GRAUERT, H.
Math. Annalen, Bd. 133, S. 450—472 (1957)

Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*)

Von

HANS GRAUERT in Münster (Westf.)

Einleitung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist man seit einigen Jahren bestrebt, sich die topologische Theorie der Faserräume für die Lösung von analytischen Problemen nutzbar zu machen. Um eine Verbindung von Topologie und Analysis herzustellen, wurde zunächst der Begriff des analytischen Faserraumes eingeführt. H. CARTAN [5] zeigte dann 1950, daß sich die bekannten Cousinschen Probleme in der Sprache dieser analytischen Faserräume formulieren lassen. F. HIRZEBRUCH [15] hat 1955 spezielle analytische Geradenbündel dazu benutzt, den klassischen Satz von RIEMANN-ROCH auf algebraische Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zu übertragen. Weitere umfangreiche Untersuchungen sind von KODAIRA, SPENCER, SERRE angestellt worden.

Bei der Konstruktion von analytischen Faserräumen werden komplexe Liesche Gruppen als Strukturgruppen verwendet. Die Lösung gewisser Probleme der Faserraumtheorie erfordert deshalb die Kenntnis der Eigenschaften von holomorphen Funktionen (holomorphen Abbildungen) mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen L.

In der vorliegenden Arbeit werden nun diese Funktionen eingehend untersucht. Als Argumenträume werden alle holomorph-vollständigen Räume $\mathfrak{R}$[1]) zugelassen. Diese Klasse besteht aus den für die Funktionentheorie sinnvollen, nicht kompakten komplexen Räumen. Als erstes wesentliches Resultat ergibt sich:

(1) *Jede in $\mathfrak{R}$ holomorphe Funktion $F(r)$ mit Werten in L ist genau dann in $\mathfrak{R}$ über eine Schar von holomorphen Funktionen $F(r,t): \mathfrak{R} \to L$, $0 \leqq t \leqq 1$.*

---

*) Bei der vorliegenden Publikation handelt es sich um den zweiten Teil der Habilitationsschrift des Verf., die in drei Teilarbeiten in den Math. Annalen erscheint (vgl. [13. 14]). Einige Resultate wurden bereits in einer C. r.-Note angekündigt (vgl. [12]). — Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. CARTAN meinen Dank für wertvolle Ratschläge aussprechen. Er hat auf dem internationalen Symposium 1956 in Mexiko über die vorliegende Arbeit (und über [13, 14]) vorgetragen (vgl. [8]).

[1]) Die holomorph vollständigen Räume bilden unter den nicht kompakten komplexen Räumen die Klasse K der für die Funktionentheorie sinnvollen komplexen Räume. In K sind alle nicht kompakten Riemannschen Flächen und die Holomorphiegebiete des C^n enthalten. Ferner sind die variétés de STEIN (vgl. [7], p. 50) eine Teilklasse von K.

auf die Funktion $E(r) = 1 \in L$ deformierbar, wenn sie dort über lauter stetige Funktionen $S(r,t) : \mathfrak{R} \to L$, $0 \leqq t \leqq 1$, auf $E(r)$ deformierbar ist (vgl. Satz 3).

In diesem Satz wird also behauptet: die analytische Eigenschaft, daß man $F(r)$ über lauter holomorphe Funktionen auf $E(r)$ deformieren kann, ist zu der rein topologischen Eigenschaft äquivalent, daß $F(r)$ über stetige Funktionen auf $E(r)$ deformierbar ist. Der Satz (1) schwächt deshalb die Voraussetzung von [13], Satz 11 ab.

Um eine Isomorphie zwischen den Deformationsklassen von holomorphen und stetigen Funktionen herzustellen, wird sodann bewiesen:

(2) *Jede stetige Funktion $S(r) : \mathfrak{R} \to L$ ist auf eine holomorphe Funktion $F(r) : \mathfrak{R} \to L$ deformierbar.*

Nennt man einen holomorph-vollständigen Raum $\mathfrak{R}$ auf einen holomorph-vollständigen Raum $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar[2]), wenn $\mathfrak{R}$ Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und über lauter holomorph-vollständige Räume stetig auf $\check{\mathfrak{R}}$ ausdehnbar ist, so folgt schließlich der Approximationssatz:

(3) *Es seien $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, $\mathfrak{R}$ sei auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Dann ist jede in $\mathfrak{R}$ holomorphe Funktion $F(r) : \mathfrak{R} \to L$, die im Innern von $\mathfrak{R}$ durch in $\check{\mathfrak{R}}$ stetige Funktionen beliebig stark angenähert werden kann, dort auch durch holomorphe Funktionen beliebig stark approximierbar (vgl. § 1, Satz 4).*

Der Beweis der Resultate (1)—(3) erfordert sehr tiefliegende Aussagen der Theorie analytischer Garben. Ferner ist es notwendig, sogleich Funktionen zu untersuchen, die noch von einem Parameter $\mathbf{t} \in \mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}$ ein kompakter Raum) abhängen. Der Beweis wird in den Paragraphen 1—3 durchgeführt.

In § 4 wird die Garbe $\mathfrak{S}^s$ bzw. $\mathfrak{S}^a$ der Keime von stetigen bzw. holomorphen Funktionen mit Werten in L untersucht. Bezeichnet man mit H^s bzw. H^a die 1. Kohomologiemenge von $\mathfrak{R}$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{S}^s$ bzw. $\mathfrak{S}^a$ und mit i die Injektion $\mathfrak{S}^a \to \mathfrak{S}^s$, so gilt:

(4) i erzeugt einen Isomorphismus i^* von H^a auf H^s (vgl. die Sätze 11a, 12).

In [14] werden wir zeigen, daß dieses Resultat gleichzeitig eine Aussage über die Klasse $\mathfrak{K}$ der topologischen Faserräume über $\mathfrak{R}$ mit L als Strukturgruppe enthält: *die Theorie der analytischen Faserräume aus $\mathfrak{K}$ ist zu der Theorie der topologischen Faserräume aus $\mathfrak{K}$ isomorph* (vgl. auch [9, 10]).

Um den Satz (4) herzuleiten, ist es notwendig, daß die Sätze (1)—(3) gleich allgemeiner als hier angegeben bewiesen werden. Es wird deshalb zugelassen, daß L den Punkten von $\mathfrak{R}$ angeheftet ist, d. h. es werden Funktionen $F(r)$ mit Werten in analytischen Faserräumen $L(\mathfrak{R}, L^*)$ betrachtet, deren Basis $\mathfrak{R}$, deren Faser L und deren Strukturgruppe L^* eine komplexe Automorphismengruppe von L ist. Dabei ist immer gefordert, daß der Funktionswert $F(r)$ in der Faser über r liegt. Offenbar darf man deshalb im Falle

---

[2]) Man vergleiche zur Definition [2] und [13].

$L(\mathfrak{R}, L^*) = \mathfrak{R} \times L$ die Funktion $F(r)$ als Abbildung von $\mathfrak{R}$ in L ansehen und erhält damit den vorhin diskutierten Fall als Spezialfall zurück.

Die Funktionen $F(r)$ lassen sich als Schnittflächen in der (nicht abelschen) Garbe $\mathfrak{S}$ der Keime von lokalen Schnitten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ deuten. Es ist deshalb noch eine wesentliche Verallgemeinerung der Resultate (1)—(4) möglich: in einer späteren Arbeit beabsichtigt der Verf., nicht notwendig abelsche, analytische Garben Ω zu definieren, derart, daß unter diesen Begriff die Cartanschen abelschen analytischen Garben und die Garben $\mathfrak{S}$ fallen. Für die Schnitte in Ω gelten dann wieder die Aussagen (1)—(4).

§ 1. Topologische Bedingungen

1. Wir verstehen wie in [13] unter L, L^* komplexe Liesche Gruppen. L^* wirke in L *automorph*, d. h. es ist jedem Punkt $l^* \in L^*$ ein holomorpher Gruppenautomorphismus $\psi(l^*)$ von L zugeordnet, derart, daß folgendes gilt:

1) $\psi(l^*)$ ist ein Homomorphismus von L^* in die Gruppe der Automorphismen von L,

2) die Abbildung $L^* \times L \to L : (l^*, l) \to \psi(l^*) \square l$ ist holomorph. Dabei bezeichnet $\square$ die Anwendung des Automorphismus $\psi(l^*)$ auf die Punkte $l \in L$. Wir werden im folgenden für $\psi(l^*)$ abkürzend einfach l^* setzen.

Es seien fortan immer — wie in [13] — $\mathfrak{R}$ ein beliebiger komplexer Raum und $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein komplex analytisches Faserbündel[3]) über $\mathfrak{R}$, dessen Faser L und dessen Strukturgruppe L^* ist. π sei die Projektion von $L(\mathfrak{R}, L^*)$ auf $\mathfrak{R}$. Da die Strukturgruppe von $L(\mathfrak{R}, L^*)$ automorph in L wirkt, besitzt jede Faser $\pi^{-1}(r)$, $r \in \mathfrak{R}$, die Gruppenstruktur von L. Man kann deshalb die Punkte $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(r)$ im Sinne der Gruppenoperation $\circ$ miteinander multiplizieren $(x_1 \circ x_2)$. Ebenso läßt sich das Produkt zweier stetiger Schnittflächen[4]) $F_1(r)$, $F_2(r)$ über $\mathfrak{R}$ bilden. Die holomorphe Schnittfläche, die jedem Punkt $r \in \mathfrak{R}$ das neutrale Element von $\pi^{-1}(r)$ zuordnet, sei mit $E(r)$ bezeichnet. Ferner sei $U(E)$ die in [13], § 3 eingeführte kanonische Umgebung der Fläche $x = E(r)$.

Ist $L = C^q$, $L^* = GL(q, C)$ die Gruppe der q-reihigen nichtsingulären Matrizen, so heißt $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein *q-dimensionales Vektorraumbündel* über $\mathfrak{R}$. Wir setzen in diesem Falle $L(\mathfrak{R}, L^*) = V(\mathfrak{R})$ und bezeichnen die Gruppenoperation $\circ$ mit $+$; dementsprechend werde für $E(r)$ der Term $O(r)$ gewählt. Wie in [13] gezeigt, gibt es zu jedem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein kanonisch zugeordnetes Vektorraumbündel $V_L(\mathfrak{R})$, das durch eine holomorphe, fasertreue Abbildung ϱ mit $\varrho(x + \lambda x) = \varrho(x) \circ \varrho(\lambda x)$ auf $L(\mathfrak{R}, L^*)$ bezogen ist (λ komplex). ϱ bildet dabei $U(0) \subset V_L(\mathfrak{R})$ umkehrbar holomorph auf $U(E) \subset L(\mathfrak{R}, L^*)$ ab.

Nach [13] darf man sich in jedem Vektorraumbündel $V(\mathfrak{R})$, bei dem $\mathfrak{R}$ abzählbare Topologie hat, eine stetige Funktion $|x| : V(\mathfrak{R}) \to \{t, 0 \leqq t < \infty\}$

---

[3]) Wir sagen statt Faserbündel auch Faserraum (vgl. [14]).

[4]) Die Schnittflächen $F(r)$ über $\mathfrak{R}$ werden im folgenden auch Funktionen in $\mathfrak{R}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ genannt.

definiert denken, die in jedem Vektorraum $\pi^{-1}(r)$ den Axiomen einer Norm genügt. Ist $L(\mathfrak{R}, L^*)$ beliebig und $y \in U(E)$, so werde $|y|$ für $|\varrho^{-1}(y)|$ gesetzt.

Es sei nun $\mathfrak{T}$ ein kompakter[5]) Raum, in dem abgeschlossene Untermengen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ ausgezeichnet sind. Unter einer *(e, h)-Funktion* in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ verstehen wir dann eine stetige Abbildung $F(r,\mathfrak{t})$, $r \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die folgende Eigenschaften hat:

1) $\pi \circ F(r,\mathfrak{t}) = r$,

2) ist $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H}$, so ist $F(r,\mathfrak{t}_0)$ in $\mathfrak{R}$ holomorph,

3) liegt $\mathfrak{t}_0$ in der Menge $\mathfrak{E}$, so gilt $F(r,\mathfrak{t}_0) = E(r)$.

Genügt eine Funktion $F(r,\mathfrak{t})$ den Axiomen 1) und 3), so heißt sie eine *e-Funktion* in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$. Offenbar ist das Produkt zweier e- bzw. zweier (e,h)-Funktionen stets wieder eine e- bzw. (e,h)-Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$. Eine (e,h)-Funktion *heißt in (im Innern von)* $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ *(e, h)-homotop E*, wenn sie in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (in jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$) über lauter (e,h)-Funktionen auf die Funktion $E(r,\mathfrak{t}) = E(r)$ deformiert werden kann. Ist $F(r,\mathfrak{t})$ eine e-Funktion, die in (auf jeder kompakten Teilmenge von)$\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ über e-Funktionen auf $E(r,\mathfrak{t})$ deformiert werden kann, so werde $F(r,\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{R}$ (im Innern von $\mathfrak{R}$) *e-homotop E genannt.* Im folgenden werden wir eine Deformation $F(r,\mathfrak{t},t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, mit *(e, h)-Deformation* bezeichnen, wenn $F(r,\mathfrak{t},t_0)$, $0 \leqq t_0 \leqq 1$, immer (e,h)-Funktion ist. Im Falle, wo $F(r,\mathfrak{t},t_0)$ für gewisse t_0 nur e-Funktion ist, werde $F(r,\mathfrak{t},t)$ eine *e-Deformation* genannt.

Es sei nun immer $\mathfrak{T}$ ein kompakter Raum, in dem Mengen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ausgezeichnet sind. Für in bezug auf $\mathfrak{T}$ definierte (e,h)-Funktionen wurden in [13] folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume*[6]), *$\mathfrak{R}$ sei Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$ konvex. Ist dann $F(r, \mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (e,h)-homotop E ist, so gibt es eine Folge von in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ definierten (e,h)-Funktionen $\check{F}_\nu(r,\mathfrak{t})$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r,\mathfrak{t})$ konvergiert. Dabei können die $\check{F}_\nu$ so bestimmt werden, daß sie in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ (e,h)-homotop E sind.*

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein holomorph-vollständiger Raum, $V(\mathfrak{R})$ ein n-dimensionales komplex-analytisches Vektorraumbündel über $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ ein relativ-kompakter holomorph-konvexer Teilbereich von $\mathfrak{R}$. Es gibt dann in $V(\mathfrak{R})$ über $\mathfrak{R}$ endlich viele holomorphe Schnittflächen $H_1(r), \ldots, H_q(r)$, derart, daß sich in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$ jede dort definierte (e,h)-Funktion mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ durch eine Linearkombination $F(r,\mathfrak{t}) = \sum_{\nu=1}^{q} f_\nu(r,\mathfrak{t}) \cdot H_\nu(r)$ darstellen läßt. Dabei sind die $f_\nu(r,\mathfrak{t})$ komplex-wertige (e,h)-Funktionen in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$.*

2. Man wird danach trachten, die analytische Bedingung für die Gültigkeit des Approximationssatzes 1, daß $F(r,\mathfrak{t})$ (e,h)-homotop E ist, durch eine rein topologische Bedingung zu ersetzen. In der Tat gilt:

---

[5]) Dieser ist nach Definition stets ein normaler Hausdorffscher Raum.

[6]) Zur Definition vgl. [11] und [13].

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein holomorph-vollständiger Raum und $F(r,\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R},L^*)$. Ist dann $F(r,\mathfrak{t})$ e-homotop E (in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ oder im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$), so ist $F(r,\mathfrak{t})$ sogar (e,h)-homotop E (in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ oder im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$)* [7]).

Da man $\mathfrak{R}$ nach [13], § 1.1 durch analytische Polyeder B ausschöpfen kann und diese nach [13], § 1.2 wieder holomorph-vollständige Räume sind, folgt, daß man zu Satz 3 nur zu beweisen braucht, daß $F(r,\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ (e,h)-homotop E ist, falls $F(r,\mathfrak{t})$ dort e-homotop E ist.

