Math. Annalen, Bd. 125, S. 355—365 (1953).

Eindeutige Lösungen der Differentialgleichungen $w'' = P(z, w)$.

Von

HANS WITTICH in Karlsruhe.

In den Differentialgleichungen

$$(1) \qquad w'' = P(z,w) = a_0(z)\, w^n + a_1(z)\, w^{n-1} + \cdots + a_n(z),\ n \geqq 2,$$

seien die Koeffizienten $a_j(z)$ Polynome. Die Forderung, daß (1) mindestens eine in $|z| < \infty$ eindeutige analytische, nichtrationale Lösung $w(z)$ besitzen soll, bedingt die Gradbeschränkung $n \leqq 3$, so daß für n nur die Werte 2 und 3 in Frage kommen. Bekanntlich sind alle Lösungen von $w'' = 6\,w^2 + A_1\, w + A_2$ und $w'' = 2\,w^3 + A_1\, w^2 + A_2\, w + A_3$ für konstante A_j in $|z| < \infty$ eindeutig. Diese Differentialgleichungen haben überdies die Eigenschaft, daß es zu beliebigem endlichen $z = p$ stets eine Lösung $w(z)$ gibt, die $z = p$ zur Polstelle hat. Fordert man entsprechend für nichtkonstante Koeffizienten $a_j(z)$ die Eigenschaften

E_1: Es gibt mindestens eine in $|z| < \infty$ eindeutige analytische, nichtrationale Lösung $w(z)$ von (1),

E_2: Zu beliebigem endlichen $z = p$ gibt es eine in $|z - p| < r$ eindeutig analytische Lösung, die $z = p$ zur Polstelle hat: $w(z) = \frac{1}{(z-p)^2} + \cdots$, falls $n = 2$, $\quad w(z) = \frac{A}{z-p} + \cdots$, falls $n = 3$, $A = \pm 1$,

so verbleiben von (1) nur die Gleichungen der Form

$$(2) \qquad w'' = a(z) + b(z)\, w + 6\, w^2$$

$$(3) \qquad w'' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2 + 2\, w^3,$$

wobei die Koeffizienten in (2) und (3) noch gewissen Bedingungen genügen müssen.

Für jede Lösung $w(z)$ geht, wie zu erwarten ist, die Ungleichung des zweiten Hauptsatzes[1]) in eine Gleichheit über

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{q} m(r, c_j) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + 2\, N(r, w) - N(r, w') = 2\, T(r, w) + S(r),\ q \geqq 3.$$

(4) gilt für alle r, und das Restglied ist von der Form $S(r) = 0(\log r)$, da jede Lösung von endlicher Ordnung ist. Die hier betrachteten Differentialgleichungen gestatten nämlich, die vom Beweis des zweiten Hauptsatzes bekannte Beziehung $m(r, 1/w') \geqq \sum_1^q m(r, c_j) - K_1 \log r$ (da $w(z)$ von endlicher Ordnung) durch $m(r, 1/w') \leqq \sum_1^q m(r, c_j) + K_2 \log r$ zu ergänzen und damit auf die

[1]) Für Bezeichnungen und Ergebnisse vgl. man R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

Gültigkeit von $m(r, 1/w') = \sum_{j=1}^{q} m(r, c_j) + 0(\log r)$ zu schließen, was nach dem ersten Hauptsatz (4) entspricht. Weiter lassen sich noch Aussagen über das relative Anwachsen der im zweiten Hauptsatz vorkommenden Größen machen. Zur Herleitung dieser Eigenschaften der Lösungen wird nur die gegebene Differentialgleichung herangezogen, also ein Aufbau auf Ergebnisse einer eingehenden Integrationstheorie bewußt vermieden. Ein solches Vorgehen scheint insbesondere dann gerechtfertigt zu sein, wenn eine Differentialgleichung als Definition einer bestimmten, evtl. neuen Gattung transzendenter Funktionen angesehen und ein erster Einblick in die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen angestrebt wird.

1. Zuerst werden unter der Annahme, daß E_1 und E_2 erfüllt sind, notwendige Bedingungen für die Gestalt von (1) abgeleitet. Eine gegebene Differentialgleichung (1) besitze gemäß E_1 eine in $|z| < \infty$ eindeutige nichtrationale Lösung $w(z)$. Da in (1) nur das Glied $a_0(z)\, w^n$ die maximale Dimension $n \geqq 2$ hat, kann $w(z)$ nicht ganz transzendent sein. $w(z)$ muß also Pole besitzen, und zwar in unendlicher Anzahl. Hätte nämlich $w(z)$ nur endlich viele Pole, so wäre mit einem passenden Polynom $p(z)$ die Funktion $g(z) = p(z)\, w(z)$ ganz transzendent. $g(z)$ müßte dann Lösung einer algebraischen Differentialgleichung $Q(z, g, g', g'') = 0$ sein, in der nur ein Glied, nämlich $a_0\, p^3\, g^n$, mit größter Dimension $n \geqq 2$ vorkommt, was unmöglich ist. Danach gibt es eine Lösung $w(z)$, die für $z = p$ mit $a_0(p) \neq 0$ einen Pol hat. Mit dem für $|z - p| < r$ gültigen Ansatz $w(z) = \frac{A_{-\lambda}}{(z-p)^{\lambda}} + \cdots$ folgt wegen $A_{-\lambda} \neq 0$ aus (1) $\lambda + 2 = \lambda n$, eine Beziehung, die nur für $\lambda = 1$, $n = 3$ und $\lambda = 2$, $n = 2$ möglich ist. Nach E_2 soll (1) auch im Punkte $z = p$ mit $a_0(p) = 0$ eine Lösung haben mit einem Pol der Ordnung 2 bzw. 1, was aber für $a_0(z) \not\equiv$ const. unmöglich ist. Wegen der in E_2 getroffenen Normierung gilt $a_0(z) \equiv 6$ bzw. $a_0(z) \equiv 2$. Das sind aber die Gleichungen (2) und (3).

