

Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen.

Von

EKKEHART KRÖNER.

(Eingegangen am 8. August 1953.)

Die Verschiebung¹, welche in einem unendlich ausgedehnten hexagonalen Kristall durch eine Einzelkraft hervorgerufen wird, wird durch eine elementare Funktion beschrieben (§2). Für alle anderen Kristallsysteme ist diese Fundamentallösung nicht elementar darstellbar. Eine Näherung mit optimalen Eigenschaften wird in §3 abgeleitet. In hexagonalen Kristallen sind auch ohne Mitwirkung von Volumenkräften rotationssymmetrische Verschiebungen möglich. Diese kann man mit Hilfe einer Verschiebungsfunktion beschreiben, welche der LOVESCHEN Verschiebungsfunktion für isotrope Bereiche analog ist (§2).

§ 1. Einführung.

Man kennt die wichtige Rolle, welche die Funktion $1/4\pi r$ in der Potentialtheorie spielt. $1/4\pi r$ wird als Grundlösung oder nach ZEILON² als Fundamentalintegral der LAPLACESCHEN Differentialgleichung bezeichnet. Analog definiert man in der anisotropen Elastizitätstheorie als Fundamentalintegral der elastischen Differentialgleichungen ohne Mitwirkung von Volumenkräften die Gesamtheit der drei Verschiebungsvektoren $\mathfrak{g}_{-1}^{(x)}$, $\mathfrak{g}_{-1}^{(y)}$, $\mathfrak{g}_{-1}^{(z)}$, die bei einem unendlich ausgedehnten Bereich zu je einer im Ursprung angreifenden in Richtung der positiven x -, y -, bzw. z -Achse wirkenden Einzelkraft vom Betrag 1 gehören. Die drei Verschiebungsvektoren lassen sich zu einem symmetrischen Tensor zusammenfassen

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_{-1} = (\mathfrak{g}_{-1}^{(x)}, \mathfrak{g}_{-1}^{(y)}, \mathfrak{g}_{-1}^{(z)}).$$

Der Index -1 soll andeuten, daß die Komponenten von \mathfrak{S}_{-1} in x , y , z homogen vom Grade -1 sind.

\mathfrak{S} spielt in der anisotropen Elastizitätstheorie eine ähnliche Rolle wie $1/4\pi r$ in der Potentialtheorie. Für \mathfrak{S} gab FREDHOLM³ einen impliziten Ausdruck. Wie die Fundamentalintegrale aller linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten hat auch \mathfrak{S} eine — durch die Kristallsymmetrie gegebene — FOURIER-Transformierte von elementarer Form.

¹ Alle Verschiebungen sind in dieser Arbeit Funktionen des Ortsvektors $r = (x, y, z)$, also Verschiebungsfelder im Kristall.

² Vgl. ZEILON, N.: Ark. Mat. 6, Nr. 23 (1911). Oder FRANK-V. MISES: Die Differential- und Integralgleichung der Mechanik und Physik, 2. Aufl., Bd. 1. XIX, § 5. Braunschweig 1930.

³ FREDHOLM, I.: Acta math., Stockh. 23, 1 (1900).

Die große Bedeutung von \mathfrak{E} liegt erstens darin, daß man durch wiederholtes Differenzieren nach x, y, z immer wieder neue Lösungen der elastischen Differentialgleichungen gewinnen kann. Diese Lösungen sind in Bereichen, die den Ursprung nicht enthalten, regulär. Die sich so ergebenden in x, y, z homogenen Funktionen werden im folgenden als „FREDHOLMSche Funktionen negativen Grades n “ bezeichnet¹. Ihre Anzahl ist $3|2n + 1|$ pro Grad n . Diese Funktionen sind offenbar den Kugelfunktionen negativen Grades in der Potentialtheorie an die Seite zu stellen. In Analogie zur Potentialtheorie darf wohl geschlossen werden, daß sie bezüglich der Entwicklung beliebiger regulärer elastischer² Funktionen in konkaven Bereichen ein vollständiges System bilden. Dabei soll unter einem konkaven Bereich die sich bis ins Unendliche erstreckende Umgebung eines den Ursprung enthaltenden konvexen Bereichs verstanden werden.

