HIRZEBRUCH, F.
Math. Annalen, Bd. 126, S. 1—22 (1953).

Über vierdimensionale RIEMANNsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen[1]).

Von
FRIEDRICH HIRZEBRUCH in Erlangen.

Einleitung.

In der klassischen Funktionentheorie wird die „abstrakte" RIEMANNsche Fläche in der bekannten Weise definiert. Die algebraischen Funktionselemente einer mehrdeutigen Funktion $f(z)$ lassen sich als Punkte einer „konkreten" RIEMANNschen Fläche auffassen, die einem Teil der Zahlenkugel überlagert ist. Die Gegenüberstellung: „abstrakte RIEMANNsche Fläche" $\longrightarrow$ „RIEMANNsche Fläche einer Funktion" ist einer der wichtigsten Gesichtspunkte der klassischen Theorie. Wie steht es mit der Übertragung dieser Begriffsbildungen und der zugehörigen Sätze auf höhere Dimensionen? Eine fast wörtliche Übertragung der Definition der „abstrakten" RIEMANNschen Fläche führt zu dem Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit (von n komplexen Dimensionen)[2]) [3]). Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den Fall von *zwei* komplexen Veränderlichen.

Die „algebroiden" Funktionselemente einer mehrdeutigen Funktion $f(z_1, z_2)$, die in einer komplexen Mannigfaltigkeit M (von zwei komplexen Dimensionen) definiert ist, können zwar ohne weiteres als Punkte eines vierdimensionalen HAUSDORFFschen Raumes aufgefaßt werden, der einem Teil von M überlagert ist und den wir RIEMANN*schen Bereich* der Funktion f nennen wollen. Dieser RIEMANNsche Bereich ist aber im allgemeinen keine topologische Mannigfaltigkeit. Er besitzt nämlich im allgemeinen „nicht-sphärische" Punkte. Das sind solche Punkte, die keine Umgebung besitzen, die dem Innern einer 4-dimensionalen Vollkugel homöomorph ist. Wie in der klassischen Theorie definiert man, was unter Uniformisierung eines Verzweigungspunktes zu verstehen ist. In einem RIEMANNschen Bereich gibt es im allgemeinen nicht-uniformisierbare Verzweigungspunkte. Nicht-sphärische Punkte sind erst recht nicht uniformisierbar.

Einfachstes Beispiel: $(z_1 z_2)^{1/2}$ im Punkt (0,0). $z_1 = t_1^2$, $z_2 = t_2^2$, $(z_1 z_2)^{1/2} = t_1 t_2$ ist keine Uniformisierung, da (t_1, t_2) und $(-t_1, -t_2)$ für $z_1, z_2, (z_1 z_2)^{1/2}$ dieselben Werte ergeben. In unserem Beispiel ist (0,0) nicht-sphärisch. Die nicht-uniformisierbaren Punkte P_i eines RIEMANNschen Bereiches liegen in dem von uns betrachteten Fall von zwei komplexen Veränderlichen isoliert.

[1]) Diese Arbeit ist der durch einige Zusätze ergänzte 2. Teil meiner Dissertation (Münster 1950). Der erste Teil der Dissertation ist in Math. Ann. **124**, 77—86 (1951) veröffentlicht worden.

[2]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[3]) Zur Definition der komplexen Mannigfaltigkeit siehe z. B. [5], [7], [8].

„Sticht" man aus dem RIEMANNschen Bereich B der mehrdeutigen Funktion f diese Punkte heraus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit $\hat{B}$. Analog zur klassischen Theorie läßt f sich als eindeutige meromorphe Funktion in $\hat{B}$ auffassen. Aus $\hat{B}$ werden alle Unbestimmtheitsstellen von f herausgenommen. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit B^* ($B^* \subset \hat{B}$). Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist ein Satz, den wir so andeuten können:

Es gibt eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ und eine stetige Abbildung t von $\tilde{M}$ auf B, so daß folgendes gilt: t ist eine eineindeutige analytische Abbildung von $t^{-1}(B^*)$ auf B^*. Für jeden Ausnahmepunkt Q (d. h. $Q \in B$, $Q \notin B^*$) ist $t^{-1}(Q)$ Vereinigungsmenge von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen. f kann als *meromorphe* Funktion *ohne* Unbestimmtheitsstellen in $\tilde{M}$ aufgefaßt werden. f ist also eine analytische Abbildung von $\tilde{M}$ in die RIEMANNsche Zahlenkugel.

Eine Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ mit diesen Eigenschaften nennen wir RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von f oder auch (4-dimensionale) RIEMANNsche Fläche von f. Im Titel der Arbeit ist die letzte Bezeichnung benutzt worden, da der Ausdruck „RIEMANNsche Mannigfaltigkeit" in der RIEMANNschen Geometrie vorkommt. Wir gehen nicht darauf ein, wie weit eine solche RIEMANNsche Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist. Diese Frage möchte ich in einer weiteren Arbeit behandeln.

Die Konstruktion, die wir angeben werden, führt zu einer ganz bestimmten RIEMANNschen Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$.

Ein Haupthilfsmittel dieser Arbeit ist der σ-Prozeß, der von H. HOPF [8] für komplexe Mannigfaltigkeiten eingeführt worden ist.

Durch den σ-Prozeß wird ein Punkt P einer komplexen Mannigfaltigkeit M (von zwei komplexen Dimensionen) aus M herausgenommen und durch die komplex-projektive Gerade (= RIEMANNsche Zahlenkugel) der komplexen Linienelemente in P ersetzt.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit und der Weg zu diesem Ergebnis stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit Begriffen und Sätzen aus der algebraischen Geometrie. Es handelt sich dabei um die Auflösung der Singularitäten algebraischer Kurven und die Ergebnisse von JUNG [9] über die lokale Darstellbarkeit einer algebraischen Funktion von zwei Veränderlichen[3a]).

Hat man in einer Umgebung des Punktes P der komplexen Mannigfaltigkeit M lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P = (0,0)$ ausgezeichnet, dann entspricht dem σ-Prozeß das Paar von birationalen Transformationen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1' & \qquad z_1 &= z_1'' z_2'' \\ z_2 &= z_1' z_2' & \qquad z_2 &= z_2''. \end{aligned}$$

Eine algebraische Fläche $F^{(2)}$ im komplex-projektiven Raum $P^{(3)}$ [4]) kann birational transformiert werden in eine algebraische Fläche $\tilde{F}^{(2)}$, die singu-

[3a]) Man vergleiche B. L. VAN DER WAERDEN: Die Bedeutung des Bewertungsbegriffs für die algebraische Geometrie, Jber. Math. Ver. **52**, 161—172 (1942), und die dort angegebene Literatur. Die Arbeit [9] von JUNG wird häufig benutzt.

[4]) Obere Indices ohne Klammern: reelle Dimensionen, in Klammern: komplexe Dimensionen.

laritätenfrei in einem höher dimensionalen projektiven Raum eingebettet ist. (vgl. [13], S. 18ff.). Analog zu unserem Ergebnis gehen bei der birationalen Transformation gewisse „nicht-uniformisierbare“ Punkte von $F^{(2)}$ in algebraische Kurven von $\tilde{F}^{(2)}$ über.

Die Ergebnisse dieser Arbeit hängen sehr mit der algebraischen Geometrie zusammen und sind in gewissem Umfange als bekannt anzusehen. Doch scheint es mir, daß für die Funktionentheorie die Begriffe und Ergebnisse dieser Arbeit und die Sprache, in der sie formuliert sind, Interesse haben. Es ergeben sich erstens ganz neue Problemstellungen, und zweitens wird die Bedeutung von Sätzen der algebraischen Geometrie für die Funktionentheorie von mehreren Variablen vielleicht klarer herausgestellt als bisher.

§ 1. Zusammenstellung von Definitionen und Hilfssätzen.

Der σ-Prozeß.

1.1. $M^{(n)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit von n komplexen Dimensionen[4]). Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung des Punktes P von $M^{(n)}$ meromorph und nicht identisch 0. f, g heißen äquivalent (in bezug auf Division) im Punkte P, wenn es eine Umgebung von P gibt, in der f/g regulär und ungleich 0 ist.

Eine Cousin-Verteilung C von meromorphen Ortsfunktionen in $M^{(n)}$ wird folgendermaßen gegeben:

Jedem Punkt P von $M^{(n)}$ ist eine Umgebung U_P und eine in U_P meromorphe (nicht identisch verschwindende) Funktion f_P so zugeordnet, daß gilt: Im Durchschnitt $U_P \cap U_Q$ zweier Umgebungen U_P, U_Q ist die Funktion f_P/f_Q regulär und ungleich 0. — Die Verteilungen C, $\tilde{C}$ heißen „gleich“ (werden identifiziert), wenn $f_P/\tilde{f}_P$ regulär und ungleich 0 in $U_P \cap \tilde{U}_P$ für alle $P \in M$. Alle folgenden Definitionen sind mit dieser Gleichheitsrelation verträglich.

Jede in $M^{(n)}$ meromorphe Funktion f läßt sich als Verteilung auffassen. Diese Verteilung wird ebenfalls mit f bezeichnet. Die Verteilungen C, C^* heißen äquivalent im Punkte P, wenn die lokalen Funktionen f_P von C und f_P^* von C^* in P äquivalent sind. Die Verteilung C heißt regulär, wenn alle f_P in U_P regulär sind.

C, C' seien Verteilungen in $M^{(n)}$ mit Ortsfunktionen f_P bzw. f'_P und Umgebungen U_P bzw. U'_P. Die Funktionen $f_P f'_P$ (Umgebungen $U_P \cap U'_P$) definieren eine Verteilung, die mit $C + C'$ bezeichnet werde. Die Verteilungen in $M^{(n)}$ bilden in bezug auf diese Addition eine abelsche Gruppe $\mathfrak{C}(M^{(n)})$. Das Nullelement dieser Gruppe wird durch die Funktion $f \equiv 1$ gegeben.

1.2. $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten. φ sei eine analytische Abbildung von $M_1^{(n)}$ in $M_2^{(n)}$ (d. h. φ wird „im Kleinen“ in bezug auf lokale Koordinaten in $M_1^{(n)}$ und $M_2^{(n)}$ durch ein n-tupel von regulären Funktionen gegeben). Die in bezug auf lokale Koordinaten gebildete Funktionaldeterminante von φ sei nicht identisch 0. Dann hat φ folgende Eigenschaft:

(1) Für jede Umgebung U eines jeden Punktes P von $M_1^{(n)}$ gilt: Es gibt kein analytisches Flächenstück $F^{(n-1)}$ in $M_2^{(n)}$, so daß $\varphi(U) \subset F^{(n-1)}$. φ bestimmt eine „Umkehrzuordnung“ φ^*:

(2) Für eine in einer offenen Menge $V \subset M_2^{(n)}$ reguläre Funktion f sei $\varphi^* f$ die in $\varphi^{-1}(V)$ definierte reguläre Funktion $f\varphi$. $\varphi^* f = f\varphi$. Ist f nicht identisch 0, so ist wegen (1) auch $\varphi^* f$ nicht identisch 0.