Unter Verwendung von Satz 3 läßt sich schließlich folgender allgemeiner Satz herleiten:

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{R}$, $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, $\mathfrak{R}$ sei Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar, ferner sei $F(r,\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\check{\mathfrak{R}},L^*)$. Gibt es dann in $\check{\mathfrak{R}}\times\mathfrak{T}$ eine Folge von e-Funktionen $\check{S}_\nu(r,\mathfrak{t})$ mit Werten in $L(\check{\mathfrak{R}},L^*)$, die im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r,\mathfrak{t})$ strebt, so konvergiert auch eine Folge von in $\check{\mathfrak{R}}\times\mathfrak{T}$ definierten (e,h)-Funktionen $\check{F}_\nu(r,\mathfrak{t})$ im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r,\mathfrak{t})$.*

Als Spezialfall ist in Satz 4 enthalten, daß man eine holomorphe Funktion $F(r)$ über $\mathfrak{R}$ (= holomorphe Schnittfläche) mit Werten in $L(\check{\mathfrak{R}},L^*)$ genau dann durch in $\check{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen $\check{F}_\nu(r)$ im Innern von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximieren kann, wenn $F(r)$ dort durch eine Folge in $\check{\mathfrak{R}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig angenähert werden kann. Dadurch werden die Voraussetzungen von [13], Satz 11 vereinfacht.

Wir führen in den folgenden Abschnitten dieses Paragraphen die Sätze 3 und 4 auf einfachere Aussagen (Satz 5, Satz 7) zurück. Ihr vollständiger Beweis wird erst in dem Paragraphen 3 erbracht werden können.

3. Es sei $\mathfrak{T}^*$ ein beliebiger kompakter Raum, $\mathfrak{T}_1$ sei der kompakte Raum $\mathfrak{T}^*\times\{t, 0\leqq t\leqq 1\}$. Ferner seien in $\mathfrak{T}_1$ abgeschlossene Mengen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{E}_1\subset\mathfrak{H}_1$ ausgezeichnet. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{E}_1\cap\mathfrak{T}^*\times\{t, 0<t<1\} = \mathfrak{E}^*\times\{t, 0<t<1\}$, $\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{T}^*\times\{t, 0<t<1\} = \mathfrak{H}^*\times\{t, 0<t<1\}$ ist, wobei $\mathfrak{E}^*$ bzw. $\mathfrak{H}^*$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{T}^*$ bezeichnen. Unter $\mathfrak{H}_1^0$ verstehen wir schließlich die Menge $\mathfrak{H}_1\cup\{\mathfrak{t}, (\mathfrak{t},1)\in\mathfrak{H}_1\}\times\{t\}\cup\mathfrak{T}^*\times 0$. Die (e,h)-Funktionen $F(r,\mathfrak{t},t)$ in Räumen $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}_1$ denken wir uns fortan in bezug auf die Mengen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ definiert [8]). Ist $F(r,\mathfrak{t},t)$ sogar für $(\mathfrak{t},t)\in\mathfrak{H}_1^0$ holomorph, so heiße

[7]) „Im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$" bedeutet „auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$". — Ist L eine komplexe Liesche Gruppe, deren universeller Überlagerungsraum dem C^m analytisch äquivalent ist (z. B. eine abelsche oder auflösbare Gruppe), so gilt Satz 3 — wenigstens wenn $L(\mathfrak{R},L^*)=\mathfrak{R}\times L$ ist — in bezug auf beliebige komplexe Räume $\mathfrak{R}$. In diesem Falle läßt sich seine Aussage mit elementaren Mitteln herleiten. Andererseits kann man schon holomorphe Abbildungen von Nichtholomorphiegebieten des C^3 in die Gruppe $GL(2,C)$ der 2reihigen, nichtsingulären komplexen Matrizen angeben, die zwar stetig, jedoch nicht holomorph auf $E(r)$ deformierbar sind. Die zum Beweis von Satz 3 benutzten Methoden dürften deshalb der Problemstellung angemessen sein.

[8]) Unter der $\mathfrak{E}$- und der $\mathfrak{H}$-Menge seien fortan die Mengen verstanden, die zur Definition der (e,h)-Funktionen verwendet werden.

$F(r,\mathfrak{t},t)$ eine (e,h^0)-*Funktion* in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}_1$. Für (e,h)-Funktionen in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}_1$ definieren wir eine weitere Homotopiebeziehung, indem wir zunächst noch in $\mathfrak{T}_1$ die Menge $\mathfrak{C}_1=\mathfrak{T}^*\times 1$ auszeichnen, die im folgenden mit $\mathfrak{C}$-Menge bezeichnet wird. Wir sagen dann: zwei (e,h)-Funktionen $F_1(r,t,t)$ und $F_2(r,t,t)$ sind in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}_1$ (e,h,c)-*homotop*, wenn es eine (e,h)-Deformation $F(r,\mathfrak{t},t,s)$, $0\leqq s\leqq 1$, von F_1 auf F_2 mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) $F(r,\mathfrak{t},t,1)=F_1(r,\mathfrak{t},t)$, $F(r,\mathfrak{t},t,0)=F_2(r,\mathfrak{t},t)$

b) $F(r,\mathfrak{t},1,s)=F_1(r,\mathfrak{t},1)=F_2(r,\mathfrak{t},1)$.

(e, h, c)-homotope (e,h)-Funktionen müssen also notwendig auf $\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}_1$ übereinstimmen.

Als grundlegender Satz gilt nun:

Satz 5. *Ist $\mathfrak{R}$ ein holomorph-vollständiger Raum, so gibt es zu jeder in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}_1$ definierten (e,h)-Funktion mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R},L^*)$ eine (e,h,c)-homotope (e,h^0)-Funktion.*

Wir werden diesen Satz in späteren Abschnitten weiter auf ein einfacheres Resultat zurückführen. Es sei hier nur noch gezeigt, wie man aus Satz 5 die Sätze 3 und 4 leicht gewinnen kann.

Zum Beweise von Satz 3 bilden wir das kartesische Produkt $\mathfrak{T}_1$ des Raumes $\mathfrak{T}$ mit $I=\{t, 0\leqq t\leqq 1\}$ und zeichnen in $\mathfrak{T}_1$ als Mengen $\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ die Mengen $\mathfrak{E}\times I\cup\mathfrak{T}\times 0$ bzw. $\mathfrak{E}_1\cup\mathfrak{H}\times 1$ aus. Ist nun $F(r,\mathfrak{t},t)$ eine e-Deformation von $F(r,\mathfrak{t})$ auf $E(r,\mathfrak{t})$ mit $F(r,\mathfrak{t},1)=F(r,\mathfrak{t})$, $F(r,\mathfrak{t},0)=E(r,\mathfrak{t})$, so ist die nach Satz 5 existierende, zu $F(r,\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotope (e,h^0)-Funktion $F^0(r,\mathfrak{t},t)$ eine (e,h)-Deformation von $F(r,\mathfrak{t})$ auf $E(r,\mathfrak{t})$.

Um Satz 4 zu beweisen, zeigen wir zunächst:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{R}$ ein holomorph-vollständiger Raum, so gibt es zu jeder in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ definierten e-Funktion $S(r,\mathfrak{t})$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R},L^*)$ eine e-homotope*[9] *(e,h)-Funktion $F(r,\mathfrak{t})$.*

In der Tat! Wir definieren den Raum $\mathfrak{T}_1=\mathfrak{T}\times I$ und setzen $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{E}_1=\mathfrak{E}\times I$. $F(r,\mathfrak{t},t)=S(r,\mathfrak{t})$ ist dann eine (e,h)-Funktion in bezug auf $\mathfrak{T}_1$. Bezeichnet $F^0(r,\mathfrak{t},t)$ eine zu $F(r,\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotope (e,h^0)-Funktion, so läßt sich F^0 als e-Deformation von $S(r,\mathfrak{t})$ auf die Funktion $F^0(r,\mathfrak{t})=F^0(r,\mathfrak{t},0)$ deuten. Diese ist für festes $\mathfrak{t}$ holomorph und damit eine (e,h)-Funktion in $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$.

Wir erbringen nun den eigentlichen Beweis von Satz 4. Wir haben zu zeigen: Zu jeder kompakten Menge $M\subset\mathfrak{R}$ und zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine in $\check{\mathfrak{R}}\times\mathfrak{T}$ definierte (e,h)-Funktion $\check{F}(r,\mathfrak{t})$, so daß in $M\times\mathfrak{T}$ gilt: $F(r,\mathfrak{t})\circ\check{F}^{-1}(r,\mathfrak{t})\in U(E)$, $|F(r,\mathfrak{t})\circ\check{F}^{-1}(r,\mathfrak{t})|<\varepsilon$. Da man $\mathfrak{R}$ durch analytische Polyeder $\mathfrak{P}=\mathfrak{p}\,\{r\in\mathfrak{R},\ |f_\mu(r)|<1,\ \mu=1\ldots s\}$ ausschöpfen kann, ist M immer in einem solchen Polyeder enthalten. Weil ferner $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$ konvex ist, darf man dabei sogar annehmen, daß alle f_μ in ganz $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph sind ($\mathfrak{p}\,\{\}$ bezeichnet die Vereinigung einer oder mehrerer zusammenhängender Komponenten der Menge $\{\}$).

Nach Voraussetzung gibt es in $\check{\mathfrak{R}}\times\mathfrak{T}$ eine Folge von e-Funktionen $S_\nu(r,\mathfrak{t})$, die im Innern von $\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r,\mathfrak{t})$ konvergiert. Wir wählen ν_0

[9]) $F(r,\mathfrak{t})$ ist also über lauter e-Funktionen auf $S(r,\mathfrak{t})$ deformierbar.

so groß, daß $F(r,\mathfrak{t}) \circ S_{\nu_0}^{-1}(r,\mathfrak{t}) \in U(E)$ für $r \in \mathfrak{P}, \mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ ist. Setzen wir $t \cdot x = \varrho \circ (t \cdot \varrho^{-1} \circ x)$, wenn $x \in U(E)$, $|t| \leq 1$, so ist dann $t \cdot F(r,\mathfrak{t}) \circ S_{\nu_0}^{-1}(r,\mathfrak{t})$ eine e-Deformation von $F \circ S_{\nu_0}^{-1}$ auf $E(r,\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$. In $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ gibt es nach Satz 6 eine dort zu S_{ν_0} e-homotope (e,h)-Funktion $'F(r,\mathfrak{t})$. Das Produkt $F \circ {}'F^{-1}$ ist in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$ e-homotop E, nach Satz 3 dort sogar (e,h)-homotop E. Aus Satz 1 folgt deshalb, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$ konvex ist: es gibt in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ eine (e,h)-Funktion $''F(r,\mathfrak{t})$, so daß in $M \times \mathfrak{T}$ gilt: $F \circ {}'F^{-1} \circ {}''F^{-1} \in U(E)$, $|F \circ {}'F^{-1} \circ {}''F^{-1}| < \varepsilon$. Setzen wir noch $\check{F}(r,\mathfrak{t}) = {}''F(r,\mathfrak{t}) \circ {}'F(r,\mathfrak{t})$, so ist Satz 4 bewiesen.

4. Es sei auf die in [13], § 1.2 definierte normal eingebettete analytische Menge verwiesen. Mit Hilfe dieses Begriffes formulieren wir:

Satz 7. *Es sei* $\mathfrak{Z}^n = \{\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n, |x_\nu| \leq a_\nu, |y_\nu| \leq b_\nu, z_\nu = x_\nu + i y_\nu, \nu = 1 \ldots n\}$ *ein abgeschlossenes Pflaster, A sei eine in (einer offenen Umgebung von) $\mathfrak{Z}^n$ normal eingebettete analytische Menge. Ist dann $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}^* \times I$ ein kompakter Raum, an dem — wie in § 1.3 — Mengen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ ausgezeichnet sind, und ist $F(\mathfrak{z}, \mathfrak{t}, t)$ eine (e,h)-Funktion in $A \times \mathfrak{T}_1$*[10]*, so gibt es in $A \times \mathfrak{T}_1$ eine zu F (e,h,c)-homotope (e,h^0)-Funktion $F^0(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$.*

Aus diesem Satz, den wir im § 3 beweisen werden, läßt sich unser Satz 5 leicht herleiten. Da $\mathfrak{R}$ holomorph-konvex ist, können wir zunächst $\mathfrak{R}$ durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{p}\{r \in \mathfrak{R}, |\mathrm{Re}\, f_\mu(r)| < 1, |\mathrm{Im}\, f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \ldots p_\nu\}$ ausschöpfen, so daß $\mathfrak{P}_\nu \Subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$ gilt. Dabei sind die f_ν in $\mathfrak{R}$ holomorphe komplexwertige Funktionen. Nach bekannten Sätzen [11] existiert zu jedem $\mathfrak{P}_\nu$ eine in einem Pflaster $\mathfrak{Z}^n$ normal eingebettete analytische Menge A, die als komplexer Raum aufgefaßt zu $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ analytisch äquivalent ist[11]. Die Aussage von Satz 7 bleibt deshalb richtig, wenn man A durch $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ ersetzt.

Nach Satz 7 gibt es also in den Produkten $\overline{\mathfrak{P}}_\nu \times \mathfrak{T}_1$ (e,h^0)-Funktionen ${}^0\widetilde{F}_\nu(r,\mathfrak{t},t)$, die dort vermöge (e,h,c)-Deformationen $\widetilde{H}_\nu(r,\mathfrak{t},t,s)$ zu $F(r,\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotop sind. Der Parameter s werde dabei so gewählt, daß gilt: $\widetilde{H}_\nu(r,\mathfrak{t},t,1) = {}^0\widetilde{F}_\nu(r,\mathfrak{t},t)$, $\widetilde{H}_\nu(r,\mathfrak{t},t,0) = F(r,\mathfrak{t},t)$. Wir zeichnen nun in $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \times \{s, 0 \leq s \leq 1\}$ als $\mathfrak{E}$-Menge die Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\}$

[10]) In exakter Ausdrucksweise muß A als den durch $\mathfrak{Z}^n$ erzeugten Keim einer in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}^n$ normal eingebetteten analytischen Menge definiert werden. Dementsprechend sind F, F^0 als Keime von Funktionen anzusehen. Es sei deshalb folgende Verabredung getroffen: Tritt eine Menge M als Teilmenge eines komplexen Raumes auf (wie hier $\mathfrak{Z}^n$), so wird unter einer Funktion (analytischen Menge) in M stets eine Funktion (analytische Menge) verstanden, die in einer offenen Umgebung $U(M)$ definiert ist. Eine oder mehrere Funktionen (analytische Mengen) haben in M eine Eigenschaft „a", wenn sie in einer offenen Umgebung von M diese Eigenschaft haben (z. B. Identität, normale Einbettung). Ist dagegen M Teilmenge eines nichtkomplexen Raumes (wie hier die Mengen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$), so wird die übliche Terminologie verwendet. Im Falle, daß M kartesisches Produkt einer Teilmenge M_1 eines komplexen Raumes und einer Teilmenge M_2 eines nichtkomplexen Raumes ist, sind die Eigenschaften der Funktionen in den Mengen $U(M_1) \times M_2$ zu untersuchen. Eine normaleingebettete analytische Menge ist stets als selbständiger komplexer Raum anzusehen.

