Voss, K.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 180—218 (1956)

Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen

Von
K. Voss in Zürich

Einleitung

In dieser Arbeit werden n-dimensionale Flächen im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum untersucht. Die Flächen sollen mehrmals differenzierbar und regulär im Sinne der Differentialgeometrie sein. Es wird sich besonders darum handeln, Aussagen über geschlossene Flächen zu gewinnen. Zum Teil wird nur der Fall $n = 2$ durchgeführt werden, jedoch lassen sich die Ergebnisse ausnahmslos auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

1. Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die Frage, ob zwischen den Hauptkrümmungen k_1, k_2 einer geschlossenen (2-dimensionalen) Fläche eine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen kann. Dies ist ein Teil der allgemeineren Frage nach geschlossenen Flächen mit einer Relation

$$W(k_1, k_2) = 0$$

zwischen den Hauptkrümmungen, die von H. Hopf [1][1]) untersucht worden ist. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang zunächst folgenden Satz:

Satz A. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer Eifläche kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel.*

Darin sind z. B. die bekannten — zuerst von H. Liebmann bewiesenen — Spezialfälle $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = c$ und $K = k_1 k_2 = c$ enthalten.

Der Satz A folgt aus einem allgemeineren Satze von A. D. Alexandrov [2], auf den wir noch zurückkommen werden[2]). Unabhängig davon ist der Satz A von S. S. Chern [5] in der obenstehenden Form ausgesprochen worden. Der Beweis wird mit der gleichen Methode geführt, wie sie Hilbert für den Fall $K = c$ angegeben hat, etwa in der Fassung, die in dem Lehrbuch von W. Blaschke [6] dargestellt ist[3]). Diese Methode besteht darin, daß man denjenigen Punkt der Fläche betrachtet, in dem die größere Hauptkrümmung ihr Maximum erreicht. Dann ist der Satz A ein Korollar des folgenden lokalen Satzes:

Satz B. *Auf einem positiv gekrümmten Flächenstück, welches nicht Teil einer Kugel ist, kann nicht in einem Punkt die größere Hauptkrümmung ein Maximum und gleichzeitig die kleinere ein Minimum haben.*

---

[1]) Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Man vgl. auch die Arbeiten von Pogorelov [3] und Hartman und Wintner [4], wo die Voraussetzung der Analytizität in [2] wesentlich abgeschwächt wird.

[3]) Vgl. die Ausführungen in [1], Einleitung, Nr. 5.

Dieser Satz hat wesentlich allgemeineren Charakter als der Satz A, da jetzt von einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen nicht die Rede ist.

Der Beweis des Satzes B sei hier im Anschluß an BLASCHKE kurz wiedergegeben[4]): Wir betrachten ein beliebig gekrümmtes Flächenstück, auf dem die größere Hauptkrümmung in einem Punkte o ein Maximum und die kleinere ein Minimum erreicht. Dann wird behauptet: *Entweder ist die Fläche ein Kugelstück, oder die Gaußsche Krümmung in o ist nicht positiv.* Falls o ein Nabelpunkt ist, so sind wir fertig, denn dann stimmt das Maximum der größeren Hauptkrümmung mit dem Minimum der kleineren überein, und somit sind die Hauptkrümmungen überall gleich, und die Fläche ist Teil einer Kugel oder Ebene. Sei also o kein Nabelpunkt. Dann lassen sich in der Umgebung von o Krümmungslinien-Parameter u, v so einführen, daß auf den beiden Krümmungslinien durch o außerdem noch u bzw. v die Bogenlänge ist. Die ersten Fundamentalgrößen seien mit E, F, G $(F = 0)$ und die zu den u- bzw. v-Linien gehörigen Hauptkrümmungen mit k' bzw. k'' bezeichnet. Drückt man nun in der Gleichung des Gaußschen theorema egregium die Ableitungen E_v, E_{vv}, G_u, G_{uu} auf Grund der Codazzischen Gleichungen durch k', k'' und ihre Ableitungen aus und beachtet noch, daß in o $E = G = 1$ ist, so erhält man für die Gaußsche Krümmung im Punkte o einen Ausdruck der Form

$$K = \frac{k'_{vv} - k''_{uu}}{k' - k''} + A\,k'_v + B\,k''_u.$$

Haben nun k' und k'' in o die vorausgesetzte Extremaleigenschaft, so liest man ab: in o ist $K \leqq 0$, q.e.d. Übrigens sieht man an Beispielen, daß diese Situation tatsächlich vorkommt.

Man könnte nun vermuten, daß auf nicht-konvexen geschlossenen Flächen — etwa vom Geschlecht 0 — monoton abnehmende Relationen möglich sind. Dies ist jedoch nicht der Fall. Beschränken wir uns auf differenzierbare Funktionen $f(k_1)$ mit negativer Ableitung. Dann folgt aus Sätzen von H. HOPF:

Satz C. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer analytischen geschlossenen Fläche vom Geschlecht* 0 *kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel*[5]).

Damit ist unsere Frage (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) für Flächen vom Geschlecht 0 beantwortet; dagegen ist — soviel ich weiß — die Frage offen, ob es Flächen vom Geschlecht $g \geqq 1$ mit einer Relation der genannten Art gibt. Einzig für die spezielle Relation $H = c$ existieren Teilergebnisse, denen zufolge es unter allen geschlossenen Flächen mit $g \geqq 1$ einer gewissen Flächenklasse keine Flächen mit $H = c$ gibt. Diese noch zu erläuternden Sätze, die sich auch auf nicht-konstantes H beziehen, sind in einer

[4]) W. BLASCHKE [6], S. 195—197. Übrigens ist das am Schluß des dortigen § 91 formulierte Ergebnis falsch: Z. B. auf den bekannten Rotationsflächen mit $K = 1$ werden die Hauptkrümmungen in den Punkten des größten Parallelkreises extremal, ohne daß diese Punkte Nabelpunkte sind (die größere Hauptkrümmung hat ein Minimum).

[5]) Vgl. [1], S. 237, Satz B'. Dort braucht die Relation nur in der Umgebung der Nabelpunkte zu existieren und monoton zu sein. Vgl. auch den Satz C auf S. 238 und dazu die Bemerkung in [7], S. 53, über die Voraussetzung der Analytizität.

gemeinsamen Note von H. Hopf und mir [8] dargestellt worden. (Vgl. auch den Vortrag [7], wo die Anwendung auf Flächen mit konstantem H ausführlich diskutiert wird.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in einer Ausarbeitung und Erweiterung der Ideen von [8]. Erstens werden den in [8] abgeleiteten Integralformeln für H, aus denen sich die dortigen Sätze ergeben, Integralformeln und Sätze für K — allgemeiner: für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche — an die Seite gestellt. Zweitens wird noch eine andersartige Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich die entsprechenden Sätze folgern lassen, wenn man H bzw. K durch eine symmetrische Funktion $W(k_1, k_2)$ ersetzt, die in beiden Variablen monoton ist, und zwar *gleichsinnig monoton*, d. h. etwa monoton wachsend in beiden Variablen; dies wird allerdings nur unter Beschränkung auf analytische Flächen geschehen. Wir werden beweisen (Sätze IV und IV′):

Auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht $g \geqq 1$ mit „genügend vielen" Konvexitätsrichtungen (in einem noch zu präzisierenden Sinne) *kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen* (insbesondere keine derartige symmetrische Relation $W(k_1, k_2) = 0$)[6]).

Dabei heiße die geschlossene Fläche F konvex in einer Richtung, wenn jede Gerade dieser Richtung höchstens zwei Punkte mit F gemeinsam hat (genaue Definition im § 2). Eine Eifläche ist in jeder Richtung konvex; aber es gibt auch nicht-konvexe Flächen von beliebigem Geschlecht, welche Konvexitätsrichtungen besitzen. Zum Beispiel ist die gewöhnliche Torusfläche in der Richtung der Rotationsachse und in allen benachbarten Richtungen konvex.

Beim obenstehenden Satz sind also nur Flächen von verhältnismäßig einfacher Gestalt zugelassen, und die Frage bleibt offen, wie die Verhältnisse für beliebige geschlossene Flächen sind.

2. Die in Nr. 1 angedeuteten Sätze IV und IV′ werden sich aus einem allgemeineren Satze ergeben, den wir den *Symmetriesatz* nennen (Satz II; genaue Formulierung im § 5):

F sei eine in der Richtung $\mathfrak{e}$ konvexe Fläche und $W(k_1, k_2)$ eine symmetrische Funktion, die in beiden Variablen gleichsinnig monoton ist. Falls dann für jede Schnittgerade der Richtung $\mathfrak{e}$ die Funktion W in den beiden Schnittpunkten den gleichen Wert hat, so besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.

Von der Funktion W wird hier nicht vorausgesetzt, daß sie auf F konstant sei; ist dies aber der Fall, so folgt, daß es zu jeder Konvexitätsrichtung eine Symmetrieebene gibt. Eine Fläche mit genügend vielen Symmetrieebenen muß aber eine Kugel sein.

3. Um den Symmetriesatz zu beweisen, leiten wir folgenden allgemeineren Satz her, den wir den *Translationssatz* nennen wollen (Satz I):

Zwischen den Flächen F und $\bar{F}$ bestehe eine „Parallelabbildung", d. h. eine Abbildung, bei der die Verbindungsgeraden von Punkt und Bildpunkt eine feste

[6]) Für die Relation $H = c$ siehe [7], Satz II.

Richtung haben. Wir setzen voraus, *eine Funktion $W(k_1, k_2)$ der in Nr. 2 betrachteten Art habe in einander entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ den gleichen Wert*, und zeigen: *dann ist die Abbildung eine Translation.*

Daraus, daß die beiden Flächen die Funktion W im Sinne der Parallelabbildung gemeinsam haben, folgt also ihre Kongruenz.

Man kann den Translationssatz mit dem Satz von ALEXANDROV [2] vergleichen, der im Zusammenhang mit dem Satz A genannt wurde: Dort werden zwei Eiflächen betrachtet, die so aufeinander abgebildet sind, daß die Normalen parallel und eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen invariant ist. Daraus folgt, daß die Abbildung eine Translation ist. Unserm Symmetriesatz entspricht folgendes Korollar aus dem ALEXANDROVschen Satze: *Die Eifläche F habe die Eigenschaft, daß in antipodischen Punktepaaren, d. h. in Punkten mit parallelen Tangentialebenen, eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen den gleichen Wert hat. Dann ist F zentralsymmetrisch.*

4. Die Paragraphen 1—4 haben vorbereitenden Charakter. Im § 1 sind Bezeichnungen und Formeln der Flächentheorie zusammengestellt. Im § 2 werden die Parallelabbildungen definiert und ihre Eigenschaften diskutiert. § 3 enthält Hilfssätze über symmetrische Funktionen von zwei Variablen, § 4 Formeln für die Variation der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche. Anschließend werden in § 5 und 6 die Sätze I und II bewiesen und im § 7 auf Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen angewandt.

Das beim Translationssatz vorliegende Problem läßt sich, wie sich zeigen wird, durch eine Funktion charakterisieren, welche einer *elliptischen Differentialgleichung* genügt. Daher kann man das Maximumprinzip anwenden. Jedoch erfordern gewisse Punkte, in denen die Differentialgleichung ausartet, eine besondere Betrachtung. Diese *Verfeinerung des Maximumprinzips* wird im § 5 geliefert (Satz 1), und zwar für analytische Flächen.

Untersucht man, wann die erwähnte Differentialgleichung selbstadjungiert ist, so zeigt sich, daß dies (bei 2-dimensionalen Flächen) für die Funktionen $W = H$ und $W = K$ zutrifft, und in gewissem Sinne nur für diese Funktionen. In diesen beiden Fällen werden im § 8 die angekündigten Integralformeln hergeleitet, aus denen sich der Translationssatz unter den üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergibt. Zur Herleitung der Integralformeln wird ein besonderer Kalkül verwendet, der sich auch sonst als nützlich erweist. Übrigens sind die Integralformeln vom gleichen Typus wie die Greensche Formel, mit der man zeigt, daß die einzigen harmonischen Funktionen auf einer geschlossenen Fläche die Konstanten sind.

Anschließend werden die Integralformeln im § 9 auf n-dimensionale Flächen im R_{n+1} mit beliebigem n verallgemeinert. Man erhält Kongruenzsätze von folgender Art (Sätze V und VI): *Wenn bei einer Parallelabbildung einer geschlossenen Fläche auf eine andere eine der elementarsymmetrischen Funktionen der n Hauptkrümmungen k_i invariant ist, so sind die Flächen kongruent.* Daraus ergibt sich dann: *Falls in je zwei Punkten, in denen eine Eifläche von den*

Geraden einer Parallelenschar getroffen wird, eine der obigen Krümmungsfunktionen den gleichen Wert hat, so ist die Fläche symmetrisch. Dies ist eine Verschärfung der Sätze von W. Süss [9], daß die Kugel die einzige Eifläche ist, auf der eine der genannten Krümmungsfunktionen konstant ist[7]). Übrigens läßt sich dieser Satz auf Linearkombinationen der Krümmungsfunktionen mit positiven Koeffizienten erweitern (Satz VII).

Die Tatsache, daß eine gewisse Differentialgleichung selbstadjungiert ist, hängt mit Variationsproblemen zusammen. Um den Integralformeln — und damit auch den Kongruenzsätzen — eine entsprechende Deutung zu geben, werden im § 10 die *Flächenintegrale der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen* betrachtet[8]). Dann zeigt sich, daß diese Krümmungsintegrale *bei einer linearen Parallelvariation* (Variation in konstanter Richtung) *konvexe Funktionen des Variationsparameters* sind (Satz IX). Im Falle des Symmetriesatzes liefert der betrachtete Variationsprozeß die *Steinersche Symmetrisierung* an einer Ebene und damit die Tatsache, daß die *Krümmungsintegrale monoton abnehmen*, es sei denn, die Fläche ist bereits symmetrisch (Satz X). Während diese Tatsache für die Oberfläche wohlbekannt ist, scheint sie für den allgemeinen Fall noch nicht bewiesen worden zu sein[9]).

Schließlich werden im § 11 berandete Flächen betrachtet, denen an Stelle der Bedingung der Geschlossenheit geeignete Randbedingungen auferlegt werden. Dann gelten zum Translationssatz analoge Kongruenzsätze. Nimmt man speziell etwa 2-dimensionale Flächen, die sich eineindeutig in die x, y-Ebene projizieren lassen, so erhält man Einzigkeitssätze für die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, die sich z. T. mit bekannten Sätzen überdecken, z. B. (im Falle der Gaußschen Krümmung K) mit einem Satz von F. Rellich [11] über das erste Randwertproblem bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. (Außer dem ersten Randwertproblem wird im § 11 noch eine andersartige Randwertaufgabe vorkommen [Randbedingung (11.2)], bei der die ersten Ableitungen am Rande gegen ∞ gehen.) Unsere Methode ergibt somit für gewisse spezielle Differentialgleichungen neuartige Beweise von Unitätssätzen mit Hilfe von Integralformeln.

Zum Schluß wird im § 12 mit der Methode des § 5 ein allgemeiner Einzigkeitssatz für elliptische Differentialgleichungen bewiesen, der den zitierten Satz von Rellich umfaßt: Die Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo p, q und r, s, t erste bzw. zweite Ableitungen einer Funktion sind, enthalte die unbekannte Funktion $u(x, y)$ nicht. Dann wird unter gewissen Annahmen über die Konvexität der beiden Gebiete, in denen der Differentialausdruck Φ positiv bzw. negativ elliptisch ist, bewiesen (Satz XI):

---

[7]) In [9] wird der Satz gleich für die relativgeometrischen Krümmungsfunktionen bewiesen.

[8]) Bei konvexen Flächen sind diese bis auf einen Faktor gleich Quermaßintegralen.

[9]) Pólya und Szegö [10], S. 168—170, zeigen, daß das $(n-1)$-te Krümmungsintegral für die symmetrisierte Fläche nicht größer ist als für die Ausgangsfläche.

Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\Phi = 0$ besitzt höchstens zwei Lösungen, für welche Φ elliptisch ist, und zwar höchstens je eine positiv bzw. negativ elliptische Lösung.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor H. Hopf. Ihm, meinem verehrten Lehrer, sei an dieser Stelle mein herzlichster Dank zum Ausdruck gebracht.