(3) Für eine in einer offenen Menge $V \subset M_2^{(n)}$ meromorphe Funktion $f = g/h$ (g, h in V regulär, h nicht identisch 0) sei $\varphi^* f$ die in $\varphi^{-1}(V)$ definierte meromorphe Funktion $\varphi^* g/\varphi^* h$. Sind f_1, f_2 in V meromorph, so gilt:

(4) $\varphi^*(f_1 \pm f_2) = \varphi^*(f_1) \pm \varphi^*(f_2)$ und (5) $\varphi^*(f_1 f_2) = \varphi^*(f_1)\, \varphi^*(f_2)$.

(6) Ist f regulär in V und $f \neq 0$ in V, so ist $\varphi^* f \neq 0$ und regulär in $\varphi^{-1}(V)$.

(7) C sei eine Verteilung in $M_2^{(n)}$, gegeben durch Funktionen f_P. In $M_1^{(n)}$ ist dann durch die Funktionen $\varphi^* f_P$ wegen (2), (3), (5), (6) eine Verteilung gegeben, die mit $\varphi^* C$ bezeichnet werde. Ist C regulär, so ist auch $\varphi^* C$ regulär.

1.3.[5]) Wir beschränken uns von jetzt an auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. M (der Dimensionsindex wird weggelassen) sei eine solche komplexe Mannigfaltigkeit und P ein Punkt von M. Die komplexen Linienelemente (= analytische Flächenelemente) in P lassen sich als Punkte einer komplex-projektiven Geraden (= zweidimensionale Sphäre σ_P) auffassen. $M_P = (M - P) \cup \sigma_P$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, die aus M durch „Herausstechen" von P und „analytisches Einsetzen" von σ_P entsteht. Dieser σ-Prozeß, in [5] Einsetzen einer Trägersphäre genannt, ist ein lokaler Prozeß, der nur P und eine Umgebung von P betrifft:

(8) Es gibt eine analytische Abbildung t_P von M_P auf M mit folgenden Eigenschaften:

a) t_P bildet σ_P auf P ab.

b) t_P bildet $M_P - \sigma_P$ eineindeutig auf $M - P$ ab.

c) Wenn z_1, z_2 lokale Koordinaten in einer Umgebung von P mit $P = (0,0)$ sind, dann gibt es in M_P lokale Koordinatensysteme (z_1', z_2'), (z_1'', z_2''), die eine Umgebung von σ_P überdecken und für die t_P gegeben wird durch:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1' & \qquad z_1 &= z_1'' z_2'' \\ z_2 &= z_1' z_2' & \qquad z_2 &= z_2''. \end{aligned}$$

d) z_1, z_2 lassen sich als homogene Koordinaten für die komplex-projektive Gerade σ_P auffassen.

(9) σ_P ist eine analytische Fläche in M_P, die durch $z_1' = 0$, $z_2'' = 0$ gegeben wird. σ_P ist als reguläre Cousinverteilung in M_P aufzufassen. z_1', z_2'' sind Ortsfunktionen dieser Verteilung.

(10) Eine n-fache Iteration des in (8) beschriebenen einfachen σ-Prozesses erhält man so:

Im Punkte $P = P_1 \in M$ wird die Sphäre σ_{P_1} eingesetzt. In M_{P_1} wird in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Sphäre $\sigma_2 = \sigma_{P_2}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit $M_{P_1 P_2}$. In $M_{P_1 P_2}$ wird in einem Punkte P_3, der auf $K_2 = t_{P_2}^{-1}(\sigma_{P_1}) \cup \sigma_{P_2}$ liegt (d.h. $t_{P_1} t_{P_2}(P_3) = P$), die Sphäre $\sigma_3 = \sigma_{P_3}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit $M_{P_1 P_2 P_3}$ etc. In $M_{P_1 P_2 \ldots P_{n-1}}$ wird in einem Punkte P_n, der auf $K_{n-1} = t_{P_{n-1}}^{-1}(K_{n-2}) \cup \sigma_{P_{n-1}}$ liegt (d. h. $t_{P_1} t_{P_2} \ldots t_{P_{n-1}}(P_n) = P$), die Sphäre

[5]) Vgl. zum folgenden Abschnitt [8]. Siehe auch [1], S. 9, [5], S. 85 (Fußnote[11]) und [6].

$\sigma_n = \sigma_{P_n}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit $M_{P_1 P_2 \ldots P_n}$. Wir sagen: $M_{P_1 P_2 \ldots P_n}$ geht durch einen n-fachen σ-Prozeß in P aus M hervor.

(11) M^* gehe durch einen n-fachen σ-Prozeß in P aus M hervor. Man beweist durch Induktion über n: Es gibt in M^* n singularitätenfreie[6]) kompakte analytische Flächen $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$ vom Geschlecht 0. Es ist $K_n = \sigma_1^* \cup \ldots \cup \sigma_n^*$.[6a]) Zwei σ_i^* haben keinen Schnittpunkt oder schneiden sich in genau einem Punkte einfach[6]). Jeder Punkt von K_n liegt auf höchstens zwei σ_i^*. Es gibt eine analytische Abbildung t von M^* auf M mit folgenden Eigenschaften:

$$t(K_n) = P$$

t bildet $M^* - K_n$ eineindeutig auf $M - P$ ab.

K_n wird von H. HOPF als Sphärenbaum bezeichnet, da sich die Sphären σ_i^* eineindeutig den Eckpunkten eines Baumes zuordnen lassen: Zwei σ_i^* haben genau dann einen Schnittpunkt, wenn die zugeordneten Eckpunkte im Baum eine Strecke begrenzen. Wir sagen auch: *Die komplexe Mannigfaltigkeit M^* entsteht aus M durch (analytisches) Einsetzen eines Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$ in P. M^* geht durch die „Transformation" t^{-1} aus M hervor. $M^* = t^{-1}M$.*

(12) P_j (j durchläuft endliche oder abzählbare Indexmenge) seien in M isoliert liegende Punkte. Nach dem vorangehenden ist klar, was die folgende Aussage bedeuten soll:

Die komplexe Mannigfaltigkeit M^* entsteht aus M durch Einsetzen von Sphärenbäumen ${}_jK$ in die Punkte P_j. (Ein einfacher oder mehrfacher σ-Prozeß in P_j ist lokaler Natur. Er betrifft nur eine Umgebung von P_j. Die Punkte P_j liegen aber isoliert!).

Es sei K die Vereinigung aller ${}_jK$. Es gibt eine analytische Abbildung t von M^* auf M mit folgenden Eigenschaften:

$$t({}_jK) = P_j$$

t bildet $M - K$ eineindeutig auf $M - \{P_j\}$ ab. ($\{P_j\}$ bedeutet die Menge aller Punkte P_j.)

Wir sagen: *M^* geht durch die „Transformation" t^{-1} aus M hervor. $M^* = t^{-1}M$.*

(13) Bezeichnungstechnisch ist es manchmal bequem, wenn wir für irgendwelche Punkte $\{P_j\}$ von M den Übergang von M zu M als „Einsetzung der trivialen Sphärenbäume in die Punkte $\{P_j\}$" bezeichnen. (Es wird nichts verändert, jeder Punkt P_j wird durch sich selbst ersetzt.)

1.4. (1) Wir werden in diesem Abschnitt und später in 3.4. die folgende Tatsache verwenden: In einer (offenen) komplexen Mannigfaltigkeit ist die Schnittzahl einer ganzzahligen Homologieklasse mit dem Nullstellengebilde N_f einer in M regulären Funktion f stets 0 (vgl. [12]). — Die irreduziblen Kompo-

---

[6]) Der Punkt P der Fläche F in der komplexen Mannigfaltigkeit M heißt gewöhnlicher Punkt von F, wenn es in einer Umgebung von P ein lokales Koordinatensystem z_1, z_2 gibt, in dem F durch $z_1 = 0$ gegeben wird. Eine Fläche heißt singularitätenfrei, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge von M ist und nur gewöhnliche Punkte hat. — Zwei Flächen F_1, F_2 schneiden sich in P einfach, wenn in bezug auf ein geeignetes Koordinatensystem z_1, z_2 mit $P = (0,0)$ die Fläche F_1 durch $z_1 = 0$ und F_2 durch $z_2 = 0$ gegeben wird.

[6a]) $\sigma_1^* = t_{P_n}^{-1} \ldots t_{P_2}^{-1}(\sigma_1)$, $\sigma_2^* = t_{P_n}^{-1} \ldots t_{P_3}^{-1}(\sigma_2), \ldots, \sigma_n^* = \sigma_n$ [vgl. (10)].

nenten von N_f sind mit den entsprechenden Vielfachheiten (= Ordnung des Verschwindens von f) zu versehen. „Schnittzahl" wird durch „$\circ$" angedeutet.

(2) Im Punkte P_1 der komplexen Mannigfaltigkeit M werde die Sphäre σ_{P_1} eingesetzt. $\bar{\sigma}_{P_1}$ sei die von σ_{P_1} repräsentierte Homologieklasse von M_{P_1}. Es ist $\bar{\sigma}_{P_1} \circ \bar{\sigma}_{P_1} = -1$.

Beweis: z_1, z_2 seien lokale Koordinaten in einer Umgebung U von P. Es sei $P_1 = (0,0)$. z_1 ist eine in $t_{P_1}^{-1} U$ reguläre Funktion, die σ_{P_1} und $(z_1'' = 0)$ als einfache Nullstellenfläche hat [vgl. 1.3. (8)]. Die Schnittzahl von σ_{P_1} mit dem Nullstellengebilde von z_1 ist wegen (1) gleich 0. Die Schnittzahl von σ_{P_1} mit $(z_1'' = 0)$ ist gleich 1. Daraus folgt die Behauptung. —

Setzt man in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Sphäre ein, dann hat die Sphäre $t_{P_2}^{-1}(\sigma_{P_1})$ in der Mannigfaltigkeit $t_{P_2}^{-1} t_{P_1}^{-1} M$ mit sich selbst die Schnittzahl -2. Beweis ebenfalls leicht mit Hilfe von (1). Allgemein: Die Schnittzahl einer Sphäre eines Sphärenbaumes verringert sich durch Anwendung des σ-Prozesses auf einen Punkt dieser Sphäre um 1. — Die „zuletzt eingesetzten" Sphären eines Sphärenbaumes (das sind solche, die man durch einen einfachen (inversen) σ-Prozeß wieder herausnehmen kann), schneiden sich gegenseitig nicht und lassen sich durch „Selbstschnittzahl $= -1$" charakterisieren. Alle anderen Sphären des Baumes haben eine Selbstschnittzahl < -1.

§ 2. Die Auflösung der algebraischen Singularitäten analytischer Flächen.

2.1. C sei eine reguläre Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M (vgl. 1.1.). Für einen Punkt $P \in U_P$ läßt sich f_P in bezug auf lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P = (0,0)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f_P = \mathfrak{P}_m(z_1, z_2) + \mathfrak{P}_{m+1}(z_1, z_2) + \cdots + \mathfrak{P}_k(z_1, z_2) + \cdots \quad (m \geqq 0,\ k \geqq m).$$

wo $\mathfrak{P}_k$ ein in z_1, z_2 homogenes Polynom vom Grade k ist und $\mathfrak{P}_m$ nicht identisch verschwindet. m hängt nur von C und P ab und heißt Ordnung von C in P.