Zweitens läßt sich mit Hilfe von \mathfrak{E} stets das partikuläre Integral der inhomogenen elastischen Differentialgleichungen für die Verschiebungen $\mathfrak{s}(\tau)$ angeben. Lauten diese etwa in abgekürzter Schreibweise

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathfrak{s}(x, y, z) + \mathfrak{M}(x, y, z) = 0,$$

so ist das genannte Integral

$$\mathfrak{s}_0(\tau) = \iiint_B \mathfrak{E}(\tau - \tau') \cdot \mathfrak{M}(\tau') d\tau',$$

wo B den Bereich, \mathfrak{M} die räumliche Dichte der äußeren Kräfte bezeichnet. Man kann das Fundamentalintegral geradezu durch diese Gleichung definieren³.

Die anisotrope Elastizitätstheorie ist in neuerer Zeit unter anderem durch die Versetzungstheorie wichtig geworden. Es sei auf Arbeiten von BURGERS⁴ und LEIBFRIED⁵ hingewiesen, in denen das anisotrope Fundamentalintegral eine zentrale Rolle spielt.

§ 2. Das elastische Fundamentalintegral des hexagonalen Kristalls.

Die elastischen Differentialgleichungen für die Verschiebungen ohne Mitwirkung von Volumenkräften lauten

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathfrak{s}(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

¹ Gemeint sind die linear unabhängigen Vektorfelder.

² Elastische Funktion = Lösung von (1).

³ Vgl. ZEILON: l. c.

⁴ BURGERS, I. M.: Proc. Kon. nederl. Acad. Wetensch. **42**, 378 (1939).

⁵ LEIBFRIED, G.: Z. Physik **135**, 23 (1953).

D ist der Tensor mit den Komponenten

$$D_{kl} = c_{iklm} \frac{\partial^2}{\partial i \partial m},$$

wo die i, k, l, m je die Werte x, y, z annehmen können. c_{iklm} sind die elastischen Moduln, definiert etwa durch das HOOKESCHE Gesetz¹

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \varepsilon_{ml}.$$

Dabei sind ε_{ml} und σ_{ik} die Komponenten des Verzerrungs- bzw. Spannungstensors.

$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ sei die Determinante $|D_{kl}|$, $D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ der Tensor der Unterdeterminanten von f . f ist homogen in $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ von 6. Ordnung, D^*_{kl} homogen von 4. Ordnung.

Nach FREDHOLM² lautet das Fundamentalintegral von (1)

$$\mathfrak{G} = \frac{i}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{D^*(\xi_i, \eta_i, 1)}{x \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_i, 1) - y \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_i, 1)}.$$

Darin bestimmen sich die ξ_i, η_i aus den Gleichungen

$$f(\xi, \eta, 1) = 0 \quad (2)$$

$$x\xi + y\eta + z = 0, \quad (3)$$

wobei die ξ_i positiven Imaginärteil haben müssen. Die explizite Darstellung der ξ_i, η_i als Funktionen von x, y, z ist im allgemeinen nicht möglich, da die Verbindung der Gln. (2) und (3) auf eine komplexe Gleichung 6. Grades führt, die nur für Punkte x, y, z , deren Ortsvektor in einer Symmetrieebene des Kristalls verläuft, zu einer kubischen Gleichung wird. Eine Ausnahme bilden hexagonale Systeme. Hier ist

$$D(x, y, z) = \begin{pmatrix} c_{11}x^2 + c_{66}y^2 + c_{44}z^2; & (c_{11} - c_{66})xy; & (c_{13} + c_{44})xz \\ (c_{11} - c_{66})xy; & c_{66}x^2 + c_{11}y^2 + c_{44}z^2; & (c_{13} + c_{44})yz \\ (c_{13} + c_{44})xz; & (c_{13} + c_{44})yz; & c_{44}(x^2 + y^2) + c_{33}z^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und nach GEBBIA³

$$f(x, y, z) = c_{11}c_{44}c_{66}(x^2 + y^2 + a_1z^2)(x^2 + y^2 + a_2z^2)(x^2 + y^2 + a_3z^2).$$

