathfrak{K}_1$ eine Anordnung besitzt dergestalt, daß jedes nichtnegative Element Quadrat ist. Nach Satz 11 hat

[33]) Speziell solche Körper hat wohl Veblen [14] zum ersten Male untersucht. Näheres über diese Körper findet man in [4].

man in Σ eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI—OV. Schreiben wir nun $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\vartheta \mid \vartheta^2 = n)$, so ist $-n$ positiv, da n Nichtquadrat, also negativ ist. Damit folgt aus $0 \neq P = u + v\vartheta \in \mathfrak{K}_2$, $u, v \in \mathfrak{K}_1$, daß $P\overline{P} = u^2 + (-n)\,v^2$ positiv, d. h., daß $P\overline{P}$ Quadrat in $\mathfrak{K}_1$ ist. Satz 13 zeigt dann die Gültigkeit von OVI.

§ 4. Die ebenen Schnitte einer konvexen Quadrik

Gegeben sei ein dreidimensionaler projektiver Raum $\mathfrak{R}_3$ über einem Körper $\mathfrak{K}$[34]), in dem eine Polarität π (vgl. etwa LENZ [10], § 8) vorhanden sein soll mit den zusätzlichen Eigenschaften:

Q (1) *Es gibt mindestens zwei verschiedene selbstkonjugierte Punkte, d. h. Punkte, die mit ihrer Polaren inzidieren.*

Q (2) *(Konvexitätseigenschaft). Eine beliebige Gerade enthält höchstens zwei verschiedene selbstkonjugierte Punkte*[35]).

Nach Q (2) ist π sicherlich kein Nullsystem. Die Punkte, die mit ihrer Polaren inzidieren, bilden die Ausgangsquadrik $\mathfrak{Q}$. Stellt man die Punkte P von $\mathfrak{R}_3$ als eingliedrige Moduln im vierdimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}_4(\mathfrak{K})$ über $\mathfrak{K}$ dar, und bezeichnet man jeweils mit $P_0 = (p_1\, p_2\, p_3\, p_4) \in \mathfrak{V}_4(\mathfrak{K})$ ein — als Matrix geschriebenes — Element $\neq 0$ des Moduls P (es ist somit $P = \mathfrak{K}\, P_0 = \{k P_0 \mid k \in \mathfrak{K}\}$), so können[36]) die Punkte $X = \mathfrak{K}\, X_0$ von $\mathfrak{Q}$ über die Lösungen einer festen Gleichung $X_0\, \mathfrak{A}\, X_0' = 0$ gewonnen werden; $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ist dabei eine nichtsinguläre symmetrische Matrix vom Grad 4[37]).

Die Punkte $X = \mathfrak{K}\, X_0$ der Polaren p des Punktes $P = \mathfrak{K}\, P_0$ lassen sich über die Lösungen einer festen Gleichung $P_0 \mathfrak{A}\, X_0' = 0$ gewinnen.

Es sei jetzt R ein fester Punkt auf $\mathfrak{Q}$ und u eine R nicht enthaltende Ebene. Wir ordnen dann nach dem Vorbild der stereographischen Projektion jedem von R verschiedenen Punkt $S \in \mathfrak{Q}$ den Punkt $T = u \cap (R + S)$ zu, wobei $R + S$ die Verbindungsgerade der Punkte R und S bezeichnet. Nennt man noch γ die Schnittgerade der Ebene u mit der Polaren r von R, so ist $S \to T(S)$ eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathfrak{Q} - \{R\}$ auf die Menge der Punkte von $u - \gamma$: 1) Es ist $T(S) \notin \gamma$, da sonst $(R + S) = (R + T) \subset r$ wäre, was Hilfssatz 5 in [3] widerspricht. 2) Aus $S', S'' \in \mathfrak{Q} - \{R\}$, $S' \neq S''$, folgt $T' \neq T''$, da sonst auf der Geraden $R + T$ mit $T \equiv T' = T''$ drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{Q}$ lägen, nämlich R, S', S'', was $Q(2)$ widerspricht.

---

[34]) Speziell darf $\mathfrak{K}$ auch inkommutativ sein. Allerdings wird dies später, da wir die Existenz konvexer Quadriken ($Q(1)$, $Q(2)$) fordern, ausgeschlossen.