Wir setzen in P die Sphäre σ_P ein (vgl. 1.3.) und betrachten die reguläre Verteilung $t_P^* C$ in M_P [vgl. 1.2. (7), 1.3. (8)]. Im lokalen Koordinatensystem z_1', z_2' ist

$$\begin{aligned} t_P^* f_P &= \mathfrak{P}_m(z_1', z_1' z_2') + \mathfrak{P}_{m+1}(z_1', z_1' z_2') + \cdots = \\ &= z_1'^m \left(\mathfrak{P}_m(1, z_2') + z_1' \mathfrak{P}_{m+1}(1, z_2') + \cdots\right). \end{aligned}$$

$t_P^* f_P$ ist Ortsfunktion für $t_P^* C$. Entsprechendes gilt für das (z_1'', z_2'')-System. σ_P [vgl. 1.3. (9)] ist m-fache Nullstellenfläche von $t_P^* C$. Die Verteilung $t_P^* C - m\,\sigma_P$ (vgl. 1.1.) werde mit $t_P^{**} C$ bezeichnet. $t_P^{**} C$ wird im (z_1', z_2')-System durch die Ortsfunktion $\mathfrak{P}_m(1, z_2') + z_1' \mathfrak{P}_{m+1}(1, z_2') + \cdots$ gegeben. Entsprechendes gilt für das (z_1'', z_2'')-System. Es folgt:

(1) $t_P^* C$ und $t_P^{**} C$ sind in jedem Punkte $Q \in M_P$, der nicht auf σ_P liegt, äquivalent und haben in Q die gleiche Ordnung wie C in $t_P(Q)$.

(2) Die Nullstellen N_i der Cousinverteilung $t_P^{**} C$ auf σ_P sind die Nullstellen des homogenen Polynoms $\mathfrak{P}_m(z_1, z_2)$. Man beachte 1.3. (8) d). N_i sei n_i-fache Nullstelle von $\mathfrak{P}_m(z_1, z_2)$. Die Anzahl dieser Nullstellen sei m'. Es ist $\sum_{i=1}^{m'} n_i = m$ und $m' \leqq m$.

(3) $t_P^{**} C$ habe in N_i die Ordnung n_i'. Es ist $n_i' \leqq n_i \leqq m$.

(4) Wenn $t_P^{**} C$ in $Q \, (Q \in \sigma_P)$ die Ordnung m hat, so ist wegen (2) und (3) $m' = 1$, also $\mathfrak{P}_m$ die m-te Potenz eines Linearfaktors.

(5) Wenn f_P in P keine mehrfachen Faktoren hat, dann haben die Ortsfunktionen von $t_P^{**} f_P$ in keinem Punkte von σ_P mehrfache Faktoren.

2.2. (1) Bezeichnungen wie in 2.1. In P werde der Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ eingesetzt [vgl. 1.2., 1.3. (10), (11)]. Man hat in $t^{-1} M$ die Verteilung $t^* C$. Ist $t^{-1} M = M_{P_1 P_2 \ldots P_n}$[7]), so ist $t^* C = t^*_{P_n} t^*_{P_{n-1}} \ldots t^*_{P_1} C$. Wir definieren: $t^{**} C = t^{**}_{P_n} t^{**}_{P_{n-1}} \ldots t^{**}_{P_1} C$.
$\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$ seien die Sphären des Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$. Ist die Ordnung von C in P gleich 0, dann ist $t^* C = t^{**} C$. Ist die Ordnung von C in P gleich $m \geqq 0$, dann gilt: $t^* C - t^{**} C = a_1 \sigma_1^* + a_2 \sigma_2^* + \cdots + a_n \sigma_n^*$. Die a_i sind $\geqq m$ und sind durch den Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ und die lokale Funktion f_P von C bestimmt.

(2) Die Funktionen g, h seien in einer Umgebung von P regulär und h sei nicht identisch 0. In P werde wie in (1) der Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ eingesetzt. Wir bezeichnen die Verteilung $t^{**} g - t^{**} h$ mit $t^{**}(g/h)$. ($t^{**} g$, $t^{**} h$ sind Verteilungen in $t^{-1} M$, die Differenz ist im Sinne der Gruppenoperation von $\mathfrak{C}(t^{-1} M)$ zu bilden! (vgl. 1.1.)

(3) Es ist jetzt klar, was unter $t^* C$, $t^{**} C$ für eine beliebige (nicht notwendig reguläre) Verteilung C von M zu verstehen ist. t^* und t^{**} sind Isomorphismen von $\mathfrak{C}(M)$ *in* $\mathfrak{C}(t^{-1} M)$. t^{**} bildet $\mathfrak{C}(M)$ *auf* die Untergruppe derjenigen Verteilungen von $t^{-1} M$ ab, die keine Sphäre des eingesetzten Sphärenbaumes als Null- oder Polstellenfläche enthalten[8]).

2.3.[9]) *Voraussetzung:* f ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U regulär. f hat im Punkte $P_1 \in U$ die Ordnung $m > 1$ und in allen anderen Punkten von U eine Ordnung $\leqq 1$. (Im Punkte P_1 besitzt f dann keine mehrfachen Faktoren.) Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.1. f wird als Verteilung C aufgefaßt.

Behauptung: Folgendes ist unmöglich (führt zum Widerspruch):

$t^{**}_{P_1} f$ hat in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Ordnung m.

$t^{**}_{P_2} t^{**}_{P_1} f$ hat in einem Punkte $P_3 \in \sigma_{P_2}$ die Ordnung m.

$\vdots$

$t^{**}_{P_k} \ldots t^{**}_{P_1} f$ hat in einem Punkte $P_{k+1} \in \sigma_{P_k}$ die Ordnung m.

usw. für jedes k.

---

[7]) Wie in 1.3. (10) werde $P = P_1$ gesetzt.

[8]) Den Beweis für „auf" kann man so führen: Es genügt einen einfachen σ-Prozeß zu betrachten, $t^{-1} M = M_P$, und zu zeigen, daß es zu jeder regulären Cousinverteilung C^{**}, die in einer Umgebung $U \subset t^{-1} M$ von σ_P definiert ist, eine reguläre Verteilung C gibt, die in der Umgebung $t\, U \subset M$ von P definiert ist und für die $C^{**} = t^{**} C$. Vermöge t bildet sich C^{**} ab auf eine Cousinverteilung C, die in $t\, U - P$ definiert und dort regulär ist. Wie leicht aus bekannten Sätzen ([2], S. 49) zu folgern ist, läßt C sich regulär in P fortsetzen. C ist also in ganz $t\, U$ definiert und regulär, und es ist $t^{**} C = C^{**}$.

[9]) In diesem Abschnitt handelt es sich um eine genaue Übertragung der Überlegungen von JUNG ([9], S. 313—314) in unsere Bezeichnungsweise.

Beweis (Herleitung des Widerspruchs): Wegen 2.1. (4) hat f in bezug auf geeignete lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P_1 = (0,0)$ die Entwicklung:

$$f = z_1^m + \mathfrak{P}_{m+1}(z_1, z_2) + \cdots$$

f und $\partial f/\partial z_1$ sind teilerfremd, da f keine mehrfachen Faktoren enthält. Es gibt also lokale reguläre Funktionen h_1, h_2 von z_1, z_2, so daß (*) $h_1 f + h_2 \partial f/\partial z_1 = h_3$, wo h_3 eine reguläre Funktion von z_2 allein ist, die nicht identisch Null ist und für $z_2 = 0$ eine r-fache Nullstelle habe.

Die Entwicklung von $t_{P_1}^{**} f$ in $P_2 \in \sigma_{P_1}$ beginnt mit der m. Potenz eines Linearfaktors, P_2 hat auf σ_{P_1} die homogenen Koordinaten $z_1 = 0$, $z_2 = 1$.

Die Entwicklung von $t_{P_k}^{**} \ldots t_{P_1}^{**} f$ in $P_{k+1} \in \sigma_{P_k}$ beginnt mit der m-ten Potenz eines Linearfaktors. P_{k+1} ist nicht der Schnittpunkt von $t_{P_k}^{-1} \sigma_{P_{k-1}}$ und σ_{P_k}. Dem Sphärenbaum $(t_{P_1} \ldots t_{P_k})^{-1} P_1$ ist daher der folgende (Strecken)-Baum zugeordnet: [vgl. 1.3 (11)]

$$\underset{\sigma_{P_1}^*}{\bullet} - \underset{\sigma_{P_2}^*}{\bullet} - \underset{\sigma_{P_3}^*}{\bullet} \cdots \underset{\sigma_{P_{k-1}}^*}{\bullet} - \underset{\sigma_{P_k}^*}{\bullet}$$

Ordnet man auch noch der Fläche $z_2 = 0$ einen Eckpunkt zu, dann kommt zu diesem Baum ein weiterer Eckpunkt hinzu, der nur mit dem $\sigma_{P_1}^*$ zugeordneten Eckpunkt zu verbinden ist. Es folgt:

a) $t_{P_k}^* \ldots t_{P_1}^* h_3$ hat σ_{P_k} als r-fache Nullstellenfläche.

b) $t_{P_k}^* \ldots t_{P_1}^* f$ hat σ_{P_k} als km-fache Nullstellenfläche.

c) $t_{P_k}^* \ldots t_{P_1}^* \partial f/\partial z_1$ hat σ_{P_k} mindestens als $k(m-1)$-fache Nullstellenfläche, wie eine leichte Rechnung zeigt[9]).

Aus (*), a), b), c) erhält man dann den erwünschten Widerspruch, da $r < k(m-1)$ für genügend großes k.

2.4. *Voraussetzung* wie in 2.3.

Behauptung: Man kann in P_1 einen Sphärenbaum $t^{-1}(P_1)$ einsetzen, so daß gilt:

$t^{**} f$ hat in jedem Punkte von $t^{-1} M$ eine Ordnung ≤ 1.

Beweis: Wir definieren induktiv eine Folge von Mannigfaltigkeiten ${}^iM$ $(i = 1, 2, \ldots)$, die alle durch Einsetzen eines Sphärenbaumes $t_i^{-1}(P_1)$ in P_1 entstehen. ${}^iM = t_i^{-1} M$. ${}^1M = M_{P_1}$, $t_1 = t_{P_1}$, ${}^iN_1, \ldots, {}^iN_{l_i}$ seien diejenigen Punkte von ${}^iM$, in denen $t_i^{**} f$ eine Ordnung > 1 hat. Wegen 2.1. (1) liegen sie alle auf dem Sphärenbaum $t_i^{-1}(P)$. ${}^{i+1}M$ entsteht aus ${}^iM$ durch Einsetzen der Sphären (Anwendung des einfachen σ-Prozesses) in ${}^iN_1, \ldots, {}^iN_{l_i}$. ${}^{i+1}M$ geht also durch mehrfachen σ-Prozeß in P aus M hervor. Die zugehörige Abbildung von ${}^{i+1}M$ auf M wird mit t_{i+1} bezeichnet. Wegen 2.1. (3) nehmen die Ordnungen der Verteilungen $t_i^{**} f$ nicht zu. Wendet man 2.3. auf die Mannigfaltigkeiten ${}^iM$ an, dann sieht man, daß die Ordnungen abnehmen. Es gilt daher: Die Folge der ${}^iM$ bricht ab, d. h. es gibt einen Index k derart, daß $t_k^{**} f$ in ${}^kM$ überall eine Ordnung ≤ 1 hat. Damit ist der Beweis geführt.

