

Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités.

Par

MARC-HENRI AMSLER à Zurich.

1. Historique. Le théorème suivant, formulé et démontré par D. HILBERT représente le point de départ du présent travail:

Il n'existe pas, dans l'espace euclidien à trois dimensions, de surfaces à courbure de Gauss négative et constante sans singularités.

La démonstration donnée par HILBERT, reprise plus tard dans ses détails et sous une forme légèrement différente par L. BIEBERBACH [1] repose sur l'idée que voici: on sait que les lignes asymptotiques d'un morceau de surface à courbure négative constante $K = -1$ de l'espace ordinaire forme un réseau de TCHÉBYCHEFF, c. à. d. un réseau dans lequel deux côtés opposés d'une « maille » du réseau sont de même longueur. Au cas où il existerait dans l'espace une surface $K = -1$ sans singularité, on montre sans difficulté que sa surface de recouvrement serait image isométrique du plan hyperbolique pris dans son ensemble. Il serait ainsi possible de recouvrir le plan hyperbolique entier par un réseau de TCHÉBYCHEFF. Or ce dernier fait se trouve être en contradiction avec une propriété connue des réseaux de TCHÉBYCHEFF, à savoir la propriété exprimée par la formule de HAZZIDAKIS disant que la courbure totale du domaine délimité par une maille du réseau ne peut excéder, en valeur absolue, la valeur 2π . Pour pouvoir appliquer la formule de HAZZIDAKIS, il est néanmoins nécessaire de faire intervenir dans la démonstration des considérations assez compliquées de nature topologique.

Peu de temps après, E. HOLMGREN [8] donna du théorème de HILBERT une démonstration plus concise. Elle s'appuie, elle aussi, et sur la propriété du réseau des lignes asymptotiques de former un réseau de TCHÉBYCHEFF, et sur la formule de HAZZIDAKIS; elle a cependant l'avantage d'éviter toute considération topologique [2].

Dernièrement HARTMANN et WINTNER [5] firent une étude critique des conditions de régularité auxquelles doit satisfaire la surface pour que l'on puisse utiliser les méthodes de démonstrations proposées par HILBERT et HOLMGREN. Ils montrèrent que le théorème de HILBERT sur la non-existence des surfaces en question est valable pour les surfaces dérivables deux fois de façon continue.

2. Aspect des singularités connues. Les raisonnements imaginés par HILBERT et HOLMGREN ont malheureusement l'inconvénient majeur d'être menés par l'absurde, c. à. d. d'être basés sur des objets qui, en fin de démonstration, se révèlent être inexistantes. Leurs méthodes ne sont par conséquent pas à même de fournir des renseignements constructifs en particulier sur la

nature et le nombre de ces singularités. Il serait pourtant intéressant de savoir s'il existe par exemple une surface n'ayant qu'une seule singularité. Pour autant que nous avons pu nous en rendre compte, cette question est restée jusqu'ici sans réponse. Le but général de ce travail est d'essayer dans la mesure du possible de combler cette lacune.

Qu'entend-on tout d'abord par *singularité* d'une surface plongée dans l'espace? Une singularité S d'une surface F' (F' étant elle-même définie comme application localement topologique d'une surface in abstracto F dans l'espace ambiant, cf. § 3, no 1) doit être premièrement point d'accumulation de points P_1, P_2, \dots de F' , sans appartenir toutefois à F' ; secondement, il faut que la valeur minimum des longueurs des arcs reliant, sur F' , un point fixe P_0 de la surface au point P_i de la suite considérée (distance $P_0 P_i$) reste bornée quel que soit i ; enfin il ne doit pas exister d'extension $\overline{F'}$ de F' contenant S à son intérieur. Cette dernière restriction a pour but d'exclure de l'ensemble des singularités les points de l'espace, qui tout en étant situés sur la bordure de la surface, ne représentent pas un point où cette dernière perd effectivement sa régularité. Nous appellerons une surface F' ne possédant pas d'extension $\overline{F'}$ de cette sorte une surface *non prolongeable*. Nous faisons remarquer en passant que tout morceau de surface à courbure négative constante peut être englobé dans une surface — à courbure négative constante également — non prolongeable au sens donné ci-dessus; cette propriété est démontrable par exemple à l'aide du lemme de ZORN. Nous ne désirons cependant pas approfondir ce point.

Afin de nous faire une idée des propriétés de ces singularités, passons en revue les surfaces connues. La liste en est courte: d'une part les surfaces de rotation, classifiées pour la première fois par MINDING [12] et dont F. KLEIN [11] a donné des représentations intuitives, d'autre part les surfaces hélicoïdales, découvertes par MINDING également [12]. Ces surfaces possèdent toutes, entre autres, des singularités accumulées sur une courbe spatiale, en l'occurrence sur un cercle ou une hélice. Il nous vient naturellement à l'idée de supposer que la présence de telles courbes est une caractéristique de la bordure des surfaces $K = -1$. Cette supposition n'est cependant pas évidente du fait de l'existence également — sur les surfaces de rotation de type conique — de singularités isolées.

3. *Les surfaces analytiques.* Le résultat principal de ce travail confirme la supposition énoncée ci-dessus pour la classe des surfaces analytiques. Nous démontrerons le théorème suivant:

Toute surface $K = -1$ analytique et non prolongeable possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

La démonstration du théorème principal fournira encore les propositions complémentaires que voici:

Parmi les courbes situées en bordure d'une surface $K = -1$, il en existe toujours une qui est dérivable autant de fois que l'on veut et le long de laquelle — bien que ses points soient singularités pour la surface — la limite de la normale à la surface est régulière, en particulier continue.

Le caractère singulier de la surface sur une telle courbe de singularités peut être de deux types. Pour les différencier, utilisons un système de coordonnées cartésien rectangulaire x, y, z , le plan des x, y étant le plan tangent limite de la surface en un point S de ladite courbe. La fonction $z(x, y)$ représentant la surface au voisinage de S est analytique. Dire que la courbe étudiée est singulière pour la surface, c'est dire que la fonction $z(x, y)$ n'est plus analytique sur la portion Γ de cette courbe située dans le voisinage de S . En chaque point de la surface, les deux directions asymptotiques délimitent un angle d'ouverture ω qui, ainsi que nous le verrons par la suite, est déterminant pour le comportement de la surface et de ses singularités. Dans le voisinage de S , cet angle ω peut être considéré comme fonction des paramètres x et y . La courbe de singularités dont fait état le théorème est alors de l'un des deux types suivants :

a) en chaque point de l'arc étudié Γ , la fonction $\omega(x, y)$ cesse d'être analytique; l'arc Γ est la courbe limite d'une famille d'asymptotiques; il est dérivable autant de fois que l'on veut. Dans certains cas et à condition d'abaisser l'ordre de dérivation de la surface, il est possible de prolonger la surface au delà d'un arc singulier de ce type (premier type).

b) en chaque point de l'arc Γ , la fonction $\omega(x, y)$ reste analytique; Γ est enveloppe de chacune des deux familles de lignes asymptotiques; Γ est analytique; sur Γ la courbure moyenne de la surface devient infinie et la fonction $\sin \omega$ s'annule. Le prolongement de la surface au delà de Γ est impossible, même en abaissant l'ordre de dérivation de la surface (deuxième type).

La double nature de ces courbes de singularités fait ressortir en particulier que si les exemples mentionnés ci-dessus ont pu nous faire pressentir l'existence de courbes singulières pour la surface, le caractère singulier de cette dernière n'est pas nécessairement du type supputé. Les courbes singulières des surfaces hélicoïdales et de rotation appartiennent en effet toutes à une seule des deux espèces possibles, à savoir la deuxième; nous donnerons un exemple de surface où toutes les courbes singulières seront du premier type (exemple 1).

4. *Les surfaces non analytiques.* Il ne nous a malheureusement pas été possible de déterminer si les théorèmes ci-dessus — en particulier l'existence de courbes singulières — sont aussi valables pour les surfaces non analytiques, c. à. d. pour les surfaces dérivables au sens habituel. La raison en est que les surfaces non analytiques peuvent admettre des singularités d'un type nouveau, singularités que nous avons appelées *ramifications* (cf. la définition exacte dans le corps du travail) et qui perturbent la méthode d'investigation utilisée. Sur les surfaces non analytiques, le théorème énoncé plus haut n'est valable qu'en éliminant ce genre de singularités :

Toute surface $K = -1$ à dérivées continues des trois premiers ordres, non prolongeable et sans ramifications possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

Les propriétés complémentaires énoncées pour les surfaces analytiques sont encore valables dans ce cas.

Il peut être intéressant de noter que des singularités du genre ramifications sont possibles sur les surfaces à courbure identiquement nulle: une feuille de papier dans laquelle on a pratiqué une entaille fournit, en écartant les bords de l'entaille, un exemple intuitif d'une telle singularité.