Mit $w(z) = u(z) - \frac{b(z)}{12} = u(z) + h(z)$ geht (2) über in

$$u'' = \alpha(z) + 6\, u^2,\quad \alpha(z) = a + b\, h + 6\, h^2 - h''. \tag{2'}$$

Geht man mit dem Ansatz $u = \frac{1}{(z-p)^2} + \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + \cdots$ in (2′) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich $c_{-1} = c_0 = c_1 = 0$ und $12\, c_4 = \frac{\alpha''(p)}{2} + 12\, c_4$. Da mit $w(z)$ auch $u(z)$ unendlich viele Pole hat und für jede Polstelle $\alpha''(p) = 0$ gilt, muß $\alpha''(z) \equiv 0$, also $\alpha(z) = \alpha_0\, z + \beta_0$ erfüllt sein. (2′) hat also die Form

$$u'' = (\alpha_0\, z + \beta_0) + 6\, u^2. \tag{$\overline{P}_1$}$$

Die entsprechende Transformation führt bei der Wahl $h(z) = -\frac{c(z)}{6}$ (3) über in

$$\begin{gathered} u'' = \alpha(z) + \beta(z)\, u + 2\, u^3 \\ \alpha(z) = a + b\, h + c\, h^2 - h'',\quad \beta(z) = b + 2\, c\, h + 6\, h^2. \end{gathered} \tag{3'}$$

Mit $u(z) = \frac{A}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + \cdots$ ergeben sich die Gleichungen $A^2 = 1$, $c_0 = 0$, $A\, \beta(p) + 6\, c_1 = 0$, $2\, c_2 = \alpha(p) + A\, \beta'(p) + 6\, c_2$, $6\, c_3 = \alpha'(p) + \beta(p) \cdot c_1 + \beta''(p) \frac{A}{2} + 6\, A\, c_1^2 + 6\, c_3$.

Aus der letzten Gleichung folgt wegen $\beta(p)\, c_1 = -6\, A\, c_1^2$:

$$\alpha'(p) + \frac{A}{2}\, \beta''(p) = 0\,.$$

Für jede Polstelle einer Lösung von (3′) muß also $\alpha'(p) + \frac{A(p)}{2}\, \beta''(p) = 0$ mit $A^2(p) = 1$ erfüllt sein. Es wird behauptet, daß $\alpha'(z) \equiv \beta''(z) \equiv 0$ gelten muß. Ist im Gegensatz zur Behauptung $\alpha'(z) \not\equiv 0$, $\beta''(z) \not\equiv 0$, so läßt sich aus den unendlich vielen Polstellen von $u(z)$ $z = p$ so wählen, daß $\alpha'(p) \neq 0$ und $\beta''(p) \neq 0$ erfüllt ist. Für dieses $z = p$ gilt dann $\alpha'(p) + \frac{A(p)}{2}\, \beta''(p) = 0$. Nach E_2 gibt es eine für $|z - p| < r$ gültige Lösung $u_1(z)$ mit der Entwicklung $u_1(z) = \frac{A_1(p)}{z - p} + \cdots$, $A_1(p) = -A(p)$. Wegen $\alpha'(p) + \frac{A_1(p)}{2}\, \beta''(p) = \alpha'(p) - \frac{A(p)}{2}\, \beta''(p) = 0$ muß $\alpha'(p) = \beta''(p) = 0$ sein, was der Wahl des Punktes $z = p$ widerspricht. Es ist also $\alpha(z) = \alpha_0$, $\beta(z) = \beta_1 z + \beta_0$, und man erhält für (3′) die Form

$$(\bar{P}_2) \qquad u'' = \alpha_0 + (\beta_1 z + \beta_0)\, u + 2\, u^3.$$

Durch die Substitutionen $u = \mu\, y$, $z = \varkappa + \lambda\, x$, $\mu, \varkappa$ und λ passende Konstanten, gehen $(\bar{P}_1)$, $(\bar{P}_2)$ über in die Normalformen

$$(P_1) \qquad y'' = x + 6\, y^2 \qquad \text{falls in } (\bar{P}_1) \quad \alpha_0 \neq 0,$$

$$(P_2) \qquad y'' = c + x\, y + 2\, y^3 \qquad \text{falls in } (\bar{P}_2) \quad \beta_1 \neq 0,$$

$$(E_1) \qquad y'' = a + 6\, y^2 \qquad \text{falls in } (\bar{P}_1) \quad \alpha_0 = 0,$$

$$(E_2) \qquad y'' = a + b\, y + 2\, y^3 \qquad \text{falls in } (\bar{P}_2) \quad \beta_1 = 0.$$

(P_1) und (P_2) sind die beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen[2]). (E_1), (E_2) sind durch elliptische Funktionen oder Ausartungen derselben integrierbar. Geht man von $(\bar{P}_1)$ und $(\bar{P}_2)$ zu (2) und (3) zurück, so erhält man

$$(\bar{2}) \qquad a(z) = \alpha_0\, z + \beta_0 + 6\, h^2 - h'', \qquad b(z) = 12\, h(z),$$

$$(\bar{3}) \qquad a(z) = \alpha_0 + \beta_1\, z\, h + \beta_0\, h + 2\, h^3 - h'', \quad b(z) = \beta_1\, z + \beta_0 + 6\, h^2, \quad c(z) = 6\, h\,.$$

Man bekommt danach alle Differentialgleichungen (2) und (3), die den angegebenen notwendigen Bedingungen genügen, indem man in $(\bar{2})$ und $(\bar{3})$ für $h(z)$ ein beliebiges Polynom einsetzt.

2. Zum Nachweis, daß umgekehrt jede Differentialgleichung (2) bzw. (3) mit den in $(\bar{2})$ bzw. $(\bar{3})$ angegebenen Koeffizienten die Eigenschaften E_1 und E_2 hat, darf man sich auf die Gln. $(P_1), \ldots, (E_2)$ beschränken. Weiter genügt es, die Betrachtungen für (P_2) durchzuführen, da sich die restlichen Differentialgleichungen entsprechend behandeln lassen.