[35]) Mit Hilfe von $Q(1)$, $Q(2)$ folgt die Kommutativität von $\mathfrak{K}$; über die Charakteristik von $\mathfrak{K}$ braucht dabei nichts vorausgesetzt zu werden. (Vgl. LENZ [11], S. 385, 1. Teil des dort angegebenen Satzes.) Aus Hilfssatz 2 (LENZ [11], S. 386) und $Q(1)$, $Q(2)$ folgt nun aber Charakteristik $(\mathfrak{K}) \neq 2$, da die dort angegebene Gleichung (1) $\xi + \overline{\xi} = 0$ im Falle Charakteristik $(\mathfrak{K}) = 2$ mindestens die Lösungen $\xi = 0$, $\xi = 1$ besitzt, also jede Gerade, die mindestens zwei selbstkonjugierte Punkte enthält, sogar mindestens drei selbstkonjugierte Punkte enthalten müßte, was $Q(1)$, $Q(2)$ widerspricht.

[36]) Vgl. BAER [1], Proposition 3, S. 135.

[37]) Ist $\mathfrak{M}$ eine Matrix, so wird mit $\mathfrak{M}'$ die zu $\mathfrak{M}$ transponierte Matrix bezeichnet.

3) Jeder Punkt $T \in u - \gamma$ hat ein Urbild S; nach Hilfssatz 1 in [3] schneidet nämlich die Gerade $R + T$ die Quadrik $\mathfrak{Q}$ in einem von R verschiedenen Punkt S.

Es sei $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{K})$ die affine Ebene über $\mathfrak{K}$ und $p\,\xi^2 + r\,\xi + q$, $p \neq 0$, ein irreduzibles Polynom im Polynomring $\mathfrak{K}[\xi]$[38]. Dann heißt die Gesamtheit aller Geraden der Ebene $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{K})$ neben der aller Punktmengen $K(a, b, c)$: $p\,x^2 + r\,x\,y + q\,y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$, die aus mindestens drei verschiedenen Punkten bestehen, ein Kreissystem über $\mathfrak{K}$. Die Geraden und Punktmengen $K(a, b, c)$ selbst heißen Kreise[39][40].

Vermöge stereographischer Projektion entsprechen die ebenen Schnitte[41] von $\mathfrak{Q}$ genau den Geraden bzw. Kreisen eines gewissen Kreissystems über $\mathfrak{K}$: Zum Beweise kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ in der speziellen Form $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{44} = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{34} = \frac{1}{2}$ annehmen[42]. $\mathfrak{Q}$ kann also in der Form

$$x_1^2 - n\,x_2^2 + x_3 x_4 = 0\,,$$

wo $-n = a_{22}$ gesetzt wurde, angeschrieben werden. $\xi^2 - n \in \mathfrak{K}[\xi]$ ist irreduzibel, da sonst $\mathfrak{Q}$ die Schnittgerade der Ebenen $x_3 = 0$, $x_1 = \alpha\,x_2$ enthalten müßte, wo α eine Lösung der Gleichung $\xi^2 - n = 0$ darstellt. Der Punkt R, von dem aus projiziert werden soll, sei $R = \mathfrak{K}\,(0\;0\;1\;0)$; die Ebene u, auf die projiziert werden soll, sei $u = \mathfrak{K}\,(0\;0\;1\;0)$. In der Ebene u ordnen wir dem Punkt $\mathfrak{K}(x_1 x_2 0\; x_4)$ die affinen Koordinaten $x = x_1/x_4$, $y = x_2/x_4$ zu, da die Schnittgerade der Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ — sie fällt ja mit γ zusammen — außer Betracht bleiben kann. Die Menge der ebenen Schnitte durch R geht dann genau in die Menge der Geraden von $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{K})$ über. Die Menge der ebenen Schnitte, die R nicht enthalten, geht genau in die Menge der Kreise $K(a,b,c)$ des Kreissystems

$$x^2 - n\,y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

---

[38]) Die Eigenschaften $Q(1)$, $Q(2)$ verbürgen die Existenz solcher irreduzibler Polynome, wie auch später noch zu sehen ist.

[39]) Vgl. VAN DER WAERDEN, SMID [15].

[40]) Man zeigt leicht, daß durch drei verschiedene $\mathfrak{R}^2$-Punkte ein und nur ein Kreis geht.