2.5. Wir setzen die Überlegungen von 2.4. fort. Die reguläre Funktion $t^* f$ hat als Nullstellenflächen die von $t^{**} f$ und die Sphären des Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$, die mit den entsprechenden Vielfachheiten zu versehen sind [vgl. 2.2. (1)]. Es folgt:

Zu jedem Punkte Q von $t^{-1}M$ gibt es lokale Koordinaten u, v mit $Q = (0,0)$, so daß in einer Umgebung von Q gilt: [$\sim$ für Äquivalenz in bezug auf Division; beachte 1.3. (11)]. $t^*f \sim u^r v^s (u + a\,v + \mathfrak{P}_2(u, v) + \cdots)^k$, $r \geqq 0$, $s \geqq 0$, $k = 0$ oder $k = 1$. $u = 0$ (bzw. $v = 0$) stellt, wenn $r > 0$ (bzw. $s > 0$), eine der Sphären dar. $(u + a\,v + \mathfrak{P}_2(u, v) + \cdots)^k$ stellt $t^{**} f$ dar. Wir setzen in Q, falls $k = 1$ und $r > 0$, die Sphäre σ_Q ein (einfacher σ-Prozeß), gehen also über zur Mannigfaltigkeit $t_Q^1 t^{-1} M$. Es ist dann im u', v'-(bzw. u'', v'')-Koordinatensystem:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} t_Q^* t^* f &\sim u'^{\,r+s+1} v'^{\,s} (1 + a\,v' + u'\,\mathfrak{P}_2(1, v') + \cdots) \\ t_Q^* t^* f &\sim u''^{\,r} v''^{\,r+s+1} (a + u'' + v''\,\mathfrak{P}_2(u'', 1) + \cdots). \end{aligned}
$$

Ist $a = 0$, so sei $a_\varrho v^\varrho$ die niedrigste Potenz von v, die in $u + \mathfrak{P}_2(u, v)$ vorkommt. ($a_\varrho \neq 0$). Eine solche Potenz gibt es, da $u + \mathfrak{P}_2(u, v) + \cdots$ nicht u als Faktor enthalten kann. $u = 0$ stellt eine der Sphären dar!

In $u'' + v''\mathfrak{P}_2(u'', 1) + \cdots$ kommt dann die Potenz $a_\varrho v''^{\,\varrho-1}$ vor. Man setzt jetzt in dem Punkte mit $u'' = v'' = 0$ die Sphäre ein und kommt durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich zu einer Situation (1) mit $a \neq 0$. Damit ist folgendes bewiesen:

2.6. *Voraussetzung:* f ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U regulär, f hat im Punkte $P \in U$ die Ordnung $m > 1$ und in allen anderen Punkten eine Ordnung $\leqq 1$. In P besitzt f keine mehrfachen Faktoren.

Behauptung: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ so einsetzen, daß gilt:

Für jeden Punkt Q von $t^{-1} U$ gibt es ein lokales Koordinatensystem u, v mit den folgenden Eigenschaften a), b), c).

a) $Q = (0,0)$,

b) $t^*f \sim u^r v^s$ $(r \geqq 0,\ s \geqq 0)$,

c) Wenn $Q \in t^{-1}(P)$, dann liegt genau einer der drei folgenden Fälle vor:

1. Q liegt auf zwei Sphären von $t^{-1}(P)$. Es ist $t^*f \sim u^r v^s$ mit $r > 0$ und $s > 0$. Die beiden Sphären werden in der Umgebung von Q durch $u = 0$ und $v = 0$ gegeben.

2. Q liegt auf genau einer Sphäre und ist nicht Nullstelle von $t^{**}f$. Es ist $t^*f \sim u^r$ mit $r > 0$. Die Sphäre wird durch $u = 0$ gegeben.

3. Q liegt auf genau einer Sphäre und ist Nullstelle von $t^{**}f$. Es ist $t^*f \sim u^r v$ $(r > 0)$ und $t^{**}f \sim v$. Die Sphäre wird durch $u = 0$ gegeben.

2.7. *Voraussetzung:* g ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U meromorph und verschwindet nicht identisch. $P \in U$. In jedem Punkte $Q \in U$, $Q \neq P$, ist $g \sim v^s$ (s ganze Zahl) in bezug auf ein geeignetes lokales Koordinatensystem mit $Q = (0,0)$.

Behauptung: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ einsetzen, so daß gilt:

In jedem Punkte Q von $t^{-1} U$ ist $t^*g \sim u^r v^s$ (r, s ganz) in bezug auf geeignete lokale Koordinaten mit $Q = (0,0)$. Ist g regulär in U, so sind für jeden Punkt Q die Exponenten $r, s \geqq 0$.

Beweis: In einer Umgebung V von P hat g folgende Darstellung: $g \sim f_1^{s_1} \ldots f_l^{s_l}$ (f_i regulär in V und irreduzibel in P; f_i, f_j teilerfremd in P für $i \neq j$; s_i ganze Zahl).
Wir wenden den Satz 2.6. auf die in V definierte reguläre Funktion $f = f_1 \ldots f_l$ an. Den zu f nach 2.6. gehörigen Sphärenbaum setzen wir in P ein und beweisen unsere Behauptung für die so entstehende Mannigfaltigkeit $t^{-1}M$. Es genügt, Punkte $Q \in t^{-1}(P)$, die unter Punkt 3 in 2.6. fallen, zu betrachten. Es ist $t^{**}f \sim v$. Daher gilt für genau ein i $(1 \leqq i \leqq l): t^{**}f_i \sim v$ und für $j \neq i$ $(1 \leqq j \leqq l): t^{**}f_j \sim 1$.
Es folgt $t^{**}g \sim v^{s_i}$ und $t^*g \sim u^k v^{s_i}$ (k ganz), da $u = 0$ eine Sphäre darstellt und $t^*g - t^{**}g$ nur Sphären des Sphärenbaumes als Null- oder Polstellenflächen hat.

2.8. *Hilfssatz:* R sei der gewöhnliche z_1, z_2-Raum. Wir betrachten die Funktion $f = z_1^r z_2^s$ (r, s ganze Zahlen) und behaupten: Man kann im Punkte $P_1 = (0,0)$ einen Sphärenbaum $t^{-1}(P_1)$ einsetzen, derart, daß t^*f in $t^{-1}R$ keine Unbestimmtheitsstelle hat und daß für jeden Punkt $Q \in t^{-1}R$ in bezug auf lokale Koordinaten u, v mit $Q = (0,0)$ gilt:
$t^*f \sim u^a v^b$, wobei die ganzen Zahlen a, b beide $\geqq 0$ oder beide $\leqq 0$ sind.

Beweis: Für $r, s \geqq 0$ und $r, s \leqq 0$ ist die Behauptung trivial. Es genügt, die Behauptung zu beweisen für $f = z_1^r / z_2^s$ (r, s beide positiv und $r \geqq s$). Wir charakterisieren eine solche Unbestimmtheitsstelle durch Angabe des Zahlenpaars r, s. In P_1 werde die Sphäre σ_{P_1} eingesetzt. σ_{P_1} wird $(r - s)$-fache Nullstellenfläche von $t_{P_1}^* f$. Ist $r = s$, so ist die Behauptung bereits bewiesen. Ist $r > s$, so gibt es in R_{P_1} genau eine Unbestimmtheitsstelle P_2, nämlich den Schnittpunkt von σ_{P_1} und $z_2' = 0$. Zu P_2 gehört das Zahlenpaar $(r - s, s)$. Ist $r - s > s$, so gibt es in $R_{P_1 P_2}$ genau eine Unbestimmtheitsstelle P_3: $(r - 2s, s)$. Ist $r - s = s$, so ist die Behauptung bewiesen. Ist $r - s < s$, so gibt es in $R_{P_1 P_2}$ genau eine Unbestimmtheitsstelle $P_3: (r - s, s - (r - s)) \ldots$. Es wird nun fortlaufend in die jeweils einzige Unbestimmtheitsstelle P_k in $R_{P_1 \ldots P_{k-1}}$ die Sphäre σ_{P_k} eingesetzt. Man sieht, daß die Zahlenpaare, die die Unbestimmtheitsstellen charakterisieren, sich dem euklidischen Algorithmus für das Paar r, s entsprechend verhalten. Es gibt also ein k, so daß zur Unbestimmtheitsstelle P_k in $M_{P_1 \ldots P_{k-1}}$ ein Zahlenpaar (qs', s') gehört. Nach q weiteren Einsetzungen von Sphären in die jeweils einzige Unbestimmtheitsstelle gelangt man zu einer Mannigfaltigkeit $t^{-1}R$, in der t^*f keine Unbestimmtheitsstelle hat.

2.9. C sei eine Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M (vgl. 1.1.). Wir nennen einen Punkt $P \in M$ gewöhnlichen Punkt von C, wenn es lokale Koordinaten u, v mit $P = (0, 0)$ gibt, für die $f_P \sim v^s$ mit ganzem s. Ein (nicht gewöhnlicher) Punkt Q heißt Doppelpunkt von C, wenn $f_Q \sim u^a v^b$ (a, b ganz und beide $\neq 0$; u, v geeignete Koordinaten mit $Q = (0,0)$). Ein Doppelpunkt heißt bestimmter Doppelpunkt, wenn a, b beide positiv oder beide negativ sind. Jeder andere Doppelpunkt Q ist Unbestimmtheitsstelle von f_Q und heißt unbestimmter Doppelpunkt. Die nicht gewöhnlichen Punkte liegen bekanntlich isoliert. Es gibt daher nur abzählbar viele nicht gewöhnliche Punkte. Wir können nun den folgenden *Hauptsatz* beweisen, der die vorbereitenden lokalen Sätze dieses Paragraphen zusammenfaßt.

Voraussetzung: C ist eine Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M. P_i sind die (abzählbar vielen) isoliert liegenden, nicht gewöhnlichen Punkte von M, die keine bestimmten Doppelpunkte sind.

Behauptung: Man kann in die isoliert liegenden Punkte P_i *Sphärenbäume* ${}_iK$ *einsetzen, derart, daß für die dadurch entstehende komplexe Mannigfaltigkeit* $t^{-1}M$ [vgl. 1.3. (12)] *folgendes gilt:*

t^*C *hat in* $t^{-1}M$ *nur gewöhnliche Punkte und bestimmte Doppelpunkte.* Es sei K die Vereinigung aller ${}_iK$. t bildet $M - K$ eineindeutig und analytisch auf $M - \{P_i\}$ ab. ($\{P_i\}$ bedeutet die Menge aller Punkte P_i). Die Verteilungen t^*C und C gehen dabei ineinander über. Identifiziert man $M - K$ und $M - \{P_i\}$ vermöge t, dann kann man also sagen: t^*C und C stimmen außerhalb der eingesetzten Sphärenbäume überein.

Der *Beweis* ergibt sich durch Anwendung von 2.7. auf paarweise fremde Umgebungen U_i der P_i, die außer P_i keinen nicht gewöhnlichen Punkt enthalten. Man setzt also nach 2.7. in jedes P_i, das kein Doppelpunkt ist, einen Sphärenbaum ein und gelangt zu einer Mannigfaltigkeit $t_1^{-1}M$, in der t_1^*C nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. In die unbestimmten Doppelpunkte von t_1^*C setzt man nach 2.8. Sphärenbäume ein und gelangt so zu einer Mannigfaltigkeit $t^{-1}M = t_2^{-1}\,t_1^{-1}\,M$, in der t^*C nur gewöhnliche Punkte und bestimmte Doppelpunkte hat.