$c_{\mu\nu}$ sind die VOIGTSCHEN Elastizitätsmoduln. Ferner ist $a_1 = c_{44}/c_{66}$, a_2, a_3 sind die Wurzeln der Gleichung

$$c_{11}c_{44}a^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})a + c_{33}c_{44} = 0.$$

¹ Es ist $c_{iklm} = c_{kilm} = c_{ikml} = c_{lmik}$.

² FREDHOLM, I.: Acta math., Stockh. **23**, 1 (1900).

³ GEBBIA, M.: Ann. di math. [IIIa] **10**, 157 (1904), insb. S. 187.

Der Grund für die Zerlegbarkeit von f ist die Rotationssymmetrie der „charakteristischen Fläche“ $f(\tau) = \text{const.}$ In hexagonalen Kristallen sind bekanntlich alle Strahlen, die mit der Kristallachse den gleichen Winkel einschließen, elastisch gleichwertig¹.

Man berechnet nun die ξ_i, η_i als Schnittpunkte der Linien

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + a_i &= 0 \\ x\xi + y\eta + z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es ist

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= (1/\varrho^2)(-xz + iy \sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}) \\ \eta_i &= (1/\varrho^2)(-yz - ix \sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}) \end{aligned} \right\} \varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Für D^* erhält man aus (4) und (5)

$$D^*(\xi_i, \eta_i, 1) = \begin{pmatrix} A_i \xi_i^2 + B_i; & A_i \xi_i \eta_i; & -C_i \xi_i \\ A_i \xi_i \eta_i; & A_i \eta_i^2 + B_i; & -C_i \eta_i \\ -C_i \xi_i; & -C_i \eta_i; & D_i \end{pmatrix}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_i &= [(c_{66} - c_{11})(c_{33} - a_i c_{44}) + (c_{13} + c_{44})^2]/E_i \\ B_i &= [(c_{44} - a_i c_{11})(c_{33} - a_i c_{44}) + a_i(c_{13} + c_{44})^2]/E_i \\ C_i &= (c_{13} + c_{44})(c_{44} - a_i c_{66})/E_i \\ D_i &= (c_{44} - a_i c_{11})(c_{44} - a_i c_{66})/E_i \\ E_1 &= 4\pi(a_1 - a_2)(a_3 - a_1). \end{aligned}$$

E_2, E_3 gehen hieraus durch zyklische Vertauschung der Indizes hervor. Für die Konstanten gelten folgende Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^3 A_i = \sum_{i=1}^3 C_i = 0; \quad B_2 = B_3 = C_1 = D_1 = 0; \quad B_1 = a_1 A_1.$$

Das Fundamentalintegral der hexagonalen elastischen Differentialgleichungen in cartesianischen Koordinaten lautet nunmehr

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}} \times \left. \begin{aligned} & \left(A_i \frac{x^2 z^2 - y^2 (a_i \varrho^2 + z^2)}{\varrho^4} + B_i; \quad A_i \frac{xy(a_i \varrho^2 + 2z^2)}{\varrho^4}; \quad C_i \frac{xz}{\varrho^2} \right) \\ & \times \left(A_i \frac{xy(a_i \varrho^2 + 2z^2)}{\varrho^4}; \quad A_i \frac{y^2 z^2 - x^2 (a_i \varrho^2 + z^2)}{\varrho^4} + B_i; \quad C_i \frac{yz}{\varrho^2} \right) \\ & \left(C_i \frac{xz}{\varrho^2}; \quad C_i \frac{yz}{\varrho^2}; \quad D_i \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

¹ VOIGT, W.: Lehrbuch der Kristallphysik, S. 594. Wien: J. B. Teubner 1910.