§ 1. Bezeichnungen und Formeln

Die n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ sei h-mal stetig differenzierbar ($h \geqq 2$) oder auch analytisch, d. h. die beim Übergang von einem lokalen Parametersystem $u^1, \ldots, u^n$ zu einem anderen entstehenden Parametertransformationen werden durch h-mal stetig differenzierbare bzw. reell analytische Funktionen mit positiver Funktionaldeterminante vermittelt. Wir nennen $\mathfrak{F}$ die Parameterfläche.

Eine n-dimensionale Fläche F im euklidischen Raum R_{n+1} ist gegeben durch eine Vektorfunktion $\mathfrak{x}(p)$, $p \in \mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{x}$ als Funktion lokaler Parameter h-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch sein soll. Partielle Ableitung nach u^i sei durch Anhängen des Index u^i angedeutet. Wir setzen voraus, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_{u^i} = \mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind. Demzufolge ist die Abbildung von $\mathfrak{F}$ in den Raum lokal eineindeutig; dagegen kann F Selbstdurchdringungen haben, d. h. es können mehrere Punkte p von $\mathfrak{F}$ auf einen Punkt des Raumes abgebildet werden. Die Punkte von F (also Punkte des Raumes) werden wir ebenfalls mit p bezeichnen; unter einer Umgebung eines Flächenpunktes ist dann das Bild einer Umgebung auf $\mathfrak{F}$ zu verstehen.

Sei $g_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j$ der metrische Fundamentaltensor der Fläche F, $|g_{ij}| = g$ seine Determinante, g^{ij} der zu g_{ij} inverse Tensor und $dA = \sqrt{g}\, du^1 \ldots du^n$ das Flächenelement von F. Wir benutzen die Schreibweise der Tensorrechnung, wobei mit Hilfe der g^{ij} bzw. g_{ij} Indizes herauf- und heruntergezogen werden. Die zu den g_{ij} gehörigen Christoffelschen Symbole werden mit Γ^k_{ij} bezeichnet, die kovarianten Ableitungen einer Funktion f bezüglich der Γ durch Anhängen eines Index, insbesondere also

$$f_i = f_{u^i}, \quad f_{ij} = f_{u^i u^j} - \Gamma^k_{ij} f_k .$$

Die aus $n+1$ räumlichen Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ gebildete Determinante bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1})$. Da F orientiert ist und die $\mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind, läßt sich der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen eindeutig definieren durch die Forderungen

$$\mathfrak{n}\, \mathfrak{x}_i = 0, \quad (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = + \sqrt{g} .$$

Weiter setzen wir

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{g}\, \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n) , \tag{1.1}$$

wobei unter $\operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)$ das Signum der Indexpermutation $i_1 \ldots i_n$ zu verstehen ist bzw. die Zahl 0, falls zwei Indizes gleich sind. ε ist ein Tensor bei Beschränkung auf Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante. Man kann dies aus der Darstellung

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_n})$$

ablesen. Für das n-fache Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_n}$ erhält man also

$$\mathfrak{x}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{x}_{i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \mathfrak{n}\,. \tag{1.2}$$

Zieht man in (1.1) alle n Indizes nach oben, so findet man unter Beachtung von Determinanteneigenschaften:

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} = g^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)\,. \tag{1.3}$$

Bezeichnet man das alternierende Produkt der Differentiale du^i mit $du^i \wedge du^j$:

$$du^i \wedge du^j = -du^j \wedge du^i, \tag{1.4}$$

so folgt

$$du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} dA. \tag{1.5}$$

Auf Grund der Definition der Γ^k_{ij} ist $\mathfrak{x}_{ij}$ parallel zu $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{x}_{ij} = l_{ij} \mathfrak{n}, \tag{1.6}$$

und durch diese Gleichung ist der zweite Fundamentaltensor l_{ij} der Fläche definiert. Für die Ableitungen von $\mathfrak{n}$ gilt:

$$\mathfrak{n}_i = -l^j_i \mathfrak{x}_j\,. \tag{1.7}$$

Der gemischte zweite Fundamentaltensor l^j_i hat — da er in jedem Flächenpunkt durch eine symmetrische Matrix repräsentiert werden kann — reelle Eigenwerte k_i, die Hauptkrümmungen der Fläche.

Bei Änderung der Orientierung der Fläche wechseln $\mathfrak{n}, l_{ij}, l^j_i$ und die k_i das Vorzeichen.

Die elementarsymmetrischen Funktionen der k_i — dividiert durch die Anzahl der Summanden — werden mit H_ν bezeichnet:

$$\binom{n}{\nu} H_\nu = k_1 \ldots k_\nu + \ldots, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad H_0 = 1. \tag{1.8}$$

Die H_ν genügen der Gleichung

$$g^{-1} |\lambda\, l_{ij} + g_{ij}| = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^\nu \binom{n}{\nu} H_\nu\,, \tag{1.9}$$

wo λ eine Unbestimmte ist.

Ist A eine quadratische Matrix, so sei A^* die aus den algebraischen Komplementen der a_{ij} gebildete Matrix, also $A \cdot A^* =$ (*Determinante von* A) $\cdot$ *Einheitsmatrix*. Die Elemente der Matrix $(\lambda\, l_{ij} + g_{ij})^*$ sind Polynome in λ vom Grade $n-1$. Wir setzen

$$g^{-1} (\lambda\, l_{ij} + g_{ij})^* = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^{\nu-1} \binom{n-1}{\nu-1} c^{ij}_{(\nu)}\,. \tag{1.10}$$

Dadurch werden Tensoren $c^{ij}_{(\nu)}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ definiert. Speziell ist

$$c^{ij}_{(1)} = g^{ij}, \quad c^{ij}_{(n)} = g^{-1} l^*_{ij} = c^{ij}. \tag{1.11}$$

Durch eine affine Parametertransformation kann man stets erreichen, daß g_{ij} in einem Punkt der Fläche die Einheitsmatrix ist und l_{ij} Diagonalform hat:

$$(1.12)\qquad g_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq j,\\ 1 \text{ für } i=j;\end{cases}\qquad l_{ij}=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq j,\\ k_i \text{ für } i=j.\end{cases}$$

In einem solchen Parametersystem wird nach (1.10)

$$(1.13)\qquad c^{ij}_{(\nu)}=0 \text{ für } i\neq j,\quad c^{ii}_{(\nu)}=\frac{n}{\nu}\frac{\partial H_\nu}{\partial k_i}\ ^{10}).$$

Wir behaupten, daß für $c^{ij}_{(\nu)}$ auch die folgende Darstellung gilt:

$$(1.14)\qquad (n-1)!\,c^{ij}_{(\nu)}=\varepsilon^{i}{}_{r_1\ldots r_{\nu-1}r_\nu\ldots r_{n-1}}\,\varepsilon^{j s_1\ldots s_{\nu-1}r_\nu\ldots r_{n-1}}\,l^{r_1}_{s_1}\cdot\ldots\cdot l^{r_{\nu-1}}_{s_{\nu-1}}.$$

Zum Beweis kann man etwa verifizieren, daß (1.14) in einem Parametersystem (1.12) mit (1.13) übereinstimmt.

Von jetzt an beschränken wir uns auf den Fall $n=2$, also auf gewöhnliche Flächen im R_3. Erst in § 4 und §§ 9—11 wird wieder von Flächen beliebiger Dimension die Rede sein.

Für $n=2$ hat man in (1.8) die mittlere Krümmung $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ und die Gaußsche Krümmung $K=k_1k_2$. Zwischen den Tensoren (1.1) und (1.3) für $n=2$ besteht die Beziehung

$$(1.15)\qquad \varepsilon^{is}\,\varepsilon_{js}=\delta^i_j=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq j,\\ 1 \text{ für } i=j,\end{cases}$$

und für die Tensoren (1.11) ergeben sich aus (1.14) die Darstellungen

$$(1.16)\qquad g^{ij}=\varepsilon^{ir}\varepsilon^{js}g_{rs},\quad c^{ij}=\varepsilon^{ir}\varepsilon^{js}\,l_{rs}.$$

Es sei noch erwähnt, daß man die Determinante eines gemischten Tensors a^j_i in der Form

$$(1.17)\qquad |a^j_i|=\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ir}\,\varepsilon_{js}\,a^j_i\,a^s_r$$

darstellen kann.

§ 2. Parallelabbildungen einer Fläche auf eine andere

Unter einer *Parallelabbildung einer Fläche F auf eine Fläche $\overline{F}$* verstehen wir eine *topologische Abbildung $\overline{p}=Tp$, bei der die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und $\overline{p}$ eine feste Richtung haben.* Diese Richtung wird im folgenden immer durch einen festen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ festgelegt.

Die Parallelabbildung heißt *regulär*, falls sie — ausgedrückt durch lokale Flächenparameter — *stetig differenzierbar* und falls ihre *Funktionaldeterminante von Null verschieden* ist.

Das x, y, z-Koordinatensystem des Raumes sei stets so gewählt, daß $\mathfrak{e}$ die z-Richtung ist. Falls dann T eine Parallelabbildung von F auf $\overline{F}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ ist und falls die Tangentialebenen in p und in $\overline{p}$ nicht parallel zu $\mathfrak{e}$ sind, so ist T sicher regulär in der Umgebung von p, denn man kann auf

[10]) Dies sind die bei Weglassung von k_i gebildeten $H_{\nu-1}$.

beiden Flächen x und y als Parameter einführen, so daß die Abbildung durch Gleichheit der Parameterwerte gegeben ist.

Die Menge der Punkte von F, in denen die *Tangentialebene parallel zu* $\mathfrak{e}$ ist, nennen wir die *Schattengrenze von* F. In den Punkten der Schattengrenze braucht eine Parallelabbildung nicht regulär zu sein. Jedoch werden wir zeigen, daß folgende Bedingung hinreichend für Regularität ist (daß man ohne die Bedingung nicht auskommt, wird weiter unten gezeigt):

(a) *In Punkten, in denen F von einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ berührt wird, ist $\mathfrak{e}$ nicht Asymptotenrichtung.*

Zum Beispiel positiv gekrümmte Flächen haben diese Eigenschaft in jeder Richtung. An Stelle von (a) kann man auch sagen:

(a') *In Punkten mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ ist der Gradient der Funktion $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ von Null verschieden und die Tangente an die Kurve $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ nicht parallel zu $\mathfrak{e}$.*

Die Schattengrenze besteht dann also aus glatten Kurven mit von $\mathfrak{e}$ verschiedener Tangente. Die Äquivalenz von (a) und (a') folgt aus der Gleichung $l^{ij}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_i)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_j) = -g^{ij}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_j)$. Die Bedingung ($a$) besagt, daß die linke Seite dieser Gleichung von Null verschieden ist, (a') das gleiche für die rechte Seite. Wir behaupten nun:

Lemma 1. *Die Flächen F und $\overline{F}$ seien $(h+1)$-mal stetig differenzierbar $(h \geqq 1)$ bzw. analytisch, und es bestehe eine Parallelabbildung $\overline{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$. Falls dann F und $\overline{F}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Bedingung (a) erfüllen, so ist T regulär, und zwar h-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch*[11]).

Beweis: Gehören $\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{p}}$ nicht zur Schattengrenze, so ist T regulär und sogar $(h+1)$-mal differenzierbar bzw. analytisch. Sei also $\mathfrak{p}_0$ ein Punkt auf F mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$. Da die Funktion $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ in der Umgebung U von $\mathfrak{p}_0$ das Vorzeichen wechselt, wird U bei Projektion in die x, y-Ebene gefaltet, d. h. in der x, y-Ebene wird ein Gebiet, welches die Projektion der Schattengrenze am Rande enthält, zweifach bedeckt. Das gleiche muß dann auch für $\overline{F}$ gelten, d. h. T bildet die Schattengrenze von F auf diejenige von $\overline{F}$ ab.

a) Zuerst sei der analytische Fall behandelt: $\mathfrak{p}_0$ sei der Nullpunkt des räumlichen Koordinatensystems, die y, z-Ebene Tangentialebene in $\mathfrak{p}_0$ und die Fläche F durch

$$x = \varphi(y, z), \qquad [\varphi(0,0) = \varphi_y(0,0) = \varphi_z(0,0) = 0], \tag{2.1}$$

mit einer reell analytischen Funktion φ der Parameter y, z dargestellt. Da die z-Richtung nicht Asymptotenrichtung ist, gilt $\varphi_{zz}(0,0) = 2a \neq 0$. Man kann annehmen: $a > 0$. Die Schattengrenze ist durch

$$\varphi_z(y, z) = 0$$

gegeben, und wegen $\varphi_{zz} \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit

$$z = \psi(y), \qquad [\psi(0) = 0], \tag{2.2}$$

wo $\psi(y)$ analytisch ist. Wir führen Parameter u, v ein durch

$$\begin{aligned} u &= y \\ v &= z - \psi(y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

---

[11]) Für Eiflächen wurde ein ähnlicher Satz schon von A. Deicke ausgesprochen. Vgl. [12], S. 49.

und setzen

$$f(u, v) = \varphi(u, v + \psi(u)) - \varphi(u, \psi(u)). \tag{2.4}$$

Dann gilt

$$f(u, 0) = f_v(u, 0) = 0, \quad f_{vv}(0, 0) = 2a > 0, \tag{2.5}$$

also

$$f(u, v) = a\, v^2 (1 + g(u, v)), \qquad [g(0, 0) = 0],$$

wobei $g(u, v)$ analytisch ist. Führt man noch $h(u, v)$ ein durch $1 + h(u, v) = \sqrt{1 + g(u, v)}$, $h(0, 0) = 0$, so ist

$$\begin{aligned} \eta &= u \\ \zeta &= \sqrt{a} \cdot v(1 + h(u, v)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

eine analytische Parametertransformation, und man findet

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\eta, \psi(\eta)) + \zeta^2 \\ y &= \eta \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dadurch wird übrigens in Evidenz gesetzt, daß die Projektion von F in die x, y-Ebene das Gebiet $x \geqq \varphi(y, \psi(y))$ zweifach bedeckt. Den Teilen $z \gtreqless \psi(y)$ der Fläche entspricht $\zeta \gtreqless 0$.

Ist nun $\overline{F}$ analog durch $x = \overline{\varphi}(y, z)$ gegeben, so haben die Schattengrenzen von F und $\overline{F}$ die gleiche Projektion, d. h. es ist $\varphi(y, \psi(y)) = \overline{\varphi}(y, \overline{\psi}(y))$. Außerdem ist $\operatorname{sgn} \varphi_{zz} = \operatorname{sgn} \overline{\varphi}_{zz}$. Da bei Parallelabbildung $\overline{x} = x$ und $\overline{y} = y$ ist, erhält man aus (2.7) die Gleichungen $\overline{\eta} = \eta$, $\overline{\zeta}^2 = \zeta^2$. Nimmt man etwa an, daß $\zeta > 0$ auf $\overline{\zeta} > 0$ abgebildet wird, so folgt: Nach analytischen Parametertransformationen lauten die Gleichungen der Parallelabbildung $\overline{\eta} = \eta$, $\overline{\zeta} = \zeta$ (bzw. $\overline{\zeta} = -\zeta$) q.e.d.

b) Im Falle $(h + 1)$-mal differenzierbarer Flächen verläuft der Beweis analog wie bei a): Die Funktion $\psi(y)$ in (2.2) und damit die Transformation (2.3) sind jetzt h-mal stetig differenzierbar. Daher ist man fertig, sobald bewiesen ist, daß

$$\begin{aligned} \eta &= u \\ \zeta &= \operatorname{sgn} v \cdot \sqrt[+]{f(u, v)} \end{aligned} \tag{2.6'}$$

eine h-mal stetig differenzierbare Parametertransformation ist. Dabei ist f durch (2.4) definiert, besitzt also stetige Ableitungen bis zur Ordnung $h + 1$ mit Ausnahme der $(h + 1)$-ten Ableitung nach u und erfüllt (2.5). Da f für $v \neq 0$ nicht verschwindet, ist ζ für $v \neq 0$ differenzierbar. Wir werden zeigen, daß der Limes der Ableitungen von ζ für $u \to u_0$, $v \to 0$ existiert; daraus läßt sich auf Grund des Mittelwertsatzes die Existenz (und Stetigkeit) der Ableitungen für $v = 0$ folgern.