[11]) Das ist genau dann der Fall, wenn es eine umkehrbar holomorphe Abbildung α von $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ auf die Punkte von A gibt, die in $\mathfrak{Z}^n$ liegen. Diese muß nach Fußnote 10) noch in einer Umgebung von $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ erklärt und dort umkehrbar holomorph sein.

und als $\mathfrak{H}$-Menge die Menge $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{H}_1^0 \times 1$ aus. Ferner denken wir uns in $\mathfrak{T}_2$ die $\mathfrak{C}$-Menge $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 1$ und die $\mathfrak{H}^0$-Menge $\mathfrak{H}_2^0$ definiert. In $\overline{\mathfrak{P}}_1 \times \mathfrak{T}_2$ ist dann $G_1(r,\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{H}_1^{-1} \circ \widetilde{H}_2$ eine (e,h)-Funktion, die nach Satz 7 in $\overline{\mathfrak{P}}_1 \times \mathfrak{T}_2$ zu einer (e,h^0)-Funktion ${}^0G_1$ (e,h,c)-homotop ist. Offenbar ist $\mathfrak{H}_2^0 - \mathfrak{T}_1 \times 0 = \mathfrak{H}_1^0 \times \{s,\, 0 < s \leqq 1\}$, ebenso ist $\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{T}_1 \times 0$ in der Form $M \times \{s,\, 0 < s \leqq 1\}$ darstellbar. Deshalb ist ${}^0G_1(r,\mathfrak{t},t,s,u) = {}^0G_1(r,\mathfrak{t},t,u\cdot s)$ eine (e,h^0)- und damit eine (e,h)-Deformation von ${}^0G_1$ auf $E(r)$. G_1 ist aber (e,h)-homotop ${}^0G_1$. Also ist auch G_1 in $\overline{\mathfrak{P}}_1 \times \mathfrak{T}_2$ (e,h)-homotop E. Da nun eine geeignete beliebig kleine Umgebung jedes analytischen Polyeders $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ ein in bezug auf $\mathfrak{R}$ konvexer holomorph-vollständiger Raum ist, ergibt Satz 1: es gibt in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_2$ eine (e,h)-Funktion $\check{G}_1(r,\mathfrak{t},t,s)$, so daß in $\overline{\mathfrak{P}}_1 \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $\check{G}_1 \circ G_1^{-1} \in U(E) \subset L(\mathfrak{R},L^*)$ und $|\check{G}_1 \circ G_1^{-1}| < \varepsilon_1$ $(\varepsilon_1 > 0$ beliebig klein vorgegeben).

Wir definieren in $\overline{\mathfrak{P}}_2 \times \mathfrak{T}_2 : H_2(r,\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{H}_2(r,\mathfrak{t},t,s) \circ \check{G}_1^{-1}(r,\mathfrak{t},t,s)$. Es ist in $\overline{\mathfrak{P}}_1 \times \mathfrak{T}_2 : |H_2^{-1} \circ \widetilde{H}_1| < \varepsilon_1$. Ferner gilt: $H_2(r,\mathfrak{t},t,0) = \widetilde{H}_2(r,\mathfrak{t},t,0) = F(r,\mathfrak{t},t)$, $H_2(r,\mathfrak{t},1,s) = F(r,\mathfrak{t},1)$, $H_2(r,\mathfrak{t},t,1)$ ist in $\overline{\mathfrak{P}}_2 \times \mathfrak{T}_1$ eine (e,h^0)-Funktion.

Das gleiche Verfahren, das wir auf $H_1 = \widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$ angewandt haben, wenden wir nun auf H_2, $\widetilde{H}_3$ an und konstruieren in $\overline{\mathfrak{P}}_3 \times \mathfrak{T}_2$ die (e,h)-Funktion $H_3(r,\mathfrak{t},t,s)$, für die in $\overline{\mathfrak{P}}_2 \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $|H_3^{-1} \circ H_2| < \varepsilon_2$. Wir setzen dieses Verfahren beliebig fort und erhalten eine Folge von (e,h)-Funktionen $H_\nu(r,\mathfrak{t},t,s)$. Immer ist $H_\nu(r,\mathfrak{t},t,0) = \widetilde{H}_\nu(r,\mathfrak{t},t,0) = F(r,\mathfrak{t},t)$, $H_\nu(r,\mathfrak{t},1,s) = F(r,\mathfrak{t},1)$; $H_\nu(r,\mathfrak{t},t,1)$ ist in $\overline{\mathfrak{P}}_\nu \times \mathfrak{T}_1$ eine (e,h^0)-Funktion. Gilt $\varepsilon_\nu \leqq 2^{-\nu}$, so konvergiert $H_\nu(r,\mathfrak{t},t,s)$ im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_2$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $H(r,\mathfrak{t},t,s)$. Man hat in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1 : H(r,\mathfrak{t},t,0) = F(r,\mathfrak{t},t)$. Da ferner dort ${}^0F(r,\mathfrak{t},t) = H(r,\mathfrak{t},t,1)$ eine (e,h^0)-Funktion ist und $H(r,\mathfrak{t},1,s) = F(r,\mathfrak{t},1)$ gilt, folgt, daß H eine (e,h,c)-Deformation von F auf eine (e,h^0)-Funktion ${}^0F$ ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 2. Die Laurenttrennung für (e,h)-Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen

1. Der Beweis von Satz 7 erfordert größere Vorbereitungen. Wir übertragen in diesem Paragraphen einen Satz von H. Cartan auf (e,h)-Funktionen $F(r,\mathfrak{t})$ mit Werten in trivialen Faserräumen $L(\mathfrak{R},L) = \mathfrak{R} \times L$. Da man diese Funktionen als holomorphe Abbildungen $\mathfrak{R} \to L$ auffassen darf, heiße $F(r,\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion mit Werten in L.

Es seien in einer Umgebung $U(e)$ des neutralen Elementes $e \in L$ sog. Normalkoordinaten $w_1, \ldots, w_m$ eingeführt. In einem solchen Koordinatensystem kommt e das m-tupel $(0, \ldots, 0)$ zu. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte $l \in U(e)$ mit $[l]$ und sind l_1, l_2 Punkte aus $U(e)$ mit $[l_1] = \mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_m)$, $[l_2] = (\lambda w_1, \ldots, \lambda w_m)$ (λ komplex), so gilt, falls $l_1 \circ l_2 \in U(e) : [l_1 \circ l_2] = (w_1 + \lambda w_1, \ldots, w_m + \lambda w_m)$. $U(e)$ habe in bezug auf $w_1, \ldots, w_m$ stets die Gestalt einer Hyperkugel. Wir setzen ferner $|l| = |[l]| = \max\limits_{\nu=1\ldots m} |w_\nu|$ für $l \in U(e)$, $[l] = (w_1, \ldots, w_m)$.

Es bezeichne — wie in § 1 — $\mathfrak{Z}$ immer ein abgeschlossenes Pflaster $\{\mathfrak{z} = (z_1 \ldots z_n),\ |x_\nu| \leqq a_\nu,\ |y_\nu| \leqq b_\nu,\ z_\nu = x_\nu + i\,y_\nu,\ \nu = 1 \ldots n\}$, $0 \leqq a_\nu$, $0 \leqq b_\nu$, des

Raumes von n-komplexen Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$; $\mathfrak{Z}_1$ bzw. $\mathfrak{Z}_2$ sei das Gebiet $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ -a_1 \leqq x_1 \leqq 0\}$ bzw. $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ 0 \leqq x_1 \leqq a_1\}$. Der Satz von H. CARTAN lautet nun unter Verwendung dieser Symbolik:

Ist $F(\mathfrak{z})$ eine in (einer Umgebung von) $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$ holomorphe Funktion mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe L^m, so gibt es in $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ je eine holomorphe Funktion $F_1(\mathfrak{z})$ bzw. $F_2(\mathfrak{z})$ mit Werten in L^m, so daß in $\mathfrak{Z}_0$ gilt: $F(\mathfrak{z}) = F_1(\mathfrak{z}) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z})$ (vgl. [4, 6]).

Um die Aussage dieses Satzes auf (e,h)-Funktionen auszudehnen, ist zunächst eine Verschärfung zweckmäßig. Wir zeigen:

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein topologischer Raum; V sei eine Umgebung von $\mathfrak{Z}_0$, und $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ sei eine in $V \times \mathfrak{H}$ stetige, für festes $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktion mit Werten in $U(e)$. Besteht dann in $V \times \mathfrak{H}$ die Ungleichung $|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon$, so gibt es, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, in $\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{H}$ je eine stetige, in $\mathfrak{z}$ holomorphe Funktion $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ bzw. $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ mit Werten in $U(e)$, so daß in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{H}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$. Ist für ein $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv e$ richtig, so gilt auch $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) = F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv e$.*

Beweis[12]). Wir bestimmen reelle Zahlen $a_\nu^{(0)}, b_\nu^{(0)}, \delta_0 > 0, d > 0$, so daß gilt $a_\nu^{(0)} - d > a_\nu$, $b_\nu^{(0)} - d > b_\nu$, $\delta_0 - d > 0$ und definieren durch die Setzung $a_\nu^{(\mu+1)} = a_\nu^{(\mu)} - 2^{-\mu-1} \cdot d$, $b_\nu^{(\mu+1)} = b_\nu^{(\mu)} - 2^{-\mu-1} \cdot d$, $\delta_{\mu+1} = \delta_\mu - 2^{-\mu-1} \cdot d$ absteigende Folgen ($\nu = 1 \ldots n$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$), für die $\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\nu^{(\mu)} = a_\nu^{(0)} - d$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} b_\nu^{(\mu)} = b^{(0)} - d$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} \delta_\mu = \delta_0 - d$ ist. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{Z}^{(\mu)}$ den Kasten $\{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leqq a_\nu^{(\mu)}, |y_\nu| \leqq b_\nu^{(\mu)}, \nu = 1 \ldots n\}$, mit $\mathfrak{Z}_1^{(\mu)}$ bzw. $\mathfrak{Z}_2^{(\mu)}$ die Kästen $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}^{(\mu)} - a_1^{(\mu)} \leqq x_1 \leqq \delta_\mu\}$ bzw. $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}^{(\mu)}, -\delta_\mu \leqq x_1 \leqq a_1^{(\mu)}\}$ und denken uns die Zahlen $a_\nu^{(0)}, b_\nu^{(0)}, \delta_0$ so klein gewählt, daß jedes Gebiet $\mathfrak{D}_\mu = \mathfrak{Z}_1^{(\mu)} \cap \mathfrak{Z}_2^{(\mu)}$ relativ-kompakt in V enthalten ist. Da jedes $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ relativ-kompakt in $\mathfrak{D}_\mu$ liegt, hat $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ von $\partial\mathfrak{D}_\mu$ einen endlichen Abstand. Dieser ist gleich $2^{-\mu-1}d$. $\mathfrak{C}_\varkappa^{(\mu)}(z_2^0, \ldots, z_n^0)$, $\varkappa = 1, 2$ sei in $\mathfrak{D}_\mu$ der Streckenzug:

$$\left\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_\mu,\ z_\nu = z_\nu^0, \left(x_1 = -(-1)^\varkappa \frac{\delta_\mu + \delta_{\mu+1}}{2},\quad |y_1| \leqq \frac{a_1^{(\mu)} + a_1^{(\mu+1)}}{2}\right) \text{ oder} \right.$$
$$\left. \left(0 \leqq -(-1)^\varkappa x_1 \leqq \frac{\delta_\mu + \delta_{\mu+1}}{2},\ |y_1| = \frac{a_1^{(\mu)} + a_1^{(\mu+1)}}{2}\right),\ \nu = 2 \ldots n\right\},$$

der durch die positive y_1-Richtung orientiert sei.

Ist nun $f^{(\mu)}$ eine komplexwertige, in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ stetige und für festes $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktion, so können wir durch Laurenttrennung[13]) zwei in $\mathfrak{Z}_1^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{Z}_2^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ stetige für $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktionen $f_1^{(\mu+1)}$ bzw. $f_2^{(\mu+1)}$ konstruieren, für die in $\mathfrak{D}_{\mu+1} \times \mathfrak{H}$ gilt: $f_1^{(\mu+1)} - f_2^{(\mu+1)} = f^{(\mu)}$. Wir haben dazu:

$$f_\varkappa^{(\mu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_\varkappa^{(\mu)}(z_2, \ldots, z_n)} \frac{f^{(\mu)}(\xi, z_2, \ldots, z_n, \mathfrak{t})}{\xi - z_1}\, d\xi$$

zu setzen. Eine einfache Abschätzung ergibt, falls $|f^{(\mu)}| < \varepsilon_\mu$ in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ ist, daß in $\mathfrak{Z}_\varkappa^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ der Betrag $|f_\varkappa^{(\mu+1)}| < \varepsilon_\mu 2^{\mu+1} K_0$ ist $\left(K_0 = 1 + \frac{2}{\pi d}(a_1^{(0)} + \delta_0)\right)$.

---

[12]) Wir schließen uns direkt dem Beweisgedanken in [6] an.

[13]) Das Wort „Laurenttrennung" entstammt der Arbeit [18].

Ist $f^{(\mu)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{t}_0) \equiv 0$ für ein $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H}$, so gilt auch $f_1^{(\mu+1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) = f_2^{(\mu+1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv 0$. Diese Überlegung ist auch für holomorphe Funktionen richtig, deren Werte m-tupel komplexer Zahlen sind. Wir haben also erhalten:

(1) *Es gibt eine Konstante $K_0 > 1$ und zu jeder in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ stetigen, für $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ holomorphen Funktion $*F^{(\mu)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $|*F^{(\mu)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon_\mu$, deren Werte m-tupel komplexer Zahlen sind, zwei in $\mathfrak{Z}_\varkappa^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ stetige, für $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktionen $*F_\varkappa^{(\mu+1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $|*F_\varkappa^{(\mu+1)}| < \varepsilon_\mu 2^{\mu+1} K_0$, $\varkappa = 1, 2$, für die $*F_1^{(\mu+1)} - *F_2^{(\mu+1)} = *F^{(\mu)}$ in $\mathfrak{D}_{\mu+1} \times \mathfrak{H}$ ist. Gilt für ein $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H} : *F^{(\mu)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv 0$, so ist auch $*F_1^{(\mu+1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) = *F_2^{(\mu+1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv 0$.*

Wir untersuchen jetzt die Gruppenverknüpfung in $U(e)$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt für $l', l'' \in U(e)$ mit $|l'| < \varepsilon$, $|l''| < \varepsilon$ zunächst $\{l', |l'| < \varepsilon\} \Subset U(e)$, $l = l' \circ l'' \in U(e)$ und ferner eine Beziehung ($[l'] = \mathfrak{w}'$, $[l''] = \mathfrak{w}''$, $[l] = \mathfrak{w}$):

$$\mathfrak{w} = \left\{\begin{matrix} w_1' + w_1'' + \Sigma A_{1ij}\, w_i' w_j'' \\ \vdots \\ w_m' + w_m'' + \Sigma A_{mij}\, w_i' w_j'' \end{matrix} \quad + \text{höhere Glieder} \right\}.$$

Es gibt daher eine Zahl $K_1 > 0$, so daß gilt: $|w_\nu - w_\nu' - w_\nu''| < K_1 \cdot r^2$, $\nu = 1 \ldots m$, wobei $r = \max(|l'|, |l''|)$. Ebenso erhält man für eine 3 fache Verknüpfung $l = l' \circ l'' \circ l'''$ die Abschätzung $|w_\nu - w_\nu' - w_\nu'' - w_\nu'''| < K_2 \cdot r^2$, $r = \max(|l'|, |l''|, |l'''|)$.