5. *Les réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique.* Dans l'établissement des propriétés de la bordure des surfaces $K = -1$, nous avons abondamment fait usage de la propriété des réseaux des lignes asymptotiques de former des réseaux de TCHÉBYCHEFF. Les singularités des surfaces étudiées apparaissent, au cours des démonstrations, comme étant des particularités de ces réseaux spéciaux de TCHÉBYCHEFF. Si l'on se rappelle maintenant que tout morceau suffisamment petit de surface $K = -1$ peut être appliqué isométriquement sur un domaine du plan hyperbolique, les particularités du réseau des lignes asymptotiques se transforment, par cette application, en propriétés des réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique. Nous avons développé les résultats essentiels auxquels nous a conduit cette analogie. Cette dernière fournit le théorème suivant :

Dans le plan hyperbolique, la bordure du domaine de définition d'un réseau de TCHÉBYCHEFF analytique et non prolongeable comprend au moins un arc de courbe.

Nous montrons ainsi en particulier qu'il n'existe pas dans le plan hyperbolique de réseau de TCHÉBYCHEFF analytique recouvrant tout le plan à l'exception d'un seul point, c. à. d. un réseau n'ayant qu'une seule singularité.

6. *Exemples.* Nous donnons deux exemples nouveaux de surfaces $K = -1$ non prolongeables. Le premier, mentionné plus haut, est celui d'une surface analytique finie dont chaque singularité est singularité de la fonction ω (premier type). Le prolongement de la surface au delà de ces singularités est impossible, même dans le cadre des surfaces trois fois différentiables.

En second lieu, nous avons traité le cas des surfaces soustendues par deux droites concourantes dans l'espace. La bordure de chacune de ces surfaces consiste en quatre courbes analytiques du second type ($\sin \omega = 0$). Parmi ces surfaces, nous avons montré qu'il y en avait une et une seule possédant des quadrilatères asymptotiques d'aire maximum 2π . Cette propriété est intéressante du fait que nous savions, par la formule de HAZZIDAKIS mentionnée au début de cette introduction, que tout quadrilatère asymptotique possédait une aire au plus égale à 2π ; nous ne connaissions pas d'exemples pour lesquels cette valeur maximum pouvait effectivement être atteinte.

§ 1. Réseaux asymptotiques et réseaux de TCHÉBYCHEFF.

Voici, résumées, les propriétés locales des surfaces à courbure négative constante dont nous ferons usage dans ce travail.

1. Soit F' un morceau de surface à courbure K négative constante égale à -1 plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions; supposons F' représentable par un vecteur $r(u^1, u^2)$ dérivable q fois de façon continue ($q \geq 3$) — nous parlerons dans ce cas d'une surface de classe C^q ou de classe C^Ω si $r(u^1, u^2)$ est analytique —, il existe alors au voisinage de tout point de F'

une représentation paramétrique $r(\bar{u}^1 \bar{u}^2)$ dite représentation asymptotique, telle que les lignes de coordonnées $\bar{u}^1 = \text{const.}$ et $\bar{u}^2 = \text{const.}$ soient lignes asymptotiques de la surface. Ces lignes asymptotiques étant solutions de l'équation

$$L_{ik}(u^1 u^2) du^i du^k = 0$$

à coefficients de classe C^{q-2} , la représentation $r(\bar{u}^1 \bar{u}^2)$ est de classe C^{q-1} ([5] théorème IV). De plus, des équations de GAUSS-CODAZZI et de $K = -1$, il s'ensuit que les paramètres $u = \bar{u}^1$, $v = \bar{u}^2$ peuvent être choisis de façon à ce que u , respectivement v , mesurent la longueur d'arc sur les lignes de coordonnées ([5] théorème VI). La métrique de la surface est ainsi représentable sous la forme simple

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2,$$

$\omega(u, v)$ étant l'angle compris entre les vecteurs tangents unitaires r_u et r_v . La forme (1) de l'élément d'arc caractérise les systèmes de coordonnées dits de TCHÉBYCHEFF, appelés aussi plus simplement *réseaux de TCHÉBYCHEFF*; nous nommerons la fonction $\omega(u, v)$ *fonction génératrice* du réseau. Inversement, on établit que si une surface à courbure négative constante possède une représentation asymptotique de TCHÉBYCHEFF de classe C^{q-1} , il existe un système de coordonnées dans lequel elle est de classe C^q ([5] théorème VIII).

La seconde forme fondamentale de la surface se réduit, en vertu des équations des lignes asymptotiques

$$\bar{L}_{11} = \bar{L}_{22} = 0$$

et de la relation

$$K = \frac{\det \bar{L}_{ik}}{\det \bar{g}_{ik}} = \frac{-\bar{L}_{12}^2}{\sin^2 \omega} \equiv -1$$

à

$$(2) \quad II = \pm 2 \sin \omega du dv.$$

Puisque toutes les propriétés locales d'une surface sont virtuellement contenues dans ses deux formes fondamentales, il résulte de (1) et (2) que celles d'une surface à courbure négative constante sont exprimables au moyen de la seule fonction $\omega(u, v)$, que nous appellerons par analogie *fonction génératrice* de la surface.

On établit en particulier les correspondances suivantes entre les propriétés de la surface dans l'espace et celles de sa fonction génératrice:

La surface F' étant supposée de classe C^{q-1} ($q \geq 3$) dans un système asymptotique de TCHÉBYCHEFF, l'ordre de dérivation de la fonction ω est d'une unité inférieure, ω étant l'angle compris entre les deux vecteurs r_u et r_v de classe C^{q-2} :

$$a) \quad \omega(u, v) \in C^{q-2}.$$

La propriété inverse est encore valable, dans ce sens que, si la fonction génératrice est de classe C^{q-2} , la surface est nécessairement de classe C^{q-1} par rapport au réseau de ses lignes asymptotiques ([5] théorème VII).

La propriété des lignes asymptotiques de former un réseau sur la surface s'exprime au moyen de sa fonction génératrice par la condition

$$b) \quad \sin \omega(u, v) > 0,$$

relation interprétant également la caractéristique des deux courbures principales de la surface

$$(3) \quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{II}{I} \Big|_{du=dv} = \pm tg \frac{\omega}{2} \\ k_2 &= \frac{II}{I} \Big|_{du=-dv} = \mp \cotg \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

d'être finies en tout point de la surface.

La formule de GAUSS-BONNET [9] reliant sur une surface la courbure totale d'un domaine à la courbure géodésique totale de la frontière de ce domaine se réduit, dans le cas d'un quadrilatère asymptotique A situé sur une de nos surfaces et délimité par les 4 asymptotiques $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$, à l'équation ([5] théorème IX)

$$c) \quad \omega(u_1 v_1) - \omega(u_2 v_1) + \omega(u_2 v_2) - \omega(u_1 v_2) = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega \, du \, dv.$$

Nous écrirons cette dernière équation symboliquement

$$(4) \quad [\omega]_A = \iint_A \sin \omega \, du \, dv.$$

Le passage de la formule sous sa forme classique

$$\iint K \, d\mathcal{f} + \oint \kappa \, ds + \sum \varphi_i = 2\pi$$

à la forme (4) s'effectue en remarquant que la courbure géodésique c_1 respectivement c_2 des lignes d'un réseau de TCHÉBYCHEFF est donnée, à partir de la forme (1) de la métrique, par les relations

$$(5) \quad \begin{cases} c_1 = -\omega_u & (\text{sur une ligne } v = \text{const.}) \\ c_2 = +\omega_v & (\text{sur une ligne } u = \text{const.}) \end{cases}$$

La formule c), due à HAZZIDAKIS [6], se réduit lorsque u_2 tend vers u_1 , respectivement lorsque v_2 tend vers v_1 , aux relations

$$c') \quad \begin{aligned} \omega_u(u_1 v_2) - \omega_u(u_1 v_1) &= \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega \, dv \\ \omega_v(u_2 v_1) - \omega_v(u_1 v_1) &= \int_{u_1}^{u_2} \sin \omega \, du. \end{aligned}$$

Ces deux relations indiquent que, même lorsque ω est de classe C^1 , la dérivée mixte ω_{uv} existe ($\omega_{uv} = \omega_{vu}$) et que l'on a

$$c'') \quad \omega_{uv} = \sin \omega.$$

c'' exprime le théorème egregium pour les surfaces de l'espace à courbure $K = -1$; dans ce travail nous avons cependant préféré adopter la forme c) de ce théorème, forme qui ne fait intervenir que la fonction ω , à l'exclusion de ses dérivées.

2. Le rôle essentiel des trois propriétés a), b) et c) de la fonction génératrice réside en ce que ces trois relations représentent les conditions nécessaires

et suffisantes pour qu'une fonction (univoque) de deux variables indépendantes u et v puisse être interprétée comme fonction génératrice $\omega(u, v)$ d'une surface à courbure négative constante. La démonstration de cette propriété consiste à reconnaître que les 3 conditions a), b) et c) ne sont autres que les conditions locales d'intégrabilité des deux formes fondamentales (1) et (2). La correspondance entre la surface et sa fonction génératrice est biunivoque, en ce sens qu'abstraction faite de permutations effectuées sur les paramètres u et v , du choix de l'origine $u = v = 0$, de même que de déplacements ou de symétries dans l'espace, à toute fonction ω de la forme voulue correspond localement une surface à courbure négative constante égale à -1 et inversément.