Dieses Integral wird für $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ unbestimmt. Der Übergang zur Isotropie ist also nicht direkt möglich.

Alle cartesischen Komponenten des Fundamentalintegrals bestehen aus zwei oder drei Summanden, die für sich einer Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F = 0$$

genügen, aber außer \mathfrak{S}_{zz} auf $\varrho = 0$ singular sind. Erst die Summation beseitigt diese Singularitäten mit Ausnahme derjenigen im Ursprung.

Es seien jetzt ϱ, φ, z Zylinderkoordinaten, $\varrho^\circ, \varphi^\circ, z^\circ$ ihre Einheitsvektoren, $\mathfrak{s}_\varrho, \mathfrak{s}_\varphi, \mathfrak{s}_z$ die zugehörigen Verschiebungskomponenten. Dann sind auch ohne Mitwirkung von Volumenkräften Verschiebungen möglich, für deren Komponenten die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_\varrho}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathfrak{s}_\varphi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial \varphi} = 0 \quad (7)$$

gilt, wenn die sechszählige Achse in z -Richtung liegt. Man erkennt die Richtigkeit der Behauptung, wenn man die hexagonalen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von (7) in Zylinderkoordinaten schreibt. Man erhält

$$\left[c_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathfrak{s}_\varrho + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} \mathfrak{s}_z = 0, \quad (8')$$

$$\left[c_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathfrak{s}_\varphi = 0, \quad (8'')$$

$$(c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{s}_\varrho + \left[c_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathfrak{s}_z = 0. \quad (8''')$$

Die Verschiebungen zerfallen in zwei Teile. Die einen verlaufen in, die anderen senkrecht zu den Ebenen durch die z -Achse. (8') wird durch den Ansatz¹

$$\mathfrak{s}_\varrho = -(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} \Psi, \quad \mathfrak{s}_z = \left[c_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi$$

identisch befriedigt. (8''') verlangt dann

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + a_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0.$$

Für $a_2 = a_3 = 1$ geht Ψ in die bekannte rotationssymmetrische Verschiebungsfunktion von LOVE über².

Die Verschiebung, die in einem unendlichen Bereich zu einer im Ursprung angreifenden in Richtung der positiven z -Achse wirkenden

¹ $\Psi = \Psi(\varrho, z)$.

² Vgl. hierzu LOVE, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität, S. 317. Deutsch von A. TIMPE. Wien: J. B. Teubner 1907.

Einheitskraft gehört, ist rotationssymmetrisch. Sie lautet nach (6)

$$\mathfrak{s}_{-1}^{(z)} = \sum_{i=2,3} \frac{1}{\sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}} \left(C_i \frac{z}{\varrho} \varrho^\circ + D_i z^\circ \right).$$

Man überzeugt sich leicht, daß ihre Komponenten den Gln. (8') und (8''') genügen. Bildet man $\partial \mathfrak{s}_{-1}^{(z)} / \partial z$, so verschwindet durch diese Differentiation ϱ aus dem Nenner. Die beiden Summanden in $\partial \mathfrak{s}_{-1}^{(z)} / \partial z$, welche ja Gln. (8') und (8''') erfüllen, sind also im konkaven Bereich regulär. Man erhält so zwei unabhängige FREDHOLMSche Funktionen vom Grade -2 in der Form

$$\mathfrak{s}_{-2}^i = \frac{\gamma \varrho \varrho^\circ + z z^\circ}{\sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}}, \quad \gamma = \frac{c_{33} - a_i c_{44}}{c_{13} + c_{44}}. \quad (9)$$

Durch wiederholte Anwendung der Operation $\partial / \partial z$ auf die Funktionen (9) erhält man lauter rotationssymmetrische FREDHOLMSche Funktionen negativen Grades, nach denen man rotationssymmetrische elastische Funktionen entwickeln kann.

