Die Erzeugung weitgehend homogener Magnetfelder durch Kreisströme.

Von **Werner Braunbek** in Stuttgart.

(Eingegangen am 1. März 1934.)

Es wird im Anschluß an Arbeiten von G. Fanselau[1]) gezeigt, daß man mit Hilfe von zwei Paaren von Kreisströmen gleicher Stromstärke in der Umgebung des Mittelpunktes der Anordnung ein Magnetfeld erzeugen kann, in dessen Inhomogenitäts-Reihenentwicklung nicht nur (wie bei Fanselau) die *zwei* ersten, sondern bei geeigneter Anordnung die *drei* ersten Reihenglieder gerader Ordnung verschwinden, so daß in der Reihenentwicklung des Magnetfeldes nach dem konstanten Glied als erstes nicht verschwindendes Glied ein solches $\sim r^8$ auftritt. Die notwendigen numerischen Daten für diese Anordnung der Kreisströme werden angegeben.

Die besonders für erdmagnetische Messungen wichtige Aufgabe, über einen nicht zu kleinen Raum ein möglichst homogenes Magnetfeld zu erzeugen, wurde von G. Fanselau[1]) für den Fall behandelt, daß zur Erregung des Magnetfeldes ein oder mehrere Paare koaxialer Kreisströme dienen. Mit *einem* Paar kommt man auf die bekannte Helmholtzsche Anordnung. Fanselau behandelt numerisch vor allem die Anordnung mit zwei Paaren, und kurz auch noch die mit drei Paaren, und findet, daß sich dabei eine immer bessere Homogenität erzielen läßt.

Es soll nun hier gezeigt werden, daß die von Fanselau errechneten Anordnungen *nicht* das Optimum dessen darstellen, was man mit der betreffenden Anzahl von Kreisströmen überhaupt erreichen kann, und daß man insbesondere schon bei zwei Spulenpaaren einen Grad weiter in der Homogenität des Magnetfeldes kommen kann, als dies mit der Anordnung von Fanselau möglich ist.

Der Ausdruck für das magnetische Potential *zweier* Paare von Leiterkreisen, die von *derselben* Stromstärke J durchflossen sind, lautet[2]):

$$\psi = \frac{4\pi J}{c}\left[2 - \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_{n} \frac{r^n}{n} P_n(u)\left\{\frac{1-u_1^2}{R_1^n} P'_n(u_1) + \frac{1-u_2^2}{R_2^n} P'_n(u_2)\right\}\right]. \quad (1)$$

Das erste Glied ($\sim r$) der Summe liefert bei der Differentiation den homogenen Anteil des Feldes. Von den folgenden ($\sim r^3$, $\sim r^5$ usw.) müssen

[1]) G. Fanselau, ZS. f. Phys. **54**, 260, 1929; ZS. f. Geophys. **9**, 236, 1933. — [2]) Die Bezeichnungen stimmen völlig mit denen in der ersten Arbeit von Fanselau (l. c.) überein und sind hier, um eine langwierige Doppelbeschreibung zu vermeiden, nicht noch mal erläutert. Insbesondere bezieht sich auch hier der Index 1 auf das äußere, der Index 2 auf das innere Spulenpaar.

im Interesse einer guten Homogenität möglichst viele zum Verschwinden gebracht werden. Fanselau findet, daß mit *einem* Spulenpaar *ein* Glied, mit zwei Spulenpaaren zwei Glieder, mit drei Spulenpaaren drei Glieder der Summe zu Null gemacht werden können usf. Eine einfache Abzählung der Freiheitsgrade zeigt aber, daß *mehr* möglich sein muß.

Mit *einem* Spulenpaar hat man die einzige Variable u ($\sqrt{1-u^2}/u$ ist gleich Radius durch Abstand der Spule) frei zur Verfügung. Es kann also nur *ein* Glied der Reihe zum Verschwinden gebracht werden. Die Helmholtzsche Anordnung ist die absolut beste, die sich mit *einem* Spulenpaar erreichen läßt. Mit *zwei* Spulenpaaren hat man aber die *drei* Variablen u_1, u_2 und $\varrho = R_1/R_2$. Es müssen also auch *drei* Glieder der Reihe zu Null gemacht werden können. Daß Fanselau dies nur bei *zwei* Gliedern gelingt, liegt an der sehr willkürlichen Art der Auswertung, die zwar die numerische Rechnung sehr vereinfacht, dabei aber einen Freiheitsgrad unter den Tisch fallen läßt. Fanselau findet so für zwei Spulenpaare nur *eine* zufällige von den unendlich vielen möglichen Anordnungen, die *zwei* Reihenglieder zu Null machen. Entsprechend müßte es bei drei Spulenpaaren möglich sein, nicht drei, sondern fünf Reihenglieder zum Verschwinden zu bringen, allgemein bei n Spulenpaaren $(2\,n-1)$ Reihenglieder.