3. La dernière propriété dont nous avons besoin se rapporte à l'image sphérique du réseau de lignes asymptotiques: le plan tangent à la surface le long d'une ligne asymptotique complète cette dernière en ce que l'on appelle un *ruban asymptotique*. Le long d'un tel ruban, les équations générales de FRENET

$$\begin{cases} \dot{t} = & c n + b \xi \\ \dot{n} = -c t & + a \xi \\ \dot{\xi} = -b t - a n \end{cases}$$

reliant les trois vecteurs unitaires tangent t , normal ξ et binormal $n = \xi \times t$ à leurs dérivées \dot{t} , $\dot{\xi}$, \dot{n} par rapport à la longueur d'arc se réduisent à

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{t} = & c n \\ \dot{n} = -c t & + a \xi \\ \dot{\xi} = & -a n. \end{cases}$$

La courbure géodésique c est à remplacer, suivant les relations (5), par $-\omega_u$ respectivement $+\omega_v$, la torsion géodésique a , suivant la condition D'ENNEPER, par $\pm\sqrt{-K} = \pm 1$, la condition $b = 0$ pour la courbure normale b caractérisant, comme on le sait, les rubans asymptotiques. Si l'indice 1 se rapporte aux éléments de la première famille d'asymptotiques ($v = \text{const.}$), l'indice 2 à ceux de la seconde ($u = \text{const.}$), l'image sphérique du réseau asymptotique vérifie

$$d\xi = \xi_u du + \xi_v dv = \mp n_1 du \pm n_2 dv,$$

c. à. d., puisque l'angle compris entre les vecteurs binormaux n_1 et n_2 est égal à l'angle ω déterminé par les vecteurs tangentiels t_1 et t_2 ,

$$(7) \quad d\xi^2 = du^2 - 2 \cos \omega du dv + dv^2.$$

L'équation (7) est la propriété cherchée, elle exprime que l'image sphérique est image isométrique du réseau asymptotique et, elle-même, réseau de TCHÉBYCHEFF. En introduisant l'angle $\omega^* = \pi - \omega$ formé sur la sphère par les vecteurs tangentiels ξ_u et ξ_v du réseau, l'élément d'arc $d\xi^2$ se réduit à la forme type des réseaux de TCHÉBYCHEFF

$$d\xi^2 = du^2 + 2 \cos \omega^* du dv + dv^2;$$

ω^* en est la fonction génératrice; elle possède les propriétés a), b) et c) de ω .

transcrites sur la sphère

$$\begin{aligned} a^*) \quad & \omega^* \in C^{q^*-1} & (q^* \geq 2) \\ b^*) \quad & \sin \omega^* > 0 \\ c^*) \quad & -[\omega^*]_{A^*} = \iint_{A^*} \sin \omega^* du dv. \end{aligned}$$

Par le détour des réseaux asymptotiques des surfaces à courbure négative constante, on peut donc établir que ces trois conditions représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction univoque puisse être interprétée comme fonction génératrice $\omega^*(u, v)$ d'un réseau de TCHÉBYCHEFF (de classe C^{q^*}) situé sur une sphère.

§ 2. Quelques propriétés de la fonction génératrice $\omega(u, v)$.

Les propriétés de la fonction $\omega(u, v)$ découlent de celles des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique

$$(8) \quad \omega_{uv} = \sin \omega$$

à laquelle se réduit la relation (4) lorsque la fonction $\omega(u, v)$ est supposée une fois différentiable (cf. ci-dessus, relation c'').

1. Considérons un plan des u, v où u et v sont coordonnées cartésiennes rectangulaires. Conformément à la notion de caractéristique de l'équation (8), nous appellerons *domaine caractéristique* ou *rectangle caractéristique* toute portion du plan délimitée par deux horizontales et deux verticales.

L'existence des fonctions $\omega(u, v)$ est régie par le théorème suivant:

*Théorème d'existence*¹).

Hypothèse: Soient $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(v)$ deux fonctions univoques et continues définies la première sur l'intervalle $\alpha \leq u \leq \beta$ de l'axe des u , la seconde sur l'intervalle $\gamma \leq v \leq \delta$ de l'axe des v (α, γ négatifs, β, δ positifs). De plus soit $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Conclusion: Il existe dans le domaine caractéristique fermé \bar{D} $\alpha \leq u \leq \beta$, $\gamma \leq v \leq \delta$ une et une seule fonction univoque et continue $\omega(u, v)$ satisfaisant, quel que soit le rectangle caractéristique A situé dans \bar{D} , à l'équation

$$(4) \quad [\omega]_A = \iint_A \sin \omega du dv$$

se réduisant à $\varphi_1(u)$ sur l'axe des u et à $\varphi_2(v)$ sur l'axe des v .

Les propriétés de différentiabilité de la fonction ainsi définie s'établissent à partir de la relation (8) et des équations

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_u(u, v) = \omega_u(u, 0) + \int_0^v \sin \omega dv \\ \omega_v(u, v) = \omega_v(0, v) + \int_0^u \sin \omega du, \end{cases}$$

obtenues par intégration (cf. ci-dessus, relations c'): la classe C^p ($p = 1, 2, \dots, \infty$) de la solution $\omega(u, v)$ est identique à celle des fonctions initiales $\varphi_1(u)$ et

¹) Pour la démonstration, voir E. GOURSAT, Cours d'analyse mathématique, Tome III, 5^{ème} édition, p. 156 et suivantes.

$\varphi_2(v)$. Dans le cas de fonctions initiales analytiques, un raisonnement détaillé, effectué sur le développement en puissance de la solution, permet d'établir l'analyticité de la solution au voisinage de l'origine et, partant, dans tout le domaine de définition.

Le théorème d'existence ci-dessus renseigne d'autre part sur le comportement des solutions de l'équation (4) sur la frontière de tout domaine caractéristique ouvert. Soit en effet $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) définie à l'intérieur d'un tel domaine D . Supposons qu'en un point-frontière R , par exemple sur le côté supérieur, extrémités exclues, la limite de la fonction ω existe et soit finie, ainsi que celles de ses p premières dérivées partielles par rapport à v ; les valeurs que prend ω sur l'axe des u et sur la verticale par R définissent — suivant le théorème d'existence ci-dessus — une et une seule solution $\omega_0(u, v)$ de l'équation (4) dans le domaine $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v \leq \delta$. Cette solution ω_0 est à l'intérieur de D identique à la solution considérée, elle représente donc une extension régulière de cette dernière sur le bord $v = \delta$ du domaine de définition D . La solution $\omega(u, v)$ définie à l'intérieur de D est donc régulière en tout point d'un segment-frontière ouvert dès qu'elle est régulière en un quelconque de ses points. Inversément, si la solution $\omega(u, v)$ est singulière — c.à.d. non régulière — en un seul point d'un segment-frontière ouvert, elle est singulière en tout point de ce segment. Si d'autre part l'un des sommets de D est singularité pour la solution, cette dernière est nécessairement singulière tout le long d'un au moins des deux segments-frontières issus de ce sommet; en effet la présence d'un point régulier sur chacun des segments issus du sommet entraînerait l'existence d'une solution régulière à l'intérieur de D et sur les deux segments-frontières considérés, le sommet compris, d'où le corollaire suivant:

Corollaire du théorème d'existence.

Soit $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) définie dans un domaine caractéristique ouvert D ; R un point-frontière de D .

Hypothèse:

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &\in C^p \text{ dans } D & (p \geq 0) \\ \omega(u, v) &\notin C^p \text{ dans } D + R. \end{aligned}$$

Conclusion: Si R est sommet de D , $\omega(u, v) \notin C^p$ en tout point d'au moins un de deux segments-frontières issus de R , si R n'est pas sommet de D , en tout point du segment-frontière passant par R .

2. Si d'une part la solution supposée régulière en D perd sa régularité tout le long d'un segment-frontière dès qu'elle la perd en un seul de ses points, cette perte de régularité n'est pas complète comme l'atteste le lemme suivant:

Lemme I.

Soit $\omega(u, v)$ une solution de l'équation (4) définie dans un domaine caractéristique ouvert D : $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v < \delta$; R un point du segment-frontière ouvert $v = \delta$.

Hypothèse: $\omega(u, v) \in C^p$ dans D ($p = 1, 2, \dots, \infty, \Omega$).