§ 3. Konstruktion der RIEMANNschen Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$ einer algebroiden Funktion f.

3.1. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Definitionen und Sätze über „algebroide" Funktionen zusammenstellen. M sei eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ein *beschränktes algebroides Funktionselement* mit dem Grundpunkt P von M wird definiert durch ein irreduzibles ausgezeichnetes Pseudopolynom π mit der Spitze P (vgl. [2], S. 57).

$$\pi = (w - w_0)^r + a_1 (w - w_0)^{r-1} + \cdots + a_r \qquad (r > 0)\,. \tag{1}$$

Die a_i sind in P reguläre Funktionen, die in P verschwinden. Die Diskriminante D_π dieses Polynoms (aufgefaßt als Polynom in $(w - w_0)$) ist nicht identisch 0. $D_\pi(P) = 0$ genau dann, wenn $r > 1$. Durch $\pi = 0$ werden lokale mehrdeutige Funktionen $w_1, \ldots, w_r$ definiert, die sich außerhalb von $D_\pi = 0$ *regulär* verhalten und von denen je zwei durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

(2) Ein *algebroides Funktionselement* mit dem Grundpunkt P wird definiert durch ein beschränktes algebroides Funktionselement (gegeben durch π) und eine in P reguläre Funktion g, die nicht identisch 0 ist. Durch dieses algebroide Funktionselement werden lokale mehrdeutige Funktionen $w_1 = w_1/g, \ldots, w_r = w_r/g$ gegeben, die sich außerhalb von $D_\pi = 0$ *meromorph* verhalten und von denen je zwei durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

($w_1, \ldots, w_r$ sind die durch $\pi = 0$ definierten Funktionen.) (π, g) und (π', g') definieren dasselbe algebroide Funktionselement, wenn die von ihnen erzeugten lokalen mehrdeutigen Funktionen übereinstimmen.

Algebroide Funktionen mit dem Grundpunkt P werden wir durch A_P andeuten.

A_P sei gegeben durch das Pseudopolynom π und die in P reguläre Funktion g. Es gibt eine Umgebung U von P, in der π und g noch definiert sind. π besitzt in jedem Punkte Q von U eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Pseudopolynome mit der Spitze Q. Mehrfache Faktoren treten nicht auf. Diese Pseudopolynome und g repräsentieren algebroide Funktionselemente ${}^1A_Q, \ldots {}^sA_Q$ $(s \leqq r)$. Wir sagen: A_P und ${}^iA_Q$ sind benachbart (vgl. [2], S. 16). In üblicher Weise kann jetzt die analytische Fortsetzung von A_P längs in M verlaufenden von P ausgehenden Wegen und die Verbindbarkeit zweier algebroider Funktionselemente definiert werden. Wir definieren (vgl. [2], S. 16):

(3) Die Gesamtheit aller mit A_P verbindbaren algebroiden Funktionselemente heißt der RIEMANN*sche Bereich* der durch *Fortsetzung von* A_P *in* M erzeugten algebroiden Funktion f. Ein RIEMANNscher Bereich ist in naheliegender Weise als zusammenhängender HAUSDORFFscher Raum aufzufassen, der einem Teil von M überlagert ist.

Die Überlagerungsabbildung $(A_P \to P)$ wollen wir mit ψ bezeichnen.

(4) B sei der RIEMANNsche Bereich der algebroiden Funktion f. $A_P \in B$ sei gegeben durch π, g [vgl. (1), (2)]. Wir definieren in B eine *eindeutige Funktion* f durch $f(A_P) = w_0/g(P)$. f ist nur erklärt, wenn $g(P) \neq 0$.

(5) Ein Punkt (= algebroides Funktionselement A_P) des RIEMANNschen Bereiches B heiße uniformisierbar ([2], S. 14), wenn es eine Umgebung U von $A_P (A_P \in U \subset B)$, eine Umgebung $\tilde{U}$ des Nullpunktes des komplexen (t_1, t_2)-Raumes und eine topologische Abbildung $\varkappa$ von $\tilde{U}$ auf U gibt, so daß $\psi\,\varkappa$ eine analytische Abbildung von $\tilde{U}$ auf $\psi(U)$ ist.

t_1, t_2 heißen ortsuniformisierende Parameter.

Jeder Punkt A_P mit $r = 1$ [vgl. (1)] ist uniformisierbar.

(6) Ein Punkt A_P mit $r > 1$ heißt Verzweigungspunkt. In ihm hängen r „Blätter" des RIEMANNschen Bereiches zusammen. Die durch P gehende zu A_P gehörende Verzweigungsfläche ist in $D_\pi = 0$ enthalten.

(7) Wenn D_π in P einen gewöhnlichen Punkt hat, d. h. wenn D_π in bezug auf ein geeignetes lokales Koordinatensystem durch $D_\pi \sim u^s$ $(s > 0$; vgl. 2.9.) gegeben werden kann, so ist A_P uniformisierbar ([4], S. 3 und [10]. Verzweigungsstelle 1. Art!). Aus (7) folgt:

(8) Die nicht-uniformisierbaren Verzweigungspunkte eines RIEMANNschen Bereiches liegen isoliert.

(9) *Satz:* Die Menge aller uniformisierbaren Punkte eines RIEMANNschen Bereiches B ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexe Struktur durch die ortsuniformisierenden Parameter gegeben wird.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Wenn durch die topologischen Abbildungen $\varkappa, \varkappa'$ [vgl. (5)] zwei Systeme (t_1, t_2), (t'_1, t'_2) von ortsuniformisierenden Parametern des Punktes $A_P \in B$ festgelegt werden, so ist die Abbildung $\varkappa'^{-1}\varkappa$ in einer Umgebung des Nullpunktes des t_1, t_2-Raumes analytisch[10]). Diese Behauptung folgt zunächst ohne weiteres für Punkte A_P mit $r = 1$, und unter Verwendung hiervon ergibt sie sich für (uniformisierbare) Verzweigungspunkte aus einem bekannten Satz über aufhebbare Singularitäten[11]).

(10) Aus (4) ergibt sich dann wieder mit Hilfe des erwähnten Satzes über aufhebbare Singularitäten: In der komplexen Mannigfaltigkeit der uniformisierbaren Punkte ist f eine meromorphe Funktion. (f läßt sich in die Punkte mit $g(P) = 0$ meromorph fortsetzen.)

(11) Eine in einer komplexen Mannigfaltigkeit definierte meromorphe Funktion *ohne Unbestimmtheitsstellen* ist eine Abbildung der Mannigfaltigkeit in die RIEMANNsche Zahlenkugel S^2. Die a-Stellenflächen schneiden sich nicht. Wir wollen eine solche Funktion *meromorph und bestimmt* nennen.

(12) B sei der RIEMANNsche Bereich einer algebroiden Funktion f, der einem Teil einer komplexen Mannigfaltigkeit M überlagert ist. ψ sei die Überlagerungsabbildung von B in M.

Definition: Eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ heißt eine RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit von f,* wenn es eine stetige Abbildung t von $\tilde{M}$ auf B gibt, so daß folgendes gilt:

1. $\psi\, t$ ist eine analytische Abbildung von $\tilde{M}$ auf $\psi(B) \subset M$.

2. Die Funktion $\tilde{f} = f\, t$ [siehe (4), (10), (11)] ist in $\tilde{M}$ meromorph und bestimmt.

($\tilde{f}$ ist so definiert: für Q von $\tilde{M}$ sei $t(Q) = A_P \in B$, dann ist $\tilde{f}(Q) = f(A_P) = w_0/g(P)$).

3. B^* sei die komplexe Mannigfaltigkeit, die aus B durch „Herausstechen" der isolierten nicht uniformisierbaren Punkte und der Unbestimmtheitsstellen von f entsteht. [Beachte (10).]

Für jeden solchen Ausnahmepunkt Q ($Q \in B$, $Q \notin B^*$) ist $t^{-1}(Q)$ Vereinigungsmenge S_Q von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen, die in $\tilde{M}$ eingebettet sind.

4. t ist eine eineindeutige analytische Abbildung von $\tilde{M} - \{S_Q\}$ auf B^*. $\{S_Q\}$ bezeichnet dabei die Vereinigungsmenge aller S_Q. M entsteht, anschaulich gesagt, aus B, indem man jeden Ausnahmepunkt Q durch S_Q ersetzt.

Das Ziel dieses § 3 ist, zu beweisen, daß es zu jeder algebroiden Funktion f eine RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit gibt.* Die Einsetzung von S_Q in einem Ausnahmepunkt Q wird, so wie das Einsetzen von Sphärenbäumen, ein rein lokaler Prozeß sein. Die lokalen Überlegungen werden in den nächsten Abschnitten durchgeführt.

(13) Jeder RIEMANNsche Bereich im Sinne von (3) ist ein RIEMANNsches Gebiet im Sinne von [1]. In [1] haben H. BEHNKE und K. STEIN für RIEMANNsche Gebiete G den Begriff „Modifikation von G in einer abgeschlossenen

---

[10]) Man beachte: Aus „analytisch und eineindeutig" folgt ([3], S. 179), daß die Funktionaldeterminante stets von 0 verschieden ist.

[11]) Siehe [11], Kap. 3, § 5, 1 (S. 191) oder [3], S. 173.

Teilmenge $\mathfrak{N} \subset G$" definiert. Wenn $\mathfrak{N}$ speziell eine Menge von in G isoliert liegenden Punkten ist ($\mathfrak{N} = \{P_j\}$; j durchläuft höchstens abzählbare Indexmenge), dann kann „Modifikation von G in $\mathfrak{N}$" so definiert werden:

Das RIEMANNsche Gebiet $^*G$ ist Modifikation von G in $\mathfrak{N}$, wenn folgendes gilt: Es gibt eine stetige Abbildung t von $^*G$ auf G. t ist analytischer Homöomorphismus von $^*G - t^{-1}(\mathfrak{N})$ auf $G - \mathfrak{N}$. (In [1] werden $^*G - t^{-1}(\mathfrak{N})$ und $G - \mathfrak{N}$ identifiziert.) Wir nennen *$^*G$ kompakte Modifikation von G in $\mathfrak{N} = \{P_j\}$*, wenn für jeden Punkt P_j das Urbild $t^{-1}(P_j)$ kompakt ist.

Aus [1], 5. (c) folgt: Wenn die komplexe Mannigfaltigkeit M kompakte Modifikation von G in $\mathfrak{N} = \{P_j\}$ ist, dann ist für jeden Punkt P_j das Urbild $t^{-1}(P_j)$ Vereinigungsmenge von endlich vielen in M liegenden irreduziblen kompakten analytischen Flächen oder (Trivialfall) ein einzelner Punkt von M. Wir können nun die Definition (12) auch so fassen:

Die komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ heißt eine RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit von f, wenn $\tilde{M}$ eine kompakte Modifikation des* RIEMANN*schen Bereiches B der Funktion f in* den nicht-uniformisierbaren Punkten von B und den Unbestimmtheitsstellen von f ist *und wenn die Funktion $f\,t$ in ganz $\tilde{M}$ meromorph und bestimmt ist.* (t ist die Modifikationsabbildung von $\tilde{M}$ auf B!)

Anmerkung: M sei eine komplexe Mannigfaltigkeit, P ein Punkt von M. H. HOPF [8] hat bewiesen, daß jede kompakte Modifikation M^* von M in P durch Einsetzen eines Sphärenbaumes in P aus M hervorgeht. [Beachte 1.3. (13).]