Zum Nachweis von E_2 wird eine beliebige endliche Stelle $x = p$ ausgewählt und dazu eine Zahl $A(p) = 1$ oder -1. Mit $y(x) = \frac{A}{x - p} + c_1(x - p) + \cdots = \frac{A}{x - p} + h(x - p)$, $t = x - p$, erhält man formal

$$h''(t) = c + (t + p)\left(\frac{A}{t} + h\right) + 6\, \frac{A^2}{t^2}\, h + \frac{6\, A}{t}\, h^2 + 2\, h^3$$

[2]) Vgl. E. L. INCE: Ordinary Differential Equations. Dover Publications. — G. VALIRON: Equations Fonctionelles Applications. Paris 1945.

und durch Koeffizientenvergleich

$$(5)\quad \begin{cases} 6\,c_1 + p\,A = 0, \quad 4\,c_2 + c + A = 0, \quad 6\,c_3 = 6\,c_3 + p\,c_1 + 6\,A\,c_1^2\,, \\ (n(n-1) - 6)\,c_n = c_{n-3} + p\,c_{n-2} + 6\,A\,a_{n-1} + 2\,B_{n-2} = P(c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}) \end{cases}$$

für $n \geqq 4$. In (5) ist $A_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} c_j\, c_{n-j}$, $B_n = \sum\limits_{j=1}^{n-2} c_j\, A_{n-j}$ und P ein Polynom in $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}$. Aus den beiden ersten Gleichungen berechnen sich bei gegebenem p und $A(p)$ c_1 und c_2 eindeutig. Mit diesem c_1 ist wegen $c_1(p\,A^2 + 6\,A\,c_1) = c_1\,A\,(p\,A + 6\,c_1) = 0$ die dritte Gleichung für beliebiges c_3 erfüllt. Nach Wahl von c_3 berechnen sich dann alle weiteren Koeffizienten eindeutig, so daß zu gegebenem p und $A(p)$ stets eine formale Lösung von (P_2) gefunden werden kann.

Es sei nun $C = \operatorname{Max}(|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, K)$ mit $K = \operatorname{Max}(|p|, 6)$, also $C > 1$. Mit diesem C gilt dann für alle n $|c_n| < C^n$. Für $j = 1, 2, \ldots, n-1 \geqq 3$ sei $|c_j| < C^j$ richtig. Dann folgt aus dieser Annahme auch die Gültigkeit von $|c_n| < C^n$. Nach (5) gilt nämlich

$$(n(n-1) - 6)\,|c_n| \leqq K\,(|c_{n-3}| + |c_{n-2}| + |A_{n-1}| + |c_1\,A_{n-3}| + \cdots + |c_{n-4}A_2|)$$

und wegen $|A_j| < (j-1)\,C^j$ weiter

$$\begin{aligned}(n(n-1) - 6)\,|c_n| &< K\,(C^{n-3} + C^{n-2} + C^{n-2}(1 + 2 + \cdots + n - 4) + (n-2)\,C^{n-1}) \\ &< K\,(2\,C^{n-1} + C^{n-1}\,(1 + 2 + \cdots + n - 4 + n - 2)) \\ &< K\,C^{n-1}\,(1 + 2 + \cdots + n - 1) = K\,\frac{n(n-1)}{2}\,C^{n-1} \quad \text{oder}\end{aligned}$$

$$|c_n| < \frac{K}{2}\,\frac{n(n-1)}{n(n-1) - 6}\,C^{n-1} \leqq K\,C^{n-1} \leqq C^n.$$

Die Abschätzung gilt also, wie behauptet, für alle n. Für $|x - p| < r = \frac{1}{2\,C}$ ist danach $|c_n(x-p)^n| < \frac{1}{2^n}$, und $y(x) = \frac{A(p)}{x - p} + c_1(x - p) + \cdots$ stellt in $|x - p| < r$ eine Lösung von (P_2) der gewünschten Art dar. Nach der hier durchgeführten Abschätzung hängt die Zahl $r = \frac{1}{2\,C}$ von der Stelle p ab, was auch für (P_1) gilt. Im Falle (E_1) und (E_2) besteht diese Abhängigkeit nicht, da p nicht in die Abschätzung eingeht.

$(\bar{P}_1)$ hat für $\alpha_0 \neq 0$ keine rationalen Lösungen und für $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$ ist nur $u(z) \equiv \text{const.}$ möglich. Ist schließlich $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, d. h. $u'' = 6\,u^2$, dann sind $u(z) = \frac{1}{(z-p)^2}$, p beliebig, die einzigen rationalen Lösungen. Die Annahme, daß (P_2) rationale Lösungen $y(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ hat, liefert die Bedingung $n = m + 1$, und aus der Entwicklung $y(x) = \frac{c_1}{x} + \cdots$ für $x = \infty$ folgt $y(x) = \frac{c_1}{x}$ mit $c_1^2 = 1$ und $c = -c_1$. Das trifft nur für $c = -1$ bzw. $c = 1$ zu, und dann hat (P_2) $y = \frac{1}{x}$ bzw. $y = -\frac{1}{x}$ als einzige rationale Lösung. $(\bar{P}_2)$ mit $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ hat dann und nur dann rationale Lösungen, nämlich $u(z) = \frac{A}{z - p}$, $A = -\frac{\alpha_0}{\beta_1}$ und $p = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$, wenn $\alpha_0^2 = \beta_1^2$. Für $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ ist nur $u(z) \equiv 0$ möglich. Ist $\beta_1 = \alpha_0 = \beta_0 = 0$, so hat $u'' = 2\,u^3$ als einzige rationale Lösungen $u(z) = \frac{A}{z - p}$, $A^2 = 1$ und p beliebig. Sind α_0, β_0 nicht beide gleich Null, dann gilt für jede rationale Lösung in $z = \infty$ die Entwicklung $u(z) = c + \frac{a_\mu}{z^\mu} + \cdots$ mit $\alpha_0 + \beta_0 c + 2c^3 = 0$ und $\beta_0 + 6c^2 = 0$. Hat $Q(u) = \alpha_0 + \beta_0 u + 2u^3 = 0$ die einfachen Wurzeln c_1, c_2, c_3, dann sind diese Konstanten die einzigen rationalen Lösungen von $u'' = Q(u)$. Im Falle einer Doppelwurzel c muß jedes rationale $u(z) \not\equiv c$, da $u(z)$ den Wert c nur in $z = \infty$ (zweimal) annimmt, von der Form $u(z) = c + \frac{A}{z-p} - \frac{A}{z-q}$ sein mit $A^2 = 1$, $c(p-q) = A$. Einsetzen zeigt, daß diese rationalen Funktionen auch tatsächlich Lösungen sind.