Conclusion: La dérivée partielle ω_u possède une valeur limite bien définie en tout point du segment $v = \delta$. De plus cette valeur limite appartient le long

de ce segment à la classe C^{p-1} ($p-1 = 0, 1, 2, \dots, \infty$) relativement à la variable u .
 Démonstration: Soit $P_n(u_n, v_n)$ une suite de points situés dans D , convergent pour $n \rightarrow \infty$ vers le point $R(u^*, \delta)$, $\alpha < u^* < \beta$. En P_n nous avons, d'après (9)

$$\omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u_n, 0) + \int_0^{v_n} \sin \omega(u_n, v) dv.$$

Par hypothèse, $\omega_u(u_n, 0)$ est régulier, la régularité de ω_u au point limite R de la suite P_n ne dépend donc que de l'intégrale du second membre. Estimons cette intégrale. L'équation (4) établie pour le domaine délimité par les deux caractéristiques $u = u^*$, $u = u_n$, l'axe des u et l'horizontale $v = \text{const.}$ donne

$$\omega(u_n, 0) - \omega(u^*, 0) + \omega(u^*, v) - \omega(u_n, v) = \int_0^{v_n} \int_{u_n}^{u^*} \sin \omega du dv.$$

P_n tendant vers R , la somme des deux premiers termes du membre de gauche tend vers zéro, de même l'intégrale double, puisque la fonction à intégrer est bornée. Pour un ε_1 arbitraire, il existe donc un indice $N_1(\varepsilon_1)$ tel que pour tout $0 \leq v \leq \delta$

$$|\omega(u^*, v) - \omega(u_n, v)| < \varepsilon_1$$

c.à.d., puisque $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ pour tout a et tout b ,

$$|\sin \omega(u^*, v) - \sin \omega(u_n, v)| \leq |\omega(u^*, v) - \omega(u_n, v)| < \varepsilon_1$$

dès que $n > N_1(\varepsilon_1)$.

La différence des dérivées ω_u en P_n et en sa projection \bar{P}_n sur la verticale par R est égale à, d'après (9),

$$\omega_u(u^*, v_n) - \omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u^*, 0) - \omega_u(u_n, 0) + \int_0^{v_n} [\sin \omega(u^*, v) - \sin \omega(u_n, v)] dv.$$

Son comportement ne dépend donc que de l'intégrale du membre de droite. Puisque cette intégrale peut être rendue suivant l'inéquation ci-dessus aussi petite que l'on veut, nous avons dès que $n > N_2(\varepsilon_2)$

$$|\omega_u(u^*, v_n) - \omega_u(u_n, v_n)| < \varepsilon_2.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_u(u_n, v_n) = \omega_u(u^*, \delta)$$

existe, vu que c'est le cas de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_u(u^*, v_n) = \omega_u(u^*, 0) + \int_0^{\delta} \sin \omega dv.$$

La convergence de la suite des fonctions continues $f_n(u) = \omega_u(u, v_n)$ étant uniforme, d'après l'inégalité ci-dessus, la limite

$$\omega_u(u, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_u(u, v_n) = \omega_u(u, 0) + \int_0^{\delta} \sin \omega dv$$

est, elle aussi, continue. Cette limite est évidemment dérivable $p-1$ fois par rapport à u , ses dérivées étant égales aux limites, pour $v = \delta$ des dérivées correspondantes dans D , c.q.f.d.

Remarquons encore que si ω est analytique dans D , l'analyticité de la limite $\omega_u(u, \delta)$ ne peut être assurée.

3. Le lemme I a trait aux singularités de nos surfaces ne satisfaisant pas à la première condition de régularité a); voici maintenant une proposition se rapportant aux singularités qui ne satisfont pas à la condition b). C'est sur cette dernière propriété, exprimée par la conclusion 1) ci-dessous, que se fonde la méthode de démonstration imaginée par HOLMGREN de la présence de singularités sur les surfaces à courbure négative constante.

Lemme II.

Soit dans le domaine $a \leq u \leq b, \gamma \leq v \leq \delta$, $\omega(u, v)$ une solution — de classe C^p , $p = 1, 2, \dots, \infty$, Ω — de l'équation (4). De plus soient $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$ deux points de l'axe des u tels que $a < \alpha < \beta < b$.

Hypothèse: Sur l'intervalle $a \leq u \leq b$ on a

$$\begin{aligned}\omega_u &> 0 \\ \sin \omega &> 0.\end{aligned}$$

Conclusion 1: Si δ a été pris suffisamment grand, il existe toujours dans le domaine fermé \bar{D} $\alpha \leq u \leq \beta, \gamma \leq v \leq \delta$ un zéro de la fonction $\sin \omega$.

Conclusion 2: Soit Q un zéro de $\sin \omega$ d'ordonnée minimum v^* dans \bar{D} . Si au point $Q \omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$, Q est situé à l'extrémité droite $u = \beta$ du segment $v = v^*$. Par Q passe une ligne de niveau $\omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$ — de classe C^p — pour laquelle

$$(10) \quad -\infty \leq dv : du < 0;$$

Si au point $Q \omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$, Q est situé à l'extrémité gauche $u = \alpha$ du segment $v = v^*$. Par Q passe une ligne de niveau $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$ — de classe C^p — pour laquelle

$$0 < dv : du \leq +\infty.$$

Démonstration: Conclusion 1.

Soient $(\alpha', 0)$ et $(\beta', 0)$ deux points de l'axe des u tels que

$$\begin{aligned}\alpha &< \alpha' < \beta' < \beta \\ \omega(\alpha', 0) - \omega(\alpha, 0) &= \varepsilon \\ \omega(\beta, 0) - \omega(\beta', 0) &= \varepsilon,\end{aligned}$$

A le domaine $\alpha \leq u \leq \beta, 0 \leq v \leq v_1 < \delta$ et A' le domaine $\alpha' \leq u \leq \beta', 0 \leq v \leq v_1$. De l'hypothèse $\sin \omega > 0$ sur la portion $\alpha \leq u \leq \beta$ de l'axe des u , il est possible de déterminer v_1 de façon que l'on ait $\sin \omega > 0$ dans A , par exemple $0 < \omega < \pi$. Nous avons alors pour tout (u, v) de A' , d'après (4),

$$\omega(\alpha, 0) - \omega(u, 0) + \omega(u, v) - \omega(\alpha, v) > 0$$

c. à d. $\omega(u, v) > \omega(u, 0) - \omega(\alpha, 0) > \varepsilon;$

de même $\omega(u, 0) - \omega(\beta, 0) + \omega(\beta, v) - \omega(u, v) > 0$

ou $\omega(u, v) < \pi - [\omega(\beta, 0) - \omega(u, 0)] < \pi - \varepsilon.$

De ces deux inéquations pour $\omega(u, v)$ dans A' nous tirons

$$\sin \omega(u, v) > \sin \varepsilon.$$

L'équation (4) appliquée à A' donne

$$\omega(\alpha', 0) - \omega(\beta', 0) + \omega(\beta', v_1) - \omega(\alpha', v_1) = \iint_{A'} \sin \omega \, du \, dv > (\beta' - \alpha') v_1 \sin \varepsilon,$$

c.à.d., puisque $\omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0) > 0$ et $\omega(\alpha', v) > 0$

$$v_1(\beta' - \alpha') \sin \varepsilon < \omega(\beta', v_1) - [\omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0)] < \pi.$$

Par conséquent

$$v_1 < v_1^* = \frac{\pi}{(\beta' - \alpha') \sin \varepsilon}.$$

Dans \bar{D} nous avons donc un zéro de $\sin \omega$, si l'on choisit $\delta > v_1^*$. c.q.f.d.

Remarquons que la grandeur de v_1^* ne dépend que des valeurs que prend ω sur l'axe des u .

Conclusion 2.

Soit v^* l'ordonnée minimum des points $\sin \omega = 0$ dans A . De l'équation (9) pour ω_u :

$$\omega_u(u, v^*) = \omega_u(u, 0) + \int_0^{v^*} \sin \omega \, dv,$$

nous avons en chaque point de l'horizontale $v = v^*$ $\omega_u \neq 0$, donc $(\omega_u, \omega_v) \neq (0, 0)$. Il s'ensuit qu'il existe par chaque point de l'horizontale $v = v^*$ une ligne de niveau de ω — de classe C^p — qui, du fait de $\omega_u \neq 0$, coupe l'horizontale $v = v^*$. Les points $\sin \omega = 0$ d'ordonnée minimum ne peuvent par conséquent se situer qu'aux deux extrémités du segment $v = v^*$; à l'extrémité droite nous avons le long de la ligne de niveau $-\infty \leq dv : du < 0$, à l'extrémité gauche $0 < dv : du \leq +\infty$. De $\omega_u > 0$ sur $v = v^*$ on tire enfin que $\sin \omega = 0$ ne peut admettre que les solutions $\omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$ à l'extrémité droite, $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$ à l'extrémité gauche du segment $v = v^*$, c.q.f.d.

§ 3. Des points-bordure.

1. Précisons tout d'abord les notions de bordure et de singularité d'une surface plongée dans un espace ambiant, en particulier dans l'espace euclidien à trois dimensions [13].

Considérons une surface topologique F donnée in abstracto, munie d'une structure q fois différentiable, respectivement analytique. Une telle surface sera dite surface différentiable de classe C^q , respectivement de classe C^∞ . Donnons-nous sur F trois fonctions de classe C^q et interprétons ces fonctions comme étant les trois composantes d'un vecteur χ de l'espace ordinaire R^3 . Si nous supposons encore les vecteurs χ_u et χ_v linéairement indépendants (hypothèse ne dépendant pas du choix, parmi l'ensemble, du système de coordonnées u, v), le vecteur χ définit une surface dans l'espace $F' = \chi(F)$. F' est une application localement topologique de la surface F dans l'espace R^3 ; F est la surface des paramètres de F' .