Unsere in $V \times \mathfrak{H}$ gegebene Funktion $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ mit Werten in $U(e)$ können wir uns nun als Abbildung von $V \times \mathfrak{H}$ in den C^m denken. Durch Laurenttrennung von $F^{(0)} = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ gewinnt man in $\mathfrak{Z}_\varkappa^{(1)}$ die Funktion $F_\varkappa^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$. Da in $\mathfrak{D}_0 \subset V$ gilt $|F^{(0)}| < \varepsilon$, hat man $|F_\varkappa^{(1)}| < \varepsilon\, 2\, K_0$. Setzen wir in $\mathfrak{D}_1 : F^{(1)} = F_1^{(1)-1} \circ F^{(0)} \circ F_2^{(1)}$, so gilt dort $|F^{(1)}| < K_2(\varepsilon\, 2\, K_0)^2$. Bestimmt man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $4\varepsilon K_0^2 \cdot K_2 < 1/4$, so wird sogar $|F^{(1)}| < \varepsilon/4$. Wir konstruieren nun wieder durch Laurenttrennung in $\mathfrak{Z}_\varkappa^{(2)} \times \mathfrak{H}$ die Funktion $F_\varkappa^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, für die dort $|F_\varkappa^{(2)}| < \varepsilon K_0$ ist. Für $F^{(2)} = F_1^{(2)-1} \circ F^{(1)} \circ F_2^{(2)}$ in $\mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{H}$ ist dann $|F^{(2)}| < \varepsilon/4^2$. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man in $\mathfrak{Z}_\varkappa^{(\mu)} \times \mathfrak{H}$ Funktionen $F_\varkappa^{(\mu)}$ mit $|F_\varkappa^{(\mu)}| < 2^{2-\mu} \varepsilon K_0$ und in $\mathfrak{D}_\mu$ Funktionen $F^{(\mu)} = F_1^{(\mu)-1} \circ F^{(\mu-1)} \circ F_2^{(\mu)}$ mit $|F^{(\mu)}| < \varepsilon/4^\mu$. Wie man leicht nachrechnet, konvergiert bei genügend kleinem $\varepsilon > 0$ das Produkt $\bigcirc_{\mu=1}^{\infty} F_\varkappa^{(\mu)}$ in $\mathfrak{Z}_\varkappa' \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{Z}_\varkappa' = \lim_{\mu \to \infty} \mathfrak{Z}_\varkappa^{(\mu)}$, gleichmäßig gegen eine Funktion $F_\varkappa$ mit Werten in $U(e)$, und es ist in $\mathfrak{D}' \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}' = \lim_{\mu \to \infty} \mathfrak{D}_\mu : F_1^{-1} \circ F \circ F_2 = \lim_{\mu \to \infty} F^{(\mu)} = 0 = e$. Also ist $F_1 \circ F_2^{-1} \equiv F$, $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ sind stetige, für festes $\mathfrak{t} \in \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{Z}_1'$ bzw. $\mathfrak{Z}_2'$ holomorphe Funktionen. Gilt für $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv 0 = e$, so ist das auch für $F_\varkappa^{(\mu)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0)$, $F^{(\mu)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0)$ richtig. Daher ist dann auch $F_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv e$, $\varkappa = 1, 2$. Da $\mathfrak{Z}_\varkappa' \supset \mathfrak{Z}_\varkappa$, ist unser Hilfssatz bewiesen.

2. Wir werden nun Hilfssatz 1 benutzen, den Cartanschen Satz auf beliebige (e,h)-Funktionen mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe zu übertragen. Zunächst folgt:

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{T}$ ein kompakter Raum, an dem eine $\mathfrak{E}$- und eine $\mathfrak{H}$-Menge ausgezeichnet seien; V sei eine Umgebung von $\mathfrak{Z}_0$ und $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $V \times \mathfrak{T}$ eine (e,h)-Funktion mit Werten in $U(e) \subset L^m$. Ferner gelte $|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon$ für $\mathfrak{z} \in V$,*

$\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$. *Ist dann* $\varepsilon > 0$ *hinreichend klein, so gibt es in* $\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{T}$ (e,h)*-Funktionen* $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ *mit Werten aus* $U(e)$, *so daß in* $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$ *die Gleichung* $F = F_1 \circ F_2^{-1}$ *richtig ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gibt es in $\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{H}$ je eine stetige, in $\mathfrak{z}$ holomorphe Funktion $\mathring{F}_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ bzw. $\mathring{F}_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ mit Werten in $U(e)$, für die in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{H}$ gilt: $\mathring{F}_1 \circ \mathring{F}_2^{-1} = F$ und in $\mathfrak{Z}_\varkappa$ ist: $\mathring{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t}_0) \equiv e$, falls $\mathfrak{t}_0$ $\mathfrak{E}$ angehört. Nun ist Hilfssatz 1 für beliebig kleine $U(e)$ richtig. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so lassen sich daher die $\mathring{F}_\varkappa$ auch so bestimmen, daß ihre Werte in einer beliebig vorgegebenen Hyperkugel $\tilde{U}(e) = \{l \in U(e), |l| < \delta\} \Subset U(e)$ liegen. Da $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{T}$ ein normaler Raum und $\tilde{U}(e)$ ein *solider* Raum ist (zur Def. vgl. [16], p. 54), kann man dann $\mathring{F}_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ zu einer (e,h)-Funktion $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{T}$ stetig fortsetzen, so daß überall $|F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \delta$ ist. Setzen wir:

$$F_1^0(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \begin{cases} F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) & \text{für} \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0,\ \mathfrak{t} \in \mathfrak{T}, \\ F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) & \text{für} \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{t} \in \mathfrak{H}, \end{cases}$$

so erhalten wir eine in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T} \cup \mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{H}$ stetige Funktion. Haben wir $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt, so gilt sicher noch $H = \{|l| < 3\,\delta\} \Subset U(e)$ und $|F_1^0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < 3\,\delta$. Man kann deshalb — nach dem schon benutzten Fortsetzungssatz — auch $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ zu einer (e,h)-Funktion $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{T}$ fortsetzen, die nur Werte aus H annimmt. Es ist $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ für $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

3. Es sei nun A eine in $\mathfrak{Z}$ normal eingebettete analytische Menge. Wir setzen $A_\nu = A \cap \mathfrak{Z}_\nu$, $\nu = 0, 1, 2$ und denken uns auf A_0 eine komplexwertige (e,h)-Funktion $f_0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ gegeben. Dieselbe ist nach Voraussetzung in einer Umgebung $V(A_0) \times \mathfrak{T} \subset A \times \mathfrak{T}$ definiert. A selbst ist in einer Umgebung $W(\mathfrak{Z})$ normal eingebettet. Wählen wir $\delta > 0$ hinreichend klein, so gilt $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{z}, |x_1| < \delta, |x_\nu| < a_\nu + \delta, |y_\mu| < b_\mu + \delta, \nu = 2 \ldots n, \mu = 1 \ldots n\} \Subset W(\mathfrak{Z})$ und $A_0^* = A \cap \mathfrak{D} \Subset V(A_0)$. Wir bezeichnen mit H^a, H^s, $({}^*H^a, {}^*H^s)$ die mit der Topologie der kompakten Konvergenz[14]) versehenen Vektorräume der in $\mathfrak{D}$ holomorphen, stetigen, (der in A_0^* holomorphen, stetigen) komplexwertigen Funktionen. Nach [13], Satz 6 sind H^a, H^s, ${}^*H^a$, ${}^*H^s$ Frecheträume. H^a wird durch die Beschränkung φ_1 der in $\mathfrak{D}$ holomorphen Funktionen stetig linear in ${}^*H^a$ abgebildet. Nach einem Satz von H. CARTAN (vgl. [7], Satz 3) ist φ_1 sogar eine Abbildung von H^a auf ${}^*H^a$. Da man nach dem Fortsetzungssatz von TIETZE [1] jede auf A_0^* stetige komplexwertige Funktion in $\mathfrak{D}$ hinein fortsetzen kann, ist auch die Beschränkungsabbildung $\varphi_2 : H^s \to {}^*H^s$ eine lineare stetige Abbildung von H^s auf ${}^*H^s$.

Die (e,h)-Funktion $f_0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ kann man nun als stetige Abbildung $\tau : \mathfrak{t} \to f_0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{T}$ in ${}^*H^s$ auffassen. Die Menge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{T}$ wird dabei auf den Nullpunkt $0 \in {}^*H^s$ geworfen, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{T}$ wird in ${}^*H^a$ abgebildet. Nach [13], Satz 8 läßt sich deshalb die Abbildung $\check{\tau} : \mathfrak{E} \to 0 \in H^a$ zu einer stetigen Abbildung $\check{\tau}_1 : \mathfrak{H} \to H^a$ fortsetzen, so daß überall in $\mathfrak{H}$ gilt: $\varphi_1 \circ \check{\tau}_1 = \tau$. $\check{\tau}_1$ läßt sich dann weiter zu einer stetigen Abbildung $\check{\tau}_2 : \mathfrak{T} \to \mathfrak{H}^s$ fortsetzen. Für geeignetes $\check{\tau}_2$ hat man:

---

[14]) Wir schließen uns den Definitionen in [3] an.

$\varphi_2 \circ \check{\tau}_2 = \tau$. Schreibt man die Abbildung $\check{\tau}_2$ in der Form $\mathfrak{t} \to \underline{f}_0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, so ist $\underline{f}_0(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$, deren Beschränkung auf $A_0^* \times \mathfrak{T}$ die Funktion $f_0(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$ liefert. Wir haben also folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 3. *Jede in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gegebene komplexwertige (e,h)-Funktion läßt sich als (e,h)-Funktion nach $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ fortsetzen.*

Wir zeigen nun:

Hilfssatz 4. *Es gibt eine Konstante $K > 1$, so daß für jede in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ definierte (e,h)-Funktion $f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $|f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < M$, eine (e,h)-Funktion $\underline{f}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $\sup\limits_{V(\mathfrak{Z}_0)\times\mathfrak{T}} |\underline{f}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < KM$, in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ existiert, die eine Fortsetzung von $f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ ist.* Dabei bezeichnet $V(\mathfrak{Z}_0) \Subset \mathfrak{D}$ eine Umgebung von $\mathfrak{Z}_0$.

Beweis. Die Menge der (e,h)-Funktionen in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ (bzw. in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$) bildet, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, einen Frechetraum (vgl. [13]), den wir mit $^*H^e$ bzw. H^e bezeichnen wollen. Nach Hilfssatz 3 bildet die Beschränkung φ der (e,h)-Funktionen in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ auf $A_0^* \times \mathfrak{T}$ den Raum H^e stetig linear auf $^*H^e$ ab. Aus einem Satz von Banach ([3], Kap. I, § 3.3, Satz 1) folgt deshalb, daß φ eine offene Abbildung ist. Insbesondere wird durch φ die offene Menge $\{f(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \in H^e, \sup\limits_{V(\mathfrak{Z}_0)\times\mathfrak{T}} |f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < 1\}$ auf eine Umgebung von $0 \in {}^*H^e$ abgebildet. Dieselbe enthält, wenn $K > 1$ hinreichend groß, alle (e,h)-Funktionen $f(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \in {}^*H^e$, für die in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gilt: $|f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \frac{1}{K}$. Ist $f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $\sup |f(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < M$, eine beliebige (e,h)-Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$, so gibt es daher eine Fortsetzung von $\frac{1}{KM} f$ zu einer (e,h)-Funktion $\frac{1}{KM} \underline{f}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$, für die in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$: $|\frac{1}{KM} \underline{f}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < 1$ ist. Da $\underline{f}$ eine Fortsetzung von f ist und man $|\underline{f}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < KM$ für $\mathfrak{z} \in V(\mathfrak{Z}_0)$, $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ hat, ist Hilfssatz 4 bewiesen.

4. Wir behalten die Terminologie von § 2.3 bei und zeigen die Richtigkeit folgenden Satzes:

Satz 8. *Es sei $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ eine (e,h)-Funktion mit Werten in $U(e) \subset L$. In $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gelte $|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gibt es in $A_\nu \times \mathfrak{T}$ (e,h)-Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $\nu = 1, 2$, so daß auf $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$.*

Beweis. Da $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ seine Werte aus $U(e)$ hat, können wir $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ als Abbildung in den $(w_1, \ldots w_m)$-Raum auffassen. $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ wird deshalb durch ein m-tupel $(f_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}), \ldots, f_m(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ gegeben. Offenbar sind die $f_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ komplexwertige (e,h)-Funktionen mit $|f_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon$. Nach Hilfssatz 4 existiert eine Fortsetzung $\underline{f}_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ von $f_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ mit $\sup\limits_{V(\mathfrak{Z}_0)\times\mathfrak{T}} |\underline{f}_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < K\varepsilon$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so entspricht $(\underline{f}_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}), \ldots, \underline{f}_m(\mathfrak{z},\mathfrak{t}))$ für festes $(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ aus der Umgebung $V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}$ von $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$ einem Punkt $\underline{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \in U(e)$. $\underline{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ ist eine (e,h)-Funktion und eine Fortsetzung von $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ in $V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}$. Nach Hilfssatz 2 gilt, falls ε und damit $|\underline{F}|$ hinreichend klein: $\underline{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \underline{F}_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ \underline{F}_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, wobei die $\underline{F}_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ (e,h)-Funktionen in $\mathfrak{Z}_\nu \times \mathfrak{T}$ sind. Beschränkt man $\underline{F}_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ auf $A_\nu \times \mathfrak{T}$, so gilt: $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

§ 3. Der Beweis von Satz 7

1. Wir werden in diesem Paragraphen zunächst den Satz 8 auf (e,h)-Funktionen mit Werten in Faserräumen $L(A, L^*)$ verallgemeinern und dann einen vollständigen Beweis von Satz 7 angeben.

Wir greifen auf die Terminologie von § 2 zurück. $V(A)$ sei ein m-dimensionales Vektorraumbündel über A. Wir setzen $V(A_0) = \pi^{-1}(A_0^*)$ und denken uns eine stetige Abbildung $(x,\mathfrak{t}) \to \lambda(x,\mathfrak{t})$ von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$ gegeben. Es gelte $\pi \circ \lambda(x,\mathfrak{t}) = \pi(x)$, $\lambda(x,\mathfrak{t}_0)$, $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{T}$, bilde die Vektorräume $\pi^{-1}(\mathfrak{z}) \subset V(A_0^*)$ homogen komplex-linear auf sich ab. Für $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{H}$ sei $\lambda(x,\mathfrak{t}_0)$ holomorph, für $\mathfrak{t}_0 \in \mathfrak{C}$ gelte sogar $\lambda(x,\mathfrak{t}_0) = x$. — Wir nennen jede Abbildung $\lambda(x,\mathfrak{t})$ mit diesen Eigenschaften eine (e,h)-Abbildung von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$. Setzen wir noch $\|\lambda(x,\mathfrak{t})\| = \sup\limits_{x \in V(A_0^*),\, |x| = 1,\, \mathfrak{t} \in \mathfrak{T}} |x - \lambda(x,\mathfrak{t})|$ und $\lambda(\mathfrak{t}) = \{x \to \lambda(x,\mathfrak{t})\}$, so ist es möglich, folgenden Satz zu formulieren:

Satz 9. *Ist $F(r,\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ mit Werten in $V(A)$, ist $\lambda(x,\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Abbildung von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$, so gibt es, wenn $\|\lambda\|$ hinreichend klein ist, in $A_\nu \times \mathfrak{T}$, $A_\nu = A \cap \mathfrak{Z}_\nu$, stets (e,h)-Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$, $\nu = 1, 2$, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) - \lambda(\mathfrak{t}) \square F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$.*

Beweis. A ist nach Voraussetzung in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}$ definiert. Wir dürfen deshalb annehmen, daß $A_0^* \Subset A$ liegt. Sind dann $H_\mu(\mathfrak{z})$ im Sinne von Satz 2 Funktionen in A mit Werten in $V(A)$, so ist $\widetilde{H}_\mu(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \lambda(\mathfrak{t}) \square H_\mu(\mathfrak{z}) - H_\mu(\mathfrak{z})$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ durch eine Linearkombination $\widetilde{H}_\mu(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \Sigma\, \widetilde{g}_{\nu\mu}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \cdot H_\nu(\mathfrak{z})$ darstellbar, wobei die $\widetilde{g}_{\nu\mu}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ komplexwertige (e,h)-Funktionen in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ sind. Nun sind die $H_\mu(\mathfrak{z})$ in A_0^* beschränkt ($|H_\mu| < M$). Wenn $\|\lambda\| < \varepsilon$ ist, gilt $\sup\limits_{A_0^* \times \mathfrak{T}} |\widetilde{H}_\nu| < \varepsilon M$. Da sich ferner jede (e,h)-Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ durch eine Linearkombination der H_μ darstellen läßt, folgt nach der Schlußweise von Hilfssatz 4 aus dem Satz von BANACH, daß die $\widetilde{g}_{\nu\mu}$ so gewählt werden können, daß gilt: $\sup\limits_{U(A_0) \times \mathfrak{T}} |\widetilde{g}_{\nu\mu}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon K M$. Dabei ist $K > 1$ eine nicht von λ abhängende Konstante. Es sei nun ε hinreichend klein. Dann ist in $U(A_0) \times \mathfrak{T}: |G(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| \neq 0$, wenn $g_{\nu\mu} = \widetilde{g}_{\nu\mu} + \delta_{\nu\mu}$, $G(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = ((g_{\nu\mu}))$ gesetzt wird. $G(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ ist eine (e,h)-Funktion mit Werten in $GL(q,C)$, die in der Umgebung $U \times \mathfrak{T}$ von $A_0 \times \mathfrak{T}$ im Sinne von Satz 8 hinreichend wenig von der Matrixfunktion $E(r,\mathfrak{t}) = ((\delta_{\nu\mu}))$ verschieden ist. Es gibt daher in $A_1 \times \mathfrak{T}$, $A_2 \times \mathfrak{T}$ (e,h)-Funktionen $G_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $G_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt $G = G_1 \circ G_2^{-1}$.