Nach N. H. Abel und P. Painlevé[3]) ist jedes Integral von $(P_1), \ldots (E_2)$ eine in $|x| < \infty$ eindeutige analytische Funktion; damit ist auch jede Lösung von $(\bar{P}_1)$, $(\bar{P}_2)$ in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch. Da nach den letzten Bemerkungen über die möglichen rationalen Lösungen von $(\bar{P}_1)$, $(\bar{P}_2)$ diese in keinem Falle die Gesamtheit aller Integrale umfassen, gibt es stets Lösungen mit der Eigenschaft E_1. Die durch E_2 ausgezeichneten Lösungen, deren Existenz zunächst nur für eine passende Umgebung von $z = p$ gesichert war, sind mit dem Charakter einer eindeutigen analytischen Funktion in $|z| < \infty$ fortsetzbar. Diese wichtige Eigenschaft spielte bei der Herleitung der notwendigen Bedingungen in 1. keine Rolle.

Die Bedingungen E_1 und E_2 sondern also aus $w'' = P(z, w)$ die durch (2), (3), $(\bar{2})$ und (3) bestimmten Differentialgleichungen aus, und umgekehrt haben diese Differentialgleichungen bzw. ihre Lösungen die in E_1 und E_2 geforderten Eigenschaften.

3. Zur Herleitung der Wertverteilungseigenschaften wird wesentlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß jede Lösung von (2) und (3) von endlicher Wachstumsordnung ist, also der Bedingung $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,w)}{\log r} < \infty$ genügt. Da $w(z)$ und $u(z)$ von gleicher Ordnung sind, darf man sich auf $(\bar{P}_1)$ und $(\bar{P}_2)$ beschränken. Der Beweis der Behauptung $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log T(r,u)}{\log r} < \infty$ wird sehr einfach, wenn man die von Ahlfors und Shimizu[4]) stammende geometrische Interpretation der Charakteristik $T(r, u)$ heranzieht. Bedeutet $\pi A(r, u)$ den in sphärischer Metrik gemessenen Inhalt des von $u = u(z)$ als Bild des Kreises $|z| \leqq r$ erzeugten Riemannschen Flächenstückes F_r, also $\pi A(r, u) = \iint\limits_{|z| \leqq r} \frac{|u'|^2}{(1+|u|^2)^2} df_z$, df_z = Flächenelement in der z-Ebene, so ist die sphärische Normalform der Charakteristik der Ausdruck $\int\limits_0^r \frac{A(t,u)}{t} dt$, und es gilt $\int\limits_0^r \frac{A(t,u)}{t} dt = T(r, u) + 0(1)$. Jede Lösung von $(\bar{P}_1)$ genügt auch der Beziehung $u'^2 = 2\beta_0 u + 2\alpha_0 z u + 4u^3 - 2\alpha_0 F(z)$ mit $F(z) = \int u(z)\, dz$. Nach dem angegebenen Polstellenverhalten von $u(z)$ ist $F(z)$ in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch. Wegen $\frac{|u|^j}{(1+|u|^2)^2} \leqq 1$ für $j = 0, 1, \ldots, 4$ erhält man aus dem Ausdruck für u'^2 $\pi A(r, u) \leqq 2\pi |\beta_0| r^2 + 4\pi r^2 + \frac{4\pi}{3} |\alpha_0| r^3 +$

[3]) Rellich, F.: Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$. Math. Z. **47**, 153—160 (1940) und a. a. O., Anm. 2.

[4]) Vgl. a. a. O., Anm. 1.

$2|\alpha_0| \cdot \int\limits_{|z|\leq r}\int \frac{|F(z)|}{(1+|u|^2)^2} df_z$. Zur Abschätzung des letzten Summanden betrachte man auf $|z| = \varrho$ die Bögen Δ_1 und Δ_2, die so festgelegt werden: Auf Δ_1 gilt $|F'| = |u| \leqq \frac{|F|}{\varrho}$, auf Δ_2 $|F'| = |u| > \frac{|F|}{\varrho}$. Dann ist $\int\limits_{\Delta_2} \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi <$ $\varrho \cdot \int\limits_{\Delta_2} \frac{|u|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi \leqq 2\pi\varrho$. Weiter erhält man $\int\limits_{\Delta_1} \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi \leqq \int\limits_{\Delta_1} |F|\, d\varphi =$ $= L(\varrho)$. Dieses Integral existiert, da die möglicherweise auf $|z| = \varrho$ gelegenen Polstellen den Bögen Δ_2 angehören. Nun gilt $\frac{dL}{d\varrho} = \int\limits_{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial\varrho} |F|\, d\varphi =$ $\int\limits_{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial\varrho} \sqrt{u^2+v^2}\, d\varphi = \int\limits_{\Delta_1} \frac{u u_\varrho + v v_\varrho}{\sqrt{u^2+v^2}} d\varphi$. Wegen $(u u_\varrho + v v_\varrho)^2 \leqq (u^2+v^2)(u_\varrho^2+v_\varrho^2)$ erhält man $\frac{dL}{d\varrho} \leqq \int\limits_{\Delta_1} |F'|\, d\varphi \leqq \frac{1}{\varrho} \int\limits_{\Delta_1} |F|\, d\varphi = \frac{L(\varrho)}{\varrho}$, also $L(\varrho) \leqq \frac{L(\varrho_0)}{\varrho_0} \varrho$ für alle $\varrho \geqq \varrho_0 > 0$. Mithin gilt auf allen Kreisen $|z| = \varrho \geqq \varrho_0$ $\int\limits_0^{2\pi} \frac{|F(\varrho e^{i\varphi})|}{(1+|u(\varrho e^{i\varphi})|^2)^2} d\varphi$ $\leqq K_1 \varrho$ und $\int\limits_{|z|\leqq r}\int \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} df_z < K_2 r^3 + K_3$. Danach ist $A(r,u) \leqq K_4 r^3$ $+ K_5$ und $T(r,u) \leqq A r^3 + B$, gültig für alle Lösungen von $(\bar{P}_1)$. Jede Lösung von $(\bar{P}_2)$ genügt der Beziehung

$$u'^2 = 2\alpha_0 u + \beta_0 u^2 + u^4 + \beta_1 z u^2 - \beta_1 F(z),\ F(z) = \int u^2 dz.$$