Zunächst sei der Beweis für $h = 1$ und $h = 2$ ausführlich dargestellt (nur diese beiden Fälle werden später vorkommen). Wir bilden Taylor-Entwicklungen nach Potenzen von v mit Restglied; $o(v^l)$ bezeichne Funktionen mit der Eigenschaft, daß $v^{-l} o(v^l)$ für $u \to u_0$, $v \to 0$ gegen 0 strebt. Für $h = 1$ gilt wegen (2.5)

$$f = a(u)\,v^2 + o(v^2), \qquad f_u = o(v), \qquad f_v = 2\,a(u)\,v + o(v)\,,$$

wobei $a(u)$ stetig und positiv ist. Daraus folgt: $\zeta = \sqrt{a(u)}\,v + o(v)$. Wegen $f = \zeta^2$ ist

$$\zeta_{u^i} = \tfrac{1}{2} f_{u^i}\,\zeta^{-1}, \tag{2.8}$$

wo für den Moment u^1, u^2 für u, v geschrieben ist. Setzt man die Entwicklungen für f_{u^i} und ζ in (2.8) ein, so ergibt sich

$$\zeta_u = o(1), \qquad \zeta_v = \sqrt{a(u)} + o(1)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß (2.6′) eine stetig differenzierbare Parametertransformation ist.

Sei nun $h = 2$. Dann gilt

$$f = a(u)v^2 + b(u)v^3 + o(v^3)\,, \tag{2.9}$$

wo jetzt $a(u)$ stetig differenzierbar und $b(u)$ stetig ist. Aus (2.9) folgt

$$\zeta = \sqrt{a(u)}\,v + \frac{b(u)}{2\sqrt{a(u)}}\,v^2 + o(v^2)\,. \tag{2.10}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen von f gelten Taylor-Entwicklungen, die sich aus (2.9) durch *formale Differentiation* gewinnen lassen, d. h. man hat das auf der rechten Seite von (2.9) stehende Polynom in v nach u bzw. nach v zu differenzieren und zugleich bei jeder Differentiation den Grad der Entwicklung um 1 zu reduzieren. Damit erhält man zunächst aus (2.8):

$$\zeta_u = \left(\sqrt{a(u)}\right)'v + o(v), \qquad \zeta_v = \sqrt{a(u)} + \frac{b(u)}{\sqrt{a(u)}}\,v + o(v)\,. \tag{2.10′}$$

Setzt man dies in

$$\zeta_{u^i u^j} = \left(\tfrac{1}{2} f_{u^i u^j} - \zeta_{u^i}\zeta_{u^j}\right)\zeta^{-1}$$

ein, so folgt

$$\zeta_{uu} = o(1), \qquad \zeta_{uv} = \left(\sqrt{a(u)}\right)' + o(1), \qquad \zeta_{vv} = \frac{b(u)}{\sqrt{a(u)}} + o(1), \tag{2.10″}$$

und somit ist ζ zweimal stetig differenzierbar nach u und v.

Bei beliebigem h begnügen wir uns mit folgender Andeutung des Beweises: Man findet für ζ eine Entwicklung nach v vom Grade h. Analog wie (2.10′) und (2.10″) durch formale Differentiation aus (2.10) entstehen, zeigt man jetzt, daß die Ableitungen von ζ bis zur Ordnung h gleich formalen Derivierten der Entwicklung von ζ sind, und zwar läßt sich dies durch Induktion nach der Ordnung der Ableitungen beweisen, indem man durch Differentiation von $f = \zeta^2$ Rekursionsformeln für die Ableitungen von ζ aufstellt.

Wir betrachten nun zwei Flächen F und $\bar{F}$, zwischen denen eine reguläre Parallelabbildung besteht. Wir werden stets annehmen, daß man auf F und $\bar{F}$ gemeinsame Parameter u^i hat, so daß entsprechende Punkte gleiche Parameterwerte haben. Ist $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor von F, so gilt für den Ortsvektor $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\bar{F}$:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}. \tag{2.11}$$

w ist eine stetig differenzierbare Funktion auf der Fläche. Aus (2.11) folgt: $(\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2) = (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$, also

$$(\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A} = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, dA. \tag{2.12}$$

Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ ergibt sich daraus: *Bei einer regulären Parallelabbildung entsprechen sich die Schattengrenzen von F und von $\bar{F}$*; außerdem haben die beiden Flächen in solchen Punkten eine *gemeinsame Tangentialebene,* da die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ in einer Ebene liegen, also $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ die gleiche Ebene aufspannen wie $\bar{\mathfrak{x}}_1$, $\bar{\mathfrak{x}}_2$. Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ sind übrigens beide Seiten von (2.12) gleich $dx\,dy$.

Bei gegebenem F ist die Fläche $\bar{F}$ durch die Funktion w gemäß (2.11) festgelegt. Im Falle einer regulären Parallelabbildung kann man daher sagen: *$\bar{F}$ entsteht aus F durch Abtragen einer Funktion w in der Richtung $\mathfrak{e}$, wobei w differenzierbar ist und in den Punkten der Schattengrenze einer Nebenbedingung genügt.*

Trägt man nämlich von F aus eine beliebige Funktion w ab, so erhält man für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ eine reguläre Fläche $\bar{F}$; dagegen muß w in den Punkten mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ einer Bedingung genügen, damit $\bar{F}$ regulär wird. Um diese Bedingung zu finden, sei F in der Form (2.1) gegeben. Für $\bar{F}$ gilt $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z + w(y, z)$, und da $\bar{y}$, $\bar{z}$ reguläre Parameter auf F sind, muß

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

sein. Man kann diese Bedingung für w auch in beliebigen Flächenparametern u^i ausdrücken. Sie lautet, da man w in der Richtung $\mathfrak{e}$ ableiten muß und da der Tangentialvektor $\mathfrak{e}$ die Komponenten $\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_i = z_i$ hat:

$$1 + g^{ij} z_i w_j \neq 0 \qquad \text{für } \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0.$$

Gelegentlich werden wir diese Annahme verschärfen zu:

$$1 + g^{ij} z_i w_j > 0 \qquad \text{für } \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0. \tag{2.13}$$

Das bedeutet, daß in den Punkten der Schattengrenze $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ (nicht $= -\mathfrak{n}$) ist. In diesem Falle ist durch

$$F_t\colon \quad \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\, w\, \mathfrak{e}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{2.14}$$

eine Schar F_t regulärer Flächen gegeben, denn aus (2.13) folgt $1 + t\, g^{ij} z_i w_j > 0$ für $0 \leqq t \leqq 1$. F läßt sich also durch eine stetige Schar von Parallelabbildungen in $\bar{F}$ überführen.

Man kann auch *Parallelabbildungen einer Fläche auf sich selbst* betrachten. Wir erwähnen einen besonderen Fall, wo solche Abbildungen sicher existieren:

Die Fläche F heiße konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$, wenn jede Gerade parallel zu $\mathfrak{e}$ entweder gar keinen Punkt oder einen Berührungspunkt oder zwei Punkte mit F gemeinsam hat[12]).

[12]) Wir weichen hier von [8] ab. Dort wurde zusätzlich angenommen, daß die beiden Punkte keine Berührungspunkte sind. Bei solchen Flächen besteht die Schattengrenze aus stetigen, eineindeutig über der x, y-Ebene liegenden Kurven, an denen $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ das Vorzeichen wechselt.

Man erhält eine Parallelabbildung $p' = Ap$ von F auf sich, wenn man durch jeden Punkt p von F die Parallele zu $\mathfrak{e}$ legt und den zweiten Schnittpunkt p' mit F bestimmt (falls die betreffende Parallele die Fläche F nur in p berührt, sei $Ap = p$). A ist eine *topologische Abbildung von F auf sich.*

Um die *Regularität* dieser Abbildung sicherzustellen, setzen wir voraus, *F habe in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft* (a). F heiße dann *konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne.*

Gelegentlich wird die Voraussetzung (a) folgendermaßen abgeschwächt werden *(Konvexität im weiteren Sinne)*:

(a_0) *Die Schattengrenze besteht aus endlich vielen stetigen rektifizierbaren Kurven und aus isolierten Punkten.*

Die Gestalt einer *geschlossenen* in der z-Richtung (im engeren Sinne) konvexen Fläche F vom Geschlecht g kann folgendermaßen beschrieben werden: F zerfällt in zwei zusammenhängende Gebiete mit $\mathfrak{e}\mathfrak{n} > 0$ bzw. $\mathfrak{e}\mathfrak{n} < 0$, deren gemeinsamer Rand aus $g + 1$ geschlossenen Kurven besteht. Die beiden Gebiete besitzen die gleiche eineindeutige Projektion in die x, y-Ebene, während längs der Randkurven (Schattengrenzen) die Tangentialebenen parallel zur z-Achse sind.

Zum Schluß geben wir Beispiele von Flächen an, welche zeigen, daß man ohne die Bedingung (a) beim Lemma 1 nicht auskommt:

1. F sei gemäß (2.1) durch $x = (z^3 - y)^2$ gegeben. F ist konvex in der z-Richtung, denn zu (x, y) gehören zwei Werte $z = (y + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ und $z = (y - \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$. Die Schattengrenze besteht aus den Kurven $z = 0$ und $y = z^3$. Der Nullpunkt O des Koordinatensystems ist ein parabolischer Punkt und die z-Achse Asymptotenrichtung in O. Die Parallelabbildung A von F auf sich wird durch $\bar{y} = y$, $\bar{z} = (2y - z^3)^{\frac{1}{3}}$ beschrieben, ist also nicht differenzierbar.

2. $x = yz + z^4$. Hier ist $K < 0$ in O, $\operatorname{grad}(\mathfrak{e}\mathfrak{n}) \neq 0$, aber $\mathfrak{e}$ tangential an die Schattengrenze $y + 4z^3 = 0$. F ist konvex in der z-Richtung; bei Parallelabbildung in dieser Richtung geht die Kurve $z = 0$ über in $\bar{y} + \bar{z}^3 = 0$; somit ist $\bar{z}(y, 0) = (-y)^{\frac{1}{3}}$, also ist die Abbildung nicht differenzierbar.

§ 3. Hilfssätze über symmetrische und monotone Funktionen

Die Hauptkrümmungen einer Fläche lassen sich als stetige Funktionen auf der Fläche definieren durch

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Es ist also $k_1 \geqq k_2$. Es wird sich darum handeln, Funktionen der Hauptkrümmungen zu untersuchen, speziell symmetrische Funktionen von zwei Variablen, für welche dann die Hauptkrümmungen einer Fläche einzusetzen sind.

Demgemäß sei die Funktion $V(k_1, k_2)$ für $k_1 \geqq k_2$ definiert und besitze stetige partielle Ableitungen V_1, V_2. Durch Spiegelung an der Geraden $k_1 = k_2$ läßt sich $V(k_1, k_2)$ zu einer *symmetrischen Funktion* $W(k_1, k_2)$:

$$W(k_2, k_1) = W(k_1, k_2)$$

in der ganzen k_1, k_2-Ebene erweitern. Offenbar ist W dann und nur dann überall stetig differenzierbar, wenn $V_1(k, k) = V_2(k, k)$ ist.

Spezielle symmetrische Funktionen erhält man, wenn man von einer Funktion $U(H, K)$ ausgeht, die für $H^2 \geqq K$ definiert und stetig differenzierbar ist, und

$$W(k_1, k_2) = U(\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2), k_1 k_2) \tag{3.1}$$

setzt. Die Reichweite dieser Funktionenklasse wird durch folgendes Lemma beleuchtet:

Lemma 2. *Die symmetrische Funktion $W(k_1, k_2)$ sei in der Umgebung der Geraden $k_1 = k_2$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $U(H, K) = W(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K})$ stetig differenzierbar nach H und K.*

Beweis: Für $H^2 > K$ ist U stetig differenzierbar. Sei also $H_0^2 = K_0$. Wir zeigen, daß $\lim U_H(H, K)$ für $H \to H_0$, $K \to K_0$, $H^2 > K$ existiert. Daraus folgt dann erstens durch Anwendung des Mittelwertsatzes, daß U an der Stelle H_0, K_0 nach H differenzierbar ist, und zweitens die Stetigkeit der Ableitung U_H. Man findet:

$$U_H(H, K) = W_1 + W_2 + H\{W_1(k_1, k_2) - W_2(k_1, k_2)\} \cdot (H^2 - K)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Aus der Symmetrie von W folgt $W_2(k_1, k_2) = W_1(k_2, k_1)$. Setzt man dies in (3.2) ein, wendet auf die Differenz $W_1(k_1, k_2) - W_1(k_2, k_1)$ den Mittelwertsatz an und läßt k_1, k_2 gegen $H_0 = k$ gehen, so erhält man

$$\lim U_H(H, K) = 2\,W_1(k, k) + 2\,k\,[W_{11}(k, k) - W_{12}(k, k)].$$

Analog beweist man die Differenzierbarkeit nach K.

Wir bemerken noch, daß es symmetrische einmal differenzierbare Funktionen W gibt, die als Funktionen von H und K nicht differenzierbar sind, z. B. $W = |k_1|^\alpha + |k_2|^\alpha$ mit $1 < \alpha < 2$.

Eine besondere Rolle werden solche Funktionen W spielen, die in beiden Variablen *gleichsinnig monoton* — etwa monoton wachsend — sind. Sei also $W(x, y)$ für alle $x \geqq y$ definiert und *eigentlich monoton wachsend in* x (bei festem y) *und in* y (bei festem x). Man kann zur anschaulichen Darstellung solcher Funktionen die Fläche $z = W(x, y)$ betrachten: sie steigt in der x- und y-Richtung monoton an. Die Niveaulinien $W(x, y) = c$ bilden in der x, y-Ebene monoton abfallende Kurven. Wir werden später im Zusammenhang mit derartigen Funktionen W folgenden Hilfssatz benötigen:

Lemma 3. *l_{ij} und $\bar{l}_{ij}$ seien symmetrische zweireihige Matrizen mit den Eigenwerten $k_1 \geqq k_2$ bzw. $\bar{k}_1 \geqq \bar{k}_2$. Falls dann $W(k_1, k_2) = W(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ gilt, so ist die quadratische Form $Q = (\bar{l}_{ij} - l_{ij})\, x^i x^j$ entweder indefinit oder $\equiv 0$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß $k_1 \leqq \bar{k}_1$ ist. Wegen der Monotonie von W ist dann entweder $k_1 < \bar{k}_1$ und $k_2 > \bar{k}_2$ oder $k_1 = \bar{k}_1$ und $k_2 = \bar{k}_2$. Für $\Sigma(x^i)^2 = 1$ wird $k_2 \leqq l_{ij} x^i x^j \leqq k_1$, wobei die Extrema für die Eigenvektoren angenommen werden. Wählt man für die x^i einen zu $\bar{k}_1$ gehörigen Eigenvektor, so wird

$$Q = (\bar{l}_{ij} - l_{ij})\, x^i x^j = \bar{k}_1 - l_{ij} x^i x^j \geqq \bar{k}_1 - k_1 \geqq 0.$$

Dabei ist entweder $Q > 0$, oder es steht an beiden Stellen das Gleichheitszeichen; dann muß aber $\bar{l}_{ij} = l_{ij}$ sein. Ebenso folgt: falls Q nicht $\equiv 0$ ist, so nimmt Q negative Werte an (für einen zu $\bar{k}_2$ gehörigen Eigenvektor).

Zum Lemma 3 ist noch folgendes zu bemerken:

1. Erweitert man W zu einer symmetrischen Funktion, so bleibt die gleichsinnige Monotonie erhalten; auf die Reihenfolge der Variablen kommt es dann nicht an (beim obigen Beweis ist aber wesentlich, daß man das größere k_i mit dem größeren $\bar{k}_i$ vergleicht).

2. Sind die k_i Hauptkrümmungen einer Fläche, so ist der Funktionswert $W(k_1, k_2)$ nicht eindeutig definiert, denn bei Änderung der Orientierung hat man an Stelle der k_i die Werte $k_i^* = -k_i$. Geht man aber von W zu $W^*(k_1, k_2) = -W(-k_1, -k_2)$ über, so ist W^* wieder monoton wachsend in beiden Variablen, und der Funktionswert $W^*(k_1^*, k_2) = -W(k_1, k_2)$ ändert nur das Vorzeichen. Die Voraussetzung im Lemma 3 wird davon nicht tangiert.