Wir stellen nun nach Satz 2 $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ durch eine Linearkombination $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \Sigma f^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \cdot H_\varkappa(\mathfrak{z})$ dar und bezeichnen mit $(f^{(\varkappa)})$ das q-tupel der Funktionen $f^{(\varkappa)}$. Ferner werde $(h^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})) = G_1^{-1} \circ (f^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}))$ gesetzt. Sicher läßt sich eine Umgebung $A_0^{**} = A \cap \{\mathfrak{z}, |x_1| < \delta^*, |x_\nu| < a_\nu + \delta^*, |y_\mu| < b_\mu + \delta^*, \nu = 2 \ldots n, \mu = 1 \ldots n\}$ von A_0 finden derart, daß die $h^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ noch in $\bar{A}_0^{**} \times \mathfrak{T}$ definiert und dort (e,h)-Funktionen sind. Da es beliebig kleine in bezug auf A konvexe Umgebungen von $\bar{A}_0^{**}$ gibt, kann man nach Satz 1 in $A \times \mathfrak{T}$ (e,h)-Funktionen $\check{h}^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ finden, mit denen in $A_0^{**} \times \mathfrak{T}$ gilt: $|\check{h}^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) - h^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon^*$ (ε^* hinreichend klein im Sinne von Satz 8). Es folgt also, daß in $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ (e,h)-Funktionen

$h_1^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, $h_2^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ existieren, für die $h_1^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) - h_2^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = h^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) - \check{h}^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ ist. Setzen wir noch $(f_1^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})) = G_1 \circ (h_1^{(\varkappa)} + \check{h}^{(\varkappa)})$ und $(f_2^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})) = G_2^{-1} \circ$ $\circ (h_2^{(\varkappa)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}))$, so folgt, daß $(f_1^{(\varkappa)}) - G \circ (f_2^{(\varkappa)}) = (f^{(\varkappa)})$ ist. Für die Linearkombination: $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \sum_{\varkappa=1}^{q} f_\nu^{(\varkappa)} \cdot H_\varkappa$, $\nu = 1, 2$, gilt daher: $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) - \lambda(\mathfrak{t}) \square F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ $= F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

2. Wir definieren den analytischen Faserraum $L(A,L^*)$ und die Abbildung $\varrho(x) : V_L(A) \to L(A,L^*)$ wie in § 1.1 und zeigen, indem wir die Bezeichnungen von § 3.1 beibehalten:

Hilfssatz 5. *Ist $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ mit $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \in U(E)$ und $|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})| < \varepsilon$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ eine (e,h)-Funktion mit Werten in $L(A,L^*)$, so gibt es, falls $\varepsilon > 0$ zu A, A_0^*, $L(A,L^*)$ hinreichend klein gewählt ist, in $A_\nu \times \mathfrak{T}$ (e,h)-Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ mit Werten in $L(A,L^*)$, die in $A_\nu \times \mathfrak{T}$ (e,h)-homotop E sind, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) \circ$ $\circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$.*

Beweis. Wir setzen $s \cdot F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ für $\varrho(s \cdot \varrho^{-1} \circ F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}))$, $0 \leqq s \leqq 1$. Offenbar ist $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) = s \cdot F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ eine (e,h)-Deformation von $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ auf E. Es ist $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},1)$ $= F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ und $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},0) = E(\mathfrak{z})$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{T}_0$ den Raum $\mathfrak{T} \times \{s\}$ und zeichnet man in $\mathfrak{T}_0$ als $\mathfrak{H}$-Menge die Menge $\mathfrak{H} \times \{s\}$ und als $\mathfrak{E}$-Menge die Menge $\mathfrak{E} \times \{s\}$ aus, so folgt, daß $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ eine (e,h)-Funktion in $A_0 \times \mathfrak{T}_0$ ist. Daher ist Hilfssatz 5 bewiesen, wenn es gelingt in $A_1 \times \mathfrak{T}_0$, $A_2 \times \mathfrak{T}_0$ (e,h)-Funktionen $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$, $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ so zu bestimmen, daß gilt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) \quad \text{auf} \quad A_0 \times \mathfrak{T}_0\,, \\ &F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},0) = E(\mathfrak{z}) \quad \text{auf} \quad A_\nu \times \mathfrak{T}\,,\ \nu = 1, 2\,. \end{aligned}$$

Die Aussage von Hilfssatz 5 folgt, wenn wir $s = 1$ setzen.

Offenbar ist (vgl. § 3.1) $\lambda(\mathfrak{t},s) = \{\lambda(x,\mathfrak{t},s)\}$: $\{x \to \varrho^{-1}(F(\pi(x),\mathfrak{t},s) \circ \varrho(x) \circ$ $\circ F^{-1}(\pi(x),\mathfrak{t},s))\}$ in bezug auf $\mathfrak{T}_0$ eine lineare (e,h)-Abbildung von $(U(0) \cap$ $\cap V_L(A_0^*)) \times \mathfrak{T}_0$ in $V_L(A_0^*)$. Da λ linear ist, dürfen wir annehmen, daß $\lambda(\mathfrak{t},s)$ sogar ganz $V_L(A_0^*) \times \mathfrak{T}_0$ auf $V_L(A_0^*)$ abbildet. Läßt man $\sup|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})|$ gegen 0 gehen, so wird auch $|F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)|$ und damit $\|\lambda(\mathfrak{t},s)\|$ beliebig klein. Wir können deshalb voraussetzen, daß $\|\lambda(\mathfrak{t},s)\|$ hinreichend klein im Sinne von Satz 9 ist.

Es sei nun ${}^*F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ eine (e,h)-Funktion in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$, die ihre Werte in $V_L(A)$ annimmt. Durch Integration zeigt man leicht, daß man zu ${}^*F_\nu$ in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$ eine (e,h)-Funktion $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$, $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},0) \equiv E$, mit Werten in $L(A, L^*)$ bestimmen kann, für die $\lim\limits_{s' \to s} \frac{1}{s'-s}\, \varrho^{-1}(F_\nu(\mathfrak{z}, \mathfrak{t}, s') \circ F_\nu^{-1}(\mathfrak{z}, \mathfrak{t}, s)) = {}^*F_\nu(\mathfrak{z}, \mathfrak{t}, s)$ ist. Beachtet man noch, daß (1) zu

$$(2)\qquad \begin{aligned} &F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s') \circ F^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) = [F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s') \circ (F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s') \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s))^{-1} \circ F^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s')] \circ \\ &\qquad\qquad \circ (F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s') \circ F_1^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)) \\ &\text{auf} \quad A_0 \times \mathfrak{T},\ 0 \leqq s \leqq s' \leqq 1;\ s' - s < \varepsilon^* \quad \text{beliebig klein;} \\ &F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},0) \equiv E \quad \text{auf} \quad A_\nu \times \mathfrak{T},\ \nu = 1, 2\,, \end{aligned}$$

äquivalent ist, so folgt, daß man zur Konstruktion der Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ in (1) nur (e,h)-Funktionen ${}^*F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$ zu bestimmen braucht, für die gilt:

(3) $$*F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) - \lambda(\mathfrak{t},s)\,\square\, *F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s) = *F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)\,.$$

Dabei bezeichnet $*F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ die (e,h)-Funktion $\lim\limits_{s'\to s}\frac{1}{s'-s}\,\varrho^{-1}(F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s')\circ F^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)) = \varrho^{-1}\circ F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$. Die Existenz der Funktionen $*F_\nu(\mathfrak{z},\mathfrak{t},s)$ ist aber auf Grund von Satz 9 gewährleistet. — Somit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Als Endergebnis unserer Untersuchungen in den Abschnitten § 2.1 bis 4., § 3. 1 und 2 zeigen wir nun:

Satz 10. *Es sei* ${}^p\mathfrak{Z}$ *ein abgeschlossenes Pflaster:* $\{\mathfrak{z}\in C^n,\ |x_\nu|\leqq a_\nu,\ b-a\leqq x_p\leqq b+a^*,\ x_\mu=b_\mu,\ z_\varkappa=x_{2\varkappa}+i\,x_{2\varkappa},\ \nu=1\ldots p-1,\ \mu=p+1\ldots 2n,\ \varkappa=1\ldots n\}$; $\mathfrak{Z}_1$ *sei das Pflaster* $\{\mathfrak{z}\in{}^p\mathfrak{Z},\ b-a\leqq x_p\leqq b\}$, $\mathfrak{Z}_2$ *das Pflaster* $\{\mathfrak{z}\in{}^p\mathfrak{Z}.\ b\leqq x_p\leqq b+a^*\}$. *Es gelte* $a_\nu\geqq 0,\ a^*>0,\ a>0,\ b,\ b_\mu$ *reell. Ferner seien A eine in (einer Umgebung von)* ${}^p\mathfrak{Z}$ *normal eingebettete analytische Menge und* $\mathfrak{T}$ *ein kompakter Raum, an dem eine* $\mathfrak{E}$- *und eine* $\mathfrak{H}$-*Menge ausgezeichnet sind. Es werde* $\mathfrak{Z}_0=\mathfrak{Z}_1\cap\mathfrak{Z}_2,\ A_0=A\cap\mathfrak{Z}_0\ A_1=A\cap\mathfrak{Z}_1,\ A_2=A\cap\mathfrak{Z}_2$ *gesetzt. Ist dann* $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$ *eine in* $A_0\times\mathfrak{T}$ *holomorph-retraktible*[15]) (e,h)-*Funktion mit Werten in einem Faserraum* $L(A,L^*)$, *so gibt es in* $A_1\times\mathfrak{T},\ A_2\times\mathfrak{T}$ *holomorph-retraktible* (e,h)-*Funktionen* $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t}),\ F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, *so daß in* $A_0\times\mathfrak{T}$ *gilt:* $F_1\circ F_2^{-1}\equiv F$.

Beweis. Offenbar brauchen wir Satz 10 nur für den Sonderfall zu beweisen, wo $a=a^*,\ b=b_\mu=0$ für $\mu=p+1,\ldots,2n$ ist. Es sei also angenommen, daß dieser Fall vorliege. A ist nach Voraussetzung in einer Umgebung $U({}^p\mathfrak{Z})$ normal eingebettet. Da wir für U eine holomorph-konvexe Umgebung wählen können, dürfen wir annehmen, daß A ein holomorph vollständiger Raum ist. Da es ferner beliebig kleine Umgebungen $V(A_0)\subset A$ gibt, die in bezug auf A konvex sind, existiert nach Satz 1 eine in $A\times\mathfrak{T}$ holomorph retraktible (e,h)-Funktion $\hat F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})$, so daß in einer Umgebung $A_0^*\times\mathfrak{T}$ von $A_0\times\mathfrak{T}$ gilt: $'F(\mathfrak{z},\mathfrak{t}) = \hat F^{-1}(\mathfrak{z},\mathfrak{t})\circ F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})\in U(E),\ |\,'F(\mathfrak{z},\mathfrak{t})|<\varepsilon$ (ε hinreichend klein im Sinne von Hilfssatz 5). Aus Hilfssatz 5 folgt dann, daß in $A_1,\ A_2$ (e,h)-Funktionen $\tilde F_1,\ \tilde F_2$ existieren, mit denen $'F=\tilde F_1\circ\tilde F_2^{-1}$ ist. Setzt man noch $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t})=\hat F_1\circ\tilde F_1,\ F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t})=\tilde F_2$, so gilt $F_1\circ F_2^{-1}=F$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

3. Es ist nun möglich, Satz 7 ziemlich schnell zu beweisen. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion, indem wir die Richtigkeit einer Folge von Hilfssätzen zeigen; Satz 7 wird sich als Spezialfall dieser Hilfssätze erweisen.

Es sei $\mathfrak{Z}^p=\{\mathfrak{z}=(z_1\ldots z_n),\ |x_\nu|\leqq a_\nu,\ x_\mu=b_\mu,\ z_\varkappa=x_{2\varkappa-1}+i\,x_{2\varkappa},\ \nu=1\ldots p,\ \mu=p+1\ldots n,\ \varkappa=1\ldots n\}$ ein beliebiges abgeschlossenes Pflaster im C^n. A sei eine in (einer Umgebung von) $\mathfrak{Z}^p$ normal eingebettete analytische Menge, $L(A,L^*)$ ein analytischer Faserraum über A im Sinne von § 1,1. Mit $\mathfrak{T}_1=\mathfrak{T}\times\{t\}$ werde wieder ein kompakter Raum bezeichnet, an dem eine $\mathfrak{E}$- und eine $\mathfrak{H}$-Menge ($\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_1$) ausgezeichnet sind. Die $\mathfrak{C}$-Menge und die $\mathfrak{H}^0$-Menge von $\mathfrak{T}_1$ seien wie in § 1,3 definiert. Wir zeigen:

[15]) Eine (e,h)-Funktion $F(r,\mathfrak{t})$ heißt holomorph retraktibel, wenn sie (e,h)-homotop E ist.

Hilfssatz 6_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$: *Zu jeder (e,h)-Funktion $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ in $A \times \mathfrak{T}_1$ mit Werten in $L(A, L^*)$ gibt es in $A \times \mathfrak{T}_1$ eine (e,h^0)-Funktion ${}^0F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$, die dort zu $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotop ist.*

Offenbar erhält man Satz 7 aus den Hilfssätzen 6_p, wenn man $p = 2n$ setzt. Wir führen unsere Induktion nun so, daß wir zunächst zeigen, daß Hilfssatz 6_0 richtig ist; dann beweisen wir, daß aus Hilfssatz 6_p der Hilfssatz 6_{p+1} folgt.

Für $p = 0$ ist $\mathfrak{Z}^p$ ein Punkt $\mathfrak{z}_0 \in C^n$. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A diesen Punkt enthält. Anderfalls wäre die Aussage von Hilfssatz 6_0 leer. Ferner dürfen wir voraussetzen, daß $L(A, L^*) = A \times L$ ist, und somit F als Abbildung $A \times \mathfrak{T}_1 \to L$ auffassen.