Wegen des Polstellenverhaltens von $u(z)$ ist $F(z)$ in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch. Eine analoge Rechnung führt zu $T(r,u) \leqq A_1 r^3 + B_1$, gültig für alle Lösungen von $(\bar{P}_2)$. Für $\alpha_0 = 0$ in $(\bar{P}_1)$, $\beta_1 = 0$ in $(\bar{P}_2)$ folgt $T(r,u) \leqq A r^2 + B$. Hier fällt die nach dieser Methode gefundene obere Schranke 2 für die Ordnung mit der Ordnung der doppeltperiodischen Lösungen von $(\bar{P}_1)$, $(\bar{P}_2)$ zusammen. Die durch die Substitution $u = \mu y$, $z = \varkappa + \lambda x$ zusammenhängenden Lösungen $u(z)$ und $y(z)$ sind von gleicher Ordnung $\sigma < \infty$. Es sei σ die Ordnung von $y(x)$. Aus $6u^2 = \frac{u''}{u'} \frac{u'}{u} u - (\alpha_0 z + \beta_0)$ folgt, da $u(z)$ von endlicher Ordnung ist, $m(r,u) = 0(\log r)$ und entsprechend für (P_2). Bezeichnet K_x den Kreis $\left|x + \frac{\varkappa}{\lambda}\right| \leqq \frac{r}{|\lambda|}$, so ist $n(r,u)$ gleich der Zahl der Polstellen von $y(x)$ auf K_x und diese Anzahl liegt zwischen den Grenzen $n(\varrho_m, y)$ und $n(\varrho_M, y)$ mit $\varrho_m = \frac{r}{|\lambda|} - \left|\frac{\varkappa}{\lambda}\right|$, $\varrho_M = \frac{r}{|\lambda|} + \left|\frac{\varkappa}{\lambda}\right|$. Damit erhält man wegen $m(r,y) = 0(\log r)$ für bel. $\varepsilon > 0$ die Beziehung $\frac{\log N(r,u)}{\log r} \leqq \sigma + \varepsilon$ für alle $r > r(\varepsilon)$ und $\sigma - \varepsilon \leqq \frac{\log N(r_j,u)}{\log r_j}$, gültig für eine Zahlenfolge $r_j \to \infty$, also $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log N(r,u)}{\log r} = \sigma$, was wegen $m(r,u) = 0(\log r)$ für nichtrationales $u(z)$ mit $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,u)}{\log r} = \sigma$ gleichbedeutend ist. Nach P. BOUTROUX[5]) gilt für die Lösungen von (P_1)

[5]) BOUTROUX, P.: Sur quelques propriétés des fonctions entières. Acta math. 28, 174—187 (1904).

bzw. (P_2) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log N(r, y)}{\log r} = \frac{5}{2}$ bzw. 3, also $\sigma = \frac{5}{2}$ bzw. $\sigma = 3$. Von diesen Ergebnissen wird hier kein Gebrauch gemacht.

4. Für jede Lösung von (2) gilt nach 3. $m(r, w) = 0\,(\log r)$. Ist k eine beliebige endliche komplexe Zahl, so folgt aus

$$w'' = a(z) + k\,b(z) + 6\,k^2 + b(z)\,(w - k) + \\ + 6\,(w^2 - k^2) = D(z) + b(z)\,(w - k) + 6\,(w^2 - k^2) \quad \text{für } D(z) \not\equiv 0$$

$\frac{1}{w-k} = \frac{1}{D(z)} \left(\frac{w''}{w-k} - b(z) - 6\,(w + k) \right)$. Nach Übergang zur Schmiegungsfunktion erhält man daraus nach dem Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung und wegen $m(r, w) = 0\,(\log r)$

$$m\left(r, \frac{1}{w-k}\right) = 0\,(\log r).$$

Für nichtrationales $w(z)$ gilt daher nach dem ersten Hauptsatz $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{N(r, k)}{N(r, k')} = 1$ und weiter $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r, k)}{n(r, k')} = 1$ für beliebige Zahlen k und k'. Das ist im wesentlichen der Inhalt eines Satzes, den Painlevé für die Lösungen von $w'' = z + 6\,w^2$ aussprach. Aus (2) folgt durch n-malige Differentiation nach z

$$w^{(n+2)} = a^{(n)}(z) + b^{(n)}(z)\,w + Q(z, w, w', \ldots, w^{(n)}).$$

Q ist ein Polynom in $z, w, w' \ldots, w^{(n)}$, und jeder Summand enthält mindestens eine der Größen $w', \ldots, w^{(n)}$ als Faktor, so daß in $\frac{1}{w'} Q(z, \ldots, w^{(n)})$ jeder Summand von der Form $A_j(z) \frac{w^{(\mu)}}{w'} w^{p_0} (w')^{p_1} \ldots (w^{(n)})^{p_n}$ ist, $A_j(z)$ ein Polynom, p_α nichtnegative ganze Zahlen und $1 \leq \mu \leq n$. Da für endliche Ordnung von $w(z)$ mit $m(r, w) = 0\,(\log r)$ auch $m(r, w^{(j)}) = 0\,(\log r)$ gilt, folgt $m\left(r, \frac{1}{w'} Q\right) = 0\,(\log r)$. Nach (2) ist, falls $D(z) \not\equiv 0$, $a^{(n)}(z) \not\equiv 0$, wenn n die kleinste Zahl mit $\frac{d^n b}{dz^n} \equiv 0$ ist. Aus

$$\frac{w^{(n+2)}}{w'} = \frac{a^{(n)}(z)}{w'} + \frac{1}{w'} Q(z, w, \ldots, w^{(n)})$$