Schließlich soll noch die aus (6) folgende quellenfreie Lösung

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_{-1}^{(x)}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{s}_{-1}^{(y)}}{\partial x} = B_1 \frac{\varrho}{\sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}} \varphi^\circ \quad (10)$$

erwähnt werden. Sie stellt die Verschiebung dar, welche zu einem Wirbelzentrum im Ursprung um die z -Achse gehört. Man überzeugt sich leicht, daß $\varrho / \sqrt{a_i \varrho^2 + z^2}$ (8'') befriedigt. Durch Anwendung des Operators $\partial / \partial z$ leitet man aus (10) ein System FREDHOLMScher Funktionen ab, das zur Darstellung von Verschiebungen, die überall senkrecht zu den Ebenen durch die z -Achse verlaufen, geeignet ist.

§ 3. Näherungslösungen für das Fundamentalintegral bei beliebiger Kristallsymmetrie.

Für das Fundamentalintegral beliebiger Kristallsysteme gilt nach ZEILON die Darstellung¹

$$\mathfrak{S}_{pq}(v) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint D_{pq}^{-1}(\mathfrak{k}) e^{i\mathfrak{k} \cdot v} d\tau_{\mathfrak{k}}, \quad (11)$$

wo die Integration über den ganzen \mathfrak{k} -Raum mit Ausnahme des Ursprungs zu erstrecken ist. In (11) wurde $D^*/f = D^{-1}$ gesetzt. D_{pq}^{-1} ist homogen vom Grade -2 , daher eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen möglich²:

$$D_{pq}^{-1} = \frac{1}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_{mpq} \Phi_m + \sum_{\mu=1}^m (A_{mpq}^{\mu} \Phi_m^{\mu} + B_{mpq}^{\mu} \Psi_m^{\mu}) \right], \quad (12)$$

¹ Vgl. hierzu I. M. BURGERS, l. c. und G. LEIBFRIED, l. c., sowie N. ZEILON, l. c.

² Vgl. etwa FRANK-V. MISES, l. c. Bd. 1. XVII, § 2, 3.

wenn $\Phi_m = P_m(\cos \vartheta)$, $\Phi_m^\mu = P_m^\mu(\cos \vartheta) \cos m\varphi$, $\Psi_m^\mu = P_m^\mu(\cos \vartheta) \sin m\varphi$ gesetzt wird. P_m sind die LEGENRESCHEN, P_m^μ die zugeordneten Funktionen. Für die Koeffizienten gilt

$$\left. \begin{aligned} A_{m\,p\,q}^\mu &= \frac{2m+1}{2\pi} \cdot \frac{(m-\mu)!}{(m+\mu)!} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 D_{p\,q}^{-1}(r, \vartheta, \varphi) \left\{ \begin{aligned} &\Phi_m^\mu \\ &\Psi_m^\mu \end{aligned} \right\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ A_{m\,p\,q} &= \frac{1}{2} A_{m\,p\,q}^0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nun ist, wenn S_m irgendeine Kugelflächenfunktion mit Hauptindex m ist¹,

$$(1/8\pi^3) \iiint S_m(\mathfrak{f}) (e^{i\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{r}} / |\mathfrak{f}|^2) \, d\tau_{\mathfrak{t}} = \alpha_m S_m(\mathfrak{v})/r.$$

Führt man (12) in (11) ein, so erhält man

$$\mathfrak{S}_{p\,q} = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left[A_{m\,p\,q} \Phi_m + \sum_{\mu=1}^m (A_{m\,p\,q}^\mu \Phi_m^\mu + B_{m\,p\,q}^\mu \Psi_m^\mu) \right]. \quad (14)$$

Da die Zahlen α_m abnehmen, ist die Konvergenz der Entwicklung (14) von $\mathfrak{S}_{p\,q}$ zumindest am Anfang nicht schlechter als die von $D_{p\,q}^{-1}$, was zur Fehlerabschätzung benützt werden kann. Bricht man die Reihe (14) bei $m = -3, -5, -7, -9$ ab, so erhält man für $\mathfrak{S}_{p\,q}$ nacheinander Näherungen der Form