[41]) Eine Ebene heißt *ebener Schnitt* von $\mathfrak{Q}$, wenn sie mit $\mathfrak{Q}$ mindestens zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat. Nach Hilfssatz 2 in [3] hat sie dann sogar ein nicht kollineares Punktetripel mit $\mathfrak{Q}$ gemeinsam.

[42]) Dies läßt sich leicht so einsehen: Ist nicht von vornherein $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{44} = 0$, so transformiere man X in $\hat{X} = X\,\mathfrak{B}^{-1}$, wobei $\mathfrak{B}' = (b_{1\varrho}\, b_{2\varrho}\, b_{3\varrho}\, b_{4\varrho})$ in folgender Weise konstruiert ist: $b_{3\varrho}$ und $b_{4\varrho}$ seien die Koordinaten von zwei verschiedenen Punkten auf $\mathfrak{Q}$. Ferner seien $b_{1\varrho}$, $b_{2\varrho}$ verschiedene Punkte auf der Schnittgeraden der Polaren von $b_{3\varrho}$ und $b_{4\varrho}$, wobei $b_{2\varrho}$ außerdem noch in der Polaren von $b_{1\varrho}$ liegen soll. Letzteres geht gewiß, wenn man beachtet, daß die Polare eines Quadrikpunktes P neben P keinen weiteren Quadrikpunkt enthält (vgl. Hilfssatz 5 in [3]). Aus dieser Bemerkung folgt auch, daß die vier Punkte $b_{1\varrho}$, $b_{2\varrho}$, $b_{3\varrho}$, $b_{4\varrho}$ nicht in einer Ebene liegen, d. h., daß $\mathfrak{B}$ nichtsingulär ist. $\mathfrak{A}$ geht damit über in $\hat{\mathfrak{A}} = (\hat{a}_{ik})$ mit $\hat{a}_{ik} = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{4} b_{i\varrho}\, a_{\varrho\sigma}\, b_{k\sigma}$; es ist also $\hat{a}_{12} = \hat{a}_{13} = \hat{a}_{14} = \hat{a}_{23} = \hat{a}_{24} = \hat{a}_{33} = \hat{a}_{44} = 0$ und $\hat{a}_{11}$, $\hat{a}_{22}$, $\hat{a}_{34} \neq 0$. Das Übrige ist nun trivial.

über, und zwar geht die $\mathfrak{Q}$ in mindestens zwei verschiedenen Punkten schneidende Ebene $v = \mathfrak{K}(v_1 v_2 v_3 v_4)$, die R nicht enthält, genau in den Kreis $K(a,b,c)$ mit $a = -v_1/v_3$, $b = -v_2/v_3$, $c = -v_4/v_3$ über; dies folgt sofort aus

$$x_1^2 - n x_2^2 + x_3 x_4 = 0$$
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0\,,$$

d. h. aus

$$x^2 - n y^2 + \frac{x_3}{x_4} = 0$$
$$\frac{x_3}{x_4} = -\frac{v_1}{v_3}\,x - \frac{v_2}{v_3}\,y - \frac{v_4}{v_3}\,.$$

Zu den Punkten der affinen Ebene u werde jetzt noch ein von den übrigen Punkten verschiedener Punkt W adjungiert; er soll auf allen Geraden liegen, aber auf keinem Kreis $K(a,b,c)$. Ferner bilden wir den Körper $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}(\vartheta\,|\,\vartheta^2 = n)$. Bezeichnet $z \to \bar{z}$ den involutorischen Automorphismus $z = x + y\vartheta \to \bar{z} = x - y\vartheta$, $x, y \in \mathfrak{K}$, von $\mathfrak{K}_2$ auf sich, so hat man folgende bekannte Darstellung des Kreissystems

$$\varrho(x^2 - n y^2) + a x + b y + c = 0$$

($\varrho = 0$ führt auf die Geraden des Kreissystems):

$$\text{(K)} \qquad \varrho z \bar{z} + u z + \bar{u} \bar{z} + c = 0\,, \quad \text{wo } u = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{n}\vartheta\right)$$

gesetzt wurde und also $a, b, c, \varrho \in \mathfrak{K}$ ist. Der Punkt (x, y) wurde dabei auf $x + y\vartheta \in \mathfrak{K}_2$ abgebildet. Wir ergänzen diese Identifizierung durch $W \rightleftarrows \infty$. Damit ist je vier Punkten (x, y) — unter denen mindestens drei verschiedene vorkommen — nach § 2 ein Doppelverhältnis zugeordnet.