Sei also $\mathfrak{z}_0 \in A$! Wir bezeichnen mit $\varphi(t,s)$ eine Deformation in $0 \leqq t \leqq 1$ der Funktion $\varphi(t,1) \equiv t$ auf eine nirgends negative Funktion $\varphi(t) = \varphi(t,0)$. Es sei überall $0 \leqq \varphi(t,s) \leqq 1$, $\varphi(0,s) = 0$, $\varphi(1,s) = 1$, für $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ gelte $\varphi(t) = 1$. Setzen wir $F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},\varphi(t,s))$, so ist F_1 eine (e,h,c)-Deformation von $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ auf eine (e,h)-Funktion $\tilde{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = F_1(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$. Es bezeichne weiter $\psi(t,s)$ eine Deformation in $0 \leqq t \leqq 1$ der Funktion $\psi(t,1) \equiv 1$ auf eine reelle stetige Funktion $\psi(t) = \psi(t,0)$, für die $\psi(t) = 0$, $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ und $\psi(1) = 1$ gilt. Es sei überall $0 \leqq \psi(t,s) \leqq 1$, $\psi(1,s) = 1$. In hinreichender Nähe von $\mathfrak{z}_0 \times \mathfrak{T}_1$ gilt: $H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) =_{Def} \tilde{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) \circ \tilde{F}^{-1}(\mathfrak{z}_0,\mathfrak{t},t) \in U(e) \subset L$. Es läßt sich deshalb die (e,h,c)-Deformation $H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = \psi(t,s) \cdot H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ von $H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ auf die (e,h^0)-Funktion ${}^0H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$ konstruieren. Setzen wir $F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = H(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) \circ \tilde{F}(\mathfrak{z}_0,\mathfrak{t},t)$, so erhalten wir eine (e,h,c)-Deformation von $\tilde{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ auf die (e,h^0)-Funktion ${}^0F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = F_2(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$. Die beiden Deformationen F_1, F_2 hintereinander ausgeführt, ergeben eine (e,h,c)-Deformation von F auf ${}^0F$. Also ist F zu der (e,h^0)-Funktion ${}^0F$ (e,h,c)-homotop, q.e.d.

Wir zeigen nun, daß aus Hilfssatz 6_p der Hilfssatz 6_{p+1} folgt. Sei also $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ eine (e,h)-Funktion in $A \times \mathfrak{T}_1$, wobei A eine in einer Umgebung $U(\mathfrak{Z}^{p+1})$ normal eingebettete analytische Menge ist. Wir ordnen $\mathfrak{Z}^{p+1}$ die Kastenmengen $D_b = \{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leqq a_\nu, x_{p+1} = b, x_\mu = b_\mu, \nu = 1 \ldots p, \mu = p+2 \ldots 2n\}$ zu ($|b| \leqq a_{p+1}$). Nach Hilfssatz 6_p kann man zu D_b Umgebungen $U_b'(D_b) \subset U$ und in $A_b \times \mathfrak{T}_1$, $A_b = A \cap U_b'$, (e,h^0)-Funktionen ${}^0F_b(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ finden, die dort zu $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotop sind. Daraus folgt nach Heine-Borel: es gibt eine Folge reeller Zahlen b_μ, $\mu = 0, 1, 2 \ldots q$, mit $b_0 = -a_{p+1}$, $b_q = a_{p+1}$, $b_{\mu+1} \geqq b_\mu$, derart, daß folgende Aussage richtig ist:

Zu den Kastenmengen $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(\varkappa)} = \{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leqq a_\nu, b_{\varkappa-1} \leqq x_{p+1} \leqq b_\varkappa, x_\mu = b_\mu, \nu = 1 \ldots p, \mu = p+2 \ldots 2n\}$ existieren in $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(\varkappa)} \times \mathfrak{T}_1$ (e,h^0)-Funktionen ${}^0\tilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$, die dort vermöge (e,h,c)-Deformationen $\tilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$ zu $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ homotop sind.

Dabei werde s so normiert, daß $\tilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,1) = {}^0\tilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$, $\tilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0) \equiv F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ ist.

Wir setzen jetzt $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \times \{s\}$ und zeichnen wie in § 1,4 in $\mathfrak{T}_2$ als $\mathfrak{E}$-Menge die Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{E}_1 \times \{s\}$ und als $\mathfrak{H}$-Menge die Menge

$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{H}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{H}_1^0 \times 1$ aus. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

1) $\mathfrak{Z}_1^{(\varkappa)} = \bigcup_{\nu=1\ldots\varkappa} \widetilde{\mathfrak{Z}}^{(\nu)}, \ \mathfrak{Z}_2^{(\varkappa)} = \widetilde{\mathfrak{Z}}^{(\varkappa+1)};$

2) $\mathfrak{D}^{(\varkappa)} = \mathfrak{Z}_1^{(\varkappa)} \cap \mathfrak{Z}_2^{(\varkappa)}$

3) $A_0^{(\varkappa)} = A \cap \mathfrak{D}^{(\varkappa)}, \ A_1^{(\varkappa)} = A \cap \mathfrak{Z}_1^{(\varkappa)}, \ A_2^{(\varkappa)} = A \cap \mathfrak{Z}_2^{(\varkappa)}.$

Setzen wir nun $H_1^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{F}_1$, $H_2^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{F}_2$, so läßt sich in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ $H_0^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = H_1^{(1)} \circ H_2^{(1)-1}$ als (e,h)-Funktion auffassen. $H_0^{(1)}$ ist nach Hilfssatz 6_p in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ zu einer (e,h^0)-Funktion ${}^0H_0^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$ (e,h,c)-homotop. Da in $\mathfrak{T}_2$ die Menge $^*\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2^0 \cap \mathfrak{T}_1 \times \{s, 0 < s \leqq 1\}$ in der Form $^*\mathfrak{H} = {}'\mathfrak{H} \times \times \{s, 0 \leqq s \leqq 1\}$ gegeben werden kann und analoges für die $\mathfrak{E}$-Menge $\mathfrak{E}_2$ gilt, ist $G(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s,t') = {}^0H_0^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s\cdot t')$ eine (e,h^0)-, also erst recht eine (e,h)-Deformation von ${}^0H_0^{(1)}$ auf E. Da ferner $H_0^{(1)}$, ${}^0H_0^{(1)}$ (e,h)-homotop sind, ist auch $H_0^{(1)}$ in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ auf E (e,h)-deformierbar.

Aus Satz 10 folgt daher: es gibt in $A_1^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$, $A_2^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ (e,h)-Funktionen $\widetilde{H}_1^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$, $\widetilde{H}_2^{(1)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$, so daß in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $\widetilde{H}_1^{(1)} \circ \widetilde{H}_2^{(1)-1} = H_0^{(1)}$. Offenbar ist in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$: $\widetilde{H}_1^{(1)-1} \circ H_1^{(1)} = \widetilde{H}_2^{(1)-1} \circ H_2^{(1)}$. Wir dürfen deshalb in $A_1^{(2)} \times \mathfrak{T}_2$, $A_1^{(2)} = A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)}$, setzen: $H_1^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{H}_1^{(1)-1} \circ H_1^{(1)} = \widetilde{H}_2^{(1)-1} \circ H_2^{(1)}$. $H_1^{(2)}$ ist in $A_1^{(2)} \times \mathfrak{T}_2$ eine (e,h,c)-Deformation der (e,h^0)-Funktion ${}^0F^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = H_1^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,1)$ auf $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = H_1^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$.

Wir definieren nun in $A_2^{(2)} \times \mathfrak{T}_2$ eine Funktion $H_2^{(2)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$, indem wir dort $H_2^{(2)} = \widetilde{F}_3$ setzen, und erhalten durch Anwendung des vorhin beschriebenen Verfahrens auf $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ in $A_1^{(3)} \times \mathfrak{T}_1$ eine (e,h,c)-Deformation $H_1^{(3)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$ einer (e,h^0)-Funktion ${}^0F^{(3)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = H_1^{(3)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,1)$ auf $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = H_1^{(3)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$. Wir setzen darauf $H_2^{(3)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = \widetilde{F}_4$, wenden wieder unser Verfahren an und fahren so beliebig fort. Nach $(q-1)$ Schritten haben wir schließlich in $A_1^{(q)} \times \mathfrak{T}_1$ eine (e,h,c)-Deformation $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s) = H_1^{(q)}(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,s)$ einer (e,h^0)-Funktion ${}^0F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) = F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,1)$ auf $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t) \equiv F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t,0)$ erhalten. Nun ist $\mathfrak{Z}_1^{(q)} = \mathfrak{Z}^{p+1}$, $A_1^{(q)}$ also gleich A. $F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ ist also in $A \times \mathfrak{T}_1$ zu einer (e,h^0)-Funktion ${}^0F(\mathfrak{z},\mathfrak{t},t)$ (e,h,c)-homotop, q.e.d.

§ 4. Lokale Schnitte in $L(\mathfrak{R}, L^*)$

1. Wir untersuchen in diesem Paragraphen die Garbe der lokalen holomorphen Schnitte in $L(\mathfrak{R}, L^*)$. Es sei wieder $\mathfrak{Z}$ ein abgeschlossenes Pflaster $\{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leqq a_\nu, |y_\nu| \leqq b_\nu, \nu = 1 \ldots n\} \subset C^n$, $a_\nu \geqq 0$, $b_\nu \geqq 0$. Wir setzen $a_\nu^{(\varkappa)} = -a_\nu + \varkappa \frac{2a_\nu}{j_\nu}$, $b_\nu^{(\lambda)} = -b_\nu + \lambda \frac{2b_\nu}{k_\nu}$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, j_\nu$, $\lambda = 0, 1, \ldots, k_\nu$. Offenbar ist $a_\nu^{(0)} = -a_\nu$, $a_\nu^{(j_\nu)} = a_\nu$, $b_\nu^{(0)} = -b_\nu$, $b_\nu^{(k_\nu)} = b_\nu$. Mit $T^{jk}(\mathfrak{Z})$ bezeichnen wir dann die Gesamtheit der Kästen $\{\mathfrak{z}, a_\nu^{(\varkappa_\nu - 1)} \leqq x_\nu \leqq a_\nu^{(\varkappa_\nu)}, b_\nu^{(\lambda_\nu - 1)} \leqq y_\nu \leqq b_\nu^{(\lambda_\nu)}\}$, $\varkappa_\nu = 1 \ldots j_\nu$, $\lambda_\nu = 1 \ldots k_\nu$, $\nu = 1 \ldots n$. $\mathfrak{Z}_\lambda$, $\lambda = 1 \ldots \Pi j_\nu \cdot \Pi k_\nu = jk$, sei eine Durchnumerierung dieser Pflaster. Ferner sei A eine in (einer Umgebung von) $\mathfrak{Z}$ normal eingebettete analytische Menge und $L(A, L^*)$ ein Faserraum über A im Sinne von § 1.1. Wir zeigen:

Hilfssatz 7. *In allen Durchschnitten* $A_{\nu\mu} = A \cap \mathfrak{Z}_\nu \cap \mathfrak{Z}_\mu$, $\nu, \mu = 1 \ldots jk$, *seien holomorphe Funktionen* $F_{\nu\mu}(\mathfrak{z})$ *mit Werten in* $L(A, L^*)$ *gegeben, in den* $A_\nu = A \cap \mathfrak{Z}_\nu$ *gebe es ferner stetige Funktionen* $S_\nu(\mathfrak{z})$ *mit Werten in* $L(A, L^*)$, *so daß in allen* $A_{\nu\mu}$ *gilt:* $F_{\nu\mu}(\mathfrak{z}) = S_\nu(\mathfrak{z}) \circ S_\mu^{-1}(\mathfrak{z})$. *Dann kann man in* A_ν *auch holomorphe Funktionen* $F_\nu(\mathfrak{z})$ *mit* $F_\nu(\mathfrak{z}) \circ F_\mu^{-1}(\mathfrak{z}) = F_{\nu\mu}(\mathfrak{z})$ *finden.*

Wir beweisen Hilfssatz 7 durch einen Induktionsschluß. Offenbar ist im Falle $jk = 1$ die in ihm enthaltene Aussage leer und deshalb richtig. Zum Beweis des allgemeinen Falles ist also nur noch zu zeigen, daß der Hilfssatz 7 sich für $jk = j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ ergibt, wenn er für $jk < j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ bewiesen ist.

Sei also Hilfssatz 7 für $jk < j^{(0)} k^{(0)}$ (mit $j^{(0)} k^{(0)} > 1$) richtig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen, daß die Koordinaten z_ν des C^n so gewählt und durchnumeriert sind, daß $j_1^{(0)} > 1$ ist (mit $j^{(0)} = j_1^{(0)} \cdot \ldots \cdot j_n^{(0)}$). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}^{(1)}$ das Kastengebiet $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ x_1 \leqq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$ und setzen $\mathfrak{Z}^{(2)} = \{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ x_1 \geqq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$. Wir denken uns die Menge der Kästen aus $T^{j^{(0)}k^{(0)}}$ in der Weise durchnumeriert, daß gilt $\mathfrak{Z}_\lambda \subset \mathfrak{Z}^{(1)}$, falls $\lambda \in X_1 = \{1, \ldots, r_0 = j^{(0)} k^{(0)} \frac{j_1^{(0)} - 1}{j_1^{(0)}}$, und $\mathfrak{Z}_\lambda \subset \mathfrak{Z}^{(2)}$ für $\lambda \in X_2 = \{r_0 + 1, \ldots, j^{(0)} k^{(0)}\}$. Da $\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{(2)}$ weniger Kästen als $\mathfrak{Z}$ enthalten, gibt es nach Induktionsvoraussetzung in A_λ holomorphe Funktionen $\widetilde{F}_\lambda(\mathfrak{z})$, so daß $F_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z}) = \widetilde{F}_\varkappa(\mathfrak{z}) \circ \widetilde{F}_\lambda^{-1}(\mathfrak{z})$ ist, wenn $\varkappa, \lambda$ simultan X_1 oder X_2 angehören. Man zeigt leicht, daß durch die Setzung $\widetilde{F}(\mathfrak{z}) = \widetilde{F}_\varkappa^{-1}(\mathfrak{z}) \circ F_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z}) \circ \widetilde{F}_\lambda(\mathfrak{z})$, $\varkappa \in X_1, \lambda \in X_2$ in $A^{(0)} = A \cap \mathfrak{Z}^{(1)} \cap \mathfrak{Z}^{(2)}$ unabhängig von $\varkappa, \lambda$ eine holomorphe Funktion $\widetilde{F}(\mathfrak{z})$ festgelegt ist. Ebenso sind $S^{(\nu)}(\mathfrak{z}) = \widetilde{F}_\lambda^{-1}(\mathfrak{z}) \circ S_\lambda(\mathfrak{z})$, $\lambda \in X_\nu$, in $A^{(\nu)} = A \cap \mathfrak{Z}^{(\nu)}$ eindeutig definierte stetige Funktionen. In $A^{(0)}$ gilt $S^{(1)}(\mathfrak{z}) \circ (S^{(2)}(\mathfrak{z}))^{-1} = \widetilde{F}(\mathfrak{z})$. Da nun die $A^{(\nu)}$ beliebig kleine holomorph-vollständige Umgebungen $U_\nu \subset A$ besitzen, gibt es nach Satz 6 in $A^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen $\widetilde{F}^{(\nu)}(\mathfrak{z})$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die dort auf $S^{(\nu)}(\mathfrak{z})$ deformierbar sind. $^*F(\mathfrak{z}) = (\widetilde{F}^{(1)})^{-1} \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{F}^{(2)}$ ist dann auf $E(\mathfrak{z})$ stetig, nach Satz 3 sogar über lauter holomorphe Funktionen deformierbar. Aus Satz 10 folgt, daß in $A^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen $^*F^{(\nu)}(\mathfrak{z})$ existieren, so daß in $A^{(0)}: {}^*F(\mathfrak{z}) = {}^*F^{(1)}(\mathfrak{z}) \circ ({}^*F^{(2)}(\mathfrak{z}))^{-1}$ ist. Offenbar gilt: $F^{(1)}(\mathfrak{z}) \circ (F^{(2)}(\mathfrak{z}))^{-1} = \widetilde{F}(\mathfrak{z})$ für $F^{(\nu)}(\mathfrak{z}) = \widetilde{F}^{(\nu)}(\mathfrak{z}) \circ {}^*F^{(\nu)}(\mathfrak{z})$ und mithin $F_\lambda(\mathfrak{z}) \circ F_\varkappa^{-1}(\mathfrak{z}) = F_{\lambda\varkappa}(\mathfrak{z})$, wenn $\lambda, \varkappa \in X_1 \cup X_2$ und $F_\mu(\mathfrak{z}) = \widetilde{F}_\mu(\mathfrak{z}) \circ F^{(\nu)}(\mathfrak{z})$ ist. Hierbei ist, falls $\mu \in X_1$, der Index $\nu = 1$, falls $\mu \in X_2$, gleich 2 zu nehmen. Hilfssatz 7 ist damit bewiesen.