folgt dann $m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = 0\,(\log r)$ und nach dem ersten Hauptsatz $N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') = 0\,(\log r)$. Beachtet man noch $2\,N(r, w) = 2\,T(r, w) + 0\,(\log r)$, so ist $\sum\limits_1^q m(r, c_j) + N(r, 1/w') - N(r, w') + 2\,N(r, w) = 2\,N(r, w) + 0\,(\log r) = 2\,T(r, w) + 0\,(\log r)$ für alle r richtig, also (4) im Falle $D(z) \not\equiv 0$ für jede Lösung von (2) gültig. Aus $N_1(r, w) = \frac{1}{2} N(r, w)$, $N(r, 1/w') = N(r, w') + 0\,(\log r) = \frac{3}{2} N(r, w) + 0\,(\log r)$ folgt $\vartheta(\infty) = \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{N_1(r, w)}{T(r, w)} = \frac{1}{2}$ und $\Phi_e = \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)} = \frac{3}{2}$, also eine genaue Defektrelation $\Phi_e + \vartheta(\infty) = 2$.

Für den bisher ausgeschlossenen Fall $D(z) \equiv 0$ ist wegen (2) $h(z) \equiv$ const. und $\alpha_0 = 0$ in $(\bar{P}_1)$ notwendig, so daß eine Differentialgleichung $w'' = a + b\,w + 6\,w^2$ mit konstantem a und b vorliegt. Zur Diskussion ihrer Lösungen kann man die Pe-Funktion heranziehen. Man kann aber auch, und das soll der Vollständigkeit halber hier geschehen, die wesentlichsten Eigenschaften der Lösungen unmittelbar der Differentialgleichung entnehmen. Dazu darf man wegen $h(z) \equiv \text{const.}$ von $w'' = a + 6w^2$ bzw. $w'^2 = \alpha + 2aw + 4w^3 = 4(w-e_1)(w-e_2)(w-e_3) = 4w^3 - g_2 w - g_3 = P(w)$ ausgehen. Hat $P(w) = 0$ nur einfache Wurzeln, so folgt für beliebige endliche k aus

$$\left(\frac{w'}{w-k}\right)^2 = 4(w+2k) + \frac{P(k)}{(w-k)^2} + \frac{P'(k)}{w-k} \quad m\left(r, \frac{1}{w-k}\right) = 0(\log r)$$

und daraus in Verbindung mit $2\,m(r, 1/w') \leqq \sum_1^3 m\left(r, \frac{1}{w-e_j}\right) + 0(1)$ $m(r, 1/w') = 0(\log r)$. Die einfachere Form dieser Differentialgleichung gegenüber $(\bar{P}_1)$ mit $\alpha_0 \neq 0$ gestattet eine genauere Analyse der Gesamtverzweigtheit Φ_e im Endlichen. $w'(z)$ verschwindet nur an den e_j-Stellen von $w(z)$, und an allen diesen Stellen wird wegen $w'' = \frac{1}{2}\frac{dP}{dw}\Big|_{w=e_j} \neq 0$ der Wert e_j doppelt angenommen. Zufolge $m(r, e_j) = 0(\log r)$ gilt $N_1(r, e_j) = \frac{1}{2}N(r, e_j) = \frac{1}{2}T(r, w) + 0(\log r)$ oder $\vartheta(e_j) = \frac{1}{2}$, also $\Phi_e = \vartheta(e_1) + \vartheta(e_2) + \vartheta(e_3)$. Falls $k = c$ Doppelwurzel von $P(w) = 0$ ist, also $\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2 = 0$, schließt man nach dem Eindeutigkeitssatz, daß für jede nichtkonstante Lösung von $w'^2 = 4(w-c)^2(w+2c)$ der Wert c PICARDscher Ausnahmewert ist: $\delta(c) = 1$. Wegen $m(r, -2c) = 0(\log r)$ und $N_1(r, -2c) = \frac{1}{2}N(r, -2c)$ gibt der Wert $-2c$ zur Verzweigtheit Φ_e den Beitrag $\vartheta(-2c) = \frac{1}{2}$. Es ist $\Phi_e = \vartheta(-2c)$, da aus $\left(\frac{1}{w'}\right)^2 = \left(\frac{1}{w-c}\right)^2 \frac{1}{4(w+2c)}$ $m(r, 1/w') = m(r, c) + 0(\log r)$ folgt und damit nach dem ersten Hauptsatz $N(r, 1/w') = \frac{3}{2}N(r, w) + m(r, w') - m(r, 1/w') = \frac{1}{2}N(r, w) + 0(\log r) = \frac{1}{2}T(r, w) + 0(\log r)$. Wegen $\vartheta(\infty) = 1/2$ gilt eine genaue Defektrelation $\delta(c) + \vartheta(-2c) + \vartheta(\infty) = 2$. Ohne Benützung der Lösung $w(z) = c - 3c\sin^{-2}(\sqrt{-3c}\cdot z + C)$ von $w'^2 = 4(w-c)^2(w+2c)$ läßt sich weiter noch zeigen, daß $w(z)$ von der Ordnung 1 ist. Da c PICARDscher Ausnahmewert ist, erhält man in $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$ eine ganze transzendente Lösung der Differentialgleichung $g'^2 = 12\,c\,g^2 + 4\,g$. Ist $\nu(r)$ der zu $g(z)$ gehörige Zentralindex, dann folgt wegen $c \neq 0$ aus der Differentialgleichung $\nu(r) = \sqrt{12\,|c|}\,r(1 + h(r))$ und daraus $\log M(r) = K\,r(1 + h(r))$, $0 < K < \infty$, und $h(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Mit $g(z)$ ist aber auch $w(z)$ von der Ordnung 1. Im Falle einer dreifachen Wurzel liegt die Differentialgleichung $w'^2 = 4w^3$ mit dem allgemeinen Integral $w(z) = 1/(z-p)^2$ vor.