Mit der folgenden Bemerkung ist der Anschluß an § 2 gefunden:

Vier verschiedene Punkte A, B, C, D von $u \cup \{W\}$ liegen dann und nur dann gemeinsam auf einem Kreis, wenn ihr (in irgendeiner Reihenfolge gebildetes) Doppelverhältnis in $\mathfrak{K}$ liegt.

Beweis: Die Abbildungen $w = \dfrac{pz+q}{rz+s}$, wo $p, q, r, s \in \mathfrak{K}_2$ und $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$ ist, sind Kreisverwandtschaften, wie man leicht der Darstellung (K) entnimmt; insgesamt bilden sie eine Gruppe. Da die genannte Gruppe dreifach transitiv über der Menge der Punkte ist und außerdem nur aus doppelverhältnistreuen Abbildungen besteht, so liest man die Behauptung unmittelbar einer solchen Abbildung $A \to \infty$, $B \to 0$, $C \to 1$ ab.

Damit können wir das von EWALD [5] erhaltene Ergebnis wie folgt verschärfen:

Satz 15. a) *Eine Möbiusebene Σ, die dem speziellen Büschelsatz (Axiom 3 in* [5]*) genügt und in der weiterhin eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI—OV, OVI* *vorhanden ist, läßt sich in einen projektiven Raum $\mathfrak{R}_3$ über einem euklidischen Körper derart einbetten, daß den Punkten bzw. Kreisen von Σ eineindeutig die Punkte bzw. ebenen Schnitte (unter Erhalt der Inzidenzen) einer konvexen Quadrik $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}_3$ entsprechen. Dabei kann $\mathfrak{Q}$ stets in der Form*

$$\text{(Q)} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$$

angeschrieben werden. Σ genügt weiterhin den Eigenschaften (MI′), OVI *und dem vollen Satz von* MIQUEL.

b) *Umgekehrt besitzt der dreidimensionale projektive Raum $\mathfrak{R}_3$ über einem euklidischen Körper eine konvexe Quadrik $\mathfrak{Q}$ so, daß das System der ebenen Schnitte von $\mathfrak{Q}$ eine Möbiusebene ist, in der* (MI′) *und der volle Satz von* MIQUEL *gilt und in der eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften* OI—OVI *vorhanden ist. — Dabei kann für $\mathfrak{Q}$ jede konvexe Quadrik aus $\mathfrak{R}_3$, die mindestens zwei verschiedene Punkte besitzt, genommen werden.*

c) *Ist $\mathfrak{Q}$ (bzw. $\mathfrak{Q}'$) eine mindestens zwei verschiedene Punkte enthaltende konvexe Quadrik im projektiven Raum $\mathfrak{R}_3$ (bzw. $\mathfrak{R}_3'$) über dem kommutativen Körper $\mathfrak{K}$ (bzw. $\mathfrak{K}'$) von Charakteristik $\neq 2$, ist die von $\mathfrak{Q}$ vermittelte Möbiusebene zu der von $\mathfrak{Q}'$ vermittelten isomorph, so sind auch die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ isomorph*[43] [44]).