Für die praktisch allein wertvolle Anordnung mit zwei Spulenpaaren hat man nun nach (1) die drei Gleichungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}(1-u_1^2)\,P_3'(u_1) + \varrho^3\,(1-u_2^2)\,P_3'(u_2) &= 0,\\ (1-u_1^2)\,P_5'(u_1) + \varrho^5\,(1-u_2^2)\,P_5'(u_2) &= 0,\\ (1-u_1^2)\,P_7'(u_1) + \varrho^7\,(1-u_2^2)\,P_7'(u_2) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die ziemlich mühsame Diskussion dieses Gleichungssystems zeigt, daß es — trotz der hohen Ordnung der Gleichungen — außer den trivialen Lösungen $u_1 = u_2$; $\varrho = -1$[1]) nur *ein* reelles Wertetripel (mit Doppelvorzeichen bei den u) gibt, welches das Gleichungssystem löst. Dieses Wertetripel habe ich numerisch mit Hilfe von Approximationsmethoden bestimmt zu:

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= \pm\,0{,}742\,13,\\ u_2 &= \pm\,0{,}267\,89,\\ \varrho = \frac{R_1}{R_2} &= +\,1{,}098\,0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dabei ist die jeweils letzte Stelle um höchstens 1 bis 2 Einheiten unsicher.

[1]) Negatives ϱ kann anschaulich so gedeutet werden, daß die Ströme in den beiden Spulenpaaren in verschiedenem Umlaufsinn fließen.

Diese Werte sind von den Fanselauschen nicht sehr verschieden. Die Anordnung von Fanselau liegt also schon ziemlich in der Nähe der hier berechneten absolut günstigsten Anordnung.

Es bleibt noch übrig, für die hier berechnete Anordnung das Mittelpunktsfeld in Funktion des Stromes auszudrücken. Hierfür findet man (in elst. CGS-Einheiten):

$$H_0 = 1{,}4684^5 \cdot \frac{4\pi J}{c R_1} \cdot$$

Oder, wenn i in Amp. gemessen wird:

$$\left.\begin{aligned} [H_0]_{\text{Ørsted}} &= \frac{1{,}8453}{R_1}[i]_{\text{Amp.}}, \\ [H_0]_{\text{Amp./cm}} &= \frac{1{,}4684^5}{R_1}[i]_{\text{Amp.}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wollte man die Bedingung der Gleichheit der Ströme in beiden Spulenpaaren fallenlassen[1]), so wäre es natürlich möglich, mit Hilfe der neuen frei verfügbaren Variablen J_2/J_1 eine Anordnung zu finden, die noch ein viertes Reihenglied zu Null macht. Doch ist dies praktisch ziemlich wertlos, da der erzielte Vorteil durch die bei der Strommessung entstehende Ungenauigkeit mehr als ausgeglichen würde.

Zum Schluß möge ein anschaulicher Vergleich der Homogenität folgen, die sich mit den verschiedenen Anordnungen erzielen läßt. Es ist dabei einmal *in* Achsenrichtung und einmal *senkrecht* zur Achse der Anordnung die Inhomogenität $(H/H_0 - 1)$ in Abhängigkeit von r/R aufgetragen. R bedeutet dabei bei dem einfachen Kreisstrom den Radius, bei der Helmholtzschen Anordnung die Kegel-Mantellinie ($R^2 =$ Radius^2 + Abstand^2), bei den Anordnungen mit zwei Spulenpaaren die Kegel-Mantellinie für das äußere Kreisspulenpaar (hier bisher mit R_1 bezeichnet).

Inhomogenität in Achsenrichtung.

	r/R:	0,1	0,2	0,3
$n = 1$	Einfacher Kreis . . .	$-1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$-6 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}2 \cdot 10^{-1}$
$n = 2$	Helmholtz	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}3 \cdot 10^{-2}$
$n = 4$	Fanselau.	$+8 \cdot 10^{-7}$	$+5 \cdot 10^{-5}$	$+6 \cdot 10^{-4}$
$n = 4$	Braunbek	$-3 \cdot 10^{-8}$	$-9 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-4}$

1) G. Fanselau, 2. Arbeit l. c.

Inhomogenität senkrecht zur Achse.

r/R:		0,1	0,2	0,3
$n = 1$	Einfacher Kreis . . .	$+7{,}5 \cdot 10^{-3}$	$+3 \cdot 10^{-2}$	$+7 \cdot 10^{-2}$
$n = 2$	Helmholtz	$-7 \cdot 10^{-5}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$-6 \cdot 10^{-3}$
$n = 4$	Fanselau.	$-2{,}5 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}6 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-4}$
	Braunbek	$-9 \cdot 10^{-9}$	$-2{,}4 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-5}$

Die Verbesserung der hier berechneten Anordnung gegenüber der von Fanselau ist insofern nicht so bedeutend, wie etwa die von der Helmholtzschen Anordnung zur Fanselauschen, als die sehr kleinen Inhomogenitäten bei kleinen r/R praktisch ziemlich wertlos sind, da sie doch meist von Resten der niedrigeren Reihenglieder, die durch kleine Justierungsfehler hereinkommen, überdeckt werden. Dafür ist diese Verbesserung aber ohne jeden Mehraufwand an Mitteln erzielbar; es sind hier wie bei Fanselau zwei Spulenpaare notwendig. Wenn man schon zwei Spulenpaare benutzt, und sich nicht mit der Helmholtzschen Anordnung begnügt, wird man natürlich *die* Anordnung der zwei Spulenpaare wählen, die theoretisch das Optimum an Feldhomogenität liefert.

Stuttgart, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.