3.2. Wir wollen in diesem Abschnitt die nicht-uniformisierbaren Punkte eines RIEMANNschen Bereiches B untersuchen. Es genügt, *beschränkte algebroide Funktionselemente zu betrachten.* Es handelt sich um ein lokales Problem: U sei eine Umgebung des Nullpunktes $P = (0,0)$ des z_1, z_2-Raumes. Wir fassen U als komplexe Mannigfaltigkeit auf. A_P sei ein beschränktes algebroides Funktionselement, gegeben durch ein Pseudopolynom π mit der Spitze P.

$$\pi = (w - w_0)^r + a_1 (w - w_0)^{r-1} + \cdots + a_r.$$

U sei bereits so klein gewählt, daß alle a_i in U regulär sind und daß die Voraussetzung von 2.7 für $g = D_\pi$ erfüllt ist. Durch $\pi = 0$ wird in U eine algebroide Funktion $w = w(z_1, z_2)$ definiert, deren RIEMANNschen Bereich wir $B(A_P)$ nennen wollen. w ist in $B(A_P) - A_P$ regulär und in A_P stetig [vgl. 3.1. (9), (10)].

Aus 2.7. folgt: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ so einsetzen, daß $t^* D_\pi$ in $t^{-1}(M)$ nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. In $t^{-1}(M)$ gilt nun folgendes: Durch $t^* \pi = (w - w_0)^r + (t^* a_1)(w - w_0)^{r-1} + \cdots + t^* a_r = 0$ wird in $t^{-1}(M)$ eine algebroide Funktion definiert, die mit $t^* w$ bezeichnet werde. Der RIEMANNsche Bereich dieser Funktion ist $t^{-1}(M)$ überlagert. Wir nennen ihn $t^* B(A_P)$. In $t^* B(A_P)$ ist $t^* w$ eine eindeutige Funktion, die auf den Überlagerungen der Sphären des eingesetzten Sphärenbaumes den Wert w_0 hat. $t^* D_\pi$ ist Diskriminante von $t^* \pi$. Hieraus folgt [vgl. 3.1. (7)]:

Die *nicht-uniformisierbaren* Verzweigungspunkte von $t^* B(A_P)$, die einem Punkte Q von $t^{-1}(M)$ überlagert sind, haben in Q zwei Verzweigungsflächen, die sich in Q einfach schneiden (und in bezug auf ein geeignetes Koordinatensystem u, v mit $Q = (0,0)$ durch $u = 0$ und $v = 0$ gegeben werden können). Der Punkt Q ist Schnittpunkt zweier Sphären von $t^{-1}(P)$ oder Schnittpunkt einer Sphäre mit $t^{**} D_\pi$.

3.3. In dem RIEMANNschen Bereich $t^* B(A_P)$ kommen nur nicht-uniformisierbare Verzweigungspunkte von einem gewissen Typus vor, den wir lokal so kennzeichnen können:

(1) In einer Umgebung des Nullpunktes des z_1, z_2-Raumes, $P = (0,0)$, ist ein beschränktes algebroides Funktionselement gegeben, dessen Verzweigungsflächen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ sind.

(2) *Definition:* A_P, A'_Q seien zwei algebroide Funktionselemente, die wir als Punkte in zwei RIEMANNschen Bereichen $B(A_P)$, $B(A'_Q)$ auffassen können. A_P, A'_Q besitzen Umgebungen U, U' in $B(A_P)$ bzw. $B(A'_Q)$, so daß $U - A_P$, $U' - A'_Q$ komplexe Mannigfaltigkeiten sind, also von nicht-uniformisierbaren Punkten frei sind. A_P, A'_Q heißen analytisch äquivalent, wenn es solche Umgebungen U, U' und eine topologische Abbildung φ von U auf U' gibt, die A_P auf A'_Q abbildet und $U - A_P$ analytisch auf $U' - A'_Q$ abbildet.

Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heiße analytischer Homöomorphismus von U auf U'.

(3) Das algebroide Funktionselement $A_{n,q}: w^n - z_1 z_2^{n-q}$ $(1 \leqq q < n;\ n, q$ teilerfremd) ist vom Typus (1). Die zugehörige algebroide Funktion $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ betrachten wir im (offenen) z_1, z_2-Raum, sie erzeugt eine n-blättrige Überlagerung $B(n, q)$. Im Punkte $A_{n,q} \in B(n, q)$ hängen alle n Blätter zusammen. $A_{n,q}$ ist nicht uniformisierbar. Dies kann man auf verschiedene Weise einsehen.

a) In [1], S. 4, wird bewiesen, daß $A_{2,1}$ nicht uniformisierbar ist. Dieser Beweis läßt sich auch für $A_{n,q}$ durchführen.

b) Der Rand einer geeigneten Umgebung von $A_{n,q}$ in $B(n, q)$ ist der Linsenraum $L(n, q)$. ($L(n, q)$ = Diskontinuitätsbereich der Drehgruppe $t'_1 = e^{2\pi i \nu q/n}\, t_1$, $t'_2 = e^{2\pi i \nu/n}\, t_2$, $0 \leqq \nu < n$, auf der $S^3: |t_1|^2 + |t_2|^2 = 1$).

$L(n, q)$ ist nicht vom Homologietyp der 3-Sphäre. $A_{n,q}$ besitzt daher kein 4-dimensionales Element als Umgebung.

c) Vgl. 3.4. (14).

(4) Jeder Verzweigungspunkt vom Typ (1) ist uniformisierbar oder einem algebroiden Funktionselement $A_{n,q}$ analytisch äquivalent.

Der Beweis ergibt sich aus [9], S. 295—300.

3.4. Wir untersuchen in diesem Abschnitt das algebroide Funktionselement $A_{n,q}$ und den RIEMANNschen Bereich $B(n, q)$. Wir werden eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit [vgl. 3. 1. (12)] von $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ konstruieren. Wir werden dabei das folgende Prinzip verwenden:

N_1, N_2 seien topologische Mannigfaltigkeiten. U_1 sei eine offene Menge von N_1, U_2 eine offene Menge von N_2 und φ eine topologische Abbildung von U_1 auf U_2.

Wir identifizieren zwei Punkte P_1 von N_1 und P_2 von N_2, wenn $P_2 = \varphi(P_1)$.

Durch diese Identifizierung entsteht ein topologischer Raum, aber im allgemeinen kein HAUSDORFFscher Raum, da das Trennungsaxiom „zwei verschiedene Punkte besitzen punktfremde Umgebungen" nicht erfüllt zu sein braucht. Damit ein HAUSDORFFscher Raum entsteht, dieser ist dann eine topologische Mannigfaltigkeit, ist notwendig und hinreichend:

(1) Wenn Q_1 irgendein Randpunkt von U_1 ist ($Q_1 \in N_1$) und wenn Q_2 irgendein Randpunkt von U_2 ist ($Q_2 \in N_2$), so gibt es eine Umgebung V_1 von Q_1 und eine Umgebung V_2 von Q_2 ($V_1 \subset N_1$, $V_2 \subset N_2$), so daß V_1, V_2 keine zu identifizierenden Punkte enthalten. —

(2) Sind N_1, N_2 komplexe Mannigfaltigkeiten (gleicher Dimension) und ist φ eine analytische Abbildung von U_1 auf U_2, so ist, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist, die durch Identifizierung entstehende Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der sich sowohl die zulässigen Koordinaten von N_1 als auch die von N_2 als lokale zulässige Koordinaten verwenden lassen.

Wir kommen nun zur Untersuchung von $A_{n,q}$ [vgl. 3.3. (3)]. Wir betrachten einen etwas abgewandelten Euklidischen Algorithmus für das Zahlenpaar n, q.

Wir setzen $\lambda_0 = n$, $\lambda_1 = q$.

$$\begin{array}{lll}
\lambda_0 = b_1 \lambda_1 - \lambda_2, & 0 \leqq \lambda_2 < \lambda_1, & 1 < b_1, \\
\lambda_1 = b_2 \lambda_2 - \lambda_3, & 0 \leqq \lambda_3 < \lambda_2, & 1 < b_2, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_{s-1} = b_s \lambda_s - \lambda_{s+1}, & \lambda_{s+1} = 0, \lambda_s = 1, & 1 < b_s.
\end{array}$$

Die Zahlen λ_k $(0 \leqq k \leqq s+1)$ können mit Hilfe der b_k induktiv berechnet werden:

$$\lambda_0 = n, \quad \lambda_1 = q, \quad \lambda_k = b_{k-1} \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}. \tag{3}$$

Wir definieren induktiv Zahlen μ_k durch:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_k = b_{k-1} \mu_{k-1} - \mu_{k-2}$$

und Zahlen ν_k durch:

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = 1 \quad \nu_k = b_{k-1} \nu_{k-1} - \nu_{k-2}.$$

Man beweist induktiv:

$$\lambda_k + (n - q) \mu_k = n \nu_k \tag{4}$$

$$\lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k = n \tag{5}$$

$$\mu_{k+1} \nu_k - \mu_k \nu_{k+1} = 1. \tag{6}$$

Es gilt ferner:

$$\begin{array}{llll}
\mu_0 = 0, & 0 < \mu_k < \mu_{k+1}, & \mu_{s+1} = n & (0 < k \leqq s), \\
& 0 < \nu_k \leqq \nu_{k+1}, & \nu_{s+1} = n - q & (0 \leqq k \leqq s).
\end{array} \tag{7}$$

Wir betrachten nun $s + 1$ Exemplare des (offenen) komplexen u, v Raumes: $\boldsymbol{R}_0, \ldots, \boldsymbol{R}_s$. Die Koordinaten in $\boldsymbol{R}_k$ sollen mit u_k, v_k bezeichnet werden.

Wir nehmen aus dem $\boldsymbol{R}_k$ die analytische Ebene $u_k = 0$ heraus und erhalten eine komplexe Mannigfaltigkeit, die wir $\boldsymbol{R}_k'$ nennen. Nehmen wir die analytische Ebene $v_k = 0$ heraus, so erhalten wir eine komplexe Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{R}_k''$.

(8) Die Gleichungen

$$u_k = u_{k-1}^{\;b_k}\, v_{k-1} \qquad (1 \leqq k \leqq s)$$
$$v_k = 1/u_{k-1}$$

stellen eine analytische und topologische Abbildung φ_{k-1} von R'_{k-1} auf R''_k dar. Wir identifizieren durch φ_{k-1} aufeinander bezogene Punkte von R'_{k-1} und R''_k. Die Bedingung (1) ist erfüllt. Es entsteht eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ausgehend von R_0 und R_1 konstruieren wir so eine Mannigfaltigkeit R_{01}. R_1 kann als offene Menge von R_{01} aufgefaßt werden. Durch Identifizierung von R'_1 mit R''_2, vermittelt durch die Abbildung φ_1, erhalten wir aus R_{01} und R_2 eine komplexe Mannigfaltigkeit R_{012}. Die Bedingung (1) war nämlich wieder erfüllt. Wir gelangen durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich zu einer Mannigfaltigkeit $R_{01\ldots s}$, die wir $R(n, q)$ nennen wollen. $R(n, q)$ ist mit $s + 1$ zulässigen Koordinatensystemen u_k, v_k, $0 \leqq k \leqq s$, überdeckt.