Wir beschränken uns jetzt auf stetig differenzierbare symmetrische Funktionen W und fordern die Monotonie in der Form

$$W_{k_1} > 0, \quad W_{k_2} > 0. \tag{3.3}$$

Geht man von einer Funktion U aus und bildet W nach (3.1), so wird unter der Annahme (3.3)

$$W_{k_1} \cdot W_{k_2} = \tfrac{1}{4} U_{\mathrm{H}}^2 + H\, U_{\mathrm{H}} U_{\mathrm{K}} + K\, U_{\mathrm{K}}^2 > 0. \tag{3.4}$$

Setzt man umgekehrt (3.4) für U voraus, so kann man einerseits annehmen, daß auch (3.3) gilt, indem man allenfalls zu $-U$ übergeht; andererseits sind (3.3) und (3.4) invariant gegen den Übergang von W zu W^*. Somit hat es einen invarianten Sinn, von monoton wachsenden Funktionen W oder U der Hauptkrümmungen einer Fläche zu sprechen.

Gelegentlich wird nicht eine Funktion $W(k_1, k_2)$ in der ganzen Ebene gegeben sein, sondern nur eine Kurve. Wir nehmen an, die Funktion $f(k_1)$ sei stetig differenzierbar für alle k_1, es sei $f'(k_1) < 0$, und die Kurve $k_2 = f(k_1)$ sei symmetrisch bezüglich der Geraden $k_1 = k_2$ (d. h. es ist $f^{-1} = f$). Dann gilt:

Lemma 4. *Zu $f(k_1)$ gibt es eine symmetrische stetig differenzierbare Funktion $W(k_1, k_2)$ mit (3.3), so daß $k_2 = f(k_1)$ gleichbedeutend ist mit $W(k_1, k_2) = 0$. Die Funktion W ist ebensooft differenzierbar wie f.*

Beweis: Wir definieren eine Kurvenschar C_t in der k_1, k_2-Ebene durch $k_2 = f(k_1 - t) + t$. C_t entsteht aus der Ausgangskurve C_0 durch Translation in der Richtung der Geraden $k_1 = k_2$. Da $k_2 = f(k_1)$ monoton abnimmt, hat C_t mit jeder Geraden $k_2 = k_1 + a$ ($a = \text{const}$) genau einen Schnittpunkt. Die Kurven C_t sind daher punktfremd zueinander und bedecken die ganze Ebene. Wir definieren:

$$W(k_1, k_2) = t \qquad \text{für } (k_1, k_2) \in C_t.$$

Wegen der Symmetrie der Kurven C ist W symmetrisch. Ordnet man dem Wertepaar k_1, t das Paar $k_1, k_2 = f(k_1 - t) + t$ zu, so erhält man eine eineindeutige, differenzierbare Abbildung mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(k_1, k_2)}{\partial(k_1, t)} = 1 - f'(k_1 - t) > 0.$$

Die Umkehrabbildung ordnet dem Punkt k_1, k_2 das Paar $k_1, t = W(k_1, k_2)$ zu. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von W sowie die Eigenschaft (3.3).

§ 4. Variation der Krümmungsfunktionen H_ν

Wir betrachten eine Fläche F, gegeben durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ als Funktion lokaler Parameter $u^1, \ldots, u^n$. Vorläufig sei n beliebig $\geqq 2$. Mit Hilfe einer Vektorfunktion $\mathfrak{w}$ auf F definiert man eine *lineare Variation von F* durch

$$F_t\colon \quad \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}. \tag{4.1}$$

In der Umgebung eines Punktes von F sind die Flächen F_t für kleine t sicher regulär. Wir berechnen Ableitungen nach t — bezeichnet durch einen Strich — für $t = 0$ (oder allgemeiner für $t = t_0$). Man findet $\mathfrak{x}' = \mathfrak{w}$, also

$$g'_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{w}_j + \mathfrak{x}_j \mathfrak{w}_i\,. \tag{4.2}$$

Aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ und $\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_i = 0$ folgt $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$ und $\mathfrak{n}'\mathfrak{x}_i + \mathfrak{n}\,\mathfrak{w}_i = 0$, somit

$$\mathfrak{n}' = -g^{ij}(\mathfrak{w}_i \mathfrak{n})\,\mathfrak{x}_j\,. \tag{4.3}$$

Wegen (1.6) ist $l_{ij} = \mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n}$ und daher $l'_{ij} = \mathfrak{x}'_{ij}\,\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n}'$, also

$$l'_{ij} = \mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n}. \tag{4.4}$$

Wir setzen nun $\lambda\, l_{ij} + g_{ij} = L_{ij}$, $g^{-1} L^*_{ij} = M^{ij}$, wo λ eine reelle Variable ist. Nach den Regeln für die Differentiation von Determinanten ist

$$(g^{-1}\,|L_{ij}|)' = M^{ij} L'_{ij} - g^{-2} g'\,|L_{rs}|, \qquad g^{-1} g' = g^{ij} g'_{ij}\,,$$

also wegen (4.2) und (4.4):

$$(g^{-1}\,|L_{ij}|)' = \lambda\, M^{ij}(\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n}) + 2\,\{M^{ij} - g^{-1}\,|L_{rs}|\,g^{ij}\}\,(\mathfrak{x}_j \mathfrak{w}_i)\,. \tag{4.5}$$

Nun ist

$$M^{ij} - g^{-1}\,|L_{rs}|\,g^{ij} = M^{ir}(\delta^j_r - L_{rs} g^{sj}) = -\lambda\, M^{ir}\, l^j_r.$$

Setzt man dies in (4.5) ein, benutzt (1.7) und verwendet noch für die linke Seite von (4.5) den Ausdruck (1.9) und für M^{ij} die Entwicklung (1.10), so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda^\nu \binom{n}{\nu} H'_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu \binom{n-1}{\nu-1} c^{ij}_{(\nu)}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\,\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n}_j\}\,.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von λ^ν ergeben sich daraus für die Variation der H_ν folgende Formeln:

$$n\,H'_\nu = \nu\, c^{ij}_{(\nu)}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Setzt man hier $n = 2$, $\nu = 1, 2$, so erhält man für die Variation von H und K die Formeln:

$$2\,H' = g^{ij}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}, \tag{H}$$

$$K' = c^{ij}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}\ ^{13)}, \tag{K}$$

wobei gemäß (1.11) $c^{ij} = g^{-1}\, l^*_{ij}$ ist.

[13]) Für $\mathfrak{w} = \mu\,\mathfrak{n}$ ergibt dies bekannte Variationsformeln. Vgl. [6], S. 257.

§ 5. Der Translationssatz

In diesem Paragraphen werden die bisherigen Betrachtungen auf geschlossene Flächen angewandt. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz I. *F und $\overline{F}$ seien orientierte geschlossene Flächen, die analytisch sind und zwischen denen eine die Orientierung erhaltende analytische reguläre Parallelabbildung $\overline{p} = Tp$ besteht. (Definition im § 2.) Außerdem sei in entsprechenden Punkten $U(H,K) = U(\overline{H},\overline{K})$, wobei die Funktion U stetig differenzierbar ist und der Ungleichung* (3.4) *genügt. Dann ist T eine Translation.*

Der Satz I ist bewiesen, sobald wir folgenden lokalen Satz bewiesen haben:

Satz 1. *Zwischen den analytischen Flächenstücken F und $\overline{F}$, die nicht auf einem Zylinder mit Erzeugenden parallel zu $\mathfrak{e}$ liegen sollen, bestehe eine die Orientierung erhaltende analytische reguläre Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{e}$, und in entsprechenden Punkten p und $\overline{p}$ sei $U(H,K) = U(\overline{H},\overline{K})$, wo U der Bedingung* (3.4) *genügt. Dann kann der Abstand $w = p\,\overline{p}$ in einem inneren Punkt kein relatives Extremum annehmen, es sei denn, w ist konstant.*

Beweis: Die Ortsvektoren von p und $\overline{p}$ sind nach (2.11) $\mathfrak{x}$ und $\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + w\,\mathfrak{e}$. Auf Grund der Voraussetzungen über T können wir auf F und $\overline{F}$ gemeinsame Parameter einführen, so daß w eine analytische Funktion dieser lokalen Parameter wird.

Wir nehmen an, w sei nicht konstant, und es gäbe auf F einen Punkt o, in dem $w_i = 0$ ist. Dann zeigen wir: *in o hat w kein relatives Extremum.* o sei durch $u^i = 0$ gegeben. In o ist

$$\overline{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i, \quad \overline{g}_{ij} = g_{ij}, \quad \overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}, \quad \overline{l}_{ij} - l_{ij} = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, w_{u^i u^j}\,.$$

Durch eine affine Parametertransformation können wir erreichen, daß $(\overline{g}_{ij})_0 = (g_{ij})_0 = \delta_{ij}$ wird, so daß die Matrizen $(l_{ij})_0$ und $(\overline{l}_{ij})_0$ die Eigenwerte k_i bzw. $\overline{k}_i$ erhalten. Nach Lemma 3 (§ 3) ist daher die quadratische Form $(\overline{l}_{ij} - l_{ij})_0 u^i u^j = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})_0 (w_{u^i u^j})_0 u^i u^j$ *entweder indefinit oder* $\equiv 0$.

Im *ersten Fall* ist der Satz 1 bewiesen.

Im *zweiten Fall*, wo $(\overline{l}_{ij})_0 = (l_{ij})_0$ ist, die Flächen also in o bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen, betrachten wir die Funktion w in der Umgebung von o. Wir definieren eine Flächenschar F_t durch (2.14). Wegen $(w_i)_0 = 0$ sind alle Flächen F_t in einer Umgebung von o regulär, und wir können die flächentheoretischen Größen in Abhängigkeit von t betrachten (die auftretenden Größen hängen außerdem noch von den Flächenparametern u^i ab). Setzt man $\psi(t) = U(H(t), K(t))$, so ist

$$(5.1) \qquad \psi(1) - \psi(0) = 0 = \int_0^1 \psi'(t)\, dt = \int_0^1 (U_H H' + U_K K')\, dt,$$

wobei der Strich Ableitung nach t bedeutet. Auf Grund der Variationsformeln (H) und (K) im § 4 kann man dafür schreiben:

$$(5.2) \qquad \int_0^1 a^{ij}(t)\, \{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t)\, [w_{u^i u^j} - \Gamma^k_{ij}(t)\, w_k] + 2\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i(t)\, w_j\}\, dt = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$a^{ij}(t) = \tfrac{1}{2}\, U_H(t)\, g^{ij}(t) + U_K(t)\, c^{ij}(t)$$

gesetzt ist. Nun gilt nach (2.12):

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t) = \mathfrak{e}\,\mathfrak{n}\, g^{\frac{1}{2}}\, g(t)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

und damit

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i(t) = g^{\frac{1}{2}}\, g(t)^{-\frac{1}{2}} \{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i + \mathfrak{e}\,\mathfrak{n}\,[\Gamma^s_{si} - \Gamma^s_{si}(t)]\}, \tag{5.4}$$

wobei die Formel $(\sqrt{g})_i = \sqrt{g}\,\Gamma^s_{si}$ benutzt wurde. Setzt man (5.3) und (5.4) in (5.2) ein und führt noch ein

$$A^{ij} = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}}\, a^{ij}(t)\, dt, \tag{5.5}$$

$$B^k = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}} \{2\, a^{ik}(t)\, [\Gamma^s_{si} - \Gamma^s_{si}(t)] - a^{ij}(t)\, \Gamma^k_{ij}(t)\}\, dt,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, A^{ij} w_{u^i u^j} + 2\, A^{ij} (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)\, w_j + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, B^k w_k = 0$$

oder nach Multiplikation mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 A^{ij} w_{u^i u^j} + A^{ij} (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2_i\, w_j + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 B^k w_k = 0\,. \tag{D}$$

Wir behaupten nun: *die quadratische Form $A^{ij} x_i x_j$ ist positiv definit.* Beweis: Führt man in einem Punkt ein Parametersystem (1.12) ein, so kommt der Tensor a^{ij} auf Diagonalform, und zwar wird nach (1.13)

$$a^{ii} = U_{k_i} > 0\,. \tag{5.6}$$

$a^{ij} x_i x_j$ ist also positiv definit, und daraus folgt nach (5.5) durch Mittelbildung über t die Behauptung.

Wegen der Analytizität der Funktionen w und $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ gelten Entwicklungen

$$\begin{aligned} w &= w^{(0)} + w^{(m)} + o(r^m), \quad && w^{(m)} \not\equiv 0, \quad m \geqq 2\,^{14)} \\ \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} &= f^{(l)} + o(r^l), && f^{(l)} \not\equiv 0 \quad l \geqq 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $w^{(\nu)}$, $f^{(\nu)}$ homogene Formen in den u^i vom Grade ν sind und $r^2 = \Sigma (u^i)^2$ gesetzt ist. Führt man (5.7) in (D) ein, dividiert durch r^{2l+m-2} und läßt r gegen 0 streben, so erhält man für die Anfangsglieder $w^{(m)}$, $f^{(l)}$ folgende Differentialgleichung:

$$(A^{ij})_0 \left\{ f^{(l)^2} w^{(m)}_{u^i u^j} + (f^{(l)^2})_i\, w^{(m)}_j \right\} = 0\,. \tag{D_0}$$

Um nun den Beweis des Satzes 1 zu beenden, bringen wir durch eine affine Parametertransformation $(A^{ij})_0$ auf die Gestalt δ_{ij} und beweisen folgendes

Lemma 5. *Die reelle homogene Form $w^{(m)} \not\equiv 0$, $m \geqq 2$, der Variablen u^i genüge der Differentialgleichung*

$$f^{(l)^2} \cdot \Delta\, w^{(m)} + \operatorname{grad} f^{(l)^2} \cdot \operatorname{grad} w^{(m)} = 0 \tag{D_0'}$$

mit einer reellen Form $f^{(l)} \not\equiv 0$, $l \geqq 0$. Dann ist $w^{(m)}$ indefinit.

---

[14]) Der Fall $m = 2$ wurde schon erledigt.

Beweis: Durch Integration der Gleichung (D_0') über eine Kreisscheibe $r \leq R$ und Anwendung der Greenschen Formel folgt

$$0 = \oint\limits_{r=R} f^{(l)^2} \frac{\partial w^{(m)}}{\partial r} R\, d\varphi = m \oint\limits_{r=R} f^{(l)^2} w^{(m)}\, d\varphi\,.$$

Da die Nullstellen von $f^{(l)}$ auf einer Kreislinie isoliert sind, muß $w^{(m)}$ das Vorzeichen wechseln.

Übrigens wird die Integration besonders einfach beim Übergang zu Polarkoordinaten r, φ: Ist $f^{(l)} = r^l F(\varphi)$, $w^{(m)} = r^m W(\varphi)$, so geht (D_0') über in die Gleichung

$$(F^2 W')' + m(m+2\,l)\, F^2 W = 0,$$

die man über eine Periode von φ zu integrieren hat.

An den Beweis des Satzes I schließen wir noch folgende Bemerkungen:

1. Die Funktion w genügt der linearen Differentialgleichung (D). Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ ist diese elliptisch (und enthält kein Glied mit w). Dann läßt sich auch für nicht-analytische Flächen beweisen, daß die Funktion w, falls sie nicht konstant ist, in einem inneren Punkt kein Extremum haben kann[15]. Ob diese Eigenschaft in den Punkten mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ ohne die Voraussetzung der Analytizität erhalten bleibt, ist mir nicht bekannt.

2. Beim Satz I wurde angenommen, daß die Funktion U in der ganzen k_1, k_2-Ebene der Bedingung (3.4) genügt. Diese Voraussetzung wurde beim obenstehenden Beweis aber nicht voll ausgenutzt. Daher kann man dem Satz I die folgende allgemeinere Fassung geben: *Die Funktion U sei etwa in einem konvexen* (offenen) *Gebiet G der k_1, k_2-Ebene definiert und erfülle dort die Ungleichung* (3.4)[16]. *F und $\overline{F}$ seien geschlossenen Flächen, deren Krümmungsbild in G enthalten ist. Dann gilt für F und $\overline{F}$ der Translationssatz I.*

Erstens läßt sich nämlich wegen der Konvexität von G das Lemma 3 beweisen [etwa durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Differenz $W(\overline{k}_1, \overline{k}_2) - W(k_1, k_2)$]. Zweitens gilt (3.4) im Punkte $(k_1)_0$, $(k_2)_0$ der k_1, k_2-Ebene. Da der Punkt o — beim Fall 2 des obigen Beweises — auf allen Flächenstücken F_t dieselben Hauptkrümmungen hat, ist also (5.6) in o für alle t erfüllt und daher $A^{ij} x_i x_j$ in einer Umgebung von o positiv definit.