La géométrie euclidienne de R^3 induit, comme on le sait, une géométrie sur F' , laquelle, à son tour, au moyen du vecteur χ , définit une métrique

riemannienne sur F ; la notion de distance $\rho(\alpha, \beta)$ de deux points α et β de F se définit comme étant la limite inférieure des longueurs de toutes les courbes reliant α et β .

Nous donnerons la définition suivante du concept point-bordure d'une surface F' : un point B' de l'espace R^3 n'appartenant pas à F' est appelé *point-bordure* de F' , s'il existe sur F' une suite de points α_i telle que $\lim r(\alpha_i) = B'$ et telle que les distances $\rho(\alpha_1, \alpha_i)$ soient bornées.

Il est évident que l'ensemble des points-bordure d'une surface quelconque de l'espace — ensemble appelé aussi la *bordure* de la surface — peut admettre, même pour une surface $K = -1$, une configuration des plus compliquées. Son étude n'a d'intérêt que si nous restreignons nos considérations aux surfaces formant un tout, aux surfaces n'étant pas partie d'une surface plus étendue, nous entendons par là aux surfaces dites non prolongeables, dont voici la définition:

Un point-bordure B' d'une surface F' est appelé *point-bordure régulier* de F' , s'il existe une extension \bar{F}' de F' comprenant B' à son intérieur. La surface est dite alors *prolongeable* au delà du point-bordure B' . Lorsque il n'existe pas d'extension \bar{F}' satisfaisant à ces conditions, B' se nomme *point-bordure singulier* ou simplement *singularité* de F' , la surface elle-même non prolongeable au delà du point-bordure B' . Etant points-bordure, les points singuliers n'appartiennent pas à la surface.

Une surface est *non prolongeable* lorsqu'elle ne possède pas de points-bordure réguliers.

2. L'ensemble des surfaces auxquelles s'applique le théorème que nous nous proposons de démontrer est formé des surfaces à courbure négative constante égale à -1 non prolongeables dites sans ramifications. La définition de cette dernière appellation nécessite les deux remarques préliminaires suivantes:

1— Il est aisé de voir que, sur une surface $K = -1$ non prolongeable, seules des singularités de la surface peuvent arrêter l'extension d'un quadrilatère asymptotique donné: si tous les points de l'un des côtés Γ' , extrémités comprises, d'un tel quadrilatère A'_0 appartiennent à la surface, le voisinage de chacun d'entre eux peut, selon les propriétés établies au § 1, être recouvert d'un réseau asymptotique de coordonnées; l'ensemble de ces réseaux locaux forment une extension du réseau défini dans A'_0 . Il est alors possible de déplacer, sans quitter la surface, le côté Γ' tout entier vers l'extérieur de A'_0 .

2— Si l'extension d'un quadrilatère asymptotique A'_0 ne peut être empêchée que par la présence de singularités, il résulte d'autre part du lemme I traitant de la régularité de la fonction $\omega_u(u, v)$ sur la frontière d'un domaine caractéristique, que les 4 côtés restent, tout au long du processus d'extension, des courbes régulières, que ces côtés atteignent ou non des singularités de la surface:

Puisque v mesure la longueur d'arc le long des lignes asymptotiques $u = \text{const.}$, chacune de ces lignes possède, pour $v = \delta$, un point limite dans l'espace. L'image sphérique du réseau formant lui aussi un réseau de TCHÉBY-

CHEFF, le vecteur normal ξ admet pour la même raison le long d'une ligne asymptotique $u = \text{const.}$ une position limite pour $v = \delta$. Considérons dans A'_0 un ruban asymptotique $u = u_0$ et le long de ce ruban la suite (pour v croissant) des trièdres de FRENET des rubans $v = \text{const.}$ De cette suite prenons une suite partielle convergente pour $v = \delta$. A chaque trièdre de la suite partielle correspond un ruban asymptotique $v = \text{const.}$; celui-ci possède les invariants

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm 1 \\ b_1 &= 0 \\ c_1 &= -\omega_u. \end{aligned}$$

La surface étant supposée de classe C^{q-1} , c.à.d. la fonction génératrice de classe C^{q-2} dans le système asymptotique de coordonnées u, v , ces invariants, en particulier la courbure géodésique $c_1 = -\omega_u$, sont de classe C^{q-3} ($q-3 = 0, 1, \dots, \infty, \Omega$) dans A'_0 ; ils admettent donc tous trois, suivant le Lemme I une valeur limite pour $v = \delta$, valeur étant de classe C^{q-3} ($q-3 = 0, 1, 2, \dots, \infty$) sur le bord $v = \delta$). Puisque les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires — dans notre cas les équations de FRENET (6) des rubans asymptotiques $v = \text{const.}$ — dépendent de façon continue et du paramètre v intervenant dans ces équations par l'intermédiaire des invariants a_1, b_1 et c_1 , et des trièdres initiaux $u = u_0$, la suite partielle de rubans possède un ruban limite. Ce ruban limite, enfin, ne dépend pas du choix de la suite partielle convergente: les lignes asymptotiques $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ formant un réseau régulier, les rubans de la suite partielle induisent sur une quelconque des lignes asymptotiques $u = \text{const.}$ une suite de points qui, elle, ne possède — comme indiqué plus haut — qu'un seul point limite pour $v = \delta$; le même raisonnement est valable pour les images sphériques de ces rubans asymptotiques.

Sur la base de ces deux remarques, il est possible de définir ce que nous entendons par la notion de *surface à courbure négative constante sans ramifications*. Soit A'_0 un quadrilatère asymptotique ouvert quelconque, A_0 son image primitive dans le plan des u, v . Supposons que sur l'un des 4 bords Γ' de A'_0 , par exemple sur le bord $v = \delta$, la fonction $\omega(u, v)$ satisfasse aux mêmes conditions de régularité qu'à l'intérieur de A'_0 , soit à

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &\in C^{q-2} & (q-2 = 1, 2, \dots, \infty, \Omega) \\ \sin \omega &> 0. \end{aligned}$$

Soit $P(u_0, \delta)$ un point tel que son image P' soit située sur la surface. Remarquons qu'un tel point existe toujours, car l'hypothèse que tout point de Γ' est singularité pour la surface est incompatible avec les propriétés de prolongement des fonctions ω et par conséquent de la surface elle-même. P' étant point de la surface, la fonction ω_1 définie dans le voisinage de P' peut être considérée comme une extension locale de ω au delà du point-frontière P' de A'_0 . Cette extension locale définit de façon univoque, suivant le théorème

²⁾ C'est ici que nous utilisons l'hypothèse faite sur la surface d'être au moins de classe C^q .

d'existence cité au § 2, une extension régulière ω_1 de ω non seulement au voisinage de P , mais encore au delà de chaque point de I' . A cette extension ω_1 correspond dans l'espace une extension A'_1 du quadrilatère A'_0 , A'_1 n'étant pas nécessairement située entièrement sur la surface. Nous dirons que la surface F' est sans ramifications, s'il existe — quel que soit le quadrilatère A'_0 choisi sur F' — autour de chaque point de I' appartenant à F' un voisinage entièrement situé à la fois et sur F' et sur A'_1 .

Notons que toute surface analytique est sans ramifications au sens ci-dessus: en effet, l'extension A'_1 définie à partir du voisinage de P' représente une extension analytique de A'_0 non seulement aux environs de P' mais au delà de tout point Q' de I' appartenant à la surface. L'extension locale (analytique) au delà de Q' que nous aurions pu définir directement à partir de la fonction ω au voisinage de Q' s'identifie bien avec A'_1 , puisque le prolongement analytique d'une fonction analytique dans un domaine simplement connexe est nécessairement unique.

Voici un exemple simple d'un morceau de surface ne satisfaisant pas à la définition des surfaces sans ramifications, appartenant donc à ce que nous appellerons une surface ramifiée: soit, dans les 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} quadrants du plan des u, v , $\omega_1(u, v)$ la solution de l'équation (4) se réduisant à $\frac{\pi}{2} + u^4$ sur l'axe des u et à $\frac{\pi}{2} + v^4$ sur l'axe des v , $\omega_2(u, v)$ la solution dans le même domaine déterminé par les valeurs initiales sur les axes $\frac{\pi}{2} - u^4$, respectivement $\frac{\pi}{2} - v^4$; les solutions $\omega_3(u, v)$, respectivement $\omega_4(u, v)$, déterminées dans le premier quadrant par les valeurs $\frac{\pi}{2} + u^4$ et $\frac{\pi}{2} - v^4$, respectivement par les valeurs $\frac{\pi}{2} - u^4$ et $\frac{\pi}{2} + v^4$ sur les axes, réunissent les deux fonctions ω_1 et ω_2 en une fonction $\omega(u, v)$ ramifiée à l'origine, analytique dans tout le plan, excepté sur les demi-axes positifs où elle n'est que de classe C^3 . A l'origine, la seconde condition de régularité $\sin \omega > 0$ étant remplie, une étude un peu approfondie indique qu'il est possible de faire correspondre à la fonction ramifiée $\omega(u, v)$ dans le voisinage de l'origine, une surface $K = -1$ ramifiée, topologiquement équivalente à la surface décrite dans l'espace par le vecteur de composantes (u, v, ω) .