Beweis: a) Auf Grund der Sätze 3, 3′ gilt (MI′) und OVI, was die Ausgangslage von [5] darstellt[45]). Man schließe an das Ergebnis von EWALD [5] unseren Paragraphen 4 an. Dann ergibt weiter Satz 14 (§ 3) den ersten Teil der Behauptung. Daß $\mathfrak{Q}$ linear auf die Form (Q) gebracht werden kann, zeigt man sehr leicht über die Gleichungsform $x_1^2 - n\, x_2^2 + x_3 x_4 = 0$ unter Benutzung der Tatsache, daß positive Elemente von $\mathfrak{K}$ Quadrate sind. Σ genügt dem vollen Satz von MIQUEL, da er in Kreisebenen ($\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$) gilt. b) Es sei also $\mathfrak{K}$ ein angeordneter kommutativer Körper, in dem jedes positive Element Quadrat ist. Dann ist $\mathfrak{Q}_0$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3 x_4 = 0$ eine konvexe Quadrik: Da $\mathfrak{Q}_0$ mit der Ebene $x_3 = 0$ bzw. mit der Ebene $x_4 = 0$ nur den Punkt $P_3 = \mathfrak{K}(0\,0\,0\,1)$ bzw. nur den Punkt $P_4 = \mathfrak{K}(0\,0\,1\,0)$ gemeinsam hat, so müßte eine Gerade, die ganz auf $\mathfrak{Q}_0$ liegt, auch diese beiden Punkte enthalten. Aber bereits $\mathfrak{K}\,(0\;0\;1\;1) \in P_3 + P_4$ liegt nicht auf $\mathfrak{Q}_0$. — Da das System der ebenen Schnitte von $\mathfrak{Q}_0$ gemäß § 4 isomorph zur Kreisebene ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_2$) ist, wobei $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}(\vartheta \mid \vartheta^2 = -1)$ gesetzt wurde, so sieht man mit Satz 14, daß dem System der ebenen Schnitte von $\mathfrak{Q}_0$ eine Orthogonalitätsrelation mit den Eigenschaften OI—OVI aufgeprägt werden kann. Ebenfalls hat man über die Isomorphie zur Kreisebene ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_2$) die Gültigkeit von (MI′) und die des vollen Satzes von MIQUEL. — Da weiterhin eine mindestens zwei verschiedene Punkte enthaltende konvexe Quadrik von $\mathfrak{R}_3(\mathfrak{K})$ auf Grund der speziellen Eigenschaften von $\mathfrak{K}$ linear auf die Gestalt $x_1^2 + x_2^2 + x_3 x_4 = 0$ transformiert werden kann, so ist b) vollständig bewiesen. c) Über § 4 gehen wir zu — also isomorphen — Kreisebenen Σ: ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_2$), Σ': ($\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}_2'$) über. Richtet man noch — evtl. mit Hilfe einer Kreisverwandtschaft — ein, daß sich bei dieser Isomorphie die Punkte $\infty \in \Sigma$,

---

[43]) Wir verlangen von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ nicht, daß sie angeordnet sind oder dergleichen.

[44]) Zwei Kreisebenen Σ, Σ' heißen isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung der Punkte P von Σ auf die Punkte P' von Σ' und eine eineindeutige Abbildung der Kreise k von Σ auf die Kreise k' von Σ' gibt dergestalt, daß aus $P \in k$ bzw. $P \notin k$ entsprechend $P' \in k'$ bzw. $P' \notin k'$ folgt.

[45]) Man beachte dabei die in EWALD [7] gemachte Bemerkung, daß in [5] Axiom 2 b) heißen soll: Ist k' zu k orthogonal, dann schneiden sich k und k' in genau zwei verschiedenen Punkten.

$\infty' \in \Sigma'$ entsprechen, so folgt alles daraus, daß die affinen Ebenen über den Körpern $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ isomorph sind. (Die Geraden dieser Ebenen sind die Kreise durch ∞ bzw. ∞'; die Punkte sind die der jeweiligen Kreisebene Σ, Σ' bis auf ∞ bzw. ∞'.)

Literatur

[1] Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [2] Benz, W.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. Erscheint im J. reine angew. Math. — [3] Benz, W.: Zur Theorie der Möbiusebenen I. Math. Ann. **134**, 237—247 (1957). — [4] Bourbaki, N.: Algèbre, Livre II, Chap. VI. Paris 1952. — [5] Ewald, G.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. Math. Ann. **131**, 354—371 (1956). — [6] Ewald, G.: Über den Begriff der Orthogonalität in der Kreisgeometrie. Math. Ann. **131**, 463—469 (1956). — [7] Ewald, G.: Über eine Berühreigenschaft von Kreisen. Math. Ann. **134**, 58—61 (1957). — [8] Hoffman, A. J.: On the foundations of inversion geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 218—242 (1951). — [9] Hoffman, A. J.: Chains in the projective line. Duke Math. J. **18**, 827—830 (1951). [10] Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Bayer. Akad. Wiss. **2**, 17—72 (1954). — [11] Lenz, H.: Zur Definition der Flächen zweiter Ordnung. Math. Ann. **131**, 385—389 (1956). — [12] Peczar, L.: Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze. Mh. Math. **54**, 210—220 (1950). — [13] Sperner, E.: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzgsber. Heidelb. Akad. Wiss. **10** (1949). — [14] Veblen, O.: The square root and the relations of order. Trans. Amer. Math. Soc. **7**, 197—199 (1906). — [15] van der Waerden, B. L., u. L. J. Smid: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. **110**, 753—776 (1935).

(Eingegangen am 30. Juli 1957)