2. Wir verwenden Hilfssatz 7, um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein holomorph vollständiger Raum,* $\{W_\iota,\ \iota \in I\}$ *sei eine offene Überdeckung von* $\mathfrak{R}$, *ferner sei* $L(\mathfrak{R}, L^*)$ *ein analytischer Faserraum im Sinne von* § 1.1, $F_{\iota_1\iota_2}(r)$ *seien in den Durchschnitten* $W_{\iota_1\iota_2} = W_{\iota_1} \cap W_{\iota_2}$ *definierte holomorphe Funktionen mit Werten in* $L(\mathfrak{R}, L^*)$. *Gibt es dann in den* W_ι *stetige Funktionen* $S_\iota(r)$, *für die in* $W_{\iota_1\iota_2}$ *stets* $S_{\iota_1} \circ S_{\iota_2}^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$ *ist, so existieren in* W_ι *sogar holomorphe Funktionen* $F_\iota(r)$ *mit Werten in* $L(\mathfrak{R}, L^*)$, *so daß in allen* $W_{\iota_1\iota_2}$ *gilt:* $F_{\iota_1}(r) \circ F_{\iota_2}^{-1}(r) = F_{\iota_1\iota_2}(r)$.

Beweis. Da $\mathfrak{R}$ ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man $\mathfrak{R}$ durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{p}\,\{r \in \mathfrak{R}, |\mathrm{Re} f_\mu(r)| < 1, |\mathrm{Im} f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \ldots p\} \Subset \mathfrak{R}$ ausschöpfen. Dabei bezeichnet $\mathfrak{p}$ die Vereinigung einer oder mehrerer zusammenhängender Komponenten des Bereiches $\{\}$. die $f_\mu(r)$ sind endlich viele in $\mathfrak{R}$ holomorphe, komplexwertige Funktionen. Es gelte $\mathfrak{P}_\nu \Subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Nach bekannten Sätzen ist $\mathfrak{P}_\nu$ zu einer analytischen Menge A analytisch äquivalent[16]), die in einem Pflaster $\mathfrak{Z}$ normal eingebettet ist. Die Punkte von A und $\mathfrak{P}_\nu$ wollen wir als identisch ansehen. Wählen wir die in § 4.1 besprochene Unterteilung T^{jk} von $\mathfrak{Z}$ in Kästen $\mathfrak{Z}_\lambda$ hinreichend fein, so ist $\{A_\lambda\}$, $A_\lambda = A \cap \mathfrak{Z}_\lambda$, in $\mathfrak{P}_\nu$ eine Verfeinerung von $\{W_\iota\}$. Es gibt eine Zuordnung $\tau: \{\lambda\} \to I$, so daß $A_\lambda \subset W_{\tau(\lambda)}$. In A_λ setzen wir $\tilde{S}_\lambda(r) = S_{\tau(\lambda)}(r)$ und in $A_{\varkappa\lambda} = A_\varkappa \cap A_\lambda$ stets $\tilde{F}_{\varkappa\lambda} = F_{\tau(\varkappa)\,\tau(\lambda)}$. Offenbar ist $\tilde{S}_\varkappa(r) \circ \tilde{S}_\lambda^{-1}(r) = \tilde{F}_{\varkappa\lambda}(r)$ in $A_{\varkappa\lambda}$. Nach Hilfssatz 7 gibt es also in den A_λ holomorphe Funktionen $\tilde{F}_\lambda(r)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, für die gilt: $\tilde{F}_\varkappa(r) \circ \tilde{F}_\lambda^{-1}(r) = \tilde{F}_{\varkappa\lambda}(r)$. Man errechnet leicht, daß durch die Setzung ${}^*F_\iota^{(\nu)}(r) = F_{\iota\,\tau(\lambda)} \circ \tilde{F}_\lambda$ für $\lambda \in X_1 \cup X_2$ unabhängig von λ in $W_\iota^{(\nu)} = W_\iota \cap \mathfrak{P}_\nu$ holomorphe Funktionen definiert werden, derart, daß in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)} = W_{\iota_1}^{(\nu)} \cap W_{\iota_2}^{(\nu)}$ stets gilt: ${}^*F_{\iota_1}^{(\nu)} \circ ({}^*F_{\iota_2}^{(\nu)})^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}(r)$.

Da $\mathfrak{P}_\nu$ holomorph vollständig ist, gibt es nach Satz 6 zu der eindeutigen Funktion ${}^*S^{(\nu)}(r) = S_\iota^{-1} \circ {}^*F_\iota^{(\nu)}$ eine homotope holomorphe Funktion ${}^*F^{(\nu)}(r)$. Offenbar gilt für $F_\iota^{(\nu)} = {}^*F_\iota^{(\nu)} \circ ({}^*F^{(\nu)})^{-1}: F_{\iota_1}^{(\nu)} \circ (F_{\iota_2}^{(\nu)})^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$ in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)}$ und $S^{(\nu)}(r) = S_\iota^{-1} \circ F_\iota^{(\nu)}$ ist in $\mathfrak{P}_\nu$ auf $E(r)$ deformierbar.

Wir halten dieses Zwischenergebnis in einem Hilfssatz fest.

Hilfssatz 8. *Sind $F_{\iota_1\iota_2}(r)$ in $W_{\iota_1\iota_2}$ definierte holomorphe Funktionen mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ und gibt es in W_ι stetige Funktionen $S_\iota(r)$, so daß in $W_{\iota_1\iota_2}$ stets $S_{\iota_1}(r) \circ S_{\iota_2}^{-1}(r) = F_{\iota_1\iota_2}(r)$ ist, so existieren in $W_\iota^{(\nu)}$, $W_\iota^{(\nu)} = W_\nu \cap \mathfrak{P}_\nu$, holomorphe Funktionen $F_\iota^{(\nu)}(r)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß gilt:*

a) $F_{\iota_1}^{(\nu)}(r) \circ (F_{\iota_2}^{(\nu)}(r))^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}(r)$ in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)}$,

b) $S^{(\nu)}(r) = S_\iota^{-1} \circ F_\iota^{(\nu)}(r)$ *ist in $\mathfrak{P}_\nu$ auf $E(r)$ deformierbar.*

Es werde jetzt der Beweis von Satz 11 fortgeführt. Offenbar ist $F^{(\nu)}(r) = (F_\iota^{(\nu+1)})^{-1} \circ F_\iota^{(\nu)}$ in $\mathfrak{P}_\nu$ eindeutig holomorph und dort stetig – nach Satz 3 sogar über lauter holomorphe Funktionen auf $E(r)$ deformierbar. Nach Satz 1 gibt es deshalb zu $F^{(\nu)}(r)$ eine in $\mathfrak{R}$ holomorphe Funktion $\check{F}^{(\nu)}(r)$, so daß $(\check{F}^{(\nu)}(r))^{-1} \circ F^{(\nu)}(r) \in U(E)$, $|(\check{F}^{(\nu)}(r))^{-1} \circ F^{(\nu)}(r)| < 2^{-\nu}$ für $r \in \mathfrak{P}_{\nu-1}$ gilt. Mit $\check{F}_\iota^{(\nu+1)} = F_\iota^{(\nu+1)} \circ \check{F}^{(\nu)}$ hat man dann in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)}: \check{F}_{\iota_1}^{(\nu+1)} \circ (\check{F}_{\iota_2}^{(\nu+1)})^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$ und in $\mathfrak{P}_{\nu-1}: (\check{F}_\iota^{(\nu+1)})^{-1} \circ F_\iota^{(\nu)} \in U(E), |(\check{F}_\iota^{(\nu+1)})^{-1} \circ F_\iota^{(\nu)}| < 2^{-\nu}$. Man kann also zu vorgegebenen $F_\iota^{(\nu)}$ die $F_\iota^{(\nu+1)}$ so bestimmen, daß sie sich in $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ um weniger als $2^{-\nu}$ von den $F_\iota^{(\nu)}$ unterscheiden. Ist das der Fall, so konvergiert $F_\iota^{(\nu)}$ in W_ι gegen eine Grenzfunktion F_ι[17]). Mit diesen F_ι gilt in allen $W_{\iota_1\iota_2}: F_{\iota_1} \circ F_{\iota_2}^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$. Damit ist Satz 11 bewiesen.

---

[16]) Man vgl. Fußnote 11.

[17]) Das folgt leicht aus der Abschätzung in § 2.1.

3. Wir greifen nun auf die Bezeichnungen von § 4.1 zurück und zeigen folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 9. *Sind in allen $A_{\nu\mu}$ stetige Funktionen $S_{\nu\mu}(\mathfrak{z})$ mit Werten in einem Faserraum $L(A, L^*)$ gegeben und genügt die Verteilung $\{S_{\nu\mu}(\mathfrak{z})\}$ der Verträglichkeitsbedingung $S_{\lambda\nu}(\mathfrak{z}) \circ S_{\nu\mu}(\mathfrak{z}) = S_{\lambda\mu}(\mathfrak{z})$ in $A_\lambda \cap A_\nu \cap A_\mu$, so gibt es in den A_ν stetige Funktionen $S_\nu(\mathfrak{z})$ mit Werten in $L(A, L^*)$, so daß $F_{\nu\mu}(\mathfrak{z}) = S_\nu \circ \circ S_{\nu\mu} \circ S_\mu^{-1}$ in $A_{\nu\mu}$ holomorph ist.*

Wir beweisen den Hilfssatz 9 durch vollständige Induktion. Offenbar ist seine Aussage für $jk = 1$ inhaltsleer und deshalb richtig. Es ist also nur noch zu zeigen, daß Hilfssatz 9 im Falle $jk = j^{(0)} k^{(0)}$ folgt, wenn er für $jk < j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ bewiesen ist.

Sei also Hilfssatz 9 für $jk < j^{(0)} k^{(0)}$ (mit $j^{(0)} k^{(0)} > 1$) richtig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann wieder annehmen, daß die Koordinaten z_ν des C^n so gewählt und durchnumeriert sind, daß $j_1^{(0)} > 1$ ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}^{(1)}$ das Kastengebiet $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}, x_1 \leq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$, setzen $\mathfrak{Z}^{(2)} = \{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}, x_1 \geq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$ und denken uns $T^{j^{(0)} k^{(0)}}$ wie in § 4.1 durchnumeriert. Da $\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{(2)}$ weniger Kästen als $\mathfrak{Z}$ enthält, gibt es nach Induktionsvoraussetzung in A_λ stetige Funktionen $\tilde{S}_\lambda(\mathfrak{z})$, für die $F_{\lambda_1\lambda_2}(\mathfrak{z}) = \tilde{S}_{\lambda_1} \circ S_{\lambda_1\lambda_2} \circ \tilde{S}_{\lambda_2}^{-1}$ holomorph ist, wenn λ_1, λ_2 simultan X_1 oder X_2 angehören. Wir definieren $^*\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(1)} \cap \mathfrak{Z}^{(2)}$ und $^*A = A \cap {}^*\mathfrak{Z}$. Die Durchschnitte $^*A_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda}$, $\varkappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$ sind eine Überdeckung von $^*A$. Wir setzen $^*S_{\varkappa\lambda} = \tilde{S}_\varkappa \circ S_{\varkappa\lambda} \circ \tilde{S}_\lambda^{-1}$ in $^*A_{\varkappa\lambda}$. Offenbar ist in $^*A_{\varkappa_1\lambda_1, \varkappa_2\lambda_2} = {}^*A_{\varkappa_1\lambda_1} \cap {}^*A_{\varkappa_2\lambda_2}$ stets $^*S_{\varkappa_1\lambda_1} \circ F_{\lambda_1\lambda_2} \circ {}^*S_{\varkappa_2\lambda_2}^{-1} = F_{\varkappa_1\varkappa_2}$.

Wir bilden nun die Paare (λ, y), $\lambda \in X_2$, $y \in \pi^{-1}(A_\lambda)$. Ist $\pi(y) \in A_{\lambda_1\lambda_2}$, so werde $\big((\lambda_1, F_{\lambda_1\lambda_2}(\pi(y)) \circ y \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1}(\pi(y))\big) \cong (\lambda_2, y)$ gesetzt. Da $F_{\lambda_1\lambda_2}$ holomorph und die Verteilung F der $F_{\lambda_1\lambda_2}$ verträglich ist, ist $\cong$ eine analytische Äquivalenzrelation[18]). Die Menge der Äquivalenzklassen der Menge $\{(\lambda, y)\}$ bildet mit natürlicher topologischer und komplexer Struktur versehen einen analytischen Faserraum $\mathfrak{F} = L(A^{(2)}, L^* \times L)$ über einer Umgebung $V(A^{(2)}) \subset A$, die wir als holomorph vollständig wählen können. Es ist $(\lambda_1, {}^*S_{\varkappa_1\lambda_1}) \circ (\lambda_2, {}^*S_{\varkappa_2\lambda_2})^{-1} = (\lambda_1, F_{\varkappa_1\varkappa_2} \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1})$. Beachtet man noch, daß es beliebig kleine Umgebungen $U(^*A) \subset V(A^{(2)})$ gibt, die analytische Polyeder in $V(A^{(2)})$ sind, so folgt aus Hilfssatz 8:

Es gibt in $^*A_{\varkappa\lambda}$ holomorphe Funktionen $^*F_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z})$ mit Werten in $L(A, L^*)$, so daß in $^*A_{\varkappa_1\lambda_1, \varkappa_2\lambda_2}$ stets $(\lambda_1, {}^*F_{\varkappa_1\lambda_1}(\mathfrak{z})) \circ (\lambda_2, {}^*F_{\varkappa_2\lambda_2}(\mathfrak{z}))^{-1} = (\lambda_1, F_{\varkappa_1\varkappa_2} \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1})$ und die in $^*A$ eindeutige Funktion $(\lambda, {}^*S_{\varkappa\lambda}^{-1}(\mathfrak{z}) \circ {}^*F_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{z})$ in $^*A$ auf die neutrale Funktion $\mathfrak{E}(\mathfrak{z})$ mit Werten in $\mathfrak{F}$ deformierbar ist.

Nach bekannten Sätzen[19]) gibt es deshalb in $A^{(2)}$ eine stetige Funktion $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{z}) = (\lambda, G_\lambda(\mathfrak{z}))$ mit Werten in $\mathfrak{F}$, die in der Nähe von $^*A$ mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{z})$ überein-

---

[18]) Man vgl. [17].

[19]) Ist F ein Faserbündel über einem normalen Raum X, das eine Schnittfläche S besitzt, und ist S' eine Schnittfläche über einer Umgebung U einer abgeschlossenen Teilmenge $B \subset X$, die über U auf S deformierbar ist, so läßt sich S'/B stets zu einer Schnittfläche über X fortsetzen. Man vgl. [16].

stimmt. In $A_{\lambda_1\lambda_2}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in X_2$ ist stets $G_{\lambda_1} \circ F_{\lambda_1\lambda_2} \circ G_{\lambda_2}^{-1} = F_{\lambda_1\lambda_2}$. Wir setzen $S_\varkappa(\mathfrak{z}) = \widetilde{S}_\varkappa(\mathfrak{z})$, $S_\lambda(\mathfrak{z}) = G_\lambda^{-1}(\mathfrak{z}) \circ \widetilde{S}_\lambda(\mathfrak{z})$, $\varkappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$ und erhalten die Gleichungen: $F_{\varkappa_1\varkappa_2} = S_{\varkappa_1} \circ S_{\varkappa_1\varkappa_2} \circ S_{\varkappa_2}^{-1}$, $F_{\lambda_1\lambda_2} = S_{\lambda_1} \circ S_{\lambda_1\lambda_2} \circ S_{\lambda_2}^{-1}$ für $\varkappa_1, \varkappa_2 \in X_1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in X_2$. Ferner ist $F_{\varkappa\lambda} =_{Def} S_\varkappa \circ S_{\varkappa\lambda} \circ S_\lambda^{-1} = {}^*S_{\varkappa\lambda} \circ G_\lambda = {}^*F_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z})$ holomorph ($\varkappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$). Damit ist Hilfssatz 9 bewiesen.