3. Passons maintenant à la démonstration des théorèmes énoncés dans l'introduction, théorèmes que nous rassemblerons en une seule proposition, que voici:

La bordure d'une surface $K = -1$ de classe C^q ($q = 3, 4, \dots, \infty, \Omega$), non prolongeable et sans ramifications, comprend au moins un arc de courbe. En chaque point de cet arc, le plan tangent à la surface admet une position limite bien définie; l'arc de courbe et l'ensemble des plans tangents limites le long de cet arc forment un ruban de classe C^{q-1} ($q = 3, 4, \dots, \infty$).

Démonstration: Soit O' un point d'une surface F' satisfaisant aux hypothèses du théorème. Puisque dans tout système asymptotique de coordonnées

la fonction ω_u ne peut être stationnaire le long d'une courbe v ($\omega_{uv} = \sin \omega$), supposons $\omega_u \neq 0$ en O' . Soient l_1 et l_2 les deux lignes asymptotiques passant par O' . Introduisons dans le voisinage de O' un système asymptotique de coordonnées u, v , de façon que l'on ait $v = 0$ sur l_1 , et $u = 0$ sur l_2 . Sur les lignes $v = \text{const.}$ respectivement $u = \text{const.}$ définissons les sens croissants des paramètres de manière à avoir en O'

$$\begin{aligned} \omega_u &> 0 \\ \sin \omega &> 0^3). \end{aligned}$$

Nous remarquerons qu'il y a exactement deux systèmes satisfaisant à ces conditions, chaque système correspondant à une orientation de la surface; on passe de l'un des systèmes à l'autre par la transformation $\bar{u} = -u, \bar{v} = v$. Les sens des v croissants dans ces deux systèmes étant identiques, les deux inégalités ci-dessus définissent sur les courbes de la seconde famille, en particulier sur l_2 un sens privilégié d'orientation. Nous voulons démontrer qu'en nous déplaçant sur la courbe l_2 dans le sens des v croissants — sens que nous appellerons *sens privilégié de parcours* — nous atteindrons l'arc de courbe dont fait état le théorème à démontrer.

Soit A'_0 un quadrilatère asymptotique entourant O' tel que, sur le segment qu'il intercepte sur l'axe des u , on ait $\omega_u > 0$, soit A_0 l'image primitive de A'_0 dans le plan des u, v . Le choix du système de référence nous permet d'appliquer le lemme II établissant l'existence des zéros de la fonction $\sin \omega$. La conclusion I certifie la présence dans la direction des v croissants d'une singularité de la surface, le premier zéro de la fonction $\sin \omega$, si d'autres singularités n'empêchent au préalable l'extension suffisante de A'_0 . Soit $\delta^*(\alpha, \beta)$ la limite supérieure des δ , c.à.d. la valeur de δ pour laquelle l'extension de A'_0 prend fin dans la direction des v croissants (δ^* dépend éventuellement de α et de β fixant la largeur de A'_0), A'_1 le quadrilatère semi-ouvert $\alpha \leq u \leq \beta$, $\gamma \leq v < \delta^*$, A_1 son image primitive dans le plan des u, v . A l'intérieur de A_1 , respectivement A'_1 , la fonction ω satisfait aux deux conditions de régularité

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \omega(u, v) &\in C^{q-2} \\ \text{b)} \quad \sin \omega &> 0. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons établi plus haut, les points-frontière $v = \delta^*$ de A'_1 forment une courbe spatiale régulière I'' ; soit S' une singularité de la surface située sur I'' . Montrons tout d'abord qu'en S' l'une au moins des deux conditions a) ou b) n'est pas satisfaite. En effet, si en S' la fonction ω satisfait aux deux conditions a) et b), la première est, d'après les propriétés de la fonction ω établies au § 2, remplie non seulement en S' , mais en tout point de I'' , la seconde, par continuité, sur une portion I'_1 de I'' située dans le voisinage de S' . Il existe alors, comme nous l'avons vu plus haut, sur I'_1 un point-frontière P' appartenant à la surface. L'existence d'un morceau régulier de surface dans le voisinage de P' permet par conséquent de définir une extension de A'_1

³⁾ cf. l'hypothèse du lemme II.

au delà de I'_1 , extension se confondant avec la surface F' , selon l'hypothèse des surfaces sans ramifications, dans le voisinage de tous les points de I'_1 situés sur F' . S' ne peut par conséquent pas être singularité de F' , ou alors F' n'est pas non prolongeable comme nous l'avons supposé.

En une singularité S' située sur I'' nous avons donc deux possibilités: 1— au point S du plan des u, v , correspondant à S' , la première condition a) n'est pas remplie. Des propriétés de la fonction ω établies au § 2, il s'ensuit qu'elle n'est satisfaite en aucun point $v = \delta^*$, c.à.d. que dans l'espace chaque point de I'' est singularité de F' . I'' est le *ruban singulier* dont nous avons postulé l'existence dans le théorème. Géométriquement parlant, le caractère singulier de la surface au voisinage d'un point de I'' est fort peu prononcé; le plan tangent admet une position limite, comme si le point considéré était point de la surface. Remarquons aussi que, selon (3), les courbures principales k_1 et k_2 appartiennent à la même classe de différentiation C^{q-2} que la fonction $\omega(u, v)$.

2— En S la première condition a) est remplie tandis que b) ne l'est pas: $\sin \omega(S) = 0$. Cette condition entraîne, suivant les équations (3), qu'en S' l'une des courbures principales de la surface est infinie. De la conclusion 2) du lemme II, S se trouve en l'une ou l'autre extrémité de I' . Supposons S à l'extrémité $u = \beta$ et appliquons le lemme: déplaçons dans le plan des u, v le point de coordonnées $(\beta, 0)$ dans la direction des u croissants; le sommet de coordonnée β et $\delta^*(\alpha, \beta)$ se déplace sur une ligne de niveau $\omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$ — de classe C^{q-2} comme la fonction ω — pour laquelle on a

$$(10) \quad -\infty \leq dv : du < 0.$$

Soit G le domaine du plan des u, v délimité par les 4 caractéristiques $u = 0$, $u = \beta + \Delta \beta$, $v = 0$, $v = \delta^*$ et un arc de la ligne de niveau en question. Montrons qu'en chaque point $R(u, v)$ de cette courbe de niveau les vecteurs \mathfrak{r} de la surface et ξ de son image sphérique admettent des positions limites univoques. Soit P_1, P_2, \dots une suite de points convergeant vers R , $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ la suite obtenue par projection verticale de P_1, P_2, \dots sur l'horizontale $v = \text{const.}$ passant par R . Les vecteurs $\mathfrak{r}(u, v)$ et $\xi(u, v)$, lorsque le point (u, v) appartient à G , forment des réseaux de TCHÉBYCHEFF, le premier sur la surface F' , le second sur la sphère unitaire. Le point frontière R considéré comme point limite de la suite des \bar{P}_i possède dans l'espace un point image R' univoque. De plus, la distance spatiale entre les images $P'_i = \mathfrak{r}(P_i)$ et $\bar{P}'_i = \mathfrak{r}(\bar{P}_i)$ étant inférieure ou égale à la distance de P_i à \bar{P}_i dans le plan des u, v (puisque P'_i est relié à \bar{P}'_i par un arc de courbe de longueur égale à la distance de P_i à \bar{P}_i dans le plan des u, v), la distance spatiale entre l'image P'_i de P_i et l'image R' définie plus haut est majorée par la somme des distances $\bar{P}'_i P'_i$ et $\bar{P}'_i R'$. Cette distance tend bien vers zéro lorsque P_i tend vers R . Le même raisonnement est utilisable pour démontrer l'existence du vecteur limite ξ en R , de même que pour établir la continuité et la dérivabilité des vecteurs limites \mathfrak{r} et ξ le long de notre ligne de niveau. Nous avons donc le

long de cette courbe

$$d\mathfrak{r} = r_u du + r_v dv$$

c.à.d., puisque nous avons supposé $\omega \equiv \pi \pmod{2\pi}$

$$d\mathfrak{r} = (u' - v') r_u dv,$$

ou, en utilisant (10)

$$ds = |d\mathfrak{r}| = |u' - v'| \cdot |d\lambda| \neq 0,$$

λ étant un paramètre régulier sur la ligne de niveau.

Un raisonnement identique nous aurait amené à la conclusion

$$ds = |d\mathfrak{r}| = |u' + v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

si la singularité au lieu de se situer au sommet supérieur droit du quadrilatère A_1 , s'était trouvée en son sommet supérieur gauche. Le point image S' de S est donc, comme dans le premier cas, situé sur un arc de courbe, c.q.f.d.