(8) ist als Koordinatentransformation in $R(n, q)$ aufzufassen. In $R(n, q)$ sind s kompakte analytische Flächen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ vom Geschlecht 0^* (d. h. Sphären) singularitätenfrei eingebettet:

(9) σ_k wird im k-ten Koordinatensystem durch $u_k = 0$ gegeben und v_k ist laufende inhomogene Koordinate auf σ_k, im $(k - 1)$. Koordinatensystem wird σ_k durch $v_{k-1} = 0$ gegeben und u_{k-1} ist laufende Koordinate auf σ_k, $(1 \leqq k \leqq s)$.

(10) Durch
$$\begin{cases} z_1 = u_k^{\lambda_k}\, v_k^{\lambda_{k+1}} \\ z_2 = u_k^{\mu_k}\, v_k^{\mu_{k+1}} \\ w = u_k^{\nu_k}\, v_k^{\nu_{k+1}} \end{cases}$$
wird eine Abbildung γ von $R(n, q)$ in $B(n, q)$ definiert.

Beweis: Zu zeigen ist erstens, daß $w^n = z_1 z_2^{n-q}$ identisch in u_k, v_k erfüllt ist. Das folgt aus (4). Zweitens ist zu zeigen, daß der Bildpunkt (z_1, z_2, w) in $B(n, q)$ nicht von dem speziell gewählten Koordinatensystem von $R(n, q)$ abhängt. Dies beweist man mit Hilfe von (3) und (8).

(11) γ bildet alle Flächen σ_k auf $(z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ w = 0)$ ab, d. h. auf den Punkt $A_{n,q}$ von $B(n, q)$. [Man beachte (7), (9).] Man zeigt ferner ohne Schwierigkeit:

(12) γ bildet $R(n, q) - (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_s)$ topologisch und analytisch auf $B(n, q) - A_{n,q}$ ab.

Aus (10) bis (12) erhält man: $R(n, q)$ ist eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ im Sinne von 3.1 (12).

(13) Die Flächen σ_k, σ_{k+1} $(0 < k \leqq s)$ schneiden sich in genau einem Punkte, nämlich in dem Punkte $u_k = v_k = 0$, einfach (Schnittzahl 1). Die Flächen σ_i, σ_k $(i < k)$ schneiden sich nicht, wenn sie nicht aufeinander folgen, d. h. wenn $k - i \neq 1$.

(14) Die Fläche σ_k repräsentiert eine (ganzzahlige) Homologieklasse $\bar\sigma_k$ von $R(n, q)$.

Es ist $\bar\sigma_k \circ \bar\sigma_k = - b_k$. ($\circ$ bedeutet Schnittzahl.)

Beweis: Die analytische Fläche $u_0 = 0$ bezeichnen wir mit σ_0 und $v_s = 0$ mit σ_{s+1}. z_1 läßt sich als reguläre Funktion in $R(n, q)$ auffassen, die σ_k als λ_k-fache Nullstellenfläche hat und keine weiteren Nullstellen hat $(0 \leqq k \leqq s + 1.)$

Die Schnittzahl der Homologieklasse $\bar{\sigma}_k$ mit dem Nullstellengebilde

$$\lambda_0 \sigma_0 + \lambda_1 \sigma_1 + \cdots + \lambda_s \sigma_s + \lambda_{s+1} \sigma_{s+1} \text{ von } z_1 \text{ ist } 0.$$[12]

Es folgt aus (13): $\lambda_{k-1} + \lambda_k(\bar{\sigma}_k \circ \bar{\sigma}_k) + \lambda_{k+1} = 0$.

Aus (3) folgt dann die Behauptung.

$A_{n,q}$ ist nicht uniformisierbar. Wäre $A_{n,q}$ nämlich uniformisierbar, dann müßte nach H. HOPF [vgl. 3.1. (13), Anmerkung] $\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_s$ ein Sphärenbaum sein, der einem mehrfachen σ-Prozeß entspricht. Das ist unmöglich, da alle Selbstschnittzahlen der $\sigma_i < -1$ sind[13]).

(15) Aus dem Euklidischen Algorithmus folgt für n/q die Darstellung als Kettenbruch:

$$n/q = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cdots - \cfrac{1}{b_s}}$$

(Vgl. zu diesem Abschnitt [9], S. 303. Ich weiß nicht, ob der hier besprochene Euklidische Algorithmus in der algebraischen Geometrie bekannt ist.)

(16) *Voraussetzungen:* $\tilde{R}$ ist eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit der Funktion $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ (= kompakte Modifikation von $B(n,q)$ in $A_{n,q}$). Die Modifikations-Abbildung von $\tilde{R}$ auf $B(n,q)$ wird mit $\tilde{t}$ bezeichnet. $\tilde{U}$, U sind Umgebungen von $A_{n,q}$ in $B(n,q)$ und ψ ist ein analytischer Homöomorphismus von $\tilde{U}$ auf U. ($\psi(A_{n,q}) = A_{n,q}$). γ bezeichnet wie in (10) die Modifikations-Abbildung von $R(n,q)$ auf $B(n,q)$.

Behauptung: Der analytische Homöomorphismus $\gamma^{-1} \psi \tilde{t}$ von

$$\tilde{t}^{-1} \tilde{U} - \tilde{t}^{-1}(A_{n,q}) \text{ auf } \gamma^{-1} U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$$

läßt sich zu einer analytischen Abbildung $\tilde{\psi}$ von $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ auf $\gamma^{-1} U$ erweitern. $t^{-1} \tilde{U}$ entsteht aus $\gamma^{-1} U$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen $\tilde{\psi}^{-1}(P_i)$ in (endlich vielen) Punkten P_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q}) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s$. [Beachte 1.3. (13).] Es gilt also: *Jede kompakte Modifikation von $B(n,q)$ in $A_{n,q}$ kann aus $R_{n,q}$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen erhalten werden.*

Beweis: z_1, z_2, w sind reguläre Funktionen in $\gamma^{-1} U$. z_1, z_2, w lassen sich daher als reguläre Funktionen in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U} - \tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ auffassen, die auf $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ noch stetig sind und dort den Wert 0 haben. $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ ist Vereinigungsmenge von analytischen Flächen.

Aus dem bekannten Satz über aufhebbare Singularitäten[11]) folgt: z_1, z_2, w sind in $\tilde{t}^{-1} U$ regulär. — Die Koordinaten u_k, v_k von $R(n,q)$ [vgl. (8)] können als in ganz $R(n,q)$ definierte meromorphe Funktionen aufgefaßt werden[14]); dort wo u_k, v_k Koordinaten sind, sind die Funktionen u_k, v_k regulär.

u_k, v_k $(0 \leq k \leq s)$ können also auch als meromorphe Funktionen in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ aufgefaßt werden. Die Funktionen u_k, v_k haben in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ endlich viele Unbestimmtheitsstellen, die alle auf $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ liegen. In die endlich vielen Unbe-

[12]) Vgl. 1.4. (1).

[13]) Jeder nicht triviale [1.3. (13)] Sphärenbaum enthält Sphären mit der Selbstschnittzahl -1. Vgl. 1.4. (2).

[14]) Das ergibt sich aus (10) wegen (6) $\mu_{k+1} \nu_k - \mu_k \nu_{k+1} = 1$.

stimmtheitsstellen Q_i aller Funktionen u_k, v_k $(0 \leqq k \leqq s)$ setzen wir Sphärenbäume $t_1^{-1}(Q_i)$ so ein, daß in der entstehenden Mannigfaltigkeit $t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ alle u_k, v_k keine Unbestimmtheitsstellen haben. Es ergibt sich dann leicht: Für jeden Punkt P von $t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ sind für wenigstens ein k die Funktionen u_k, v_k regulär. Ordnet man P jetzt denjenigen Punkt von $\gamma^{-1}U$ zu, der im k-ten Koordinatensystem die Koordinaten $u_k(P)$, $v_k(P)$ hat, dann erhält man eine analytische Abbildung ψ_1 von $t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ auf $\gamma^{-1}U$, die $t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}U - t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ eineindeutig auf $\gamma^{-1}U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$ abbildet und dort mit $\gamma_1^{-1}\psi\tilde{t}t_1$ übereinstimmt. Nach H. HOPF [vgl. 3.1. (13), Anmerkung] geht $t_1^{-1}t^{-1}\tilde{U}$ aus $\gamma^{-1}U$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen $\psi_1^{-1}(A_i)$ in endlich vielen Punkten A_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ aus $\gamma^{-1}U$ hervor. $\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ entsteht also aus $\gamma^{-1}U$, indem man in endlich vielen Punkten A_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ Sphärenbäume $\psi_1^{-1}(A_i)$ einsetzt und indem man dann die Sphärenbäume $t_1^{-1}(Q_i)$ aus $\psi_1^{-1}\gamma^{-1}U$ herausnimmt:

$$t_1^{-1}\tilde{t}_1^{-1}\tilde{U} = \psi_1^{-1}\gamma^{-1}U.$$

Die analytischen Flächen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ von $\gamma^{-1}U$ haben Selbstschnittzahlen < -1. Faßt man $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ als Flächen in $\psi_1^{-1}\gamma^{-1}U$ auf, dann wird ihre Selbstschnittzahl noch kleiner[15]). Die „zuletzt eingesetzten" Sphären eines Sphärenbaumes (das sind solche, die durch einen inversen einfachen σ-Prozeß wieder herausgenommen werden können) lassen sich dadurch charakterisieren, daß ihre Selbstschnittzahl -1 ist. Eine „zuletzt eingesetzte" Sphäre eines Baumes $t_1^{-1}(Q_i)$ ist daher stets eine „zuletzt eingesetzte" Sphäre eines Baumes $\psi_1^{-1}(A_j)$, da sie mit keiner der Flächen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ zusammenfallen kann. Nimmt man nun die „zuletzt eingesetzten" Sphären der Bäume $t_1^{-1}(Q_i)$ aus $t_1^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \psi_1^{-1}\gamma^{-1}U$ heraus, dann erhält man eine Mannigfaltigkeit $t_2^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \psi_2^{-1}\gamma^{-1}U$, die aus $\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ und aus $\gamma^{-1}U$ durch Einsetzen von Bäumen $t_2^{-1}(Q_i)$ bzw. $\psi_2^{-1}(A_j)$ in Punkten Q_i bzw. A_j von $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ bzw. $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ entsteht. Aus dieser Mannigfaltigkeit nimmt man die „zuletzt eingesetzten" Sphären der Bäume $t_2^{-1}(Q_i)$ heraus und erhält durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schließlich

$$\tilde{\psi}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \gamma^{-1}U.$$

(17) *Voraussetzungen:* U ist eine Umgebung von $A_{n,q}$ in $B(n,q)$ und U' eine Umgebung von $A_{n',q'}$ in $B(n',q')$. γ, γ' bezeichnen die Modifikations-Abbildungen von $R(n,q)$ auf $B(n,q)$ und von $R(n',q')$ auf $B(n',q')$ [vgl. (10)]. ψ ist ein analytischer Homöomorphismus von U auf U';

$$\psi(A_{n,q}) = A_{n',q'}.$$

Behauptung: 1) Der analytische Homöomorphismus $\gamma'^{-1}\psi\gamma$ von $\gamma^{-1}U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$ auf $\gamma'^{-1}U' - \gamma'^{-1}(A_{n',q'})$ läßt sich zu einem analytischen Homöomorphismus $\tilde{\psi}$ von $\gamma^{-1}U$ auf $\gamma'^{-1}U'$ erweitern.