Zum Beispiel liefert unser Beweis auch folgenden Satz:

Satz I$_0$. *Die analytischen Eiflächen F und $\overline{F}$ seien gleichartig orientiert* (z. B. Flächennormale nach innen), *und es bestehe eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\overline{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ von F auf $\overline{F}$. Falls dann in entsprechenden Punkten $U(H, K) = U(\overline{H}, \overline{K})$ ist, wobei U für $k_1, k_2 > 0$ definiert ist und der Ungleichung* (3.4) *genügt, so ist T eine Translation.*

Wir haben nur zu zeigen, daß die Abbildung T analytisch und regulär ist. Dies folgt aber aus Lemma 1 (§ 2), da Eiflächen in jeder Richtung die Bedingung (a), § 2, erfüllen. G ist hier der Quadrant $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Für U kann man z. B. ein symmetrisches Polynom (oder eine Potenzreihe) in k_1, k_2 mit

[15]) Vgl. E. Hopf [13], S. 147.

[16]) Allgemeiner: in einem in der k_1-Richtung und in der k_2-Richtung konvexen Gebiet.

positiven Koeffizienten nehmen, aber z. B. auch die Funktion $U = -1/k_1 - 1/k_2 = -2\,H/K$. Bei Flächen mit der Eigenschaft (a) werden übrigens nur die Spezialfälle $l = 0$ und $l = 1$ des Lemma 5 benötigt, in denen (D_0') in $\Delta\, w^{(m)} = 0$ bzw. $\Delta\,(f^{(1)} w^{(m)}) = 0$ übergeht.

§ 6. Der Symmetriesatz

Aus dem Translationssatz I folgt:

Satz II. *Die analytische geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne (Definition im § 2). Für jedes Punktepaar p, p', das von einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ aus F geschnitten wird, habe die Funktion $U(H,K)$ in p und p' den gleichen Wert, wobei U der Bedingung* (3.4) *genügt. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Bezeichnet man nämlich mit $p' = A\,p$ die Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{e}$ von F auf sich (vgl. § 2) und mit S die Spiegelung an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene, so erfüllt die Abbildung $T = S\,A$ von F auf die Fläche $\overline{F} = S(F)$ die Voraussetzungen des Satzes I: Erstens folgt nämlich aus Lemma 1 (§ 2), daß A analytisch und regulär ist. Zweitens kehrt A die Orientierung um; orientiert man nun $\overline{F}$ derart, daß auch S die Orientierung umkehrt, so erhält T die Orientierung. Außerdem bleiben dann bei S die Hauptkrümmungen ungeändert, und daraus resultiert die Invarianz von $U(H,K)$. Somit ist nach Satz I die Abbildung $S\,A = T$ eine Translation, also $A = S\,T$ eine Spiegelung an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene.

Da Eiflächen in jeder Richtung konvex im engeren Sinne sind, darf F im Satz II insbesondere eine analytische Eifläche sein, wobei U dann nur für $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ definiert zu sein braucht bzw. nur dort die Bedingung (3.4) erfüllen muß (entsprechend zum Satz I_0).

§ 7. Geschlossene Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen

Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geqq c$ definiert und zweimal stetig differenzierbar. Es sei $f(c) = c$ und $f'(x) < 0$ für alle x (daher also $f(x) < x$ für $x > c$).

Wir betrachten Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungen die monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ besteht. Dabei ist k_1 die größere Hauptkrümmung, also $k_1 \geqq k_2$. Aus dem Satze II ergibt sich nun:

Satz III. *Die geschlossene analytische Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ (im engeren Sinne), und es bestehe eine Relation $k_2 = f(k_1)$ der oben beschriebenen Art. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $f'(c) = \varkappa = -1$.

Durch Spiegelung an der Geraden $k_1 = k_2$ entsteht aus der Kurve $k_2 = f(k_1)$ eine symmetrische Kurve. Nach Lemma 4 (§ 3) kann diese Kurve durch eine symmetrische Relation $W(k_1, k_2) = 0$ gegeben werden, wobei die Funktion W in der ganzen Ebene definiert ist. Nach Lemma 2 (§ 3) ist $U(H, K) = W\left(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}\right)$ stetig differenzierbar. Da $U(H, K)$ in allen Punkten von F den gleichen Wert hat (nämlich den Wert Null), folgt der Satz III aus dem Symmetriesatz II.

2. Fall: $f'(c) = \varkappa \neq -1$.

In diesem Falle ist unsere Methode nicht ausreichend; man kommt jedoch zum Ziel, wenn man Ergebnisse von H. Hopf zu Hilfe nimmt: Auf einem analytischen Flächenstück mit einer beliebigen Relation $W(k_1, k_2) = 0$ zwischen den Hauptkrümmungen, welches nicht Stück einer Kugel oder Ebene ist, sei o ein Nabelpunkt. Der Krümmungsdifferentialquotient $\frac{d k_2}{d k_1}$ in o werde mit $\varkappa$ bezeichnet. Dann gelten folgende Sätze (vgl. [1], S. 236):

(H_1) *Falls* $\varkappa < 0$ *(und* $\neq \infty$*) ist, so ist* $\varkappa = -1$.

(H_2) *Falls* $\varkappa < 0$ *(also* $= -1$*) ist, so ist o ein isolierter Nabelpunkt, und der Index von o im Netz der Krümmungslinien ist* < 0.

Wir betrachten nun zunächst Flächen vom Geschlecht $g \neq 1$. Da es auf einer solchen Fläche einen Nabelpunkt geben muß, folgt aus (H_1): *Auf einer analytischen Fläche vom Geschlecht* $g \neq 1$ *kann keine Relation mit* $\varkappa < 0$, $\varkappa \neq -1$ *bestehen*. (Darüber hinaus folgt aus (H_2) der Satz C in der Einleitung, der im Falle $g = 0$ den Satz III entbehrlich macht.)

Sei nun F eine Fläche vom Geschlecht 1 mit einer Relation $k_2 = f(k_1)$. Auf Grund von (H_2) kann es auf F keinen Nabelpunkt geben. Von der Kurve $k_2 = f(k_1)$ kommt daher nur ein Teil $k_1 > c' > c$ in Betracht, der von der Geraden $k_1 = k_2$ positiven Abstand hat. Eine Modifikation von Lemma 4 (§ 3) liefert dann eine Funktion $W(k_1, k_2)$, die in einem konvexen Gebiet $k_1 - k_2 > c'' > 0$ definiert ist. Setzt man $U(H, K) = W\left(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}\right)$, so läßt sich der Satz II in der erweiterten Fassung anwenden, die im Anschluß an den Satz I gewonnen wurde (Bemerkung 2, § 5). Damit ist der Satz III bewiesen. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß man sich auf Grund der Ergebnisse von H. Hopf auf symmetrische Relationen beschränken kann.

Nun behaupten wir:

Satz IV. *Die geschlossene analytische Fläche F sei konvex (im engeren Sinne) in der Richtung* $\mathfrak{e}$ *und in allen zu* $\mathfrak{e}$ *benachbarten Richtungen. Dann kann, falls F keine Kugel ist, zwischen den Hauptkrümmungen von F keine monoton abnehmende Relation* $k_2 = f(k_1)$ *der oben beschriebenen Art bestehen.*

Beweis: Falls auf F eine Relation $k_2 = f(k_1)$ besteht, so besitzt F zu jeder Konvexitätsrichtung eine senkrechte Symmetrieebene. Mit zwei Symmetrieebenen E, E' ist auch die Ebene E'', die durch Spiegelung von E' an E entsteht, Symmetrieebene von F. Daher hat F in jeder Richtung eine Symmetrieebene, muß also eine Kugel sein. Wir werden diese Überlegung sogleich präzisieren und gleichzeitig die Voraussetzung über Konvexitätsrichtungen im Satz IV abschwächen.

Zunächst bemerken wir, daß alle Symmetrieebenen einer beschränkten Punktmenge F des Raumes durch einen festen Punkt O gehen; denn gäbe es 4 Ebenen, die nicht durch einen Punkt gehen, so erhielte man bei fortgesetzter Spiegelung der Konfiguration der Ebenen schließlich beliebig weit entfernte Symmetrieebenen, was der Beschränktheit von F widerspricht. Die Symmetrieebenen von F (durch O) erzeugen eine Gruppe von Bewegungen, die F in sich transformieren. Man kann sich auf die Drehungen beschränken. Die Gruppe aller Drehungen von F in sich ist abgeschlossen, da F abgeschlossen ist. Nach Sätzen der Lieschen Theorie hat die Gruppe aller Drehungen nur die folgenden echten abgeschlossenen Untergruppen: 1. Die endlichen Drehgruppen, 2. die Drehungen um eine Achse und 3. die Drehungen um eine Achse a und um Achsen senkrecht zu a mit dem Winkel π. Man kann nun offenbar den Satz IV folgendermaßen erweitern:

Satz IV'. *Die geschlossene analytische Fläche F sei keine Kugel, besitze aber drei linear unabhängige Konvexitätrichtungen, von denen nicht zwei senkrecht auf der dritten stehen, derart, daß die zugehörigen Spiegelungen eine unendliche Gruppe erzeugen.* (Dafür ist z. B. hinreichend, daß die drei Winkel zwischen den Richtungen irrationale Vielfache von π sind.) *Dann kann zwischen den Hauptkrümmungen von F keine Relation $k_2 = f(k_1)$ der betrachteten Art bestehen.*

Die Gruppe aller Drehungen von F in sich enthielte nämlich andernfalls alle Drehungen, und F wäre eine Kugel.

Der Satz IV enthält übrigens den Satz A in der Einleitung bei Beschränkung auf analytische Eiflächen.

Als Beispiel für die Reichweite unserer Ergebnisse betrachten wir *lineare Relationen* $k_2 = \varkappa k_1 + c$, wo $\varkappa$ und c Konstanten sind. Zunächst sei $\varkappa < 0$. Nach dem Satz C in der Einleitung gibt es außer der Kugel keine analytische Fläche vom Geschlecht 0 mit einer solchen linearen Relation. Wir können nun neu hinzufügen: Unter allen Flächen vom Geschlecht 1 von der in den Sätzen IV und IV' geschilderten Art gibt es keine Fläche mit einer derartigen linearen Relation. Das gleiche gilt für Flächen vom Geschlecht $g \geqq 2$ (wobei nach (H_1) zudem $\varkappa = -1$ sein müßte, so daß höchstens die Relation $k_1 + k_2 - c = 0$ in Frage käme).

Für $\varkappa \geqq 0$ versagt unsere Methode. In diesen Fällen lassen sich Flächen angeben: Eine lineare Relation mit $\varkappa = 0$ besteht auf geschlossenen Röhrenflächen (vom Geschlecht 1). *Die einzigen analytischen geschlossenen Flächen vom Geschlecht $g \neq 1$ mit einer linearen Relation und mit $\varkappa > 0$ sind gewisse Rotationsflächen vom Geschlecht* 0. Dies wird in einer späteren Arbeit gezeigt werden.

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob sich die bisherigen Sätze auch für Flächen beweisen lassen, die mehrmals differenzierbar, aber nicht analytisch sind. Dies wird in zwei Fällen gelingen: Erstens werden im nächsten Paragraphen Integralformeln hergeleitet, aus denen sich der Translationssatz I — und damit auch die Sätze II—IV — im Falle der speziellen Funktionen $U = H$ und $U = K (K > 0)$ unter schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergeben werden. Zweitens betrachten wir Flächen mit einer Relation $W(k_1, k_2) = 0$ und setzen voraus, daß diese Relation analytisch sei. Dann werden die Sätze dieses Paragraphen durch folgende Bemerkung ergänzt[17]):

Das Flächenstück F sei dreimal stetig differenzierbar, aber nicht analytisch. Dann kann auf F keine symmetrische analytische Relation $W(k_1, k_2) = 0$ mit (3.3) *bestehen.*

[17]) Vgl. auch [7], S. 53.

Man kann nämlich die Potenzreihe $W(k_1, k_2)$ durch H und K ausdrücken. Stellt man dann F durch $z = z(x, y)$ dar und setzt für H und K die entsprechenden Ausdrücke ein, so erhält man eine analytische Differentialgleichung $U(H, K) = 0$ für die Funktion $z(x, y)$, die wegen (3.3) elliptisch ist. Nach einem Satz von S. Bernstein läßt eine solche Differentialgleichung aber nur analytische Lösungen zu (vgl. etwa E. Hopf [14]).

Im Falle analytischer Relationen stellt es also keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, wenn wir bei den Sätzen III und IV nur analytische Flächen zulassen.

§ 8. Integralformeln im Falle von H und K

Zunächst wird ein Kalkül entwickelt, der zur Herleitung von Integralformeln dient.

$\mathfrak{v}$ sei eine Vektorfunktion auf einer Fläche F. Bei Festhaltung des räumlichen Koordinatensystems bilden die Komponenten von $\mathfrak{v}$ ein Tripel skalarer Funktionen auf der Fläche. Ein *Tripel linearer Differentialformen* $\omega = a_i(u)\,du^i$ nennen wir eine *vektorielle Differentialform*; z. B. ist das Differential $d\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_i\,du^i$ eine solche. Sind $\alpha = \mathfrak{a}_i\,du^i$ und $\beta = \mathfrak{b}_i\,du^i$ vektorielle Differentialformen, so definieren wir das *vektorielle Produkt* von α und β durch

$$\alpha \mathbin{\hat{\times}} \beta = (\mathfrak{a}_i \times \mathfrak{b}_j)\,du^i \wedge du^j. \tag{8.1}$$

Dabei ist $\mathfrak{a}_i \times \mathfrak{b}_j$ das gewöhnliche Vektorprodukt der räumlichen Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ und $du^i \wedge du^j$ das alternierende Produkt (1.4) der Differentiale. Abweichend von den üblichen Regeln des Vektorproduktes gilt jetzt

$$\alpha \mathbin{\hat{\times}} \beta = \beta \mathbin{\hat{\times}} \alpha,$$

und $\alpha \mathbin{\hat{\times}} \alpha$ braucht nicht gleich Null zu sein. Das skalare Produkt von $\mathfrak{v}$ mit $\alpha \mathbin{\hat{\times}} \beta$ wird auch als Determinante geschrieben:

$$(\mathfrak{v}, \alpha, \beta) = \mathfrak{v}\,(\alpha \mathbin{\hat{\times}} \beta).$$

Sind in einer Determinante zwei Zeilen vektorielle Differentialformen, so ändert sich der Wert der Determinante bei Vertauschung dieser Zeilen nicht.

Wählt man speziell $\alpha = a_i^j\,\mathfrak{x}_j\,du^i$ und $\beta = d\mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor von F ist, so erhält man

$$\alpha \mathbin{\hat{\times}} d\mathfrak{x} = a_i^i\,\mathfrak{n}\,dA, \qquad \alpha \mathbin{\hat{\times}} \alpha = 2\,|a_i^j|\,\mathfrak{n}\,dA. \tag{8.2}$$

Man bestätigt dies entweder direkt oder mit Hilfe der Formeln (1.2), (1.5), (1.15) und (1.17). Setzt man $\alpha = d\mathfrak{n}$, d. h. $a_i^j = -l_i^j$, so ergeben sich aus (8.2) die Formeln

$$\begin{gathered} d\mathfrak{x} \mathbin{\hat{\times}} d\mathfrak{x} = 2\,\mathfrak{n}\,dA, \qquad d\mathfrak{x} \mathbin{\hat{\times}} d\mathfrak{n} = -2\,H\,\mathfrak{n}\,dA, \\ d\mathfrak{n} \mathbin{\hat{\times}} d\mathfrak{n} = 2\,K\,\mathfrak{n}\,dA. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Wir betrachten nun zwei Flächen F und $\bar{F}$, zwischen denen eine Parallelabbildung (2.11) besteht.

Wir bilden die lineare Differentialform $(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n},\ \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x},\ d\mathfrak{x})$ und behaupten, daß für ihre *äußere Ableitung* folgende Formel gilt:

$$(8.4)\qquad d(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA) + 2(\bar{H} - H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA.$$

Der Beweis dieser bzw. einer allgemeineren Formel wird im § 9 geführt werden (Formel (9.5) für $n = 2$).