Un calcul élémentaire démontre enfin que le vecteur $\mathfrak{r}(u(\lambda), v(\lambda))$ et le vecteur $\xi(u(\lambda), v(\lambda))$ le long de la ligne de niveau considérée engendrent un ruban asymptotique de classe C^{q-1} ($q - 1 = 2, 3, \dots, \infty, \Omega$) possédant une torsion géodésique a et une courbure géodésique c égales à

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} a &= \pm \frac{u' - \cos \omega \cdot v'}{u' + \cos \omega \cdot v'} \\ c &= \frac{-\omega_u u'}{|u' + \cos \omega \cdot v'|} \end{aligned} \right\} \text{ où } \cos \omega = \pm 1.$$

4. Le développement du raisonnement qui nous a conduit au but fait ressortir le rôle joué dans la démonstration par l'hypothèse excluant les surfaces avec ramifications: si l'agrandissement du quadrilatère asymptotique avait été rendu impossible au delà de sa frontière $v = \delta^*$ par la présence de ramifications, nous aurions été obligés de restreindre nos considérations à un quadrilatère plus étroit, prolongeable au delà de P' dans la direction des v croissants, afin d'être à même d'utiliser le lemme II. La présence d'une seule et même d'un nombre fini de ramifications de ce genre sur la frontière des quadrilatères asymptotiques considérés successivement n'entraverait donc pas essentiellement la démonstration, elle n'obligerait qu'à rétrécir toujours plus le quadrilatère étudié. D'autre part, puisque le raisonnement peut être effectué à partir d'un quadrilatère initial A'_0 quelconque sur la surface, il résulte que le théorème sans l'hypothèse excluant les ramifications ne peut être démontré de cette manière que dans le cas de surfaces sur lesquelles il n'est pas possible de trouver — du fait de la présence de ramifications — un quadrilatère asymptotique suffisamment étendu. Une définition des surfaces $K = -1$ excluant ce cas seul étant trop subtile et peu intuitive, il nous a semblé préférable de formuler le théorème pour l'ensemble des surfaces sans ramifications.

Si, dans le plan des u, v , les images primitives des points de ramification d'une surface quelconque $K = -1$ sont nécessairement en nombre infini, il est néanmoins difficile de connaître, par la méthode développée dans ce travail, leur répartition dans l'espace.

§ 4. Les réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique.

Les démonstrations et raisonnements effectués sur les surfaces $K = -1$ de l'espace euclidien, en particulier sur les réseaux de leurs lignes asymptotiques peuvent être appliqués, sans modifications essentielles, aux réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique. Pour simplifier, nous ne traiterons que le cas des réseaux analytiques.

Dans un domaine ouvert D du plan hyperbolique, nous appellerons *réseau* tout système de deux familles de courbes recouvrant D , tel que pour tout point de D , il existe un voisinage dans lequel les deux familles de courbes peuvent être utilisées comme courbes de coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$

Un réseau du plan hyperbolique est dit *non prolongeable* s'il n'existe pas, dans le plan, de réseau plus étendu le contenant en entier.

Un réseau est dit *réseau de TCHÉBYCHEFF* si l'on peut exprimer la métrique du plan sous la forme

$$I = ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) \cdot du \cdot dv + dv^2;$$

$\omega(u, v)$ en est la fonction génératrice. Cette dernière fonction possède les trois propriétés reconnues à nos réseaux asymptotiques, à savoir

- $\omega(u, v) \in C^\Omega$ si le réseau est de classe C^Ω et inversement,
- $\sin \omega(u, v) > 0$,
- $[\omega]_A = \iint_A \sin \omega \, du \, dv$, où A représente un quadrilatère délimité par 4 arcs de courbes du réseau.

Inversément, ces 3 conditions représentent les conditions locales suffisantes pour qu'une fonction univoque en u et v puisse être considérée comme fonction génératrice $\omega(u, v)$ d'un réseau de TCHÉBYCHEFF recouvrant un domaine du plan hyperbolique. En effet, le voisinage d'un point P du plan (appartenant au domaine de définition de ω) dans lequel est définie la métrique I de courbure $K = -1$ peut, comme on le sait, être appliqué isométriquement sur le plan hyperbolique.

Nous voulons montrer que la bordure d'un domaine du plan hyperbolique recouvert d'un réseau de TCHÉBYCHEFF possède des propriétés semblables à celles de la bordure des surfaces $K = -1$ plongées dans l'espace euclidien. La démonstration de l'existence d'une courbe-bordure se réduit ici au raisonnement suivant: en agrandissant une maille du réseau dans la direction privilégiée, il sera toujours possible d'atteindre sur son pourtour soit une courbe sur laquelle la fonction $\omega(u, v)$ cessera d'être régulière, soit un point d'une ligne de niveau $\sin \omega = 0$ pour laquelle les inégalités

$$ds = |u' - v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

respectivement

$$ds = |u' + v'| \cdot |d\lambda| \neq 0$$

intervenant en fin de démonstration restent valables. La régularité de cette courbe-bordure est une conséquence du fait que, dans le plan hyperbolique, un point et une direction déterminent univoquement une courbe de courbure donnée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

La bordure d'un domaine du plan hyperbolique recouvert d'un réseau de TCHÉBYCHEFF analytique et non prolongeable comprend au moins un arc de courbe; parmi ces courbes il y en a toujours une au moins qui est dérivable autant de fois que l'on veut.

§ 5. Exemples.

Exemple 1.

La solution de l'équation (4) se réduisant à

$$\omega(u, 0) = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin \frac{u}{1-u^2}, \quad \omega(0, v) = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin \frac{v}{1-v^2}$$

sur l'axe des u , respectivement sur l'axe des v est analytique à l'intérieur du carré unitaire $|u| < 1$, $|v| < 1$, satisfait, en prenant ε suffisamment petit, à $\sin \omega > 0$ dans ce domaine. Sur la frontière de ce domaine elle cesse d'être régulière. Elle engendre donc localement dans l'espace une surface $K = -1$) analytique et non prolongeable, délimitée par 4 arcs de courbe. En un quelconque des points-bordure, la fonction ω et par conséquent les courbures principales sont indéfinies (singularité du premier type). La première assertion du point 6 de l'introduction se trouve ainsi démontrée.

Exemple 2.

Les solutions connues les plus simples de l'équation (4) sont fonctions d'une seule variable intermédiaire, à savoir de la combinaison linéaire $l = \lambda u + \mu v + \nu$ (λ, μ, ν constants). L'équation sous sa forme (8) se réduit dans ce cas à l'équation différentielle ordinaire

$$\lambda \mu \frac{d^2 \omega}{dl^2} = \sin \omega,$$

dont les solutions sont exprimables par des fonctions elliptiques ou exponentielles. A ces fonctions génératrices particulières correspondent les surfaces hélicoïdales de MINDING [12], et, dans le cas $\lambda = \mu$, les surfaces de rotation.

Exemple 3.

La méthode développée dans ce travail permet de construire un nouvel exemple simple de surface $K = -1$ non prolongeable. Les valeurs initiales $\omega(u, 0) = \omega(0, v) = \omega_0 = \text{const.}$ définissent dans le plan des u, v une solution unique $\omega(u, v)$ de l'équation $\omega_{uv} = \sin \omega$; cette solution est analytique dans tout le plan u, v . Au sujet des propriétés de cette fonction, remarquons tout d'abord que la fonction $\bar{\omega}(u, v) = \omega(\lambda u, \lambda^{-1} v)$, où λ est une constante non nulle, satisfait à l'équation $\bar{\omega}_{uv} = \sin \bar{\omega}$ et admet les mêmes conditions initiales pour $u = 0$ et $v = 0$. Selon la propriété d'unicité exprimée dans le théorème d'existence cité plus haut, $\bar{\omega}(u, v) = \omega(u, v)$: les lignes de niveau de la fonction $\omega(u, v)$ sont ainsi des hyperboles équilatères $uv = \text{const.}$

Les lignes de niveau $\sin \omega = 0$ nous intéressent spécialement. Si l'on s'en tient aux solutions pour lesquelles $0 < \omega_0 < \pi$, nous avons, d'après l'équation c') (§ 1, no 1), en un point du premier quadrant $u > 0$, $v > 0$ situé suffisamment près de l'axe des u

$$\omega_u(u, v) = \omega_u(u, 0) + \int_0^v \sin \omega \, dv = \int_0^v \sin \omega \, dv > 0.$$

4) Respectivement un réseau de TCHÉBYCHEFF dans le plan hyperbolique.