5. Zunächst wird in $(\bar{P}_2)$ $\beta_1 \neq 0$ vorausgesetzt. Nach 3. ist für jede Lösung $w(z)$ von (3) $m(r, w) = 0(\log r)$. Ist k wieder eine beliebige endliche komplexe Zahl, so folgt aus $w'' = D(z) + b(z)(w-k) + c(z)(w^2-k^2) + 2(w^3-k^3)$ mit $D(z) = a(z) + b(z)k + c(z)k^2 + 2k^3$ $m\left(r, \frac{1}{w-k}\right) = 0(\log r)$, falls $D(z) \not\equiv 0$. Diese Bedingung ist für $h(z) \not\equiv \text{const.}$ wegen $(\bar{3})$ sicher erfüllt. Jede Lösung

ist also frei von defekten Werten, und für beliebige Werte k und k' gilt $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r,k)}{n(r,k')} = 1$. n-malige Differentiation von (3) nach z führt zu

$$w^{(n+2)} = a^{(n)}(z) + b^{(n)}(z)\, w + c^{(n)}(z)\, w^2 + Q(z, w, w', \ldots, w^{(n)}),$$

und bei $h(z) \not\equiv$ const. läßt sich nach $(\bar{3})$ n so wählen, daß $b^{(n)}(z) \equiv c^{(n)}(z) \equiv 0$, aber $a^{(n)}(z) \not\equiv 0$ gilt. Dann folgt wie in 4. $m(r, 1/w') = 0(\log r)$, also wegen $N(r, 1/w') = N(r, w') + 0(\log r) = 2\,N(r, w) + 0(\log r) = 2\,T(r, w) + 0(\log r)$ $\Phi_e = 2$ und (4). Ist $h(z) \equiv$ const., so ist für $\alpha_0 \neq 0$ noch $D(z) \not\equiv 0$ für alle k. Dann erhält man aus $\frac{w'''}{w'} = \beta_1 \frac{w-h}{w'} + (b + 2\,c\,w + 6\,w^2)$ $m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) = 0(\log r)$ und zusammen mit $m(r, 1/w') \leqq m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) + m(r, 1/w-h) + 0(1)$ wieder $m(r, 1/w') = 0(\log r)$. $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r,k)}{n(r,k')} = 1$, $\Phi_e = 2$ und (4) sind also ausnahmslos für $\beta_1 \neq 0$ und $\alpha_0 \neq 0$ gültig. Im Falle $\alpha_0 = 0$ verschwindet $D(z)$ identisch nur für $h = k$. Dann kann man nicht mehr in der angegebenen Art auf $m(r, 1/w-h) = 0(\log r)$ schließen. Da auch in diesem Falle die Beziehung $m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) = 0(\log r)$ richtig bleibt, erhält man zusammen mit $m(r, 1/w-h) \leqq m(r, 1/w') + C\log r$ $m(r, 1/w') = m(r, 1/w-h) + 0(\log r)$, also (4). Die Funktion $u(z) = w(z) - h$ genügt den Gleichungen $u'' = (\beta_1 z + \beta_0)\,u + 2\,u^3$ und $u'^2 = (\beta_1 z + \beta_0)\,u^2 + u^4 - \beta_1 F(z)$, $F'(z) = u^2$. Aus $\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = (\beta_1 z + \beta_0) - \beta_1 \frac{F(z)}{F'(z)} + u^2$ entnimmt man wegen $\beta_1 \neq 0$ $m(r, F/F') = 0(\log r)$ und daraus weiter $m(r, 1/F) = m(r, 1/F') + 0(\log r) = 2\,m(r, 1/u) + 0(\log r)$. Da aus $m(r, F) = 0(\log r)$ und $N(r, F) = N(r, u)$ nach dem ersten Hauptsatz $T(r, F) = T(r, u) + 0(\log r)$ folgt, bekommt man $2\,\delta(0, u) = \delta(0, F) \leqq 1$, also $0 \leqq \delta(0, u) \leqq \frac{1}{2}$. Der für $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, $h = k$ mögliche Defekt $\delta(h, w)$ kann mithin höchstens gleich 1/2 sein. Dabei bleibt hier unentschieden, ob überhaupt $\delta(h, w) > 0$ zutreffen kann. In dem noch ausstehenden Falle $\beta_1 = 0$ darf man sich auf $w'' = \alpha_0 + \beta_0 w + 2\,w^3 = Q(w)$ bzw. $w'^2 = \alpha + 2\,\alpha_0\,w + \beta_0 \cdot w^2 + w^4 = P(w)$ beschränken. Je nach Wahl der Anfangsbedingungen in $w'' = Q(w)$ erhält man Lösungen von verschiedenem Wertverteilungsverhalten. Ist für beliebiges endliches $k = c$ nicht gleichzeitig $P(c) = 0$, $P'(c) = 0$, so folgt aus $w'^2 = P(c) + P'(c)\,(w-c) + \cdots + (w-c)^4$ wie in 4. $m(r, 1/w-c) = 0(\log r)$ und $m(r, 1/w') = 0(\log r)$. Sind dann c_j die vier verschiedenen Wurzeln von $P(w) = 0$, so gilt zufolge $N_1(r, c_j) = \frac{1}{2}\,T(r, w) + 0(\log r)$ $\vartheta(c_j) = 1/2$, $j = 1, \ldots, 4$. Hat $P(w) = 0$ genau eine Doppelwurzel, also $w'^2 = (w-c)^2 (w-c_3)(w-c_4)$, so muß nach dem Eindeutigkeitssatz für nichtkonstantes $w(z)$ der Wert c Picardscher Ausnahmewert sein. c_3, c_4 sind Normalwerte mit $N_1(r, c_j) = \frac{1}{2}\,T(r, w) + 0(\log r)$, also $\vartheta(c_3) = \vartheta(c_4) = 1/2$. (4) ist wegen $m(r, 1/w') = m(r, 1/w-c) + 0(\log r)$ erfüllt. Die Ordnung der Lösungen ergibt sich wie in 4. auf dem Wege über den Zentralindex zu 1. Ist noch $c_3 = c_4 = c'$, so sind, falls $w(z)$ eine transzendente Lösung ist, beide Werte c und c' Picardsche Ausnahmewerte. Aus der Differentialgleichung folgt $m(r, 1/w') = m(r, c) + m(r, c') + 0(\log r)$. $w(z)$ ist, wie das Anwachsen des Zentralindex von $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$ zeigt, von der Ordnung 1. Damit sind alle transzendenten Lösungen der Differentialgleichung erfaßt. Hätte nämlich $w'^2 = (w-c)^3\,(w-c')$ bzw. $w'^2 = w^4$ eine transzendente Lösung, so müßte, da c bzw. 0 PICARDscher Ausnahmewert wäre, $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$ bzw. $g(z) = 1/w(z)$ ganze transzendente Lösung der Differentialgleichung $v'^2 = 1 + (c-c')\,v$ bzw. $v'^2 = 1$ sein, was unmöglich ist.