Integriert man nun (8.4) über F und wendet den Satz von Stokes an, so folgt

$$(8.5)\quad 2\iint (\bar{H} - H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \tfrac{1}{2}\iint (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA) = \oint (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}).$$

Dabei sind die beiden Integrale links über F und das Integral rechts über den Rand von F zu erstrecken. Speziell ist für geschlossene Flächen

$$(8.5')\qquad 2\iint (\bar{H} - H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \tfrac{1}{2}\iint (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Integralformeln läßt sich nun der Translationssatz I (§ 5) im Falle der mittleren Krümmung H unter den folgenden schwächeren Voraussetzungen beweisen:

Satz I_H. *F und $\bar{F}$ seien geschlossene orientierte zweimal stetig differenzierbare Flächen, zwischen denen eine reguläre Parallelabbildung $\bar{p} = T\,p$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ besteht. T sei zweimal stetig differenzierbar und erhalte die Orientierung. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Flächen keine Zylinderstücke mit Erzeugenden parallel zu $\mathfrak{e}$ enthalten. Falls dann in entsprechenden Punkten p und $\bar{p}$ von F und $\bar{F}$ die mittlere Krümmung H den gleichen Wert hat, so ist T eine Translation.*

Beweis: Da $\bar{H} = H$ ist, folgt aus (8.5'):

$$\iint (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA) = 0,$$

und da der Integrand nicht negativ ist, muß

$$\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$$

sein. Bei der Parallelabbildung T sind also in entsprechenden Punkten die Normalen parallel. Somit ist

$$(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\,\mathfrak{n} = 0 = \mathfrak{w}_i\mathfrak{n} = w_i(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}).$$

In der Umgebung eines Punktes mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ ist daher $w_i = 0$. Dasselbe gilt aber auch für die Umgebung eines Punktes der Schattengrenze, da die Punkte mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ nach Voraussetzung nirgends dicht liegen. Da also die partiellen Ableitungen von w nach lokalen Flächenparametern überall verschwinden, muß w konstant sein, q.e.d.

Die Voraussetzung beim Satz I_H, daß die Schattengrenzen der Flächen keine inneren Punkte enthalten, kann offenbar in folgender Weise abgeschwächt werden: *S_0 sei die Menge der inneren Punkte der Schattengrenze von F. Falls dann $F - S_0$ zusammenhängend ist, so gibt es eine Translation, welche F in $\bar{F}$ überführt.*

Entsprechend zum Symmetriesatz II gilt nun folgender Satz:

Satz II$_H$. *Die geschlossene zweimal stetig differenzierbare Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ im weiteren Sinne* [Bedingung (a_0), § 2 [18])]. *Für jedes Punktepaar p, p', das von einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ aus F geschnitten wird, habe die mittlere Krümmung H in p und p' den gleichen Wert. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Beweis: Wie beim Beweis des Satzes II sei $\overline{F} = S(F)$ die an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene gespiegelte Fläche und T die induzierte Parallelabbildung von F auf $\overline{F}$. Weiter sei C die Menge derjenigen Punkte von F, die entweder zur Schattengrenze von F oder zum Urbild der Schattengrenze von $\overline{F}$ gehören. Wegen (a_0) besteht C aus endlich vielen rektifizierbaren Kurven und aus isolierten Punkten. Die Abbildung T ist regulär in $F - C$. Daher gilt die Gleichung (8.5) für jeden Teil von $F - C$, der etwa von stückweise glatten Kurven berandet wird. Da T überall stetig ist, sind $\overline{\mathfrak{n}}$ und $\overline{\mathfrak{x}}$ stetige Funktionen auf ganz F. Somit ist der Integrand auf der rechten Seite von (8.5) stetig. Da sich C durch in $F - C$ verlaufende Kurven endlicher Länge gleichmäßig approximieren läßt, folgt aus (8.5) durch Grenzübergang die Gleichung (8.5′), wo jetzt über ganz F zu integrieren ist. Auf Grund der Voraussetzung über H schließt man nun weiter wie beim Satz I$_H$, daß w in jeder Gebietskomponente von $F - C$ konstant ist; diese (endlich vielen) Konstanten haben aber wegen der Stetigkeit von w den gleichen Wert. Da sich also F und $S(F)$ nur durch eine Translation unterscheiden, ist F symmetrisch.

Außer für die mittlere Krümmung H läßt sich auch noch für die Gaußsche Krümmung K eine Integralformel finden. Dazu gehen wir von zwei Flächen F und $\overline{F}$ mit (2.11) aus, von denen wir annehmen, daß sie sich gemäß (2.14) durch eine Schar regulärer Flächen F_t verbinden lassen, d. h. wir setzen voraus, daß (2.13) gilt. Wir bilden die lineare Differentialform $(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\,\mathfrak{n})$, wobei der Strich Ableitung nach t bedeutet und alle Größen für ein bestimmtes t zu nehmen sind. Durch zeilenweise Differentiation findet man:

$$d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) = (\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) - (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}), \tag{8.6}$$

wobei wegen $d\,d\,\mathfrak{n} = 0$ nur zwei Glieder auftreten. Nun ist nach (8.3)

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{n})' = (K\,\mathfrak{w}\mathfrak{n}\,dA)',$$

und da $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA$ nach (2.12) unabhängig von t ist:

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t)) = K(t)'(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA. \tag{8.7}$$

Weiter ist nach der Variationsformel (4.3) und nach (1.7):

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}) &= g^{ij}(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\,l^r_s\,(\mathfrak{w}_k, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_r)\,du^k \wedge du^s \\ &= g^{ij}\varepsilon_{jr}l^r_s\,\varepsilon^{ks}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{n})(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\,dA, \end{aligned}$$

---

[18]) **Ähnliche Einschränkungen sind auch in [8] beim Satz I anzubringen. Man beachte, daß bei Flächen mit konstantem H, da diese analytisch sind, die Bedingung (a_0) erfüllt ist, wenn man nur Konvexität in der betreffenden Richtung voraussetzt.**

wobei noch (1.2) und (1.5) benutzt wurde. Nach (1.16) und (1.15) ist $g^{ij}\varepsilon_{jr} = \varepsilon^{ij}g_{jr}$, also $g^{ij}\varepsilon_{jr}\, l^r_s\, \varepsilon^{ks} = \varepsilon^{ij}\varepsilon^{ks}\, l_{js} = c^{ik}$, und damit wird

$$-(\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t))^2 c^{ik}(t)\, w_i\, w_k\, d A(t).$$

Verwendet man rechts noch (2.12) bzw. (5.3), so ist also

$$(8.8)\qquad -(\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 g^{\frac{1}{2}} g(t)^{-\frac{1}{2}} c^{ik}(t)\, w_i w_k dA.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(8.9)\qquad g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}} c^{ik}(t)\, dt = C^{ik}.$$

Führt man nun (8.7) und (8.8) in (8.6) ein und integriert über t von 0 bis 1, so folgt

$$(8.10)\qquad (\overline{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k dA = d \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t))\, dt.$$

Hier wurde noch Integration nach t und Differentiation nach u^i vertauscht. Nach dem Satz von STOKES findet man schließlich

$$(8.11)\qquad \iint (\overline{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \iint (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i\, w_k\, dA = \oint \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t))\, dt,$$

wo wieder über F bzw. den Rand von F zu integrieren ist. Für geschlossene Flächen hat man demnach

$$(8.11')\qquad \iint (\overline{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \iint (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i\, w_k\, dA = 0.$$

Damit lassen sich nun folgende Sätze beweisen:

Satz I$_K$. *F und $\overline{F}$ seien dreimal stetig differenzierbare gleichartig orientierte Eiflächen, die durch eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\overline{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ aufeinander bezogen sind. In entsprechenden Punkten $\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{p}}$ sei $K = \overline{K}$. Dann ist T eine Translation.*

Satz II$_K$. *F sei eine dreimal stetig differenzierbare Eifläche. Die Gaußsche Krümmung K von F stimme in je zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, die auf einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ liegen, überein. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Beweis des Satzes I$_K$: Nach Lemma 1 (§ 2) ist T regulär und zweimal stetig differenzierbar, mit Ausnahme der Schattengrenze sogar dreimal stetig differenzierbar. Da außerdem auf Grund der Orientierung niemals $\overline{\mathfrak{n}} = -\mathfrak{n}$ ist, sind die Flächen F_t in (2.14) regulär für alle t. Daher kann man (8.11) auf die beiden Gebiete anwenden, in die F von der Schattengrenze zerlegt wird. (Die Schattengrenze ist eine glatte Kurve, und der Integrand des Randintegrals ist definiert.) Es gilt daher (8.11'). Wir zeigen nun noch, daß die quadratische Form $C^{ik} x_i x_k$ positiv definit ist. Dann folgt aus (8.11') wegen $\overline{K} = K$:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k = 0,$$

also $w_i = 0$ für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$, somit $w = \text{const}$.

Wegen (8.9) genügt es nun, wenn man zeigt, daß $c^{ik}(t)\, x_i x_k$ für alle t ($0 \leq \leq t \leq 1$) positiv definit ist, und dies ist gleichbedeutend mit der Definitheit der Form $l_{ij}(t)\, y^i y^j$. Da $\sqrt{g}\, l_{ij} = (\mathfrak{x}_{u^i u^j}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ nach Einsetzen von (2.14) eine lineare Funktion von t wird, so ist

$$\sqrt{g(t)} \cdot l_{ij}(t) = (1-t)\sqrt{g}\, l_{ij} + t\sqrt{\bar{g}}\, \bar{l}_{ij}\,. \tag{8.12}$$

Da zu l_{ij} und $\bar{l}_{ij}$ gleichartig definite quadratische Formen gehören, liest man aus (8.12) ab: wenn F und $\bar{F}$ Eiflächen sind, so ist F_t eine Schar regulärer Eiflächen, q.e.d.

Der Satz $\mathrm{II_K}$ ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze $\mathrm{I_K}$.

§ 9. Integralformeln und Kongruenzsätze für n-dimensionale Flächen

Die gleiche Methode, die im § 8 zu Sätzen für H und K, also für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen geführt hat, läßt sich auch auf n-dimensionale Flächen im R_{n+1} mit beliebigem $n \geq 2$ anwenden[19]).

Analog zu (8.1) werde jetzt das vektorielle Produkt von n vektoriellen Differentialformen definiert; es ändert sich nicht bei Vertauschung zweier Faktoren. Weiter lassen sich $(n+1)$-reihige Determinanten bilden, bei denen $n-1$ oder n Zeilen vektorielle Differentialformen, die übrigen Zeilen gewöhnliche Vektoren sind.

Den Formeln (8.3) entspricht jetzt

$$\underbrace{d\mathfrak{n} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{n}}_{\nu} \hat{\times} \underbrace{d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x}}_{n-\nu} = (-1)^\nu n!\, H_\nu \mathfrak{n}\, dA, \qquad 0 \leq \nu \leq n. \tag{9.1}$$

Wir beginnen mit der Herleitung einer Integralformel. $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}$ seien n-dimensionale Flächen, die durch eine reguläre Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{e}$ aufeinander bezogen sind. Zunächst folgt durch zeilenweise Differentiation unter Beachtung von $dd = 0$:

$$\begin{aligned} &d(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &\qquad = (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) - (\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Setzt man $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}$ in das Vektorprodukt $d\bar{\mathfrak{x}} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\bar{\mathfrak{x}}$ ein und multipliziert aus, so erhält man Null, sobald zwei Faktoren $d\mathfrak{w} = dw\,\mathfrak{e}$ auftreten. Also ist

$$d\bar{\mathfrak{x}} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\bar{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x} = n(d\mathfrak{w} \hat{\times} d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x})$$

oder wegen (9.1) für $\nu = 0$:

$$d\mathfrak{w} \hat{\times} d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x} = (n-1)!\, (\bar{\mathfrak{n}}\, d\bar{A} - \mathfrak{n}\, dA).$$

Da $(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})(\bar{\mathfrak{n}}\, d\bar{A} - \mathfrak{n}\, dA) = (1 - \bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})(d\bar{A} + dA)$ ist, wird das erste Glied auf der rechten Seite von (9.2):

$$(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = (n-1)!\, (1 - \bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})(d\bar{A} + dA). \tag{9.3}$$

[19]) Für $n = 1$, also für Kurven in der Ebene, vgl. [8], Abschnitt 5.

Beim zweiten Glied ist nach (9.1):

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = -n!\, H_1(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA,$$
$$(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, d\bar{\mathfrak{x}}) = -n!\, \bar{H}_1(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A},$$

und da $(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, d\bar{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A} = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA$ ist, folgt

$$-(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = n!\, (\bar{H}_1 - H_1)\, (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA. \tag{9.4}$$

Mit (9.3) und (9.4) geht (9.2) über in

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\, d\, (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ = n(\bar{H}_1 - H_1)\, (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \tfrac{1}{2}\, (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA).\end{aligned} \tag{9.5}$$

Für $n = 2$ ist dies die Formel (8.4), die noch zu beweisen war. Aus (9.5) folgt nun durch Integration:

$$\begin{aligned} n \int_F (\bar{H}_1 - H_1)\, (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \frac{1}{2} \int_F (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2\, (d\bar{A} + dA) \\ = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\partial F} (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \end{aligned} \tag{9.6}$$

wo ∂F den Rand von F bezeichnet.

Damit sind wir in der Lage, den Satz $\mathrm{I_H}$ (§ 8) auf n-dimensionale Flächen zu verallgemeinern:

Satz V. *F und $\bar{F}$ seien n-dimensionale geschlossene orientierte zweimal stetig differenzierbare Flächen, zwischen denen eine Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{e}$ besteht, die regulär und zweimal stetig differenzierbar ist und die Orientierung erhält. Außerdem enthalte die Schattengrenze von F in der Richtung $\mathfrak{e}$ keine inneren Punkte. Falls dann die Summe der Hauptkrümmungen in entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ den gleichen Wert hat, so unterscheiden sich F und $\bar{F}$ nur durch eine Translation.*

Der Beweis verläuft genau so, wie beim Satz $\mathrm{I_H}$: Da in (9.6) das Randintegral rechts verschwindet und da $\bar{H}_1 = H_1$ ist, folgt $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ und damit $(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\, \mathfrak{n} = w_i(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}) = 0$, also $w = \text{const}$.

Eine analoge Überlegung, wie sie im § 8 beim Beweis des Satzes $\mathrm{II_H}$ angestellt wurde, liefert jetzt dessen Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen:

Satz V′. *Die n-dimensionale zweimal stetig differenzierbare geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ (im weiteren Sinne). Die Summe der Hauptkrümmungen habe in je zwei Punkten, die auf einer zu $\mathfrak{e}$ parallelen Geraden liegen, den gleichen Wert. Dann ist F symmetrisch bezüglich einer n-dimensionalen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Der Satz $\mathrm{I_K}$ läßt sich ebenfalls auf n-dimensionale Flächen verallgemeinern. Man erhalte Sätze für die Krümmungsfunktionen H_ν, $2 \leqq \nu \leqq n$, wobei wir uns wieder auf Eiflächen beschränken, d. h. auf geschlossene Flächen mit definiter zweiter Fundamentalform. Der Fall $\nu = 1$ (Satz V) wird dabei nochmals mitbewiesen werden.