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i\,k}^{p\,q} \frac{i\,k}{r^3} (*) &, \quad \alpha_{i\,k\,l\,m}^{p\,q} \frac{i\,k\,l\,m}{r^5} (**), \quad \alpha_{i\,k\,l\,m\,n\,o}^{p\,q} \frac{i\,k\,l\,m\,n\,o}{r^7} (***) \\ \alpha_{i\,k\,l\,m\,n\,o\,s\,t}^{p\,q} \frac{i\,k\,l\,m\,n\,o\,s\,t}{r^9} (****) & \quad (p, q, i, k, l, m, n, o, s, t = x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

die als erste, zweite, dritte und vierte Näherung bezeichnet werden sollen. Die α sind konstante Koeffizienten, über alle doppelt vorkommenden Indizes wird summiert. Die höheren Näherungen sind danach schon recht umfangreich und gestatten kaum noch größere Rechenoperationen. In allen Näherungen sind die Koeffizienten so bestimmt, daß der Fehler im GAUSSSchen Sinn minimal wird, also, über die Oberfläche der Einheitskugel integriert,

$$\iint (\mathfrak{S}_{p\,q} - \tilde{\mathfrak{S}}_{p\,q})^2 \, d\mathfrak{f} = \text{Minimum} \quad (16)$$

¹ Es ist

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \alpha_m &= i^m \int_{k=0}^{\infty} \psi_m(r\,k) \, dk, & \psi_m(\varrho) &= (1/2i^m) \int_{-1}^1 e^{i\varrho\xi} P_m(\xi) \, d\xi, \\ \psi_0(\varrho) &= \sin \varrho/\varrho, & \psi_{m+1}(\varrho) &= -\frac{d\psi_m}{d\varrho} + \frac{m}{\varrho} \psi_m. \end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Formel verläuft fast genau wie die Ableitung einer ähnlichen Formel auf S. 384—386 der zitierten BURGERSCHEN Arbeit, auf die deshalb verwiesen sei. Vgl. dazu auch FRANK-V. MISES, Bd. 2. XX, § 4, 2. Es ist

$$\alpha_0 = 1/4\pi, \quad \alpha_2 = -1/8\pi, \quad \alpha_4 = 3/32\pi.$$

wird, wo $\tilde{\mathcal{E}}_{pq}$ für irgend eine der Näherungen (15) steht. Näherungen der Form (**) und (***) , jedoch mit anderen Koeffizienten, kommen bei BURGERS¹ vor, Näherungen (*) und (***) gab LEIBFRIED². Bei ihren Entwicklungen gilt (16) nicht. Die Bestimmung der Koeffizienten α in (**), (***) und (*), (***) nach BURGERS bzw. LEIBFRIED gibt daher eine geringere Genauigkeit als die Bestimmung über (13).

Die Symmetrie der D_{pq}^{-1} bestimmt die Auswahl der für (14) benötigten Kugelflächenfunktionen. Um einen Überblick zu gewinnen, betrachtet man diese etwa als LAMÉSche Produkte auf einem Rotationsellipsoid³. Diese Produkte teilt man gewöhnlich in vier Symmetrieklassen. Bei rhombischen Kristallen — dazu gehören auch tetragonale (1. Abt.), hexagonale und kubische Kristalle — braucht man zur Entwicklung von D_{pq}^{-1} nur Kugelflächenfunktionen erster Art, wenn $p=q$, und nur solche dritter Art für $p \neq q$, und zwar für jede Komponente nur Funktionen einer Unterart. Die Zahl der benötigten Kugelflächenfunktionen pro Hauptindex m ist also für die Entwicklung von D_{pq}^{-1} bei $p=q$ $1+m/2$, bei $p \neq q$ $m/2$. Für kubische Kristalle erhält man die Verschiebung $\tilde{s}_{-1}^{(z)} = (u_{-1}^{(z)}, v_{-1}^{(z)}, w_{-1}^{(z)})$, die durch eine Einzelkraft in z -Richtung hervorgerufen wird, in zweiter Näherung zu