2) $n = n'$ und ($q = q'$ oder $qq' \equiv 1 \pmod{n}$).

[15]) Vgl. 1.4.

Beweis: $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ ist nach (8)—(14) Vereinigungsmenge von Sphären $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$.

$$\gamma^{-1}(A_{n,q}) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s.$$

Entsprechend $$\gamma'^{-1}(A_{n',q'}) = \sigma'_1 \cup \ldots \cup \sigma'_{s'}.$$

Die Sphären σ_i, σ'_i haben Selbstschnittzahlen b_i, b'_i, die alle < -1 sind. Daraus folgt mit Hilfe von (16) sofort der 1. Teil der Behauptung[13]). — Der analytische Homöomorphismus $\widetilde{\psi}$ bildet $\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s$ auf $\sigma'_1 \cup \ldots \cup \sigma'_{s'}$ ab. Es ist also $s = s'$. Aus (13) bis (15) folgt weiter:

$$b_1 = b'_1, \quad b_2 = b'_2, \ldots, \quad b_s = b'_s$$

oder

$$b_1 = b'_s, \quad b_2 = b'_{s-1}, \ldots, \quad b_s = b'_1.$$

Im ersten Falle ist wegen (15) $n = n'$ und $q = q'$.
Im zweiten Falle ist

$$n/q = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots - \cfrac{1}{b_s}} \qquad \text{und} \qquad n'/q' = b_s - \cfrac{1}{b_{s-1} - \ddots - \cfrac{1}{b_1}}$$

Es folgt $n = n'$, aus (3) erhält man $q' = \mu_s$ und aus (4) für $k = s$: $qq' \equiv 1 \pmod{n}$.

(18) Es ist leicht zu sehen, daß $A_{n,q}$ und $A_{n',q'}$ analytisch äquivalent sind, wenn $qq' \equiv 1 \pmod{n}$. Aus (17) erhält man also:

$A_{n,q}$ und $A_{n',q'}$ sind in den folgenden Fällen und nur in diesen Fällen analytisch äquivalent:

1) $n = n'$ und $q = q'$ 2) $n = n'$ und $qq' \equiv 1 \pmod{n}$.

3.5. Wir kommen nun zur Konstruktion einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit [3.1. (12)] einer algebroiden Funktion f.

(1) f sei eine algebroide Funktion in der komplexen Mannigfaltigkeit M, die sich auf allen Wegen algebroid fortsetzen läßt. $B(f)$ sei der RIEMANNsche Bereich von f. In die nicht-gewöhnlichen Punkte P_i der Verzweigungsfläche W von f in M werden Sphärenbäume $t^{-1}(P_i)$ so eingesetzt, daß in $t^{-1}M$ die Fläche $t^* W$ nur noch gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. (Anwendung von 2.9. auf die reguläre Cousinverteilung W.) $t^{-1}M$ werde „minimal" gewählt, das soll heißen: Jede Mannigfaltigkeit $t'^{-1}M$ (Einsetzen von Sphärenbäumen $t'^{-1}(P_i)$), in der $t'^* W$ nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat, geht aus $t^{-1}M$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen hervor. Man erhält die minimale Mannigfaltigkeit $t^{-1}M$, wenn man „unnötiges" Einsetzen von Sphären vermeidet und also so vorgeht:

Man setzt in die nicht-gewöhnlichen Punkte von W, die keine Doppelpunkte sind, die Sphäre ein (einfacher σ-Prozeß) und erhält eine Mannigfaltigkeit $t_1^{-1}M$. In die nicht-gewöhnlichen Punkte von $t_1^* W$, die keine Doppelpunkte sind, setzt man die Sphäre ein und erhält eine Mannigfaltigkeit $t_2^{-1}t_1^{-1}M$ usw. Nach endlich vielen (k) Schritten hat $t_k^* \ldots t_1^* W$ in $t_k^{-1} \ldots t_1^{-1}M$ nur noch gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte.

$t^{-1}M = t_k^{-1} \ldots t_1^{-1}M$ ist die minimale Mannigfaltigkeit.

(2) f läßt sich als algebroide Funktion $t^* f$ in $t^{-1}M$ auffassen (vgl. 3.2.). Der RIEMANNsche Bereich von $t^* f$ ist $t^{-1}M$ überlagert und werde mit $t^* B(f)$

bezeichnet. Jeder nicht-uniformisierbare Punkt A_i von $t^* B(f)$ ist vom Typus 3.3. (1) und einem algebroiden Funktionselement A_{n_i, q_i} analytisch äquivalent[16]). In jeden solchen nicht-uniformisierbaren Punkt $A_i \in t^* B(f)$ wird nach 3.4. (11), (12) eine Vereinigungsmenge $\sigma_1^i \cup \ldots \cup \sigma_{s_i}^i$ von Sphären eingesetzt. Das Einsetzen von $\sigma_1^i \cup \ldots \cup \sigma_{s_i}^i$ ist so zu beschreiben: Es gibt eine Umgebung V_i von A_i in $t^* B(f)$, eine Umgebung U_i von A_{n_i, q_i} in $B(n_i, q_i)$ und einen analytischen Homöomorphismus $\varkappa_i$ von V_i auf U_i mit $\varkappa_i(A_i) = A_{n_i, q_i}$. Die Umgebungen V_i der Punkte A_i können so gewählt werden, daß sie paarweise punktfremd sind. γ_i bezeichne die Modifikations-Abbildung von $R(n_i, q_i)$ auf $B(n_i, q_i)$ [vgl. 3.3 (10)].

$\gamma_i^{-1} \varkappa_i$ ist ein analytischer Homöomorphismus von $V_i - A_i$ auf $\gamma_i^{-1} U - (\sigma_1^i \cup \ldots \cup \sigma_{s_i}^i)$.

Wir betrachten nun die komplexe Mannigfaltigkeit $t^* B(f) - \{A_i\}$ und die Mannigfaltigkeiten $\gamma_i^{-1} U_i$ (für alle i; diese Mannigfaltigkeiten sind als punktfremd anzusehen!) und identifizieren durch $\gamma_i^{-1} \varkappa_i$ aufeinander abgebildete Punkte von $t^* B(f) - \{A_i\}$ und $\gamma_i^{-1} U_i$. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit $\hat{M}(f)$, *deren komplexe Struktur* durch $t^* B(f)$ und damit auch *durch die algebroide Funktion f eindeutig bestimmt ist* (und nicht von der Wahl der U_i, V_i und der analytischen Homöomorphismen $\varkappa_i$ abhängt). Beweis mit Hilfe von 3.4. (17).

(3) f läßt sich als meromorphe Funktion $\hat{f}$ in $\hat{M}(f)$ auffassen. In die Unbestimmtheitsstellen von $\hat{f}$ werden nach 2.8 Sphärenbäume eingesetzt. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$, in der f sich als meromorphe und bestimmte Funktion $\tilde{f}$ auffassen läßt. Die Konstruktion von $\tilde{M}(f)$ ist wieder eindeutig festgelegt, wenn man genau nach 2.8. vorgeht und keine „unnötigen Sphären" einsetzt.

(4) Durch genaue Verfolgung der angegebenen Konstruktion erkennt man:

1. Die komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$ ist eine RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit von f [vgl.* 3.1. (12)]. *$\tilde{M}(f)$ entsteht also aus dem* RIEMANN*schen Bereich $B(f)$, indem man in jeden Ausnahmepunkt Q eine Vereinigungsmenge S_Q von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen einsetzt.*

2. Jede (irreduzible) analytische Fläche von S_Q liegt singularitätenfrei (d. h. hat nur gewöhnliche Punkte) in $\tilde{M}(f)$. Zwei analytische Flächen von S_Q schneiden sich nicht oder haben genau einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich einfach schneiden. Ein Punkt von S_Q liegt höchstens auf zwei analytischen Flächen von S_Q. Man kann S_Q einen Streckenkomplex zuordnen: Jeder Fläche von S_Q entspricht ein Eckpunkt. Zwei Eckpunkte begrenzen eine Kante des Streckenkomplexes genau dann, wenn die zugeordneten Flächen sich schneiden. Dieser S_Q zugeordnete Streckenkomplex ist zusammenhängend und zyklenfrei, also ein Baum.

Wir sagen daher: $\tilde{M}(f)$ entsteht aus $B(f)$ durch Einsetzen von Bäumen analytischer Flächen in die Ausnahmepunkte Q.

---

[16]) Vgl. 3.3. (4).

3.6. Wir haben in 3.1. (13) bereits darauf hingewiesen, daß ein RIEMANNscher Bereich einer algebroiden Funktion ein RIEMANNsches Gebiet im Sinne von BEHNKE u. STEIN [1] ist. Wir wollen hier unter einem abstrakten RIEMANNschen Bereich (von zwei komplexen Dimensionen) ein RIEMANNsches Gebiet verstehen, das folgende zusätzliche Eigenschaft hat: Jeder Punkt des RIEMANNschen Gebietes besitzt eine Umgebung, die analytisch homöomorph ist einer solchen verzweigten Überlagerung einer „Hyperkugel" $|z_1|^2 + |z_2|^2 < \varepsilon$, die durch ein algebroides Funktionselement im Nullpunkt erzeugt wird.

Es ist mir nicht bekannt, ob jede „analytische Überlagerung", [1] S. 6, der Hyperkugel durch ein algebroides Funktionselement erzeugt werden kann. Ich weiß daher auch nicht, ob die beiden Begriffe „abstrakter RIEMANNscher Bereich" und „RIEMANNsches Gebiet" zusammenfallen oder nicht.

Das Einsetzen von Bäumen analytischer Flächen in die nicht-uniformisierbaren Punkte eines RIEMANNschen Bereiches ist ein lokaler Prozeß, den wir auf jeden nicht-uniformisierbaren Punkt eines abstrakten RIEMANNschen Bereiches anwenden können. (Der Konstruktionsschritt (3) von 3.5. fällt fort.)

Wir erhalten dadurch den

Satz: *Zu jedem abstrakten RIEMANNschen Bereich B gibt es eine komplexe Mannigfaltigkeit, die aus B durch kompakte Modifikation in den nicht-uniformisierbaren Punkten von B hervorgeht.*

Die Frage, ob der letzte Satz auch für beliebige RIEMANNsche Gebiete gilt, habe ich nicht untersucht.

Literatur.

[1] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). — [2] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. **3**, H. 3 (1935) (Springer-Verlag). — [3] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton University Press 1948. — [4] BRAUNER, K.: Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6**, 1—55 (1928). — [5] HIRZEBRUCH, F.: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **124**, 77—86 (1951). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. Erscheint demnächst in J. reine angew. Math. — [7] HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, p. 167—185. New York 1948. — [8] HOPF, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. e Appl. Serie V, **10**, 169—182 (1951). — [9] JUNG, H. W. E.: Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$. J. reine angew. Math. **133**, 289—314 (1908). — [10] KÄHLER, E.: Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. Math. Z. **30**, 188—204 (1929). — [11] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II/1, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1929. — [12] STEIN, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727—757 (1941). — [13] ZARISKI, O.: Algebraic Surfaces. Erg. Math. **3**, H. 5 (1935) (Springer-Verlag).

(Eingegangen am 14. Juli 1952.)