Wir berechnen zunächst wieder Integralformeln für zwei Flächen F und $\overline{F}$, die sich durch eine lineare Schar regulärer Flächen

$$F_t:\ \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

verbinden lassen, wobei $F_0 = F$ und $F_1 = \overline{F}$ ist. Nach (9.1) ist für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$:

$$(-1)^\nu n!\, H_\nu(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = (\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}),$$

wobei alle Größen für ein gewisses t genommen seien. Differenziert man diese Gleichung nach t und beachtet erstens, daß $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA$ unabhängig von t ist, und zweitens, daß $d\mathfrak{x}' = d\mathfrak{w}$ parallel zu $\mathfrak{e}$ ist, so folgt

$$(9.7) \qquad (-1)^\nu n!\, H'_\nu(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = \nu(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Die rechte Seite von (9.7) läßt sich umformen:

$$(9.8) \qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &= (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &= (-1)^{\nu-1} g^{ij} (\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\, l^{r_1}_{s_1} \cdot \ldots \cdot l^{r_{\nu-1}}_{s_{\nu-1}} (\mathfrak{w}_k, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_{r_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{r_{\nu-1}}, \mathfrak{x}_{r_\nu}, \ldots, \mathfrak{x}_{r_{n-1}}) \cdot \\ &\qquad \cdot du^k \wedge du^{s_1} \wedge \ldots \wedge du^{s_{\nu-1}} \wedge du^{r_\nu} \wedge \ldots \wedge du^{r_{n-1}}, \end{aligned}$$

und wegen (1.2) und (1.5) ist dieser Ausdruck gleich

$$(-1)^{\nu-1} g^{ij}\, \varepsilon_{j r_1 \ldots r_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, \varepsilon^{k s_1 \ldots s_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, l^{r_1}_{s_1} \cdot \ldots \cdot l^{r_{\nu-1}}_{s_{\nu-1}} (\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\, dA,$$

also ist nach (1.14)

$$(9.9) \quad (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = (-1)^{\nu-1} (n-1)!\, c^{ik}_{(\nu)}\, w_i\, w_k\, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2\, dA.$$

Mit (9.8) und (9.9) geht (9.7) über in

$$(9.10) \quad \begin{aligned} (-1)^\nu n!\, H_\nu(t)' (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA &= \nu(-1)^{\nu-1}(n-1)!\, g^{\frac{1}{2}} g(t)^{-\frac{1}{2}} c^{ik}_{(\nu)}(t)\, w_i\, w_k (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 dA + \\ &+ \nu\, d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

wo jetzt noch die Abhängigkeit von t angegeben ist. (Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t)$ wurde die Formel (5.3) benutzt, die für n-dimensionale Flächen gilt.) Setzt man

$$C^{ik}_{(\nu)} = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}}\, c^{ik}_{(\nu)}(t)\, dt,$$

so folgt, wenn man (9.10) nach t integriert:

$$\tag{9.11} \begin{aligned} &n(\overline{H}_\nu - H_\nu)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \nu(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik}_{(\nu)} w_i w_k \, dA \\ &= \frac{\nu(-1)^\nu}{(n-1)!}\, d \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})\, dt. \end{aligned}$$

Diese Formeln gelten für $1 \leqq \nu \leqq n$. Für $\nu = 1$ ergibt sich nochmals die Formel (9.5), wenn man die Integration nach t ausführt (für $\nu = 1$ sind beide Glieder auf der rechten Seite von (9.8) Ableitungen nach t). Im Spezialfall $\nu = n = 2$ geht (9.11) in die Formel (8.10) über. Nun wird behauptet:

Satz VI. *Die n-dimensionalen Eiflächen F und $\overline{F}$ seien dreimal stetig differenzierbar und gleichartig orientiert* (etwa so, daß die zweiten Fundamentalformen positiv definit sind). *Zwischen F und $\overline{F}$ bestehe eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\overline{p} = Tp$. Falls dann eine der Krümmungsfunktionen $H_\nu (1 \leqq \nu \leqq n)$ in entsprechenden Punkten p und $\overline{p}$ von F und $\overline{F}$ den gleichen Wert hat, so ist T eine Translation.*

Beweis: Bildet man $\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}$, so wird die Determinante $(\mathfrak{x}_{u^i u^j}(t), \mathfrak{x}_1(t), \ldots, \mathfrak{x}_n(t))$ linear in t; daher gilt die Formel (8.12) auch für beliebigdimensionale Flächen. Daraus folgt erstens, daß $g(t)$ für alle t von Null verschieden ist, und zweitens, daß $l_{ij}(t)\, x^i x^j$ positiv definit ist, d. h. F_t ist eine Schar regulärer Eiflächen. Nach (1.13) ist dann auch $c^{ik}_{(\nu)}(t)\, x_i x_k$ positiv definit für alle t und somit $C^{ik}_{(\nu)}\, x_i x_k$ positiv definit. Integriert man nun (9.11) über F und wendet den Satz von Stokes an, so erhält man:

$$\tag{9.12} \begin{aligned} &\frac{n}{\nu} \int_F (\overline{H}_\nu - H_\nu)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \int_F (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik}_{(\nu)} w_i w_k\, dA \\ &= \frac{(-1)^\nu}{(n-1)!} \int_{\partial F} \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})\, dt. \end{aligned}$$

Da $\overline{H}_\nu = H_\nu$ ist und da das Randintegral (analog wie beim Beweis des Satzes $\mathrm{I_K}$, § 8) verschwindet, ist also $w_i = 0$ und $w = \text{const}$, q.e.d.

Die Voraussetzung beim Satz VI, daß F und $\overline{F}$ Eiflächen sind, wurde benötigt, um die Definitheit der Formen $c^{ik}_{(\nu)}\, x_i x_k$ sicherzustellen. Für $\nu = 1$ ist $c^{ik}_{(1)} = g^{ik}$, also ist die Definitheitsbedingung sogar für beliebige Flächen erfüllt: dementsprechend beziehen sich die Sätze V und V′ auf beliebige geschlossene Flächen (allerdings unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Regularität der Abbildung bzw. die Konvexität der Fläche in einer Richtung). Für $\nu = n$ ist die Definitheit von $c^{ik} x_i x_k = \Sigma\, g^{-1}\, l^*_{ik}\, x_i x_k$ gleichbedeutend mit der Definitheit der zweiten Fundamentalform; $c^{ik} x_i x_k$ ist also nur auf Eiflächen definit.

Dagegen gibt es für $2 \leqq \nu \leqq n - 1$ (falls $n \geqq 3$) auch nicht-konvexe geschlossene Flächen, auf denen $c^{ik}_{(\nu)}\, x_i x_k$ überall definit ist; z. B. lassen sich Flächen vom topologischen Typus $S_1 \times S_{n-1}$ mit dieser Eigenschaft konstruieren: man geht von einer geschlossenen Kurve aus und trägt in jedem Punkt in der n-dimensionalen Ebene senkrecht zur Tangente eine Sphäre S_{n-1} von konstantem Radius r ab. Auf der entstehenden Fläche sind $n-1$ Hauptkrümmungen konstant gleich $1/r$, während die n-te Hauptkrümmung, wie man ausrechnen kann, $\geqq -k/1-r\,k$ ist, wo k die Krümmung der Kurve bedeutet. Bei genügend kleinem r wird $\frac{\partial H_\nu}{\partial k_i} > 0$ für $2 \leqq \nu \leqq n-1$, und dies ist nach (1.13) gleichbedeutend mit der gewünschten Definitheit.

Für $2 \leqq \nu \leqq n-1$ gilt der Satz VI also auch für gewisse nicht-konvexe Flächen, wobei allerdings die Definitheitsbedingung nicht nur für F und $\overline{F}$, sondern für alle Flächen F_t benötigt wird.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz VI ist:

Satz VI′. *Die dreimal stetig differenzierbare Eifläche F habe die Eigenschaft, daß eine Krümmungsfunktion H_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ in je zwei Punkten, die auf einer zu $\mathfrak{e}$ parallelen Geraden liegen, den gleichen Wert hat. Dann gibt es eine Spiegelung an einer n-dimensionalen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$, welche F in sich überführt.*

Aus diesem Satze ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes von *W.* Süss [9], daß die Sphären die einzigen Eiflächen mit konstantem H_ν sind. Bei einer solchen Fläche sind nämlich die Voraussetzungen des Satzes VI′ in jeder Richtung $\mathfrak{e}$ erfüllt. Daher ist F in jeder Richtung symmetrisch, muß also eine Sphäre sein.

Multipliziert man die Integralformeln (9.12) mit positiven Konstanten a_ν und summiert, so erhält man eine Integralformel, aus welcher der Translations- und der Symmetriesatz (etwa für Eiflächen) im Falle der Funktion $U = \Sigma\, a_\nu H_\nu$ folgt. Insbesondere gilt:

Satz VII. *Die einzigen (dreimal stetig differenzierbaren) n-dimensionalen Eiflächen mit konstantem*

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu H_\nu, \qquad a_\nu > 0,$$

sind die n-dimensionalen Sphären.

Allgemeiner kann man Funktionen $W(k_1, \ldots, k_n)$ betrachten, die in allen n Variablen symmetrisch und *gleichsinnig monoton* sind, genauer gesagt, bei denen etwa $W_{k_i} > 0$ für positive k_i ist (W sei n-mal differenzierbar). Beschränkt man sich auf analytische Flächen, so lassen sich die Methoden des § 5 anwenden[20]); man erhält z. B. folgenden Satz:

Satz VIII. *Die Sphäre ist die einzige analytische n-dimensionale Eifläche, auf der eine Funktion $W(k_1, \ldots, k_n)$ der obigen Art konstant ist.*

Wir untersuchen zum Schluß noch, ob man die hier verwendete Methode der Integralformeln außer auf die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen auch auf allgemeinere Funktionen anwenden kann. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$.

---

[20]) In der Formel (5.2) hat man a^{ij} durch $1/n\, \Sigma\, \nu\, U_{H_\nu} c^{ij}_{(\nu)}$ zu ersetzen.

Die Voraussetzung $\overline{U} = U$ beim Translationssatz I hat gemäß § 5 die lineare Differentialgleichung (D) für die Funktion w zur Folge. Das zugehörige *infinitesimale* Problem liefert den Differentialausdruck

$$L(w) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, a^{ij} w_{u^i u^j} + \{-(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, a^{ij}\, \Gamma^k_{ij} + 2\, a^{ik} (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)\}\, w_k = U(H,K)',$$

der unter dem Integral (5.2) auftritt, wobei

$$a^{ij} = \tfrac{1}{2}\, U_{\mathrm{H}}\, g^{ij} + U_{\mathrm{K}}\, c^{ij}$$

ist. Wir führen ein skalares Produkt zweier Funktionen v und w auf F ein durch

$$(v, w) = \int_F v\, w (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, d A = \int_F v\, w\, d x\, d y\,. \tag{9.13}$$

Dann sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen in folgender Weise gegenüber anderen Funktionen ausgezeichnet:

Der Differentialausdruck $L(w)$ ist dann und nur dann selbstadjungiert für alle Flächen F bezüglich des Skalarproduktes (9.13), *wenn U_{H} und U_{K} konstant, also $U = a\, H + b\, K$ ist.*

Die Tatsache, daß $L(w)$ für $U = H$ bzw. K selbstadjungiert ist, folgt aus der Formel (9.10), genauer gesagt: aus der Formel, die entsteht, wenn man bei der Herleitung von (9.10) den Vektor $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}$ ersetzt, wo v eine zweite Funktion ist. Daß $U = a\, H + b\, K$ die einzige Krümmungsfunktion ist, für welche dies bei allen Flächen F eintritt, kann durch eine Rechnung eingesehen werden, die wir hier nicht durchführen.

Im § 5 wurden die Fälle, in denen die Differentialgleichung (D) nicht selbstadjungiert ist, durch Übergang zur selbstadjungierten Gleichung (D_0) behandelt.

§ 10. Verhalten der Krümmungsintegrale bei Steinerscher Symmetrisierung

Die Integrale in § 8 und § 9 können geometrisch gedeutet werden. Dazu führen wir das *ν-te Krümmungsintegral* einer n-dimensionalen Fläche ein durch

$$C_\nu = \int_F H_\nu\, d A, \qquad 0 \leqq \nu \leqq n.$$

$C_0 = A$ ist der Flächeninhalt von F und C_n der Inhalt des sphärischen Bildes.

Bei einer Variation (4.1) von F mit beliebigem Variationsvektor $\mathfrak{w}$ wird C_ν eine Funktion von t. Zunächst berechnen wir C'_ν: Nach (9.1) ist

$$(-1)^\nu n!\, H_\nu d A = (\mathfrak{n}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \tag{10.1}$$

also unter Beachtung von $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^\nu n!\, (H_\nu d A)' &= \nu (\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + \\ &+ (n-\nu)\, (\mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Zur Abkürzung führen wir Differentialformen φ_ν und ψ_ν vom Grade $n-1$ ein durch

$$(-1)^\nu n!\ \varphi_\nu = \nu(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$$

$$(-1)^\nu n!\ \psi_\nu = (n-\nu)\,(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Wegen $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$ wird

$$(-1)^\nu n!\ d\varphi_\nu = \nu(\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x});$$

außerdem

$$(-1)^\nu n!\ d\psi_\nu = (n-\nu)\,(\mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$$
$$-(n-\nu)\,(\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu+1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Also kann man für (10.2) schreiben:

$$(10.3)\quad (-1)^\nu n!\,(H_\nu dA)' = (n-\nu)\,(\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu+1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + (-1)^\nu n!\, d(\varphi_\nu + \psi_\nu),$$

oder nach (9.1):

$$(10.3')\qquad (H_\nu dA)' = -(n-\nu)\, H_{\nu+1}(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + d(\varphi_\nu + \psi_\nu).$$

Für eine geschlossene Fläche folgt daraus:

$$(10.4)\qquad C'_\nu = -(n-\nu)\int_F H_{\nu+1}(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA.$$

Für $\nu = 0$, d. h. für die Variation der Oberfläche, ist diese Formel bekannt; für $\nu = n$ ist C'_n gleich dem Randintegral von φ_n, das nur von $\mathfrak{n}$ abhängt.

Von jetzt an sei $0 \leqq \nu \leqq n-1$. Außerdem beschränken wir uns auf *Parallelvariationen*, d. h. auf Variationen in konstanter Richtung $\mathfrak{e}$:

$$\mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}.$$

Differenziert man (10.3) nach t und beachtet, daß jetzt $d\mathfrak{x}' = d\mathfrak{w}$ parallel zu $\mathfrak{w}$ ist, so folgt

$$(10.5)\quad \begin{aligned}(-1)^\nu n!\,(H_\nu dA)'' &= (n-\nu)\,(\nu+1)\,(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + \\ &+ (-1)^\nu n!\, d(\varphi'_\nu + \psi'_\nu).\end{aligned}$$

In (10.5) kann man die rechte Seite nach (9.8) umformen und (9.9) (für $\nu+1$) einsetzen; dann erhält man

$$(10.6)\qquad n(H_\nu dA)'' = (n-\nu)\,(\nu+1)\, c^{ik}_{(\nu+1)}\,(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\,(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\, dA + d\,\omega_\nu,$$

wobei die ω_ν gewisse Formen vom Grade $n-1$ sind. Aus (10.6) ergibt sich nun:

Bei Parallelvariation einer geschlossenen Fläche ist

(10.7) $$C_\nu'' = \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{n} \int_F c^{ik}_{(\nu+1)}\, w_i\, w_k\, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 dA\,.$$

Eine Fläche mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ nennen wir einen *Zylinder*. Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ gleichbedeutend damit, daß F von einer $(n-1)$-parametrigen Schar zu $\mathfrak{e}$ paralleler Geraden gebildet wird. Bei Parallelvariation in dieser Richtung wird F also in sich transformiert. Schließt man diese Möglichkeit aus, so folgt aus (10.7):

Satz IX. *F sei eine n-dimensionale (dreimal stetig differenzierbare) geschlossene Fläche, welche keine Zylinderstücke enthält und bei der die quadratische Form $c^{ik}_{(\nu+1)} x_i x_k$ für ein gewisses ν $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$ überall positiv definit ist. Dann ist bei jeder linearen Parallelvariation von F*

$$C_\nu'' \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen steht nur, wenn die Variation eine Translation ist.

Die folgenden Spezialfälle des Satzes IX seien besonders hervorgehoben:

1. Für $\nu = 0$ wird $c^{ik}_{(1)} = g^{ik}$, also folgt: *Bei Parallelvariation einer beliebigen Fläche ist $A'' \geqq 0$.* Darüber hinaus ist in (10.6) die Form $\omega_0 = 0$, wie man bei direkter Herleitung aus (10.1) für $\nu = 0$ sieht. Daher gilt sogar $dA'' \geqq 0$. (Dabei genügt es, wenn die Flächen einmal stetig differenzierbar sind.)

2. *Bei jeder nichttrivialen Parallelvariation einer Eifläche ist $C_\nu'' > 0$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$.*

Es gibt aber auch nicht-konvexe Flächen, bei denen die ersten $n-1$ Krümmungsintegrale C_ν $(\nu = 0, \ldots, n-2)$ bei jeder (hinreichend kleinen) Parallelvariation konvexe Funktionen des Variationsparameters sind, z. B. die im § 9 konstruierten n-dimensionalen Röhrenflächen.