$$\begin{aligned} u_{-1}^{(z)} &= \frac{1}{\gamma} (\alpha_2 A_{2xz}^1 \Phi_2^1 | + \alpha_4 A_{4xz}^1 \Phi_4^1 + \alpha_4 A_{4xz}^3 \Phi_4^3) \\ v_{-1}^{(z)} &= \frac{1}{\gamma} (\alpha_2 B_{2yz}^1 \Psi_2^1 | + \alpha_4 B_{4yz}^1 \Psi_4^1 + \alpha_4 B_{4yz}^3 \Psi_4^3) \\ w_{-1}^{(z)} &= \frac{1}{\gamma} (\alpha_0 A_{0zz} \Phi_0 + \alpha_2 A_{2zz} \Phi_2 | + \alpha_4 A_{4zz} \Phi_4 + \alpha_4 A_{4zz}^4 \Phi_4^4), \end{aligned}$$

wobei noch $A_{mzz}^\mu = B_{myz}^\mu$ gilt. Durch Weglassen der Glieder rechts des senkrechten Striches ergibt sich die erste Näherung. $\tilde{s}_{-1}^{(x)}$ und $\tilde{s}_{-1}^{(y)}$ erhält man hieraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z . Dabei behalten die aus (13) zu bestimmenden Koeffizienten ihren Wert. Die Koeffizientenbestimmung ist für jeden Kristall nur einmal nötig.

Aus den nunmehr als bekannt anzusehenden Verschiebungen $\tilde{s}_{-1}^{(x)}$, $\tilde{s}_{-1}^{(y)}$, $\tilde{s}_{-1}^{(z)}$ können durch Differentiation alle weiteren FREDHOLMSchen Funktionen negativen Grades gewonnen werden. Durch die Differentiationen geht allerdings die Minimaleigenschaft der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen verloren. Erhalten bleibt sie nur bei Anwendung des LAPLACESchen Operators Δ wegen

$$\Delta(r^n S_m) = (n - m)(n + m + 1) r^{n-2} S_m. \tag{17}$$

¹ BURGERS: l. c.

² LEIBFRIED: l. c.

³ Vgl. LENSE, J.: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, S. 202 ff. Berlin: W. de Gruyter. 1947.

Die Komponenten der FREDHOLMSchen Funktionen erscheinen als unendliche Summen über Glieder der Form $r^n S_m$. Im Falle des Fundamentalintegrals ist $n = -1$. Da m positiv geradzahlig ist, genügen alle Glieder der Entwicklungen von $\mathfrak{E}_{p,q}$ einer Gleichung

$$\underbrace{\Delta \Delta \Delta \dots \Delta}_{1+m/2} F = 0.$$

Hieraus ist zu schließen, daß auch die Glieder der Entwicklungen der Komponenten der FREDHOLMSchen Funktionen mit $n = -2, -3, -4 \dots$ einer solchen Gleichung genügen müssen, da diese ja aus $\mathfrak{E}_{p,q}$ durch Differentiationen nach x, y, z entstehen. Wegen (17) muß man auf die wesentliche Beschränkung von n und m

$$n + m + 1 \geq 0 \tag{18}$$

schließen.

Es liegt nahe, bei der Lösung von Randwertproblemen statt der FREDHOLMSchen Funktionen direkt die Funktionen $r^n S_m$ zu verwenden. Die Vollständigkeit dieser Funktionen ist zugleich mit derjenigen der FREDHOLMSchen Funktionen gegeben. (18) gilt auch hier.

Eine Methode zur Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Funktionen $r^n S_m$ sowie entsprechender Funktionen für ellipsoidförmige Bereiche wurde vom Verfasser in einer zweiten Arbeit gegeben. Dort wurde auch ein Beispiel zahlenmäßig durchgerechnet¹.

Der Verfasser dankt Herrn Professor U. DEHLINGER und Herrn Dr. A. SEEGER für Anregungen und fruchtbare Diskussionen.

Stuttgart, Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule und Max Planck-Institut für Metallforschung.

¹ Erscheint demnächst in Acta metallurgica.