4. Wir zeigen:

Satz 12. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein holomorph vollständiger Raum, über dem ein Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ definiert ist. $\{W_\iota, \iota \in I\}$ sei eine Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit holomorph-konvexen Teilbereichen W_ι. Ferner seien in allen Durchschnitten $W_{\iota_1\iota_2}$ stetige Funktionen $S_{\iota_1\iota_2}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ gegeben. Genügt dann die Verteilung der $S_{\iota_1\iota_2}$ der Verträglichkeitsbedingung, so gibt es in W_ι stetige Funktionen S_ι mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß in allen $W_{\iota_1\iota_2}$ die Funktionen $F_{\iota_1\iota_2} = S_{\iota_1} \circ S_{\iota_1\iota_2} \circ S_{\iota_2}^{-1}$ holomorph sind.*

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, daß $\{W_\iota\}$ lokal finit ist und daß alle W_ι relativ kompakt in $\mathfrak{R}$ liegen. Da $\mathfrak{R}$ ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man $\mathfrak{R}$ durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{p}\,\{r \in \mathfrak{R}, |\mathrm{Re} f_\mu(r)| < 1, |\mathrm{Im} f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \ldots p\} \Subset \mathfrak{R}$ ausschöpfen. Dabei sind die $f_\mu(r)$ endlich viele in $\mathfrak{R}$ holomorphe Funktionen. Die Folge $\mathfrak{P}_\nu$ sei so gewählt, daß gilt: $\mathfrak{P}_\nu \Subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$ und $W_\iota \subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$, wenn $W_\iota \cap \mathfrak{P}_\nu \neq 0$ ist ($\nu = 1, 2 \ldots$). Wie in § 4.2 ist $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ zu einer analytischen Menge A analytisch äquivalent, die in einem Pflaster $\mathfrak{Z}$ normal eingebettet ist. Wir sehen wieder die Punkte von A und $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ als identisch an. Wählen wir die in § 4.1 definierte Unterteilung $T^{jk}(\mathfrak{Z})$ von $\mathfrak{Z}$ in Kästen $\mathfrak{Z}_\lambda$ hinreichend fein, so ist $\{A_\lambda\}$, $A_\lambda = A \cap \mathfrak{Z}_\lambda$, in $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$ eine Verfeinerung von W_ι. Es gibt also eine Zuordnung $\{\lambda\} \to I$, so daß $A_\lambda \subset W_{\tau(\lambda)}$. In $A_{\varkappa\lambda} = A_\varkappa \cap A_\lambda$ setzen wir $\widetilde{S}_{\varkappa\lambda}(x) = S_{\tau(\varkappa),\tau(\lambda)}(x)$. Offenbar ist für $\{\widetilde{S}_{\varkappa\lambda}\}$ die Verträglichkeitsbedingung erfüllt. Nach Hilfssatz 9 gibt es deshalb in A_λ stetige Funktionen $\widetilde{S}_\lambda(x)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß $\widetilde{F}_{\varkappa\lambda}(x) = \widetilde{S}_\varkappa \circ \widetilde{S}_{\varkappa\lambda} \circ \widetilde{S}_\lambda^{-1}$ in $A_{\varkappa\lambda}$ stets holomorph ist.

$W_\iota^{(\nu)} = W_\iota \cap \mathfrak{P}_\nu$ ist als Durchschnitt zweier holomorph-konvexer Bereiche wieder holomorph-konvex und damit ein holomorph-vollständiger Raum. Wir setzen in $V_\lambda^{(\iota)} = W_\iota^{(\nu)} \cap A_\lambda$: $\hat{S}_\lambda(x) = \widetilde{S}_\lambda \circ S_{\iota\tau(\lambda)}^{-1}$. In $V_{\lambda_1\lambda_2}^{(\iota)} = V_{\lambda_1}^{(\iota)} \cap V_{\lambda_2}^{(\iota)}$ gilt: $\hat{S}_{\lambda_1} \circ \hat{S}_{\lambda_2}^{-1} = \widetilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}(x)$. Es gibt deshalb nach Satz 11 in $V_\lambda^{(\iota)}$ holomorphe Funktionen $F_\lambda^{(\iota)}$ mit $F_{\lambda_1}^{(\iota)} \circ F_{\lambda_2}^{(\iota)-1} = \widetilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}$. Durch die Setzung $S_\iota^{(\nu)}(x) = F_\lambda^{(\iota)-1} \circ \widetilde{S}_\lambda \circ S_{\iota\tau(\lambda)}^{-1}$ ist also unabhängig von λ in $W_\iota^{(\nu)}$ eine stetige Funktion definiert. Offenbar ist $F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)}(x) =_{Def} S_{\iota_1}^{(\nu)} \circ S_{\iota_1\iota_2} \circ (S_{\iota_2}^{(\nu)})^{-1} = (F_\lambda^{(\iota_1)})^{-1} \circ F_\lambda^{(\iota_2)}$ in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)}$ stets holomorph.

Wir bilden nun in $W_\iota^{(\nu)}$ die stetigen Funktionen $T_\iota^{(\nu)}(x) = S_\iota^{(\nu)}(x) \circ (S_\iota^{(\nu+1)}(x))^{-1}$. Es gilt: $F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)}(x) = T_{\iota_1}^{(\nu)}(x) \circ F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)} \circ (T_{\iota_2}^{(\nu)}(x))^{-1}$. Man kann zu der Verteilung $F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)}$ wie in § 4.3 einen Faserraum $\mathfrak{F} = \{(\iota, y), y \in \pi^{-1}(W_\iota^{(\nu+1)})\}$ konstruieren. Aus Hilfssatz 8 folgt deshalb, daß in $W_\iota^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen $(\iota, {}^*T_\iota^{(\nu)}(r))$ existieren, so daß $(\iota_1, {}^*T_{\iota_1}^{(\nu)}) \circ (\iota_2, {}^*T_{\iota_2}^{(\nu)})^{-1} = (\iota_1, F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu)} \circ (F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)})^{-1})$ und $\mathfrak{S}(r) = (\iota, (T_\iota^{(\nu)})^{-1} \circ {}^*T_\iota^{(\nu)})$ in $\mathfrak{P}_\nu$ auf $\mathfrak{E}(r)$ deformierbar ist. Es gibt daher eine Funktion $\mathfrak{S}_1(r) = (\iota, H_\iota(r))$ in $\mathfrak{P}_\nu$ mit Werten in $\mathfrak{F}$, die in $\mathfrak{P}_\nu - \mathfrak{P}_{\nu-1}$ mit $\mathfrak{S}(r)$ übereinstimmt und in $\mathfrak{P}_{\nu-2}$ identisch $\mathfrak{E}(r)$ ist[20]. Setzen wir

$$*S_\iota^{(\nu+1)}(r) = \begin{cases} T_\iota^{(\nu)}(r) \circ H_\iota(r) \circ S_\iota^{(\nu+1)}(r), & \text{falls} \quad W_\iota \cap \mathfrak{P}_{\nu-1} \neq 0 \\ S_\iota^{(\nu+1)}(r), & \text{wenn} \quad W_\iota \cap \mathfrak{P}_{\nu-1} = 0\,, \end{cases}$$

so ist in $W_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)}$ stets $*F_{\iota_1\iota_2}^{(\nu+1)}(r) = *S_{\iota_1}^{(\nu+1)} \circ S_{\iota_1\iota_2} \circ (*S_{\iota_2}^{(\nu+1)})^{-1}$ holomorph. In $W_\iota^{(\nu-2)}$ hat man $*S_\iota^{(\nu+1)}(r) = S_\iota^{(\nu)}(r)$.

Ist die Verteilung $\{S_\iota^{(\nu)}(x)\}$ vorgegeben, so kann man also die $S_\iota^{(\nu+1)}(x)$ so bestimmen, daß in $\mathfrak{P}_{\nu-2}$ gilt: $S_\iota^{(\nu)}(x) = S_\iota^{(\nu+1)}(x)$. Wir dürfen deshalb annehmen, daß unsere Folge $\{S_\iota^{(\nu)}(x)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, diese Eigenschaft hat. Setzt man noch $S_\iota(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} S_\iota^{(\nu)}(x)$, so sind die $S_\iota(x)$ in ganz W_ι definiert und stetig. In allen $W_{\iota_1\iota_2}$ ist $F_{\iota_1\iota_2}(x) =_{Def} S_{\iota_1} \circ S_{\iota_1\iota_2} \circ S_{\iota_2}^{-1}$ holomorph. Damit ist Satz 12 für den untersuchten Sonderfall bewiesen.

Es sei nun $\{W_\iota, \iota \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ als komplexer Raum lokal die Struktur einer analytisch-verzweigten Überlagerung hat, besitzt jeder Punkt $x \in \mathfrak{R}$ beliebig kleine Umgebungen, die holomorph-konvex sind. Ferner ist $\mathfrak{R}$ lokal kompakt und hat als holomorph-vollständiger Raum abzählbare Topologie. Es folgt also, daß $\mathfrak{R}$ parakompakt ist. Man kann daher eine Verfeinerung $\{V_\lambda, \lambda = 1, 2 \ldots\}$ von $\{W_\iota\}$ finden, die lokal-finit ist und aus lauter relativ-kompakten holomorph-konvexen Bereichen V_λ besteht. Wie vorhin gezeigt, gibt es in V_λ stetige Funktionen $\tilde{S}_\lambda$, so daß $\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \tilde{S}_{\lambda_1} \circ S_{\tau(\lambda_1),\tau(\lambda_2)} \circ \tilde{S}_{\lambda_2}^{-1}$ in $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ holomorph ist. Wir setzen jetzt wie in Satz 12 voraus, daß jedes W_ι holomorph-konvex und somit ein holomorph-vollständiger Raum ist. Wie im Falle des analytischen Polyeders $\mathfrak{P}_\nu$ in bezug auf die Überdeckungen $\{A_\lambda\}$, $\{W_\iota^{(\nu)}\}$ beschrieben, kann man in W_ι aus den $\tilde{S}_\lambda(x)$ stetige Funktionen $S_\iota(x)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ konstruieren, so daß in $W_{\iota_1\iota_2}$ stets: $F_{\iota_1\iota_2}(x) = S_{\iota_1} \circ S_{\iota_1\iota_2} \circ S_{\iota_2}^{-1}$ holomorph ist. Damit ist Satz 12 auch im allgemeinen Falle bewiesen.

5. In diesem Abschnitt bezeichne $\mathfrak{R}$ einen holomorph vollständigen Raum, $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein analytisches Faserbündel im Sinne von § 1.1 über $\mathfrak{R}$. Satz 11 läßt sich leicht zu folgender Aussage umformulieren:

Satz 11a. *Es sei $\{W_\iota, \iota \in I\}$ eine offene Uberdeckung von $\mathfrak{R}$. In den $W_{\iota_1\iota_2}$ seien holomorphe Funktionen $F_{\iota_1\iota_2}$, $'F_{\iota_1\iota_2}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ gegeben. Genügt dann die Verteilung der $'F_{\iota_1\iota_2}$ der Verträglichkeitsbedingung und gibt es in den W_ι stetige Funktionen S_ι mit $S_{\iota_1} \circ 'F_{\iota_1\iota_2} \circ S_{\iota_2}^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$, so gibt es in W_ι auch holomorphe Funktionen F_ι mit $F_{\iota_1} \circ 'F_{\iota_1\iota_2} \circ F_{\iota_2}^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$.*

Beweis. Wir bilden wie in Abschnitt 3 zu der Verteilung $'F_{\iota_1\iota_2}$ den Faserraum $\mathfrak{F} = \{(\iota, y),\ \iota \in I,\ y \in \pi^{-1}(W_\iota)\}$. Es gilt dann in allen $W_{\iota_1\iota_2}$: $(\iota_1, S_{\iota_1}) \circ$ $\circ (\iota_2, S_{\iota_2})^{-1} = (\iota_1, F_{\iota_1\iota_2} \circ 'F_{\iota_1\iota_2}^{-1})$. Nach Satz 11 existieren dann in W_ι holomorphe Funktionen (ι, F_ι) mit $(\iota_1, F_{\iota_1}) \circ (\iota_2, F_{\iota_2})^{-1} = (\iota_1, F_{\iota_1} \circ 'F_{\iota_2}^{-1})$ d. h. mit $F_{\iota_1} \circ 'F_{\iota_1\iota_2} \circ F_{\iota_2}^{-1} = F_{\iota_1\iota_2}$.

---

[20] Vgl. Fußnote 19.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{S}^a$ bzw. $\mathfrak{S}^s$ die Garbe der holomorphen bzw. stetigen Schnitte in $L(\mathfrak{R}, L^*)$. $H(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}^a)$ bzw. $H(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}^s)$ sei die 1. Kohomologiemenge von $\mathfrak{R}$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{S}^a$ bzw. $\mathfrak{S}^s$. Die Sätze 11a und 12 besagen dann insbesondere, daß der natürliche Homomorphismus von $H(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}^a)$ in $H(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}^s)$ ein Isomorphismus-auf ist. Wir werden in [14] zeigen, daß sich daraus wichtige Resultate für die Theorie der analytischen Faserräume ergeben.

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin 1935. — [2] BEHNKE, H.: Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des pls. var. Brüssel 1953. — [3] BOURBAKI, N.: XII, Esp. vect. top. — [4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. **19**, 1—26 (1940). — [5] CARTAN, H.: Espaces fibrés analytiques complexes. Séminaire Bourbaki (1950). — [6] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1951—1952, Exposé XVII. — [7] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. sur les fonct. des pls. var. Brüssel 1953. — [8] CARTAN, H.: Espaces fibrés analytiques (vol. consacré au Symposium internat. de Mexico de 1956). — [9] FRENKEL, J.: Sur une classe d'espaces fibrés analytiques. C. r. Acad. Sci. (Paris) **236**, 40—41 (1953).—[10] FRENKEL, J.: Sur les espaces fibrés analytiques complexes de fibre résoluble. C. r. Acad. Sci. (Paris)**241**, 16—18 (1955). — [11] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955). — [12] GRAUERT, H.: Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques. C. r. Acad. Sci. (Paris) **242**, 603—605 (1956). — [13] GRAUERT, H.: Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Math. Ann. **133**, 139—159 (1957). — [14] GRAUERT, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Erscheint in den Math. Ann. 1957/58. —[15] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. Math. **9** (1956). — [16] STEENROD, N.: The Topologie of Fibre Bundles. Princeton 1951. — [17] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93(1956). [18] TIETZ, H.: Laurent-Trennung und zweifach unendliche Fabersysteme. Math. Ann. **129**, 431—450 (1955).

(Eingegangen am 4. Februar 1957)

Druckfehlerberichtigung

zu der Arbeit HELMUT RÖHRL, München, „Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. **133**, 1—25 (1957):

Seite 5, Zeile 20 von oben: „für die auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$"
statt „für den auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphen Vektor $\mathfrak{y}(\tilde{x})$"

Zeile 25 von oben: „$\mathfrak{Y}(\tilde{x})$" statt „$\mathfrak{y}(\tilde{x})$"

Zeile 30 von oben: „eine Integralmatrix"
statt „jedes Element des Lösungsraumes"