Der im § 9 gegebene Beweis des Translationssatzes V bzw. VI läßt sich nun folgendermaßen beschreiben: Bei der linearen Parallelvariation, welche F in $\bar{F}$ überführt, ist in (10.4) nach Voraussetzung $H_{\nu+1} = \bar{H}_{\nu+1}$ $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$ und $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = (\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A}$, also

(10.8) $$C_\nu'(0) = C_\nu'(1).$$

Die konvexe Funktion $C_\nu(t)$ ist daher linear, also ist die Variation eine Translation.

Ist speziell F eine in der Richtung $\mathfrak{e}$ konvexe Fläche und $\bar{F}$ das Spiegelbild von F an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene E, so ergibt der betrachtete Variationsprozeß für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ die *kontinuierliche Steinersche Symmetrisierung* an E[21]): Für $t = \frac{1}{2}$ ist F_t die symmetrisierte Fläche, während die Flächen F_t und F_{1-t} spiegelbildlich (aber gleichartig orientiert) sind. Wegen $C_\nu(t) = C_\nu(1-t)$ ist

(10.9) $$C_\nu'(1) = -C_\nu'(0),$$

[21]) Vgl. W. Blaschke [6], S. 250. — Pólya und Szegö [10], S. 200. An beiden Stellen wird der Fall $\nu = 0$ des untenstehenden Satzes X bewiesen.

also

$$C'_\nu(1) - C'_\nu(0) = -2\,C'_\nu(0) = \int_0^1 C''_\nu(t)\,dt.$$

Auf Grund des Satzes IX folgt daraus:

Satz X. *Die geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ (im engeren Sinne) und erfülle die Voraussetzungen des Satzes IX. Dann nimmt C_ν bei kontinuierlicher Steinerscher Symmetrisierung monoton ab:*

$$C'_\nu < 0,$$

außer wenn F bereits symmetrisch ist.

Darin ist enthalten: *Bei Symmetrisierung einer Eifläche nehmen alle $C_\nu (\nu = 0, \ldots, n-1)$ monoton ab.*

Beim Satz X wurde angenommen, daß die Flächen dreimal stetig differenzierbar und konvex im engeren Sinne sind, insbesondere also in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft (a), § 2, haben. Bezieht man die gespiegelte Fläche $\overline{F}$ und damit die ganze Flächenschar F_t auf die Parameter von F, so folgt also aus Lemma 1 (§ 2) bzw. dessen n-dimensionaler Verallgemeinerung, daß bei kontinuierlicher Symmetrisierung die variierten Flächen zweimal stetig differenzierbar sind. (Für die Oberfläche genügt einmalige Differenzierbarkeit, also zweimalige Differenzierbarkeit der Ausgangsfläche.)

Der Symmetriesatz V′ bzw. VI′ ergibt sich nun so: nach der Voraussetzung über $H_{\nu+1}$ gilt (10.8); zusammen mit (10.9) folgt $C'_\nu(0) = 0$, also ist F symmetrisch.

§ 11. Randwertsätze für berandete Flächen

Die bisherigen Sätze beziehen sich auf geschlossene Flächen. Man kann mit den gleichen Methoden Sätze über berandete Flächen gewinnen, wenn man diesen geeignete Randbedingungen auferlegt. Wir führen dies für die Resultate des § 9 durch.

Wir betrachten also zwei im Endlichen liegende, von endlich vielen geschlossenen Mannigfaltigkeiten berandete Flächen F und $\overline{F}$, die durch eine Parallelabbildung aufeinander bezogen sind und im übrigen die Voraussetzungen des Satzes V erfüllen. Insbesondere hat also H_1 in Punkt und Bildpunkt den gleichen Wert. Dann gelten die Sätze

Satz Va. *Falls am Rande $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$ ist, so ist überall $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$, die Flächen sind also identisch.*

Satz Vb. *Falls am Rande $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ ist, so unterscheiden sich die Flächen nur durch eine Translation.*

In beiden Fällen verschwindet nämlich auf Grund der Randbedingungen das Randintegral in (9.6), so daß der Beweis wie beim Satz V geführt werden kann.

Für die Krümmungsgrößen H_ν $(2 \leqq \nu \leqq n)$ erhält man analoge Sätze, wenn man etwa Flächen mit definiter zweiter Fundamentalform betrachtet, welche im übrigen den im Satz VI gestellten Forderungen genügen sollen. Insbesondere soll in entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ also $H_\nu = \bar{H}_\nu$ sein. Dann folgt:

Satz VIa. *Falls die Flächen am Rande übereinstimmen, so sind sie überall identisch.*

Satz VIb. *Falls die Flächen am Rande das gleiche sphärische Bild haben, so sind sie kongruent.*

Zum Beweis hat man die Integralformel (9.12) zu betrachten: Im ersten Falle ist am Rande $\mathfrak{w} = 0$; im Falle b ist dort $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$, also gilt am Rande $(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\,\mathfrak{n} = \mathfrak{w}_i \mathfrak{n} = 0$ und daher nach (4.3) und (5.3) $\mathfrak{n}(t)' = 0$ für alle Flächen F_t; in beiden Fällen verschwindet demnach das Randintegral in (9.12), und daher muß w konstant (im Falle a sogar gleich Null) sein.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $n = 2$ und auf Flächen, die sich in der Form

$$z = f(x, y) \tag{11.1}$$

darstellen lassen. Die soeben formulierten Sätze ergeben dann Aussagen über die Einzigkeit der Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen: Zum Beispiel sagt der Satz Va aus, daß die bekannte Differentialgleichung „*H = gegebene Funktion von x, y*" *höchstens eine Lösung* $f(x, y)$ besitzt, *welche vorgeschriebene Randwerte annimmt.* Da die genannte Differentialgleichung für jede Lösung elliptisch ist, folgt dies auch aus bekannten Einzigkeitssätzen (vgl. E. Hopf [13]).

Der Satz VIa besagt, daß die entsprechende Differentialgleichung „*K = gegebene positive Funktion von x, y*" *zu vorgeschriebenen Randwerten höchstens zwei Lösungen* besitzt (nämlich höchstens eine mit gegebenem Vorzeichen der zweiten Fundamentalform, d. h. mit $f_{xx} > 0$ bzw. $f_{xx} < 0$). Diese Aussage ist ein Spezialfall eines Satzes von Rellich [11] über Monge-Ampèresche Differentialgleichungen.

Die beiden genannten Sätze (für H und K) wurden hier mit Hilfe der Integralformeln (8.5) bzw. (8.11) bewiesen. Dabei ergeben sich außer für das erste Randwertproblem auch noch Aussagen über eine andersartige Randwertaufgabe (Fall b). Betrachtet man speziell Flächen, bei denen die *Randkurven Schattengrenzen* sind, wo also am Rande $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ horizontal ist, so läßt sich diese Randbedingung bei Beschränkung auf Flächen (11.1) folgendermaßen ausdrücken:

Die ersten Ableitungen $p = f_x$, $q = f_y$ der Funktion $f(x, y)$ genügen bei Annäherung an die Randkurven C des Gebietes in der x, y-Ebene den Bedingungen

$$p^2 + q^2 \to \infty, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \to \alpha, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \to \beta, \tag{11.2}$$

wobei (α, β) die Kurvennormale von C ist.

§ 12. Ein Unitätssatz für elliptische partielle Differentialgleichungen

Zum Schluß kommen wir nochmals auf die Betrachtungen des § 5 zurück und zeigen, daß die dort verwendete Methode bei Beschränkung auf Flächen (11.1) einen allgemeinen Satz über Differentialgleichungen liefert.

Wir betrachten eine Funktion $\Phi(x, y, p, q, r, s, t)$, die für alle Werte x, y aus einem beschränkten (zusammenhängenden) Gebiet G und für beliebige p, q, r, s, t stetig definiert ist und stetige erste Ableitungen nach p, q, r, s, t besitzt. Den Bereich der 7 Variablen x, y, p, q, r, s, t nennen wir R. Setzt man für p, q und r, s, t die ersten bzw. zweiten Ableitungen einer in G zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u(x, y)$ ein, so ist

$$\Phi(x, y, p, q, r, s, t) = 0$$

eine Differentialgleichung für u. Diese heißt *elliptisch für eine Lösung* u, wenn

$$\Phi_r \Phi_t - (\tfrac{1}{2}\Phi_s)^2 > 0 \tag{12.1}$$

ist, und zwar für alle von $u(x, y)$ induzierten Wertekombinationen x, y, p, q, r, s, t, d. h. für alle Punkte der von $u(x, y)$ erzeugten 2-dimensionalen Fläche in R..

Diejenigen Punkte von R, die der Ungleichung (12.1) genügen, bilden eine offene Menge in R, welche in zwei Teile mit $\Phi_r > 0$ bzw. $\Phi_r < 0$ zerfällt. Wir werden nun gewisse Annahmen über die Form dieser Gebiete machen und den folgenden Einzigkeitssatz beweisen:

Satz XI. *Die Funktion Φ sei so beschaffen, daß bei beliebigem festem x_0, y_0, p_0, q_0 die beiden durch*

$$\Phi_r \Phi_t - (\tfrac{1}{2}\Phi_s)^2 > 0, \quad \Phi_r > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Phi_r < 0$$

definierten Gebiete des r, s, t-Raumes stets konvex sind (wobei auch die leere Menge als konvex angesehen wird). *Dann hat die Differentialgleichung $\Phi = 0$ zu gegebenen Randwerten höchstens zwei Lösungen, für welche sie elliptisch ist, und zwar höchstens je eine Lösung mit $\Phi_r > 0$ bzw. $\Phi_r < 0$.*

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden:

1. Da es zwei Klassen von elliptischen Lösungen gibt, nämlich solche mit $\Phi_r > 0$ bzw. $\Phi_r < 0$, so genügt es, wenn man zeigt, daß jede Klasse höchstens eine Lösung (mit gegebenen Randwerten) enthält. Falls eines der beiden im Satz XI genannten konvexen Gebiete für alle x, y, p, q leer ist, so kann überdies nur eine Lösung auftreten[22]).

2. Die Funktionen u und $\bar{u}$ seien Lösungen aus derselben Klasse, die auf dem Rande übereinstimmen. Da $w = \bar{u} - u$ am Rande verschwindet, braucht man nur den Fall zu betrachten, wo die Funktion w ihr Maximum oder Minimum im Innern von G annimmt. Wir beweisen: *falls w im Punkte o ein Extremum hat, so ist w konstant in einer Umgebung von o.* Daraus folgt dann, daß $w \equiv c = 0$, also $\bar{u} \equiv u$ ist.

a) In o ist $\bar{p}_0 = p_0$, $\bar{q}_0 = q_0$ und

$$\Phi(x_0, y_0, p_0, q_0, \bar{r}_0, \bar{s}_0, \bar{t}_0) = \Phi(x_0, y_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0).$$

---

[22]) E. Hopf beweist einen Satz von dieser Art: das eine Gebiet ist der ganze r, s, t-Raum, das andere ist leer. Vgl. [13], S. 150, Voraussetzung c) (für die Differenz zweier Lösungen).

Nach dem Mittelwertsatz folgt daraus, daß die zweiten Ableitungen von w im Punkte o einer Gleichung

$$\Phi_r^*(w_{xx})_0 + \Phi_s(w_{xy})_0 + \Phi_t^*(w_{yy})_0 = 0 \tag{12.2}$$

genügen, wo die Ableitungen von Φ an einer Stelle r^*, s^*, t^* zwischen r_0, s_0, t_0 und $\bar{r}_0, \bar{s}_0, \bar{t}_0$ zu nehmen sind. Da in den Endpunkten dieser Strecke (12.1) gilt, ist dies wegen der vorausgesetzten Konvexität auch an der Zwischenstelle der Fall, und daher folgt aus (12.2), daß das zweite Differential von w in o entweder indefinit oder $\equiv 0$ ist. Da w in o ein Extremum hat, verschwinden also in o auch die zweiten Ableitungen von w.

b) Nun zeigt man in üblicher Weise, daß w einer linearen elliptischen Differentialgleichung genügt (die Konvexitätsbedingung wird dazu nicht mehr benötigt): Man bildet die Funktionenschar $u_\tau = u + \tau w$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ und setzt diese in Φ ein. Dann findet man durch eine zu (5.1) analoge Betrachtung für w die Differentialgleichung

$$A\, w_{xx} + 2\, B\, w_{xy} + C\, w_{yy} + D\, w_x + E\, w_y = 0, \tag{12.3}$$

wo A, B, C, D, E stetige Funktionen von x, y sind, die aus $\Phi_r, \frac{1}{2}\Phi_s, \Phi_t, \Phi_p, \Phi_q$ durch Mittelbildung über τ entstehen. Da die ersten und zweiten Ableitungen von u_τ in o unabhängig von τ sind, gilt (12.1) im Punkte o für alle τ, und daher ist in o auch $A\,C - B^2 > 0$, d. h. die Gleichung (12.3) ist in einer Umgebung von o elliptisch. Dann muß aber w in dieser Umgebung von o konstant sein, denn nach dem Maximumprinzip könnte sonst w in o kein Extremum haben (vgl. [13], S. 147).

Als Spezialfall des Satzes XI erhält man den im § 11 zitierten Satz von Rellich [11], wenn man

$$\Phi = E(rt - s^2) + A\,r + 2\,B\,s + C\,t + D$$

wählt, wo A, B, C, D, E Funktionen von x, y, p, q sind. Bei einer solchen Funktion Φ sind nämlich die Konvexitätsbedingungen des Satzes XI stets erfüllt: Kürzt man die Ableitungen von Φ nach r, s, t für den Moment mit $a, 2b, c$ ab, so ist

$$a = E\,t + A, \quad b = -E\,s + B, \quad c = E\,r + A. \tag{12.4}$$

Die Funktionen A, B, C, D, E sind für feste x, y, p, q konstant. Von den beiden Gebieten

$$ac - b^2 > 0, \quad a > 0 \quad \text{bzw.} \quad a < 0 \tag{12.5}$$

ist daher für $E = 0$ das eine leer, das andere entweder leer (falls $A\,C - B^2 \leqq 0$) oder der ganze Raum; für $E \neq 0$ stellt (12.5) das Innere eines elliptischen Kegels dar, zerfällt also in zwei konvexe Gebiete. Man sieht dies ein, wenn man im r, s, t-Raum durch die lineare Transformation (12.4) neue Koordinaten a, b, c einführt.

Literatur

[1] H. Hopf: Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen. Math. Nachr. **4**, 232—249 (1951). — [2] A. D. Alexandrov: Ein allgemeiner Eindeutigkeitssatz für geschlossene Flächen. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **19**, 227—229 (1938).—

Sur les théorèmes d'unicité pour les surfaces fermées. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **22**, 99—102 (1939). — [3] A. V. POGORELOV: Ausdehnung des allgemeinen Eindeutigkeitssatzes von A. D. ALEXANDROV auf den Fall nicht-analytischer Flächen (russ.). Doklady Akad. Nauk SSSR **62**, 297—299 (1948). — [4] P. HARTMAN and A. WINTNER: On the third fundamental form of a surface (Appendix). Amer. J. Math. **75**, 330—333 (1953). — [5] S. S. CHERN: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 270—290 (1945). — [6] W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Auflage. Berlin 1945. — [7] H. HOPF: Zur Differentialgeometrie geschlossener Flächen im Euklidischen Raum, Convegno di Geometria Differenziale. 1953 (Roma 1954), 45—54. — [8] H. HOPF u. K. VOSS: Ein Satz aus der Flächentheorie im Großen. Arch. d. Math. **3**, 187—192 (1952). — [9] W. SÜSS: Zur relativen Differentialgeometrie V: Über Eihyperflächen im R^{n+1}. Tôhoku Math. J. **31**, 202—209 (1929). — [10] G. PÓLYA and G. SZEGÖ: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton 1951. — [11] F. RELLICH: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. **107**, 505—513 u. 804 (1933). — [12] A. DEICKE: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Arch. d. Math. **4**, 45—51 (1953). — [13] E. HOPF: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1927**, 147—152. — [14] E. HOPF: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1931).

Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen lernte ich die Arbeit von A. D. ALEXANDROV: Einige Sätze über partielle Differentialgleichungen (russ.), Vestnik Leningradsk. Univ. 1954, Nr. 8, kennen, in der ähnliche Überlegungen wie im obenstehenden § 12 enthalten sind.

(Eingegangen am 10. September 1955)