La direction des v croissants dans le premier quadrant est, selon le lemme II, direction privilégiée: il existe dans le premier quadrant une branche d'hyperbole $uv = \text{const.}$ sur laquelle $\sin \omega = 0$. Soit $uv = \lambda_1$ la première ligne $\sin \omega = 0$ atteinte de cette façon; puisque $\omega_u > 0$ sur tout segment d'horizontale compris entre l'axe des v et cette hyperbole, l'équation $\sin \omega = 0$ sur $uv = \lambda_1$ n'admet que la solution $\omega = \pi$. La fonction ω ne dépendant que du produit uv , la seconde branche de cette hyperbole, située dans le troisième quadrant du plan, est, elle aussi, ligne de niveau $\omega = \pi$. Dans les deuxième et quatrième quadrants enfin, ω possède une ligne de niveau $uv = \lambda_2$ sur laquelle $\omega = 0$: la transformation $\bar{u} = -u$, $\bar{v} = +v$ et $\bar{\omega} = \pi - \omega$ applique les deuxième et quatrième quadrants sur les premier et troisième et permet un raisonnement identique. Dans le domaine du plan des u, v délimité par les 4 branches d'hyperboles $uv = \lambda_1$ et $uv = \lambda_2$, la solution $\omega(u, v)$ vérifie les conditions $\omega \in C^2$ et $\sin \omega > 0$; elle engendre par conséquent dans l'espace une surface $K = -1^4$, analytique et non prolongeable. Cette surface possède 4 courbes-bordure, deux courbes $\omega = 0$ et deux courbes $\omega = \pi$. Les lignes asymptotiques $u = 0$ et $v = 0$ sont rectilignes, du fait que sur les axes de coordonnées la courbure géodésique s'annule, $c_1 = -\omega_u = 0$, $c_2 = +\omega_v = 0$, donnant ainsi, d'après les équations de FRENET (6), une valeur constante au vecteur tangentiel t ; ω_0 représente en particulier l'angle formé par ces deux asymptotiques rectilignes. La surface possède de plus une aire infiniment grande: l'aire hyperbolique du premier quadrant, délimitée par l'axe des u , les asymptotiques $u = u_0$, $v = v_0$ ($u_0 v_0 \geq \lambda_1$) et la courbe $uv = \lambda_1$, s'exprime, en utilisant la formule de STOKES, par

$$\iint \sin \omega \, du \, dv = \iint \omega_{uv} \, du \, dv = - \oint \omega_u \, du$$

$$\text{et puisque sur } uv = \lambda_1 : \omega_u = \frac{\partial \omega}{\partial (uv)} \cdot \frac{\partial (uv)}{\partial u} = \text{const. } v = \text{const. } \frac{1}{u}$$

$$\iint \sin \omega \, du \, dv = \pi - \omega_0 + \text{const.} \int_u^{u_0} \frac{du}{u} = \pi - \omega_0 + \text{const.} \log \left(\frac{u_0 v_0}{\lambda_1} \right),$$

expression tendant vers l'infini en même temps que u_0 ou v_0 .

La surface correspondant à la valeur initiale $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ possède des propriétés intéressantes. Dans le plan u, v , les lignes de niveau $uv = \lambda_1$ et $uv = \lambda_2$ sont symétriques: $\lambda_1 = -\lambda_2$. La surface dans l'espace (voir figure) possède, puisque l'angle des deux asymptotiques rectilignes est droit ($\omega_0 = \frac{\pi}{2}$), toute une série de symétries spatiales. De plus cette surface est la seule, parmi les surfaces soustendues par deux droites, la seule surface $K = -1$ aussi que nous connaissons, à posséder des quadrilatères asymptotiques d'aire maximum 2π . Selon la formule d'HAZZIDAKIS

$$F = \iint_A \sin \omega \, du \, dv = [\omega]_A$$

reliant l'aire F d'un quadrilatère asymptotique A à la somme alternée $[\omega]_A$.

F est en effet bornée par la valeur maximum que peut prendre $[\omega]_A$ soit par 2π . Du fait de $\lambda_1 = -\lambda_2$, il existe sur la surface des quadrilatères A dont les quatre sommets sont situés sur les lignes de singularités $\omega = 0$ et $\omega = \pi$. Pour ces quadrilatères la somme alternée est exactement égale à 2π .

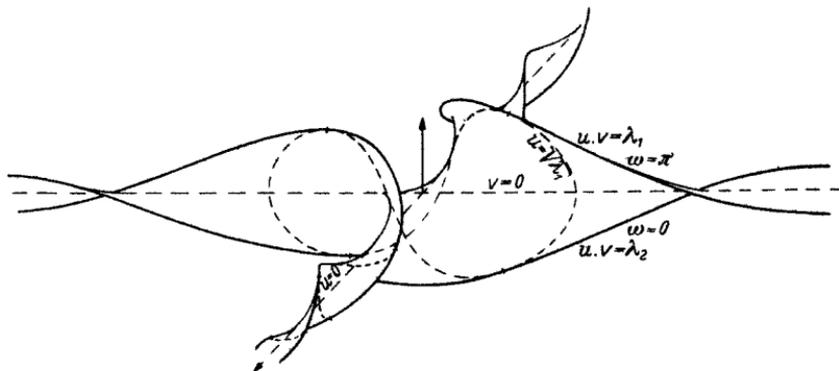


Fig. 1. Surface à courbure négative constante soutenue par deux droites se coupant à angle droit (vue axonométrique).

Nous avons construit la figure représentée ci-dessus par l'artifice suivant, permettant d'éviter l'intégration numérique des équations différentielles partielles représentant le passage de la valeur $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ à la fonction $\omega(u, v)$ puis à la surface dans l'espace :

Intégration de l'équation différentielle $\omega_{uv} = \sin \omega$, $\omega(u, 0) = \omega(0, v) = \omega_0 = \text{const}$. La fonction $\omega(u, v)$, ne dépendant que du produit $x = uv$, satisfait à

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d\omega}{dx} x_u \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d\omega}{dx} \cdot v \right) = \frac{d^2 \omega}{dx^2} uv + \frac{d\omega}{dx} = \omega'' x + \omega' = (\omega' x)',$$

donc à l'équation différentielle ordinaire

$$(\omega' x)' = \sin \omega,$$

dont l'intégration numérique s'effectue sous la forme

$$\omega' = \frac{1}{x} \int \sin \omega dx.$$

Passage de la fonction $\omega(u, v)$ à la surface dans l'espace: L'intégration des équations

$$\begin{aligned} dx^2 &= du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2 \\ (d\xi dx) &= \pm 2 \sin \omega du dv \end{aligned}$$

peut être évitée en intégrant la surface le long des lignes asymptotiques qui, elles, satisfont à des équations différentielles ordinaires (cf. l'intégration des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique au moyen des caractéristiques).

La troisième équation de FRENET (6) des rubans asymptotiques donne après différentiation et en utilisant la seconde équation (6)

$$\ddot{\xi} = -a \dot{n} = -a(-ct + a\xi) = act - \xi \quad (a^2 = -K \equiv 1).$$

Puisque

$$t = (n \times \xi) = \frac{-1}{a} (\dot{\xi} \times \xi),$$

on obtient pour la normale ξ l'équation différentielle ordinaire (non linéaire)

$$\ddot{\xi} + c (\dot{\xi} \times \xi) + \xi = 0$$

où $c = -\omega_u$ sur une ligne $v = \text{const}$, $c = +\omega_v$ sur une ligne $u = \text{const}$. Le vecteur r lui-même se calcule par l'intégrale

$$r(s) = \int t ds = \frac{1}{a} \int (\xi \times \dot{\xi}) ds.$$

L'intégration de ces équations est univoquement déterminée à partir des trièdres initiaux (t, n, ξ) donnés sur les rubans rectilignes $u = 0$ et $v = 0$. Par ce procédé, nous avons obtenu les lignes asymptotiques $u = \sqrt{\lambda_1}(\lambda_1 = 1,862 \dots)$, $u = \pi$, $u = \frac{3\pi}{2}$ et $u = 2\pi$, permettant par symétrie de dessiner la surface entière. Pour obtenir les courbes de singularités $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, nous avons intégré numériquement leurs équations de FRENET en attribuant aux invariants a, b, c les valeurs données par les formules (11).

Bibliographie.

- [1] L. BIEBERBACH: Hilberts Satz über Flächen konstanter negativer Krümmung. Acta Math. 48 (1926). — [2] W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Springer 1924. — [3] E. GOURSAT: Cours d'analyse mathématique. Paris: Gauthier-Villars 1942. — [4] PH. HARTMANN et A. WINTNER: On the fundamental equations of differential Geometry. Amer. J. Math. LXXII (1950). — [5] PH. HARTMANN et A. WINTNER: On the asymptotic curves of a surface. Amer. J. Math. LXXIII (1951). [6] J. N. HAZZIDAKIS: Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Crelles J. 88 (1880). — [7] D. HILBERT: Appendice à la 5^{ème} édition des Grundlagen der Geometrie. — [8] E. HOLMGREN: C. r. Acad. Sci. (Paris) 134 (1902). — [9] E. R. VAN KAMPEN: The theorems of Gauss-Bonnet and Stokes. Amer. J. Math. LX (1938). — [10] F. KLEIN: Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1871). [11] F. KLEIN: Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie. Berlin: Julius Springer 1928. — [12] F. MINDING: J. f. Math. 19 (1839). — [13] J. J. STOKER: Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume. Comp. Math. 3 (1936).

(Eingegangen am 6. Februar 1955.)