Zusammenfassung.

Jede Lösung der Differentialgleichungen (2) und (3), deren Koeffizienten den Bedingungen $(\bar{2})$ und $(\bar{3})$ genügen, ist in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch, von endlicher Wachstumsordnung und erfüllt die Beziehung (4). Für nichtkonstante Koeffizienten $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ gilt, wenn man von dem unerledigten Fall $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ absieht:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,k)}{n(r,k')} = 1 \quad \text{für beliebige komplexe Zahlen } k \text{ und } k'. \tag{6}$$

Der Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit $\Phi = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T(r,w)}$ ist stets gleich 2.

Geht man für konstante Koeffizienten zu $w'^2 = P_3(w)$ bzw. $w'^2 = P_4(w)$ über, so gelten die folgenden Verzweigungseigenschaften

$P_3 = 4\,(w-e_1)\,(w-e_2)\,(w-e_3)$	$\Phi = \Phi_e + \vartheta(\infty) = \sum_1^3 \vartheta(e_j) + \vartheta(\infty) = 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ (6) für bel. k und k'.
$= 4\,(w-c)^2\,(w+2c)$	$\Phi = \Phi_e + \vartheta(\infty) = \vartheta(-2c) + \vartheta(\infty) = 2\cdot\frac{1}{2}$ $\delta(c) = 1$.
$= 4\,w^3$	Keine transzendenten Lösungen.
$P_4 = (w-c_1)\ldots(w-c_4)$	$\Phi = \Phi_e = \sum_1^4 \vartheta(c_j) = 4\cdot\frac{1}{2}$, (6) für bel. k, k'.
$P_4 = (w-c)^2\,(w-c_3)\,(w-c_4)$	$\Phi = \Phi_e = \vartheta(c_3) + \vartheta(c_4) = 2\cdot\frac{1}{2}$, $\delta(c) = 1$.
$P_4 = (w-c)^2\,(w-c')^2$	$\Phi = \Phi_e = 0$, $\delta(c) = \delta(c') = 1$.
$\left.\begin{array}{l} P_4 = (w-c)^3\,(w-c') \\ P_4 = w^4 \end{array}\right\}$	Keine transzendenten Lösungen.

6. Sind in der RICCATIschen Differentialgleichung $w' = a(z) + b(z)\,w + w^2$ die Koeffizienten $a(z)$, $b(z)$ Polynome, so ist jede Lösung $w(z)$ in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch und von endlicher Ordnung. Das ersieht man aus der zugeordneten Gleichung $u'' - b(z)\,u' + a(z)\,u = 0$ mit $w = -u'/u$. Die Ordnungsbeschränkung kann man aber auch mit der in 3. benützten Methode beweisen. Dazu bildet man $w'^2 = a^2(z) + \cdots + w^4$ und beachtet $\frac{|w|^j}{(1+|w|^2)^2} \leqq 1$. Man erhält $T(r,w) < A\,r^p + B$ mit $p = 2 + 2\,\mathrm{Max}(\alpha,\beta)$, wenn α, β die Grade von $a(z)$, $b(z)$ sind. Wie bei (2), (3) gestattet auch die RICCATIsche Differentialgleichung den Beweis der Beziehung $m(r, 1/w') < \sum_1^q m(r, c_j) + C\log r$, so daß (4) gilt. Auch die wichtige Klasse der linearen

Differentialgleichungen $w^{(m)} + a_{m-1}(z)\, w^{(m-1)} + \cdots + a_1(z)\, w' + a_0(z)\, w = 0$, $a_0(z) \not\equiv 0$, mit rationalen Koeffizienten ermöglicht, da jede in $|z| < \infty$ eindeutige Lösung von endlicher Ordnung ist, den Beweis der Beziehungen $m(r, 1/w') = m(r, 1/w) + 0(\log r)$ und $m(r, w') = m(r, w) + 0(\log r)$[6]. In diesen Fällen gestattet allein die Form der Differentialgleichung in Verbindung mit einer groben Aussage über das Anwachsen der Lösungen den Schluß auf die Gültigkeit von (4). Danach ist es nicht überraschend, daß kein Beispiel einer transzendenten Funktion bekannt ist, wo $m(r, w) \sim m(r, w')$ und $m(r, 1/w') \sim \sum_{j=1}^{q} m(r, 1/w - c_j)$ nicht streng gilt. Genügen doch viele der bekannten Funktionen (bekannt in dem Sinne, daß sie eine Berechnung der in Frage kommenden Wertverteilungsgrößen zulassen) gerade gewöhnlichen Differentialgleichungen der erwähnten Bauart.

Die Lösungen von $w' = a + b\, w + w^2$, (2), (3) und von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten sind, wenn man in erster Linie an das Auftreten defekter Werte denkt, nicht besonders interessant, da für die ersten nur in wenigen Ausnahmefällen defekte Werte vorkommen und bei letzteren neben $w = \infty$ mit $\delta(\infty) = 1$ höchstens noch $w = 0$ einen positiven Defekt haben kann. Unter den Lösungen von $w' = a + b\, w + w^2$ gibt es keine, die einen positiven Index der algebraischen Verzweigtheit besitzt, eine Eigenschaft, die auch noch in großem Umfange für (2) (von $\vartheta(\infty) = 1/2$ abgesehen) und (3) gelten dürfte. Es ist zu erwarten, daß diese Funktionen für den Zusammenhang zwischen Wachstumsordnung und Flächenbau von Interesse sind.

[6]) Wittich, H.: Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **124**, 277—288 (1952).

(Eingegangen am 4. Juli 1952.)